Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Teoria de Conjuntos e Funções —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2023

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Conjuntos —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2023

Definição de conjuntos

Conjunto

Coleção "**bem-definida**" (e não-ordenada) de objetos.

Conjunto

Coleção "**bem-definida**" (e não-ordenada) de objetos.

Elemento

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

Conjunto

Coleção "**bem-definida**" (e não-ordenada) de objetos.

Elemento

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

Notação

Letras maiúsculas são, em geral, usadas para denotar conjuntos, e minúsculas para denotar elementos destes conjuntos.

Definição de conjuntos

Conjunto

Coleção "**bem-definida**" (e não-ordenada) de objetos.

Elemento

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

Notação

$a \in A$ o elemento "a" pertence ao conjunto "A"

Definição de conjuntos

Conjunto

Coleção "**bem-definida**" (e não-ordenada) de objetos.

Elemento

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

Notação

$a \in A$	o elemento "a" pertence ao conjunto "A"
$a \notin A$	o elemento "a" não pertence ao conjunto "A"

Definição de conjuntos

Conjunto

Coleção "**bem-definida**" (e não-ordenada) de objetos.

Elemento

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

Notação

$$A = \{\text{melão, laranja, morango}\}$$

Definição de conjuntos

Conjunto

Coleção "**bem-definida**" (e não-ordenada) de objetos.

Elemento

Cada objeto do conjunto é denominado de elemento ou membro.

Notação

A = {melão, laranja, morango}

melão $\in A$	uva $\notin A$

Finito *Conjunto dos livros da biblioteca*

Exemplos de Conjuntos

Finito *Conjunto dos livros da biblioteca*

Finito *Conjunto S de 2 elementos formados das vogais e dígitos*

vogais $X = \{a, e, i, o, u\}$
dígitos $Y = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
$S = \{X, Y\} = \{\{a, e, i, o, u\}, \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$

Exemplos de Conjuntos

Finito *Conjunto dos livros da biblioteca*

Finito *Conjunto S de 2 elementos formados das vogais e dígitos*

vogais $X = \{a, e, i, o, u\}$
dígitos $Y = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
$S = \{X, Y\} = \{\{a, e, i, o, u\}, \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$

Infinito *Conjunto dos números naturais*

Exemplos de Conjuntos

Finito *Conjunto dos livros da biblioteca*

Finito *Conjunto S de 2 elementos formados das vogais e dígitos*

vogais $X = \{a, e, i, o, u\}$
dígitos $Y = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
$S = \{X, Y\} = \{\{a, e, i, o, u\}, \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$

Infinito *Conjunto dos números naturais*

Conjunto vazio *Conjunto dos dinossauros vivos ($\{\}$ ou $\emptyset$)*

Formas para definir conjuntos

Chaves *Listar os elementos do conjunto entre chaves*

$$\{ovo, carne, macarrão\} \qquad \{1, 2, 3, \ldots, 50\} \qquad \{lua, \pi, 1\}$$

Formas para definir conjuntos

Chaves *Listar os elementos do conjunto entre chaves*

$$\{ovo, carne, macarrão\} \qquad \{1, 2, 3, \ldots, 50\} \qquad \{lua, \pi, 1\}$$

Sobre a representação dos conjuntos

- A ordem em que os elementos são listados é irrelevante
- A repetição dos elementos é irrelevante

Formas para definir conjuntos

Chaves *Listar os elementos do conjunto entre chaves*

$$\{ovo, carne, macarrão\} \qquad \{1, 2, 3, \ldots, 50\} \qquad \{lua, \pi, 1\}$$

Propriedade *Especificar uma propriedade para definir um conjunto, como* $S = \{x \mid P(x)\}$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\} \qquad \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x \leq 47\}$$

Formas para definir conjuntos

Chaves *Listar os elementos do conjunto entre chaves*

$$\{ovo, carne, macarrão\} \qquad \{1, 2, 3, \ldots, 50\} \qquad \{lua, \pi, 1\}$$

Propriedade *Especificar uma propriedade para definir um conjunto, como* $S = \{x \mid P(x)\}$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\} \qquad \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x \leq 47\}$$

Recursão *Especificar um conjunto por meio de uma função recursiva*

$$\begin{cases} 1 \in A \\ \text{se } x \in A \text{ e } x + 3 < 11, \text{ então } x + 3 \in A. \end{cases}$$

Formas para definir conjuntos

Chaves *Listar os elementos do conjunto entre chaves*

$$\{ovo, carne, macarrão\} \qquad \{1, 2, 3, \ldots, 50\} \qquad \{lua, \pi, 1\}$$

Propriedade *Especificar uma propriedade para definir um conjunto, como $S = \{x \mid P(x)\}$*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\} \qquad \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x \leq 47\}$$

Recursão *Especificar um conjunto por meio de uma função recursiva*

$$\begin{cases} 1 \in A \\ se\ x \in A \text{ e } x + 3 < 11, \text{ então } x + 3 \in A. \end{cases}$$

Característica *Especificar por meio de uma função característica*

$$A = \begin{cases} 1, & se\ x = 0, 2, 4, 6, 8 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Exemplos de conjuntos importantes

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ é o conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ é o conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ é o conjunto dos números inteiros positivos

$\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos números reais positivos

$\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos

Igualdade de conjuntos

$$A = B$$

Dois conjuntos são ditos **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos

