Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Graph traversing —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

Aug 2022

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Depth-First search —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

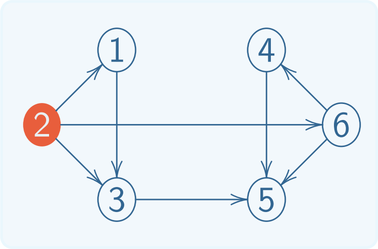
Aug 2022

Caminhamento em grafos

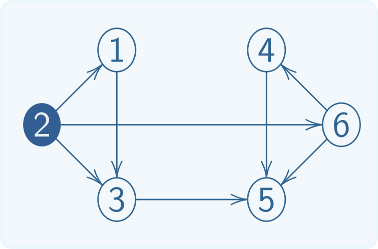
Na busca em profundidade, deve-se caminhar no grafo visitando todos os seus vértices sempre procurando o vértice mais profundo.

Caminhamento em grafos

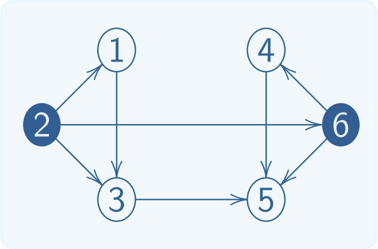
Na busca em profundidade, deve-se caminhar no grafo visitando todos os seus vértices sempre procurando o vértice mais profundo.



Na busca em profundidade, deve-se caminhar no grafo visitando todos os seus vértices sempre procurando o vértice mais profundo.

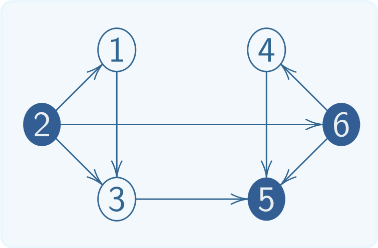


Na busca em profundidade, deve-se caminhar no grafo visitando todos os seus vértices sempre procurando o vértice mais profundo.



Caminhamento em grafos

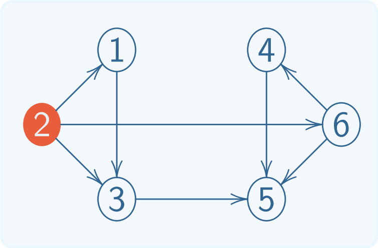
Na busca em profundidade, deve-se caminhar no grafo visitando todos os seus vértices sempre procurando o vértice mais profundo.



Caminhamento em grafos

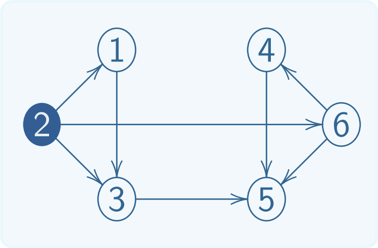
Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.

Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.

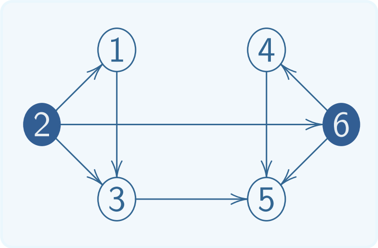


Caminhamento em grafos

Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.

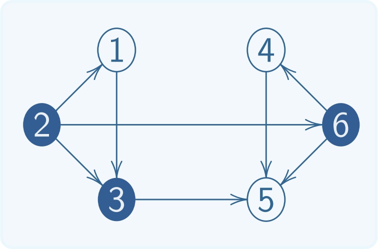


Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.

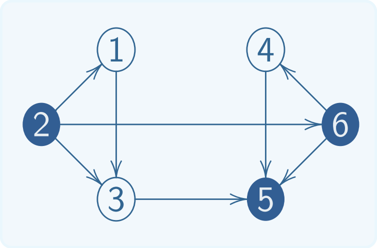


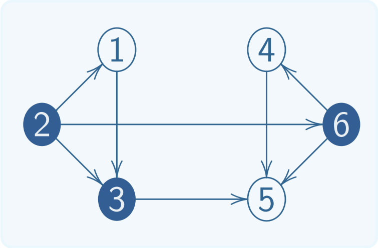
Caminhamento em grafos

Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.



Diferença entre os caminhamentos



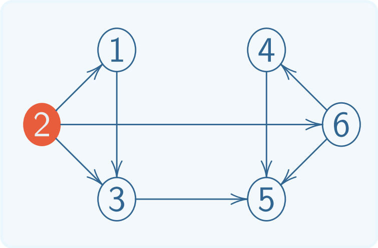


Busca em profundidade

- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda tem arestas não descobertas saindo dele;

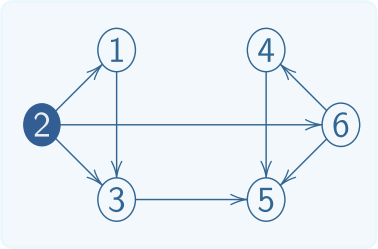
Busca em profundidade

- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda tem arestas não descobertas saindo dele;



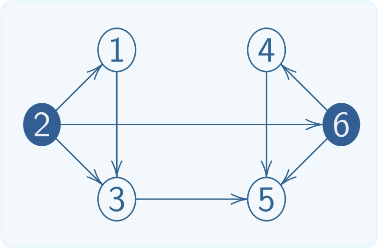
Busca em profundidade

- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda tem arestas não descobertas saindo dele;



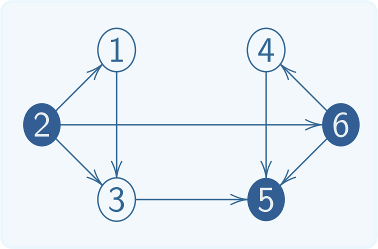
Busca em profundidade

- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda tem arestas não descobertas saindo dele;



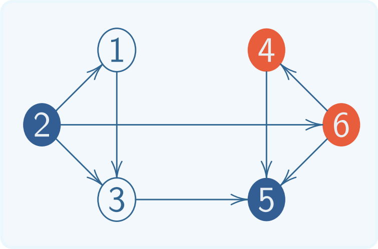
Busca em profundidade

- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda tem arestas não descobertas saindo dele;

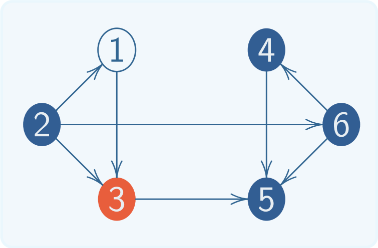


Busca em profundidade

- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda tem arestas não descobertas saindo dele;
- Quando todas as arestas de v tiverem sido exploradas volta-se até para explorar arestas que saem do vértice a partir do qual v foi descoberto.



- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda tem arestas não descobertas saindo dele;
- Quando todas as arestas de v tiverem sido exploradas volta-se até para explorar arestas que saem do vértice a partir do qual v foi descoberto.

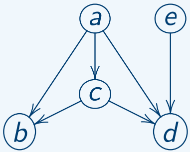


Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho

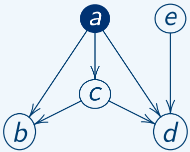
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



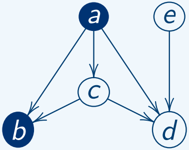
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



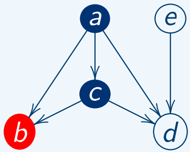
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



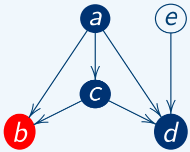
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



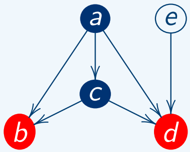
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



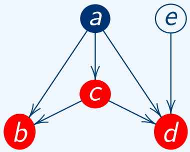
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



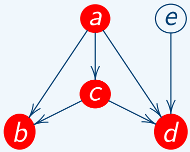
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



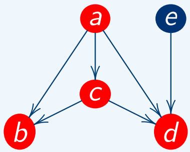
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



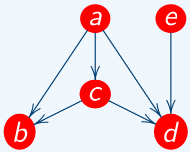
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



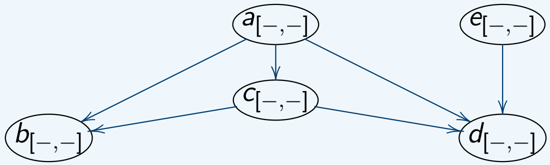
Busca em profundidade

- Todos os vértice são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se azul
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se vermelho



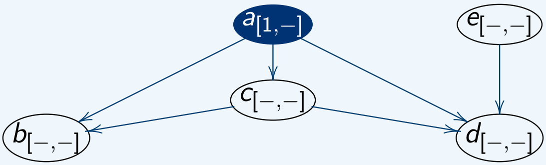
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



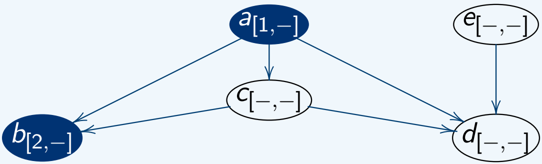
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



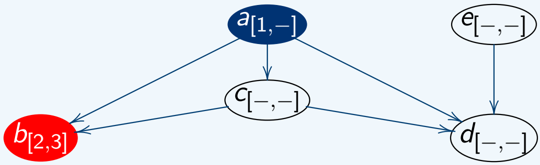
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



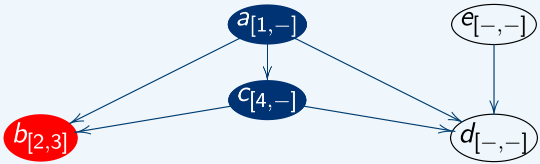
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



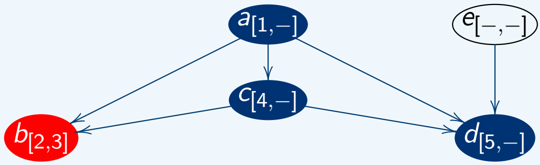
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



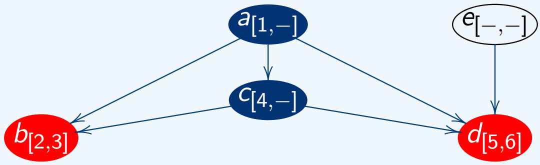
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



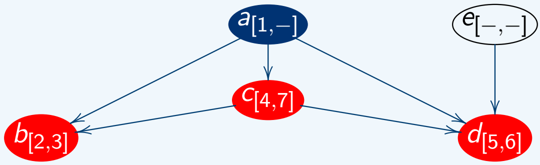
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



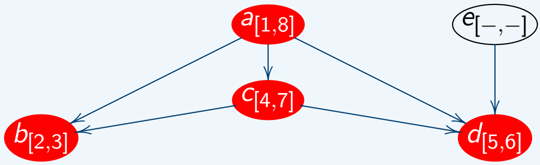
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



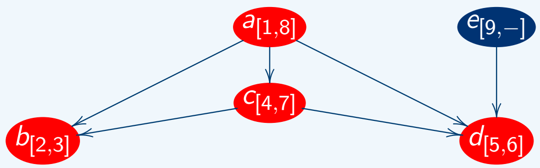
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



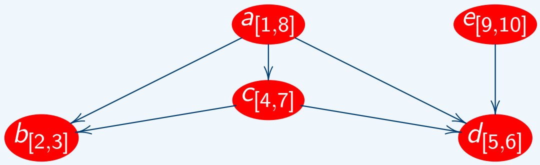
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



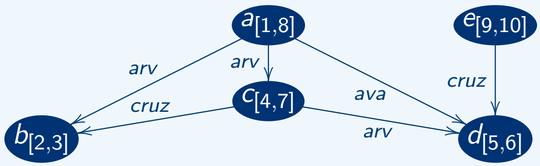
Busca em profundidade

- O tempo de descoberta $d[v]$ é o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- O tempo de término do exame da lista de adjacentes $t[v]$ é o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída.
- $d[v]$ e $t[v]$ são inteiros entre 1 e $2V$, onde V é o número de vértices do grafo



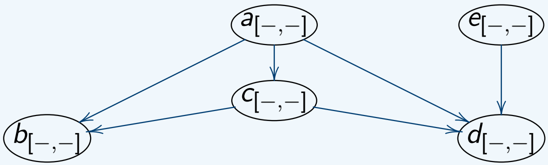
Classificação das arestas

- De árvore: uma aresta (u,v) é de **árvore** se o vértice v foi visitado a primeira vez passando pela aresta (u,v)
- De retorno: uma aresta (u,v) é uma aresta de **retorno** se esta conecta um vértice u com um predecessor v já presente em uma árvore de busca
- De avanço: Não pertencem a árvore de busca em profundidade mas conectam um vértice a um **descendente** que pertence a árvore de busca
- De cruzamento: conectam vértice de uma **mesma árvore** de busca ou de árvores diferentes



