Exercício 1

Conceitos envolvendo lema do aperto de mãos:

1) Prove que o número de vértices de grau ímpar em um grafo deve ser par.
2) Se 10 pessoas apertam as mãos umas das outras, quantos apertos de mão ocorreram? O que essa questão tem a ver com a teoria dos grafos?
3) Dado um grafo com 7 vértices; 3 deles de grau dois e 4 de grau um. Este grafo é conexo?
4) Em um grupo de 5 pessoas, é possível que todos sejam amigos de exatamente 2 pessoas do grupo? E quanto a 3 das pessoas no grupo?

1) $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$

PARA QUE O RESULTADO SEJA PAR, PRECISAMOS SOMAR DOIS NÚMEROS PARES

$$\sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ é par}}} d(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ é ímpar}}} d(v) = 2 \cdot |E|$$

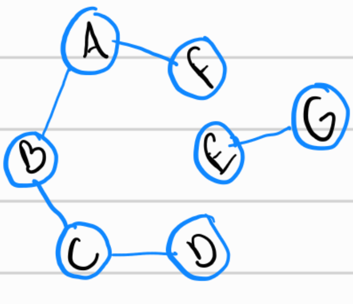
RESULTA EM NÚMERO PAR

$$\sum 2k_i + 1 \to \sum 2k_i + \sum 1$$

TEM QUE SER PAR

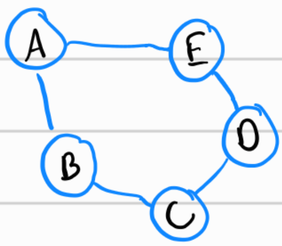
2) $\frac{10(10-1)}{2} \to \frac{90}{2} \to 45 \to$ OS "APERTOS DE MÃOS" SÃO AS ARESTAS.

3)



ESTE GRAFO NÃO É CONEXO.

4)



PRIMEIRA PERGUNTA: SIM, COMO MOSTRA O GRAFO AO LADO É POSSÍVEL.

SEGUNDA PERGUNTA: $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E| \to 15 = 2 \cdot |E|$

$\to \frac{15}{2} = |E|$ X

NÃO É POSSÍVEL

Exercício 2

Conceitos envolvendo grafos:

1) Liste todos os grafos que possuem $\{a, b, c\}$ como seu conjunto de vértices. Organize a lista de forma que sejam ilustrados o grafo e o seu complemento (um ao lado do outro).

2) Encontre o número de vértices e arestas em cada um dos grafos (simples) e não-direcionados:

   i) Grafo nulo N_n

   ii) Grafo ciclo C_n

   iii) Grafo completo K_n

   iv) Grafo bipartido completo $K_{m,n}$

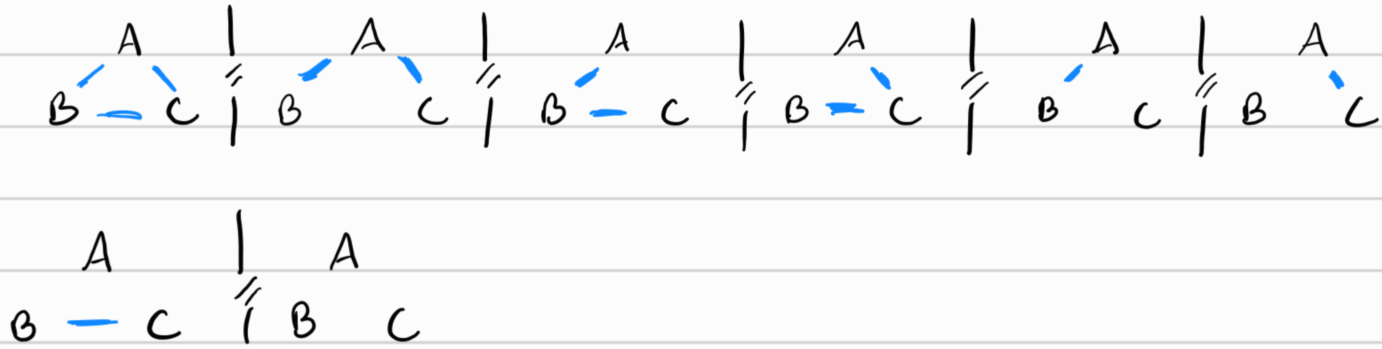
3) Seja G um grafo simples com pelo menos dois vértices. Prove que G deve conter pelo menos dois vértices de mesmo grau.

4) Uma string binária é uma sequência finita de 0s e 1s. O comprimento de uma string binária é o número total de símbolos que ocorrem nela.

   i) Desenhe o seguinte grafo: os vértices são rotulados por cadeias binárias de comprimento 3 (ou seja, todas as sequências possíveis de três 0's e 1's de 000 a 111); dois vértices são unidos por uma aresta quando diferem em exatamente um lugar. Assim, 000 é associado a 100, mas não a 110.

   ii) Desenhe o seguinte grafo: os vértices são rotulados por cadeias binárias de comprimento 4, dois vértices são unidos por uma aresta quando diferem em exatamente um lugar.

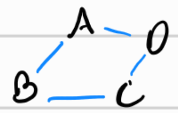
1) $V = \{a, b, c\}$



2) i) VERTICE: N

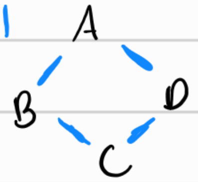
ARESTAS: 0

ii)



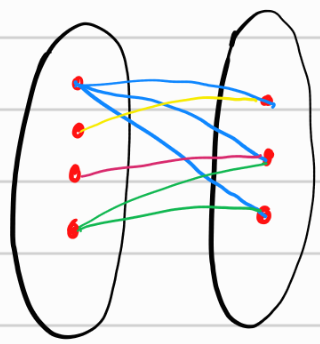
N = E e N ≥ 3

iii)



$|E| = \dfrac{|V|(|V|-2)}{2}$

iii)



N • M

3) $G = (n, ?)$

$n \geq 2$ ~> GRAUS POSSÍVEIS $= \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

CASO TENHA UM VÉRTICE DE GRAU ZERO O NÚMERO MÁXIMO DE GRAU CAIRÁ PARA $n-2$, CASO NÃO HOUVER GRAU ZERO TODOS IRÃO DE 1 a $n-1$, SEMPRE CONTENDO DOIS GRAUS IGUAIS.