Igualdade de conjuntos

$A = B$

Dois conjuntos são ditos **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos

Formalmente, $A = B$ significa

$$(\forall x)[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

ou

$$A = B \leftrightarrow \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Igualdade de conjuntos

$A = B$

Dois conjuntos são ditos **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos

Formalmente, $A = B$ significa

$$(\forall x)[(x \in A \to x \in B) \land (x \in B \to x \in A)]$$

ou

$$A = B \leftrightarrow \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

A DEFINIÇÃO DE IGUALDADE DE CONJUNTO IMPLICA EM

$$\{a, b, c, d\} = \{d, a, c, b\}$$
$$\{a, a, a, a, b, b, b, b, c, d\} = \{d, a, c, b\}$$

Subconjuntos

$A \subseteq B$

O conjunto A é dito um **subconjunto** de B sse todo elemento de A é também um elemento de B.

$A \subseteq B$

O conjunto A é dito um **subconjunto** de B sse todo elemento de A é também um elemento de B.

Formalmente, $A \subseteq B$ significa

$$\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Subconjuntos

$A \subseteq B$

O conjunto A é dito um **subconjunto** de B sse todo elemento de A é também um elemento de B.

Formalmente, $A \subseteq B$ significa

$$\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$A \subset B$

A é um **subconjunto próprio** de B sse cada elemento de A estiver em B e pelo menos um elemento de B não está em A.

Formalmente, $A \subset B$ significa

$$\begin{array}{cccccc} A \subset B & \leftrightarrow & \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B) & \wedge & \exists x : (x \in B \wedge x \notin A) \\ & \leftrightarrow & A \subseteq B & \wedge & A \neq B \end{array}$$

Subconjuntos

$A \subseteq B$

O conjunto A é dito um **subconjunto** de B sse todo elemento de A é também um elemento de B.

Formalmente, $A \subseteq B$ significa

$$\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)$$

A está contido em B e B contêm A são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B.

- O conjunto dos naturais é um subconjunto dos interios
- O conjunto dos seres humanos contêm um subconjunto de pessoas do sexo masculino
- O subconjunto de pessoas do sexo feminino está contido no conjunto dos seres humanos.

Subconjuntos

Exemplo 1

$$A = \{1, 7, 9, 15\} \quad B = \{7, 9\} \quad C = \{7, 9, 15, 20\}$$

Diga se as sentenças são verdadeiras ou falsas (e justifique)

$$\begin{array}{cc} B \subseteq C & 15 \in C \\ B \subseteq A & \{7, 9\} \subseteq B \\ B \subset A & \{7\} \subset A \\ A \not\subset C & \emptyset \subseteq C \end{array}$$

Subconjuntos

Exemplo 1

$$A = \{1, 7, 9, 15\} \quad B = \{7, 9\} \quad C = \{7, 9, 15, 20\}$$

Diga se as sentenças são verdadeiras ou falsas (e justifique)

$$\begin{array}{cc} B \subseteq C & 15 \in C \\ B \subseteq A & \{7, 9\} \subseteq B \\ B \subset A & \{7\} \subset A \\ A \not\subset C & \emptyset \subseteq C \end{array}$$

Todas são verdadeiras!!!

Exemplo 1

$$A = \{1, 7, 9, 15\} \quad B = \{7, 9\} \quad C = \{7, 9, 15, 20\}$$

Diga se as sentenças são verdadeiras ou falsas (e justifique)

$$\begin{array}{cc} B \subseteq C & 15 \in C \\ B \subseteq A & \{7, 9\} \subseteq B \\ B \subset A & \{7\} \subset A \\ A \not\subset C & \emptyset \subseteq C \end{array}$$

O conjunto Vazio é um subconjunto de todo conjunto

Subconjuntos

Conjuntos podem ter outros conjuntos

$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ $\quad$ $B = \{x \mid x \text{ é um subconjunto de } \{a, b\}\}$

$A = B$?

Conjuntos podem ter outros conjuntos

$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ $\qquad$ $B = \{x \mid x \text{ é um subconjunto de } \{a, b\}\}$

$A = B$?

Quais são os subconjuntos de $\{a, b\}$?

Conjuntos podem ter outros conjuntos

$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ $B = \{x \mid x \text{ é um subconjunto de } \{a, b\}\}$

$A = B$?

Quais são os subconjuntos de $\{a, b\}$?

$\emptyset \quad \{a\} \quad \{b\} \quad \{a, b\}$

Logo, A=B pois todo elemento de A está em B e vice-versa!!!

Subconjuntos

Conjuntos podem ter outros conjuntos

A é um conjunto $\qquad B = \{A, \{A\}\}$

$A \subseteq B$?

Subconjuntos

Conjuntos podem ter outros conjuntos

A é um conjunto $\qquad B = \{A, \{A\}\}$

$A \subseteq B$?

$$A \in B \quad \text{e} \quad \{A\} \in B$$
$$\{A\} \subseteq B \quad \text{e} \quad \{\{A\}\} \subseteq B$$

Como A é um elemento de B, portanto A não é um subconjunto de B. Então não é verdade que $A \subseteq B$!!!