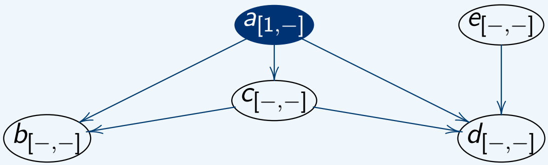
Busca em profundidade

- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento



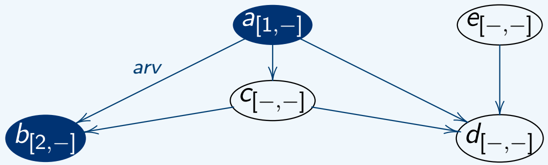
Busca em profundidade

- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento

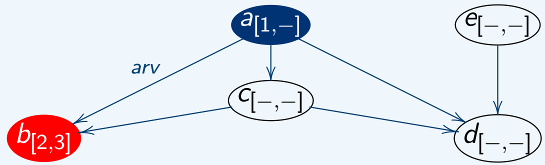


Busca em profundidade

- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento

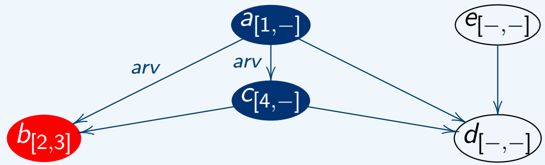


- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento



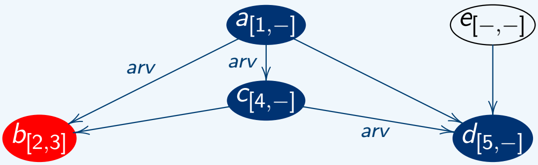
Busca em profundidade

- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento



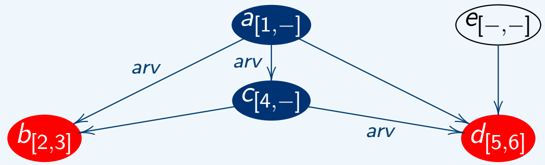
Busca em profundidade

- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento

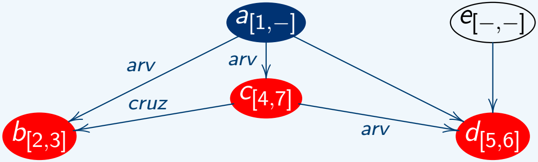


Busca em profundidade

- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento

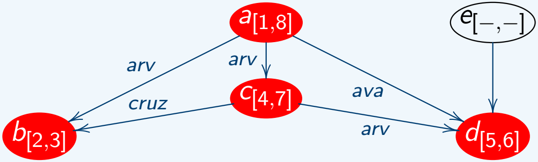


- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento



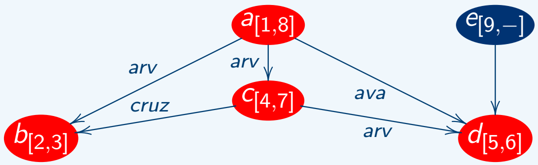
Busca em profundidade

- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento



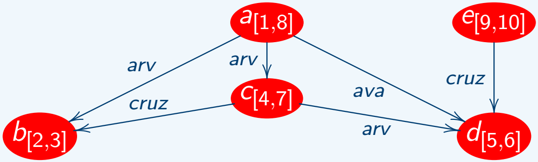
Busca em profundidade

- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento



Busca em profundidade

- As arestas $e = (u, v)$ podem ser classificadas pela cor do vértice v que é alcançado quando se passa pela aresta e primeira vez
  - Branco : aresta de árvore
  - Azul : aresta de retorno
  - Vermelho : (i) Se u é visitado antes de v então e é uma aresta de avanço; (ii) Se v é visitado antes de u então e é de cruzamento



Exemplo 1

Como verificar se há um circuito em um grafo direcionado?

Questions?

Graph traversing
– Depth-First search –

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Breadth-First search —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

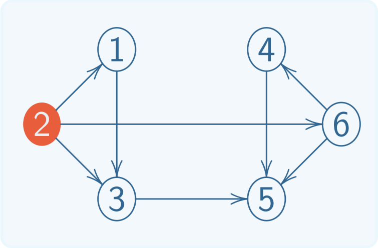
Aug 2022

Busca em largura

- Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.

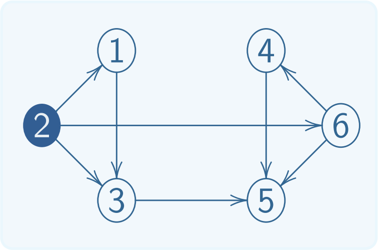
Busca em largura

- Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.



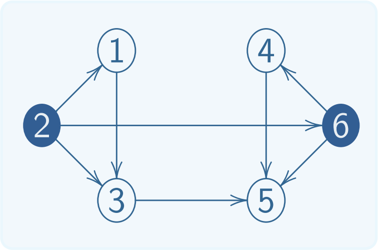
Busca em largura

- Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.



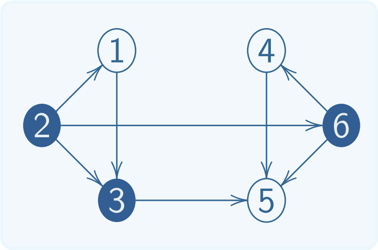
Busca em largura

- Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.



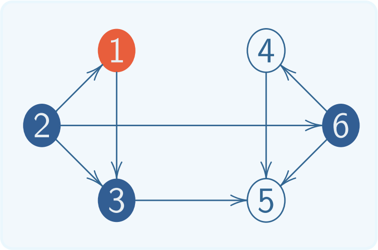
Busca em largura

- Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.



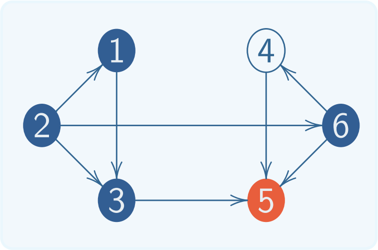
Busca em largura

- Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.



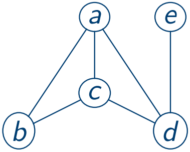
Busca em largura

- Na busca em largura, deve-se expandir o conjunto de vértices de forma uniforme em que são visitados todos os vértices de mesma distância ao início antes de visitar outros níveis.
- Na busca em largura o algoritmo descobre todos os vertices a uma distância k do vértice de origem antes de descobrir os que estão a uma distância $k+1$



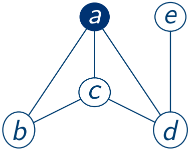
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



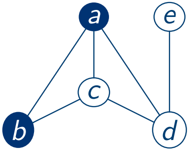
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



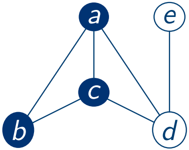
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



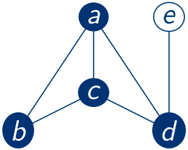
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



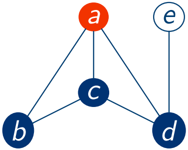
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



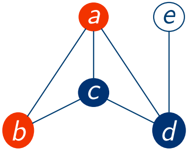
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



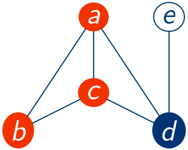
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



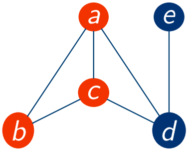
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



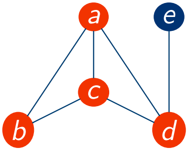
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



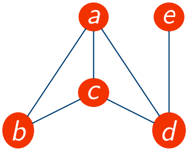
Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



Busca em largura

- Cada vértice é colorido de branco, azul ou vermelho
- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se azul
- Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se vermelhos. Atenção, pois não será necessário todos os descendentes serem descobertos para se tornar vermelho.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é vermelho, entao v tem quer ser azul ou vermelho
- Vértices azul podem ter adjacentes brancos.



Alguns algoritmos

Caminho mais curto

- A busca em largura encontra o caminho mais curto entre dois vértice u e v.
- O caminho entre dois vertices quaisquer fica armazenado no vetor antecessor

Alguns algoritmos

Caminho mais curto

- A busca em largura encontra o caminho mais curto entre dois vértice u e v.
- O caminho entre dois vertices quaisquer fica armazenado no vetor antecessor

Ordenação topológica

- Grafos direcionados acíclicos pode ser usados para indicar precedência de eventos
- Uma aresta direcionada (u, v) indica que a atividade u tem que ocorrer antes da atividade v
- Os vértices ordenados topologicamente aparecem em ordem inversa aos seus tempos de término na busca em profundidade

Algoritmo menor caminho

Sejam $G = (V, A)$ um grafo direcionado e c_{ij} as distâncias associadas à aresta $(i, j) \in A$. Espera-se encontrar o caminho mais curto entre dois vértices s e t!!!

Algoritmo menor caminho

Sejam $G = (V, A)$ um grafo direcionado e c_{ij} as distâncias associadas à aresta $(i, j) \in A$. Espera-se encontrar o caminho mais curto entre dois vértices s e t!!!

O comprimento de um caminho é igual à soma dos comprimentos (distâncias) das arestas que formam o caminho. A distância ou comprimento de uma aresta pode ter diversas interpretações dependendo da aplicação: custos, distâncias, consumo de combustível, etc.

Algoritmo menor caminho

Sejam $G = (V, A)$ um grafo direcionado e c_{ij} as distâncias associadas à aresta $(i, j) \in A$. Espera-se encontrar o caminho mais curto entre dois vértices s e t!!!

O comprimento de um caminho é igual à soma dos comprimentos (distâncias) das arestas que formam o caminho. A distância ou comprimento de uma aresta pode ter diversas interpretações dependendo da aplicação: custos, distâncias, consumo de combustível, etc.

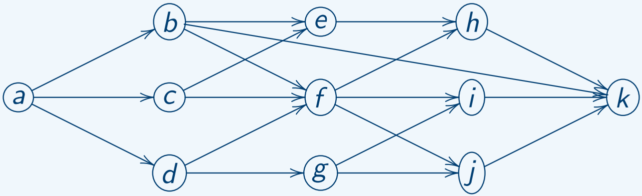
Exemplo 2

Dado um mapa rodoviário, determinar a **rota mais curta** de uma cidade a outra (rota mais rápida, rota com menor consumo de combustível, rota com menor valor de pedágio)

Algoritmo menor caminho

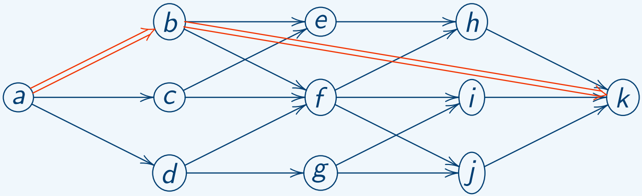
Exemplo 3

Construção de uma estrada entre duas cidades A e K, representado pelo grafo G com diversos trechos possíveis. Determinar o trajeto ótimo (corresponde a achar o caminho mais curto de A a K em relação a estes custos).



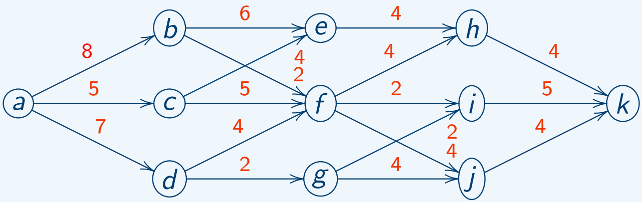
Exemplo 3

Construção de uma estrada entre duas cidades A e K, representado pelo grafo G com diversos trechos possíveis. Determinar o trajeto ótimo (corresponde a achar o caminho mais curto de A a K em relação a estes custos).



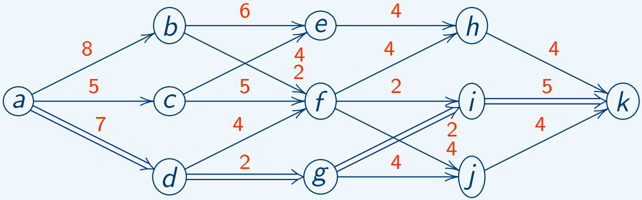
Exemplo 4

Construção de uma estrada entre duas cidades A e K, representado pelo grafo G com diversos trechos possíveis e o custo de construção de cada um. Determinar o trajeto ótimo cujo custo de construção seja mínimo (corresponde a achar o caminho mais curto de A a K em relação a estes custos).