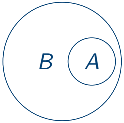
Diagramas de Venn

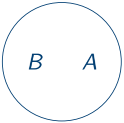
Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.

$$A \subseteq B$$

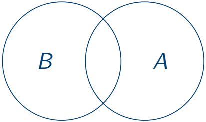
Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.

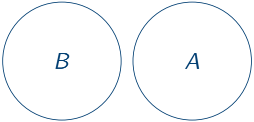
$$A \subseteq B$$





$$A \not\subseteq B$$





Conjunto potência

Dado um conjunto A, o **conjunto potência** de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Exemplo 2

Seja $A = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Conjunto potência

Dado um conjunto A, o **conjunto potência** de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

Exemplo 2

Seja $A = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Exemplo 3

Seja A o conjunto vazio $\emptyset$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$$

Sequências

Como os conjuntos **não são ordenados**, uma estrutura diferente é necessária para representar coleções ordenadas.

Sequência

- Uma **sequência** é uma lista de objetos em ordem.
  - um "primeiro elemento", um "segundo elemento",...
  - a lista pode ser finita ou não

Sequências

Como os conjuntos **não são ordenados**, uma estrutura diferente é necessária para representar coleções ordenadas.

Sequência

- Uma **sequência** é uma lista de objetos em ordem.
  - um "primeiro elemento", um "segundo elemento",...
  - a lista pode ser finita ou não

Exemplos

- 1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1
- 1,4,9,16,25,... ("quadrados dos números positivos") é infinita
- A sequência finita 1,2,4,...,256 pode ser denotada por $(2^n)_{0 \leq n \leq 8}$

Cardinalidade de conjuntos

Um conjunto é dito **contável** se for o conjunto correspondente a alguma sequência.

- Os elementos do conjunto podem ser arranjados em uma lista ordenada, a qual pode, portanto, ser contada.
- Todos os conjuntos finitos são contáveis.
- Um conjunto que não é contável é dito **incontável**.

Cardinalidade de conjuntos

Um conjunto é dito **contável** se for o conjunto correspondente a alguma sequência.

- Os elementos do conjunto podem ser arranjados em uma lista ordenada, a qual pode, portanto, ser contada.
- Todos os conjuntos finitos são contáveis.
- Um conjunto que não é contável é dito **incontável**.

Cardinalidade de X *número de elementos em um conjunto X. A cardinalidade de X é denotado por $|X|$*

$$|\{2, 5, 7\}| = 3$$

Emparelhamento

Para que dois conjuntos X e Y possuam a mesma cardinalidade:

- emparelhamento de cada x em X com apenas um y em Y
- cada elemento de Y seja usado apenas uma vez neste emparelhamento

Emparelhamento

Para que dois conjuntos X e Y possuam a mesma cardinalidade:

- emparelhamento de cada x em X com apenas um y em Y
- cada elemento de Y seja usado apenas uma vez neste emparelhamento

Exemplo 4

$$X = \{2, 5, 7\} \qquad \text{e} \qquad Y = \{?, !, \#\}$$

Emparelhamento

Para que dois conjuntos X e Y possuam a mesma cardinalidade:

- emparelhamento de cada x em X com apenas um y em Y
- cada elemento de Y seja usado apenas uma vez neste emparelhamento

Exemplo 4

$$X = \{2, 5, 7\} \qquad \text{e} \qquad Y = \{?, !, \#\}$$

$$2 \leftrightarrow ?, \qquad 5 \leftrightarrow \#, \qquad 7 \leftrightarrow !$$

Emparelhamento

Para que dois conjuntos X e Y possuam a mesma cardinalidade:

- emparelhamento de cada x em X com apenas um y em Y
- cada elemento de Y seja usado apenas uma vez neste emparelhamento

Exemplo 4

$$X = \{2, 5, 7\} \qquad \text{e} \qquad Y = \{?, !, \#\}$$

$$2 \leftrightarrow ?, \qquad 5 \leftrightarrow \#, \qquad 7 \leftrightarrow !$$

O emparelhamento mostra que ambos os conjuntos possuem a mesma cardinalidade.

Produto cartesiano

O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$, ou seja:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Produto cartesiano

O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$, ou seja:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplo 5

Qual é o produto de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

Produto cartesiano

O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$, ou seja:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplo 5

Qual é o produto de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

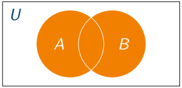
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Conjunto universo

Conjunto que contêm "todas as coisas", denominado U, que contêm todos os objetos para os quais a discussão faz sentido

Conjunto universal

União	$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
	$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
Notação	$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$



Operações sobre conjuntos

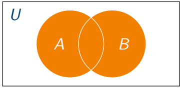
União

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Notação

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$



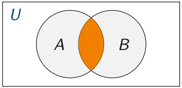
Interseção

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Notação

$$\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$



Operações sobre conjuntos

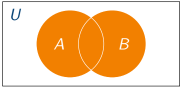
União

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \lor x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \lor x \in B$$

Notação

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$



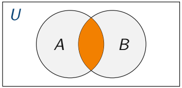
Interseção

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \land x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \land x \in B$$

Notação

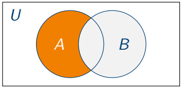
$$\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$



Diferença

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \lor x \notin B\}$$

$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \lor x \in B$$



Operações sobre conjuntos

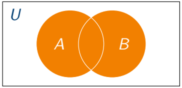
União

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \lor x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \lor x \in B$$

Notação

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$



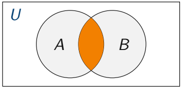
Interseção

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \land x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \land x \in B$$

Notação

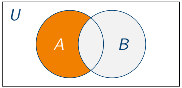
$$\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$



Diferença

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \lor x \notin B\}$$

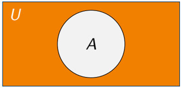
$$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \lor x \in B$$



Complemento

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

$$x \in \overline{A} \leftrightarrow x \notin A$$



Identidades de conjuntos

Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associatidade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributividade	$(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$
União e intersecção com U	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Complemento duplo	$\overline{\overline{A}} = A$	
Idempotência	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
De Morgan	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Absorção	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Diferença de conjuntos	$A - B = A \cap \overline{B}$	
União e interseção com $\emptyset$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
União e interseção com o complemento	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \cup \overline{A} = U$
Complementos de U e $\emptyset$	$\overline{U} = \emptyset$	$U = \overline{\emptyset}$

Conjuntos disjuntos

Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum

$$\text{A e B são disjuntos} \qquad \leftrightarrow \qquad A \cap B = \emptyset$$

Conjuntos disjuntos

Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum

$$\text{A e B são disjuntos} \qquad \leftrightarrow \qquad A \cap B = \emptyset$$

Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados **mutuamente disjuntos** (ou disjuntos par-a-par) se e somente se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $i \neq j$.

Conjuntos disjuntos

Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum

$$\text{A e B são disjuntos} \qquad \leftrightarrow \qquad A \cap B = \emptyset$$

Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados **mutuamente disjuntos** (ou disjuntos par-a-par) se e somente se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $i \neq j$.

Partição

Seja uma coleção de conjuntos não vazios $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é uma **partição** sse

- $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são mutuamente disjuntos

Questions?

Teoria de Conjuntos e Funções
– Conjuntos –

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Funções —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2023

Funções: uma introdução

Funções são associações de cada elemento de um conjunto a um elemento particular de outro conjunto.

$$f(a) = b$$

Sequências são listas ordenadas de elementos.

$$0, 1, 2, 3, 4, ..$$

Somatórios e produtórios são a soma e o produto, respectivamente, dos termos de uma sequência numérica.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

Funções: uma introdução

Frequentemente temos que associar cada elemento de um conjunto a um elemento particular de outro conjunto.
Por exemplo, podemos:

1. Associar cada aluno de Grafos a um conceito A, B, C, D, E ou F.
2. Associar cada inteiro ao seu quadrado.
3. Associar cada professor a uma disciplina.

O conceito de função formaliza este tipo de associação.

Funções: uma introdução

Frequentemente temos que associar cada elemento de um conjunto a um elemento particular de outro conjunto.
Por exemplo, podemos:

1. Associar cada aluno de Grafos a um conceito A, B, C, D, E ou F.
2. Associar cada inteiro ao seu quadrado.
3. Associar cada professor a uma disciplina.

O conceito de função formaliza este tipo de associação.

Sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma função f de A para B é uma associação de exatamente um elemento de B a cada elemento de A.

$$f(a) = b$$

se b for o único elemento de B associado por meio de f ao elemento a de A.

Funções: uma introdução

Se f é uma função de A para B, para denotar o tipo da função, a função pode ser escrita como

$$f : A \mapsto B$$

domínio *o conjunto A é chamado de domínio de f.*

contra-domínio *o conjunto B é chamado de co-domínio ou contra-domínio de f.*

imagem *a imagem de f é o conjunto de valores que f pode assumir*

$$\text{imagem de } f = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}$$

imagem inversa *a imagem inversa (ou inversa) de um elemento $b \in B$ é o conjunto de valores de $a \in A$ que são mapeados a b via f*

$$\text{inversa de } b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Exemplo 6

Sejam os conjuntos $A = \{x, y, x\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$
Seja a função $f : A \mapsto B$ definida como:

$$f(x) = 2 \quad f(y) = 4 \quad f(z) = 2$$

domínio $\{x, y, z\}$

contra-domínio $\{1, 2, 3, 4\}$

imagem $\{2, 4\}$

inversa *de 1 e 3 é* $\emptyset$

inversa *de 2 é* $\{x, z\}$

inversa *de 4 é* $\{y\}$

A função f pode ser representada como o conjunto de **pares ordenados**:

$$f = \{(x, 2), (y, 4), (z, 2)\}$$

Exemplos de funções

Exemplo 7

Alguns exemplos

- Função quadrado f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 \text{ ou } f : x \;\mapsto\; x^2$$

- Função sucessor f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(x) = x + 1 \text{ ou } f : x \;\mapsto\; x + 1$$

- Função constante f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(r) = 2 \text{ ou } f : r \;\mapsto\; 2$$

- Função pai f: $P \;\to\; P$, em que P é o conjunto de todas as pessoas

$$f \;:\; p \;\mapsto\; p', \text{ em que p' é o pai de p}$$

Igualdade de funções

Duas funções f e g funções são iguais sse elas:

- têm o mesmo domínio
- têm o mesmo contra-domínio
- mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do contra-domínio.

Formalmente, para duas funções f e g definidas em $A \to B$:

$$f = g \text{ sse } \forall a \in A : f(a) = g(a)$$

Igualdade de funções

Duas funções f e g funções são **iguais** sse elas:

- têm o mesmo domínio
- têm o mesmo contra-domínio
- mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do contra-domínio.