Exemplo 4

Construção de uma estrada entre duas cidades A e K, representado pelo grafo G com diversos trechos possíveis e o custo de construção de cada um. Determinar o trajeto ótimo cujo custo de construção seja mínimo (corresponde a achar o caminho mais curto de A a K em relação a estes custos).



Questions?

Graph traversing
– Breadth-First search –

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Distances over the graph —

Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

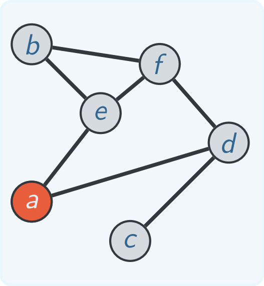
Aug 2022

Distances

The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.

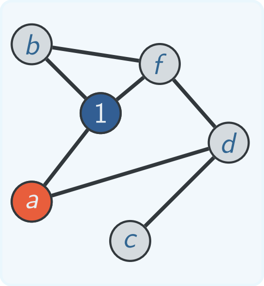
Distances

The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



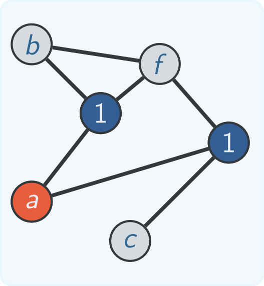
Distances

The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



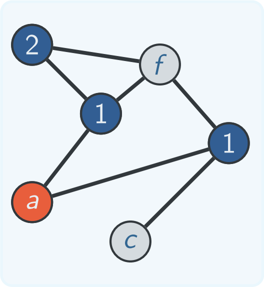
Distances

The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



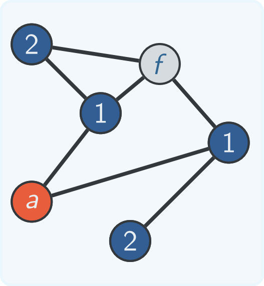
Distances

The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



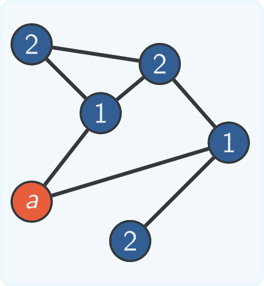
Distances

The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



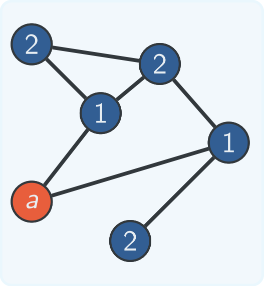
Distances

The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



Distances

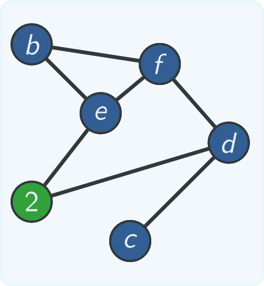
The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



The eccentricity of a vertex v greatest distance between v and any other vertex

Distances

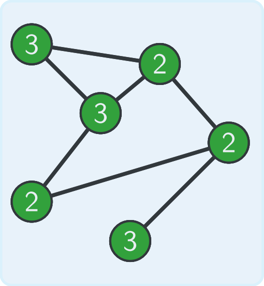
The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



The eccentricity of a vertex v greatest distance between v and any other vertex

Distances

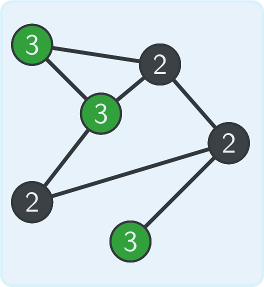
The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



The eccentricity of a vertex v greatest distance between v and any other vertex

Distances

The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.

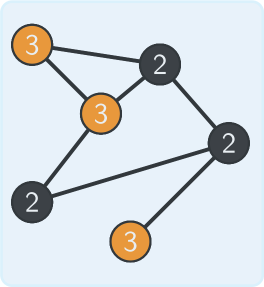


$r = 2$

The radius r of a graph is the minimum eccentricity of any vertex. The central vertex is one whose the eccentricity is r.

Distances

The distance between two vertices in a graph is the number of edges in a shortest path connecting them.



$d = 3$

The diameter d of a graph is the maximum eccentricity of any vertex. The peripheral vertex is one whose the eccentricity is d.

Questions?

Graph traversing
– Distances over the graph –

Teoria dos Grafos e Computabilidade

— Special graphs —

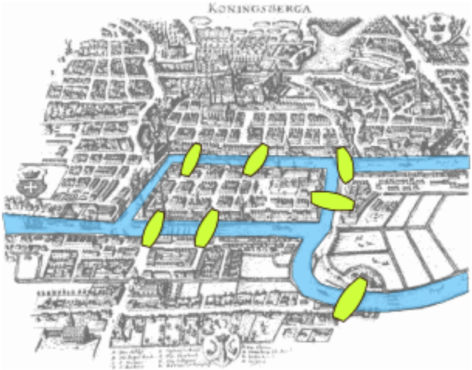
Silvio Jamil F. Guimarães

Graduate Program in Informatics – PPGINF
Image and Multimedia Data Science Laboratory – IMScience
Pontifical Catholic University of Minas Gerais – PUC Minas

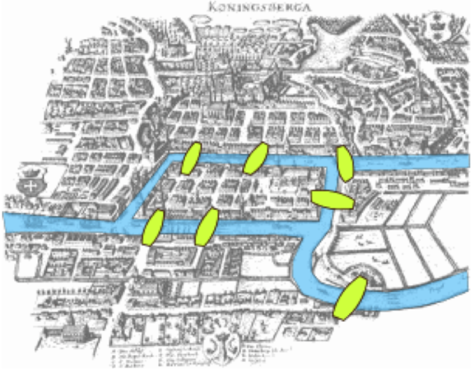
Aug 2022

Eulerian graph - bridges of Konigsberg

Is there a path that crosses each bridge (exactly) once?

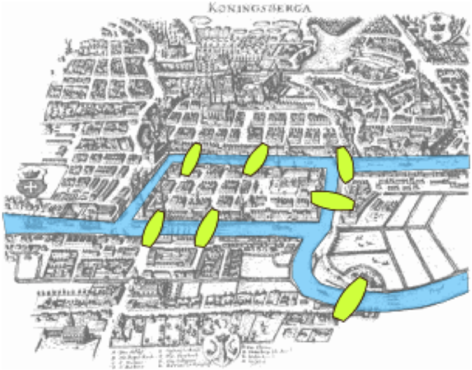


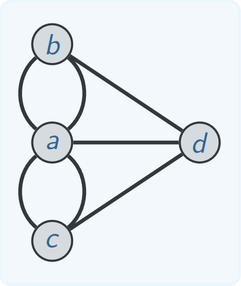
Eulerian graph - bridges of Konigsberg



Is there a path that crosses each bridge (exactly) once?

Eulerian graph - bridges of Konigsberg

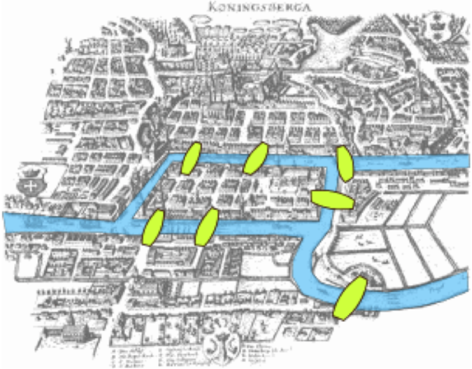


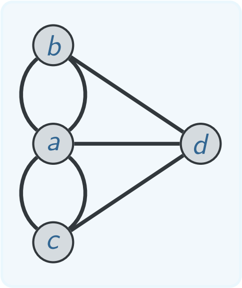


edges – bridges

Is there a path that crosses each bridge (exactly) once?

Eulerian graph - bridges of Konigsberg





edges – bridges

Is there a path that crosses each bridge (exactly) once?

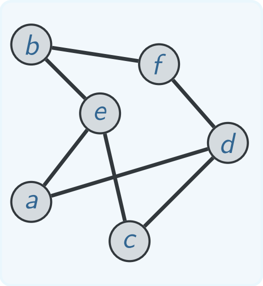
Eulerian tour

Eulerian graph

Eulerian tour (or path): a path in a graph that passes through every edge exactly once.

Eulerian graph

Eulerian tour (or path): a path in a graph that passes through every edge exactly once.

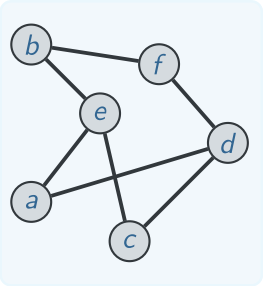


e-a-d-c-e-b-f-d

Eulerian graph

Eulerian tour (or path): a path in a graph that passes through every edge exactly once.

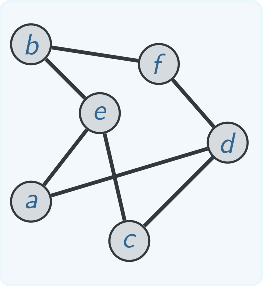
Eulerian cycle (or circuit): a path in a graph that pass through every edge exactly once and starts and ends on the same vertex.



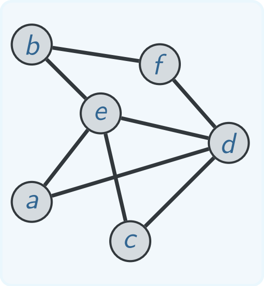
e-a-d-c-e-b-f-d

Eulerian tour (or path): a path in a graph that passes through every edge exactly once.

Eulerian cycle (or circuit): a path in a graph that pass through every edge exactly once and starts and ends on the same vertex.



e-a-d-c-e-b-f-d



e-a-d-c-e-b-f-d-e

Algorithmic issues - Eulerian tour

Does the given undirected graph G=(V,E) contain an Euler tour?

Algorithmic issues - Eulerian tour

Does the given undirected graph G=(V,E) contain an Euler tour?

Easy to decide

Algorithmic issues - Eulerian tour

Does the given undirected graph G=(V,E) contain an Euler tour?

Easy to decide

Find an Euler tour for the given undirected graph G=(V,E), if possible.

Algorithmic issues - Eulerian tour

Does the given undirected graph G=(V,E) contain an Euler tour?

Easy to decide

Find an Euler tour for the given undirected graph G=(V,E), if possible.

Easy to compute

A Hamiltonian tour is a path where each vertex occurs exactly once

Algorithmic issues - Hamiltonian tour

A Hamiltonian tour is a path where each vertex occurs exactly once

Does the given undirected graph G=(V,E) contain an Hamiltonian tour?

Algorithmic issues - Hamiltonian tour

A Hamiltonian tour is a path where each vertex occurs exactly once

Does the given undirected graph G=(V,E) contain an Hamiltonian tour?

Not easy to decide

Algorithmic issues - Hamiltonian tour

A Hamiltonian tour is a path where each vertex occurs exactly once

Does the given undirected graph G=(V,E) contain an Hamiltonian tour?

Not easy to decide

Find an Hamiltonian tour for the given undirected graph G=(V,E), if possible.

Algorithmic issues - Hamiltonian tour

A Hamiltonian tour is a path where each vertex occurs exactly once

Does the given undirected graph G=(V,E) contain an Hamiltonian tour?

Not easy to decide

Find an Hamiltonian tour for the given undirected graph G=(V,E), if possible.

Not easy to compute

Light Switches – an exercise

A light bulb is connected to 3 switches in such a way that it lights up only when all the switches are in the proper position. But you don't know what the proper position of each switch is!

Light Switches – an exercise

A light bulb is connected to 3 switches in such a way that it lights up only when all the switches are in the proper position. But you don't know what the proper position of each switch is!

What's the minimum number of single flips of a switch to guarantee that the light bulb turns on?

1. 4
2. 8
3. 16
4. 64

Light Switches – an exercise

A light bulb is connected to 3 switches in such a way that it lights up only when all the switches are in the proper position. But you don't know what the proper position of each switch is!

Light Switches – an exercise

A light bulb is connected to 3 switches in such a way that it lights up only when all the switches are in the proper position. But you don't know what the proper position of each switch is!

DNA Reconstruction – an exercise

Exemplo 5

Given a collection of short DNA strings.
Find longer DNA string that includes them all.

DNA Reconstruction – an exercise

Exemplo 5

Given a collection of short DNA strings.
Find longer DNA string that includes them all.