Formalmente, para duas funções f e g definidas em $A \to B$:

$$f = g \text{ sse } \forall a \in A : f(a) = g(a)$$

Exemplo 8

Sejam $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$. Então, $f = g$ uma vez que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Função injetora

Uma função $f : A \to B$ é uma função injetora (ou injetiva ou um-para-um) se e somente se para todos $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \neq a_2 \quad \to \quad f(a_1) \neq f(a_2)$$

Uma função é dita injetora se cada elemento do domínio é mapeado para uma elemento diferente do contra-domínio.

Função injetora

Uma função $f : A \to B$ é uma função injetora (ou injetiva ou um-para-um) se e somente se para todos $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \neq a_2 \quad \to \quad f(a_1) \neq f(a_2)$$

Uma função é dita injetora se cada elemento do domínio é mapeado para uma elemento diferente do contra-domínio.

Exemplo 9

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{array}{lr} f(x) = x + 1 & \text{(injetora)} \\ f(x) = \frac{x}{10} & \text{(injetora)} \\ f(x) = x^2 & \text{(não é injetora)} \\ f(x) = (x-1)(x-2) & \text{(não é injetora)} \end{array}$$

Função sobrejetora

Uma função $f : A \to B$ é uma função sobrejetora (ou sobrejetiva) se e somente se para todo $b \in B$ há $a \in A$ de forma que $f(a) = b$

Uma função é dita sobrejetora se cada elemento do contra-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.

Função sobrejetora

Uma função $f : A \to B$ é uma função sobrejetora (ou sobrejetiva) se e somente se para todo $b \in B$ há $a \in A$ de forma que $f(a) = b$

Uma função é dita sobrejetora se cada elemento do contra-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.

Exemplo 10

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então,

$$
\begin{array}{lr}
f(x) = x + 1 & \text{(sobrejetora)} \\
f(x) = \frac{x}{10} & \text{(sobrejetora)} \\
f(x) = x^2 & \text{(não é sobrejetora)} \\
f(x) = 2^x & \text{(não é sobrejetora)}
\end{array}
$$

Função bijetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetora se e somente se ele é sobrejetora e injetora.

Função bijetora

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetora se e somente se ele é sobrejetora e injetora.

Exemplo 11

Seja $f\ :\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então,

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = x + 1 & \text{(bijetora)} \\
f(x) = \frac{x}{10} & \text{(bijetora)} \\
f(x) = 2^x & \text{(não é bijetora)} \\
f(x) = (x-1)(x-2) & \text{(não é bijetora)}
\end{array}
$$

Função inversa

Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma função bijetora. A **função inversa** de f, denotada por $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \text{ sse } y = f(x)$$

Função inversa

Uma função $f : A \to B$ é uma função bijetora. A **função inversa** de f, denotada por $f^{-1} : B \to A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \text{ sse } y = f(x)$$

Exemplo 12

A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(x) = x + 1$ é inversível porque ela é bijetora. Sua inversa

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

Função inversa

Uma função $f : A \to B$ é uma função bijetora. A **função inversa** de f, denotada por $f^{-1} : B \to A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \text{ sse } y = f(x)$$

Exemplo 12

A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(x) = x + 1$ é inversível porque ela é bijetora. Sua inversa

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

Exemplo 13

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ não é inversível porque ela não é bijetora: $f(1) = f(-1) = 1$, logo f^{-1} não é definido.

Composição de funções

Sejam $g : A \to B'$ e $f : B \to C$ funções tais que a imagem de g é um subconjunto do domínio de f ($B' \subseteq B$).

A função composta de f com g, denotada por $f \circ g : A \to C$, é definida para todo $a \in A$ da seguinte forma:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

A função $f \circ g$ é chamada de composição de f e g.

Exemplo 14

Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que $f(n) = n+1$ e $g(n) = n^2$

$$f \circ g = g \circ f?$$

Composição de funções

Exemplo 14

Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que $f(n) = n+1$ e $g(n) = n^2$

$$f \circ g = g \circ f?$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1$$

no entanto,

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2$$

Portanto,

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Composição de funções

Exemplo 14

Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que $f(n) = n+1$ e $g(n) = n^2$

$$f \circ g = g \circ f?$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1$$

no entanto,

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2$$

Portanto,

$$f \circ g \neq g \circ f$$

A composição não é comutativa

Composição de funções

Dado um domínio A, a **função identidade** $I_A : A \to A$ é definida por

$$I_A(a) = a, \quad \forall a \in A$$

Composição de funções

Dado um domínio A, a **função identidade** $I_A : A \to A$ é definida por

$$I_A(a) = a, \quad \forall a \in A$$

Teorema Se f é uma função de X para Y. Sejam I_X uma função identidade de X e I_Y uma função identidade de Y.

$$f \circ I_X = f$$
$$I_Y \circ f = f$$

Composição de funções

Dado um domínio A, a **função identidade** $I_A : A \to A$ é definida por

$$I_A(a) = a, \quad \forall a \in A$$

Teorema Se f é uma função de X para Y. Sejam I_X uma função identidade de X e I_Y uma função identidade de Y.

$$f \circ I_X = f$$
$$I_Y \circ f = f$$

Teorema Se $f : X \to Y$ é uma função bijetora com função inversa definida por $f^{-1} : Y \to X$, então

$$f^{-1} \circ f = I_X$$
$$f \circ f^{-1} = I_Y$$

Propriedades

Teorema Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções injetoras, então

$$g \circ f \quad \text{é injetora}$$

Propriedades

Teorema Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções injetoras, então

$$g \circ f \quad \text{é injetora}$$

Teorema Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções sobrejetoras, então

$$g \circ f \quad \text{é sobrejetora}$$

Funções piso e teto

A função piso (em inglês, *floor*) associa um número real x ao maior número inteiro menor ou igual a ele.

O valor da função piso é denotado por $\lfloor x \rfloor$

A função teto (em inglês, *ceiling*) associa um número real x ao menor número inteiro maior ou igual a ele.

O valor da função teto é denotado por $\lceil x \rceil$

Ambas as funções (piso e teto) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Funções piso e teto

A função piso (em inglês, *floor*) associa um número real x ao maior número inteiro menor ou igual a ele.

O valor da função piso é denotado por $\lfloor x \rfloor$

A função teto (em inglês, *ceiling*) associa um número real x ao menor número inteiro maior ou igual a ele.

O valor da função teto é denotado por $\lceil x \rceil$

Ambas as funções (piso e teto) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

Exemplo 15

- $\lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lceil \pi \rceil = 4$
- $\lfloor 3 \rfloor = 3$ e $\lceil 3 \rceil = 3$

Funções piso e teto

Algumas propriedades

1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
2. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
3. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

Funções piso e teto

Algumas propriedades

1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
2. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
3. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

Algumas observações

1. $x = \lfloor x \rfloor + \epsilon$, para algum $0 \leq \epsilon < 1$
2. $x = \lceil x \rceil - \epsilon$, para algum $0 \leq \epsilon < 1$

Exemplo 16

Demonstre a propriedade $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Exemplo 16

Demonstre a propriedade $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Solução Seja o número x representado por $n + \varepsilon$, em que $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq \epsilon < 1$. Há dois casos a se considerar ($\epsilon = 0$ ou não)

Caso 1 $\epsilon = 0$, *assim* $x = n$ *e* $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil = -n$

Caso 2 $0 < \epsilon < 1$. *Assim*

$$\begin{aligned} \lfloor -x \rfloor &= \lfloor -(n + \epsilon) \rfloor \\ &= \lfloor -n - \epsilon \rfloor \\ &= -(n+1) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} -\lceil x \rceil &= -\lceil n + \epsilon \rceil \\ &= -(n+1) \end{aligned}$$

Portanto, $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Funções parciais

Uma **função parcial** f de um conjunto A para um conjunto B é uma associação a cada elemento a em um subconjunto de A, chamado de **domínio de definição** de f , a um único elemento b de B.

> Os conjuntos A e B são chamados de domínio e contra-domínio de f , respectivamente.

Dizemos que f é indefinida para elementos de A que não estão no domínio de definição de f . Quando o domínio de definição de f é o próprio domínio A, dizemos que f é uma **função total**.

Funções parciais

Uma **função parcial** f de um conjunto A para um conjunto B é uma associação a cada elemento a em um subconjunto de A, chamado de **domínio de definição** de f , a um único elemento b de B.

Os conjuntos A e B são chamados de domínio e contra-domínio de f , respectivamente.

Dizemos que f é indefinida para elementos de A que não estão no domínio de definição de f . Quando o domínio de definição de f é o próprio domínio A, dizemos que f é uma **função total**.

Exemplo 17

A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ em que $f(n) = \sqrt{n}$ é uma função parcial de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{R}$ em que o domínio de definição é o conjunto dos inteiros não-negativos. A função f é indefinida para os inteiros negativos.

Questions?

Teoria de Conjuntos e Funções

– Funções –

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Sequências —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2023

Sequências são listas ordenadas de elementos. Ainda, são estruturas discretas que aparecem com frequência em computação

1. progressão aritmética
2. progressão geométrica
3. strings

Sequências: uma introdução

Sequências são listas ordenadas de elementos. Ainda, são estruturas discretas que aparecem com frequência em computação

1. progressão aritmética
2. progressão geométrica
3. strings

Formalmente, uma sequência é uma função defiinida do conjunto dos naturais (a partir de um valor específico, normalmente 0 ou 1) para um conjunto arbitrário S.

Usamos a_n, chamdo de termo da sequência, para denotar a imagem do inteiro n, e a sequência inteira é frequentemente denotada como $\{a_n\}$.

Sequências: uma introdução

Sequências são listas ordenadas de elementos. Ainda, são estruturas discretas que aparecem com frequência em computação

1. progressão aritmética
2. progressão geométrica
3. strings

Formalmente, uma sequência é uma função defiinida do conjunto dos naturais (a partir de um valor específico, normalmente 0 ou 1) para um conjunto arbitrário S.

Usamos a_n, chamdo de termo da sequência, para denotar a imagem do inteiro n, e a sequência inteira é frequentemente denotada como $\{a_n\}$.

Exemplo 18

1. Sequência dos n primeiros naturais: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$
2. Sequência dos n número primos: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Sequências

Sequências importantes são as progressões **aritméticas**

progressão aritmética *sequência da forma*

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+nd$$

em que o termo inicial a e a diferença comum d são números reais.