Possible solutions

- as a Hamiltonian tour
- as an Eulerian tour

DNA Reconstruction – an exercise

Exemplo 5

Given a collection of short DNA strings.
Find longer DNA string that includes them all.

Possible solutions

- as a Hamiltonian tour
- as an Eulerian tour

How to model over a graph the following instance for the DNA reconstruction problem?

$$S = \{ATG, AGG, TGC, TCC, GTC, GGT, GCA, CAG\}$$

DNA Reconstruction: as a Hamiltonian tour

DNA Reconstruction: as a Hamiltonian tour

DNA Reconstruction: as a Hamiltonian tour

DNA Reconstruction: as an Eulerian tour

DNA Reconstruction: as an Eulerian tour

DNA Reconstruction: as an Eulerian tour

Finding Eulerian tours

Let $G = (V, E)$ be a graph with n vertices being undirected and connected

Finding Eulerian tours

Let $G = (V, E)$ be a graph with n vertices being undirected and connected

Determine whether G has an Eulerian tour.

Finding Eulerian tours

Let $G = (V, E)$ be a graph with n vertices being undirected and connected

Determine whether G has an Eulerian tour.

Theorem If G has an Eulerian tour, G has at most two odd degree vertices.

Finding Eulerian tours

Let $G = (V, E)$ be a graph with n vertices being undirected and connected

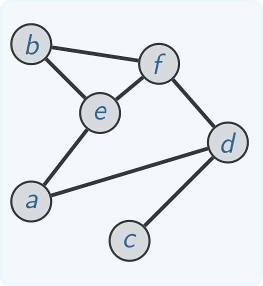
Determine whether G has an Eulerian tour.

Theorem If G has an Eulerian tour, G has at most two odd degree vertices.

If yes, find the tour itself

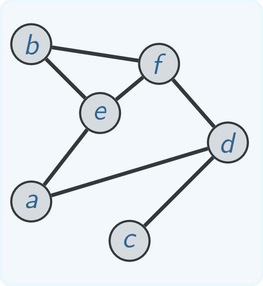
Finding Eulerian tours – Bridges

Let G=(V,E) be an undirected and connected graph. A **bridge** is an edge, which, if removed, would cause G to be **disconnected**.



Finding Eulerian tours – Bridges

Let G=(V,E) be an undirected and connected graph. A **bridge** is an edge, which, if removed, would cause G to be **disconnected**.



Which of the edges in this graph are bridges?

1. All of them.
2. (d,a)
3. (d,c)
4. (e,a) and (f,g)

Finding Eulerian tours – Bridges

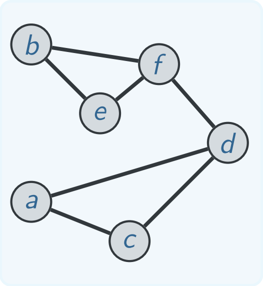
Let G=(V,E) be an undirected and connected graph. A bridge is an edge, which, if removed, would cause G to be disconnected.

In an Eulerian tour, we have to visit every edge on one side of the bridge before we cross it (because there is no coming back).

Finding Eulerian tours – Bridges

Let G=(V,E) be an undirected and connected graph. A bridge is an edge, which, if removed, would cause G to be disconnected.

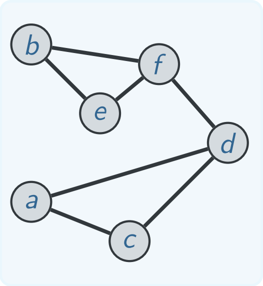
In an Eulerian tour, we have to visit every edge on one side of the bridge before we cross it (because there is no coming back).

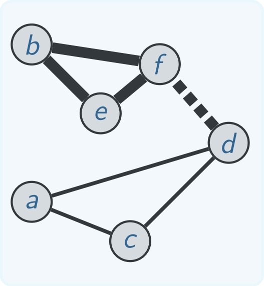


Finding Eulerian tours – Bridges

Let G=(V,E) be an undirected and connected graph. A bridge is an edge, which, if removed, would cause G to be disconnected.

In an Eulerian tour, we have to visit every edge on one side of the bridge before we cross it (because there is no coming back).





Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;

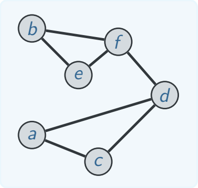
while $E \neq \emptyset$ **do**
    if *there is more than one edge incident on v* **then**
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    $E = E - \{e\}$;
end

Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```

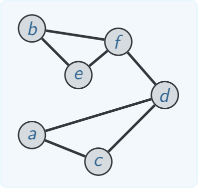


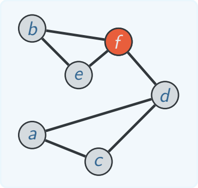
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```



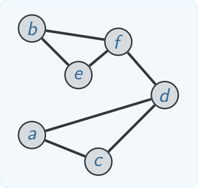


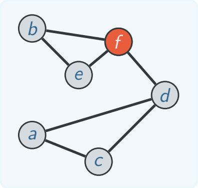
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```



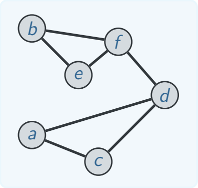


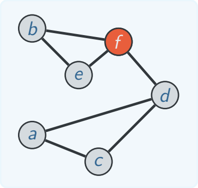
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

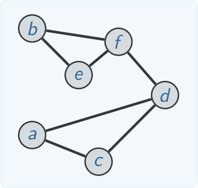
Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```





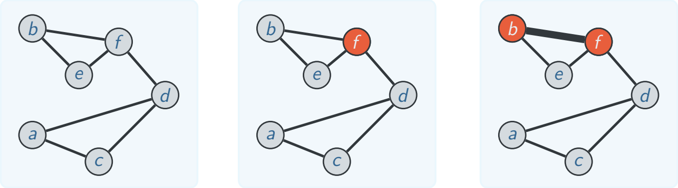


Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```



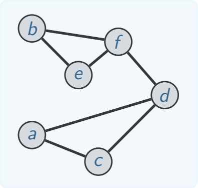
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

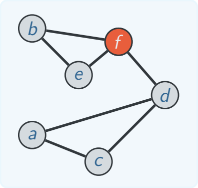
Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