Sequências

Sequências importantes são as progressões aritméticas e geométricas.

progressão aritmética *sequência da forma*

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots, a + nd$$

em que o termo inicial a e a diferença comum d são números reais.

progressão geométrica *sequência da forma*

$$a, ar, ar^2; ar^3; \ldots, ar^n$$

em que o termo inicial a e a razão r são números reais.

Fórmulas explícitas para sequências

Uma fórmula explícita define como obter o k-ésimo termo de uma sequência diretamente em função de k.

Fórmulas explícitas para sequências

Uma **fórmula explícita** define como obter o k-ésimo termo de uma sequência diretamente em função de k.

Exemplo 19

A sequência

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \ldots$$

pode ser definida como uma função dos naturais para os reais

$$0 \mapsto 1 \quad 1 \mapsto -\tfrac{1}{2} \quad 2 \mapsto \tfrac{1}{3} \quad 3 \mapsto -\tfrac{1}{4} \quad \ldots \quad n \mapsto \tfrac{(-1)^n}{n+1}$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, em que

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Fórmulas explícitas para sequências

Uma **fórmula explícita** define como obter o k-ésimo termo de uma sequência diretamente em função de k.

Exemplo 19

A mesma sequência pode ser definida como uma função dos inteiros positivos para os reais:

$$0 \mapsto 1 \quad 1 \mapsto -\tfrac{1}{2} \quad 2 \mapsto \tfrac{1}{3} \quad 3 \mapsto -\tfrac{1}{4} \quad \ldots \quad n \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, em que

$$g(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Igualdade de sequências

Duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são **iguais** sse para todo n

$$a_n = b_n$$

Duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são **iguais** sse para todo n

$$a_n = b_n$$

Exemplo 20

Sejam as sequências $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e $(b_2, b_3, b_4, \ldots)$ definidas pelas fórmulas explícitas

$$\begin{array}{ll} a_i = \frac{i}{i+1} & \text{para inteiros } i \geq 1 \\ b_i = \frac{j-1}{j} & \text{para inteiros } j \geq 2 \end{array}$$

As sequências são idênticas. Note

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} & b_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} & b_2 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} \\ a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} & b_2 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \end{array}$$

Definindo uma sequência

Um problema comum é, dados alguns termos iniciais de uma sequência, determinar uma regra para gerar a sequência como um todo.

Maneiras típicas para definir uma sequência

1. Fórmula explícita para cada termo da sequência.
2. Algoritmo que gere a sequência.
3. Fórmula recursiva para cada termo da sequência.

Definindo uma sequência

Um problema comum é, dados alguns termos iniciais de uma sequência, determinar uma regra para gerar a sequência como um todo.

Maneiras típicas para definir uma sequência

1. Fórmula explícita para cada termo da sequência.
2. Algoritmo que gere a sequência.
3. Fórmula recursiva para cada termo da sequência.

Observação

Dado um número limitado de termos $a_1, a_2, \ldots, a_i$ de uma sequência, é possível achar uma regra mas é garantida apenas para os i termos apresentados.

Nada garante a regra valha para ai+1

Definindo uma sequência

Exemplo 21

Seja a sequência cujos 5 primeiros termos são $1, 2, 3, 4, 5$. A fórmula

$$a_n = n, \text{ para } n \geq 1$$

gera estes 5 termos corretamente, e prevê que $a_6 = 6$
O algoritmo

Gere todos os naturais cujo resto da divisão por 10 está entre 1 e 5

também gera estes mesmos cinco termos, e prevê que $a_6 = 11$

As duas descrições concordam para todos os termos dados, mas geram sequências diferentes. Apenas com as informações dadas não há como dizer qual sequência é mais apropriada.

Provendo uma fórmula explícita

Exemplo 22

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047$$

Provendo uma fórmula explícita

Exemplo 22

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047$$

Solução Fórmula explícita para gerar os 10 primeiros termos

$$a_n = 3^n - 1, \text{ para inteiros } n \geq 1$$

Provendo uma fórmula explícita

Exemplo 22

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047$$

Solução Fórmula explícita para gerar os 10 primeiros termos

$$a_n = 3^n - 1, \text{ para inteiros } n \geq 1$$

Exemplo 23

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10$$

Provendo uma fórmula explícita

Exemplo 22

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047$$

Solução Fórmula explícita para gerar os 10 primeiros termos

$$a_n = 3^n - 1, \text{ para inteiros } n \geq 1$$

Exemplo 23

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10$$

Solução Fórmula explícita para gerar os 10 primeiros termos

$$a_n = (-1)^{n+1} n, \text{ para inteiros } n \geq 1$$

Provendo um algoritmo para a sequência

Exemplo 24

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$$

Provendo um algoritmo para a sequência

Exemplo 24

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$$

Solução Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes

Exemplo 24

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$$

Solução Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes

Exemplo 25

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 16 primeiros termos:

$$0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0$$

Provendo um algoritmo para a sequência

Exemplo 24

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 10 primeiros termos:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$$

Solução Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes

Exemplo 25

Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ tendo os 16 primeiros termos:

$$0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0$$

Solução Para cada natural $n \geq 1$, em ordem crescente, adicione à sequência n termos 0, seguidos de n termos 1

Provendo uma fórmula recursiva

Uma fórmula recursiva para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

Provendo uma fórmula recursiva

Uma fórmula recursiva para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

Uma relação de recorrência para uma sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa $\{a_n\}$ em termos de um ou mais termos prévios na sequência para cada $n \geq n_0$, em que n_0 é inteiro não-negativo.

Provendo uma fórmula recursiva

Uma fórmula recursiva para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

Uma relação de recorrência para uma sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa $\{a_n\}$ em termos de um ou mais termos prévios na sequência para cada $n \geq n_0$, em que n_0 é inteiro não-negativo.

Exemplo 26

A sequência

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880$$

pode ser definida por fórmula explícita $a_n = n!, n \geq 0$; ou pela fórmula recursiva

$$a_n = \begin{cases} a_0 = 1 & \text{se } n = 0 \\ a_n = n \times a_{n-1} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Questions?

Teoria de Conjuntos e Funções

– Sequências –

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Somatórios e produtórios —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Feb 2023

Somatórios

Seja uma sequência $\{a_n\}$. O somatório dos termos

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$$

de $\{a_k\}$ é a soma

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

O somatório é representado por $\sum$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k$$

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

Uma notação alternativa para somatórios é

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S.

Somatórios

Exemplo 27

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\sum_{k=3}^{6} a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

Uma notação alternativa para somatórios é

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S.

Exemplo 28

$$\sum_{s \in \{0,3,7\}} s^2 = 0^2 + 3^2 + 7^2 = 0 + 9 + 49 = 58$$

Variáveis ligadas e livres

A variável ligada de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos. As demais variáveis são chamadas de variáveis livres.

Variáveis ligadas e livres

A variável ligada de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos. As demais variáveis são chamadas de variáveis livres.

Exemplo 29

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

i é a variável ligada e n é a variável livre.

Variáveis ligadas e livres

A variável ligada de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos. As demais variáveis são chamadas de variáveis livres.

Exemplo 29

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

i é a variável ligada e n é a variável livre.

Exemplo 30

$$\sum_{i=m}^{n}(i-1)$$

i é a variável ligada e m e n são variáveis livres.

Mudança de variável

Trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

Mudança de variável

Trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

Exemplo 31

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$$

Mudança de variável

Trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

Exemplo 31

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$$

Trocar a variável livre altera o valor do somatório.

Mudança de variável

Trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

Exemplo 31

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$$

Trocar a variável livre altera o valor do somatório.

Exemplo 32

Os somatórios são distintos pois $m \neq n$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} \neq \sum_{i=1}^{m} \frac{i+1}{i}$$

Dois somatórios são **idênticos** sse eles possuirem termos idênticos

Exemplo 33

Os somatórios são distintos pois $m \neq n$

$$\sum_{j=2}^{4}(j-1)^2 = \sum_{i=1}^{3} i^2$$

pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{4}(j-1)^2 &= (2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2 \\ &= (1)^2 + (2)^2 + (3)^2\end{aligned}$$

e

$$\sum_{i=1}^{3}(i)^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2$$

Exemplo 34

Substitua $k + 1$ por j

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1}$$

Mudança de variável

Exemplo 34

Substitua $k+1$ por j

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1}$$

1. Calcular novos limites

$$k = 0 \Rightarrow j = 0 + 1 = 1$$
$$k = 6 \Rightarrow j = 6 + 1 = 7$$

Exemplo 34

Substitua $k+1$ por j

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1}$$

1. Calcular novos limites

$$k = 0 \Rightarrow j = 0 + 1 = 1$$
$$k = 6 \Rightarrow j = 6 + 1 = 7$$

2. Calcular o termo geral – como $j = k + 1$ então $k = j - 1$

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{j-1+1} = \frac{1}{j}$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{j}$$

Produtório

Seja uma sequência $\{a_n\}$. O **produtório** dos termos

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$$

de $\{a_k\}$ é o produto

$$a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} \times \ldots \times a_n$$

O produtório é representado por $\prod$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} \times \ldots \times a_n$$

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^{6} a_k$$

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^{6} a_k = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2$$

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^{6} a_k = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2 = 9 \times 16 \times 25 \times 36$$

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^{6} a_k = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2 = 9 \times 16 \times 25 \times 36$$

Uma notação alternativa para produtório é

$$\prod_{s \in S} f(s)$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S.

Exemplo 35

Seja uma sequência a_k em $a_k = k^2$

$$\prod_{k=3}^{6} a_k = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2 = 9 \times 16 \times 25 \times 36$$

Uma notação alternativa para produtório é

$$\prod_{s \in S} f(s)$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S.

Exemplo 36

$$\prod_{s \in \{1,3,7\}} s^2 = 1^2 \times 3^2 \times 7^2 = 1 \times 9 \times 49$$

Algums propriedades

Seja c um número real e sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$$
$$b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n$$

As seguintes propriedades são válidas

1. $$\sum_{i=n}^{m} a_i + \sum_{i=n}^{m} b_i = \sum_{i=n}^{m} (a_i + b_i)$$

2. $$c \times \sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i=n}^{m} (c \times a_i)$$

3. $$\prod_{i=n}^{m} a_i \times \prod_{i=n}^{m} b_i = \prod_{i=n}^{m} (a_i \times b_i)$$

Questions?

Teoria de Conjuntos e Funções
– Somatórios e produtórios –