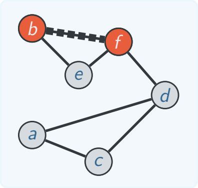
input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;

while $E \neq \emptyset$ **do**
    if *there is more than one edge incident on v* **then**
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    $E = E - \{e\}$;
end





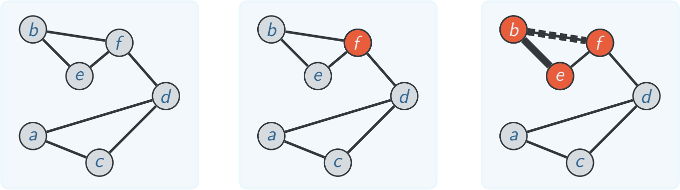


Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```

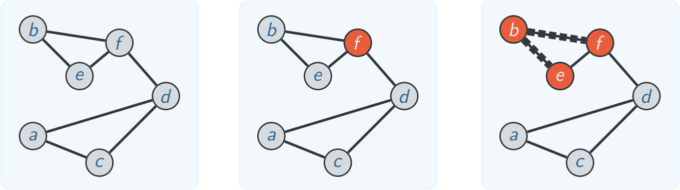


Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```

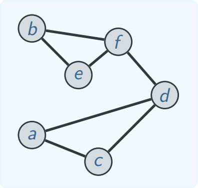


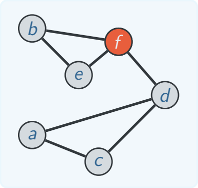
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

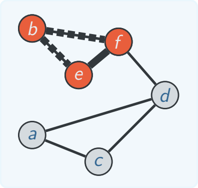
Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```





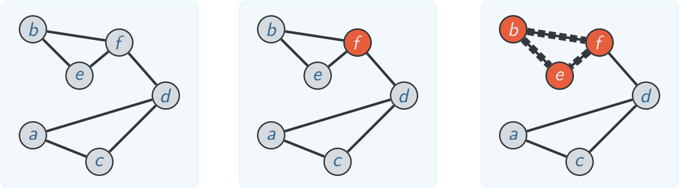


Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```

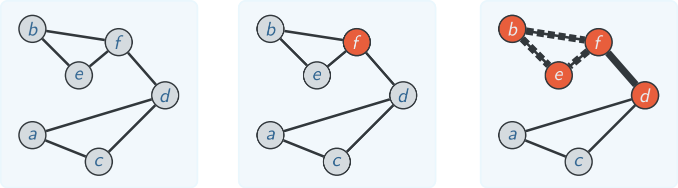


Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```

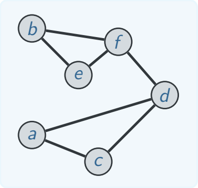


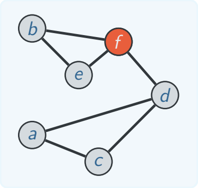
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

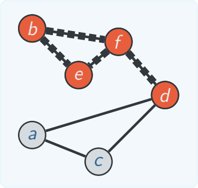
Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```





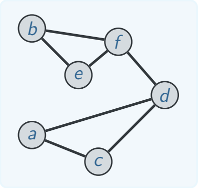


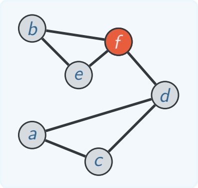
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

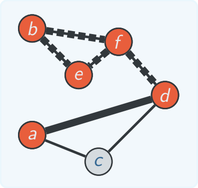
Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```



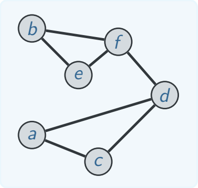


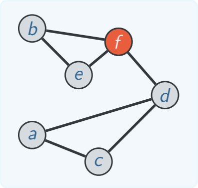


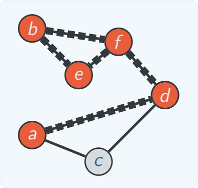
Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```



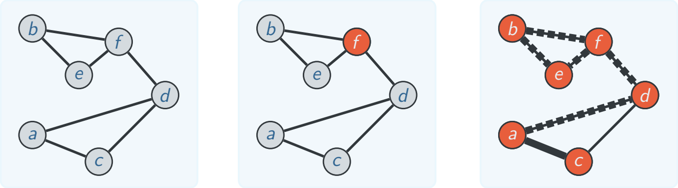




Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```

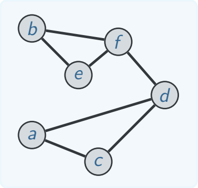


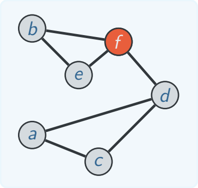
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

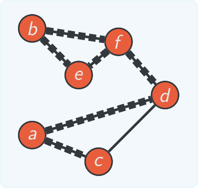
Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while $E \neq \emptyset$ **do**
    if *there is more than one edge incident on v* **then**
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    $E = E - \{e\}$;
end





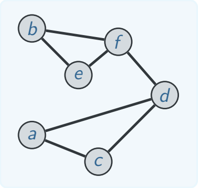


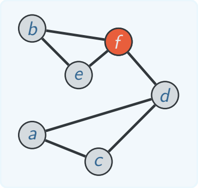
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

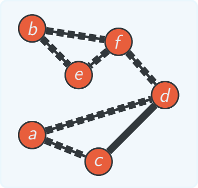
Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```





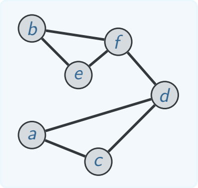


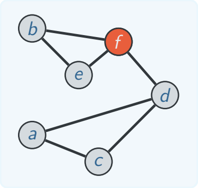
Finding Eulerian tours – Fleury's Algorithm

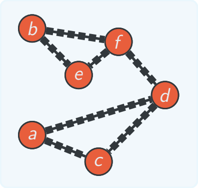
Algorithm: Eulerian tours – Fleury's Algorithm

input : An undirected and connected graph $G = (V, E)$.
output: The Eulerian tour, if so.

```
Check that G has at most 2 odd degree vertices;
Start at vertex v, an odd degree vertex if possible;
while E ≠ ∅ do
    if there is more than one edge incident on v then
        Cross any edge incident e on v that is not a bridge;
    else
        Cross the only edge e available from v;
    end
    E = E − {e};
end
```







Questions?

Graph traversing
– Special graphs –