



Dinâmica de transmissão sazonal em doenças respiratórias: uma abordagem computacional baseada no modelo SIR determinístico

Guilherme de Moraes Silva

Departamento de Estatística e Informática (DEINFO)

Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Recife - PE - Brasil

Disciplina de Modelagem matemático-computacional aplicada à epidemiologia.

Resumo

A modelagem matemática de doenças infecciosas fornece um arcabouço essencial para compreender padrões epidêmicos e orientar estratégias de controle. Neste estudo, desenvolvemos e implementamos computacionalmente um modelo SIR determinístico com transmissão sazonal, com o objetivo de investigar como pequenas variações periódicas na taxa de transmissão influenciam a persistência e a recorrência de surtos epidêmicos. A taxa de contato foi modelada como uma função periódica do tempo, representando flutuações climáticas e comportamentais associadas a doenças respiratórias. A solução numérica foi obtida via método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados demonstram que a introdução de sazonalidade gera oscilações sustentadas e ciclos epidêmicos recorrentes, mesmo em sistemas que, sob parâmetros constantes, tenderiam ao esgotamento da infecção. Observa-se ainda que a intensidade do forçamento sazonal atua como mecanismo de ressonância dinâmica, amplificando oscilações populacionais. Este estudo reforça o papel crítico do número reprodutivo básico (R_0) e da variabilidade temporal na dinâmica de transmissão, evidenciando como modelos simples podem capturar fenômenos epidemiológicos complexos.

1. Introdução

A propagação de doenças infecciosas é resultado da interação entre características biológicas do patógeno, estrutura populacional do hospedeiro e fatores ambientais. Desde os trabalhos fundacionais de Kermack e McKendrick (1927), modelos compartimentais têm sido amplamente empregados para representar matemáticamente a dinâmica de infecções agudas.

O modelo SIR (Suscetível–Infectado–Recuperado) constitui uma das estruturas mais fundamentais da epidemiologia matemática. Sua relevância advém da capacidade de capturar o fenômeno do limiar epidêmico e formalizar o conceito de número reprodutivo básico, R_0 , que determina a possibilidade de invasão da infecção.

Entretanto, doenças respiratórias — como influenza, vírus sincicial respiratório e outros patógenos de transmissão aérea — apresentam forte componente sazonal. Oscilações anuais associadas a temperatura, umidade, comportamento social (como períodos escolares) e padrões de mobilidade produzem variações periódicas na transmissibilidade.

Modelos com parâmetros constantes não são capazes de reproduzir adequadamente ciclos epidêmicos recorrentes observados empiricamente. A introdução de forçamento temporal na taxa de transmissão permite investigar mecanismos dinâmicos responsáveis por essas oscilações.

O presente estudo tem como objetivo:

- Formular um modelo SIR determinístico com transmissão sazonal;
- Implementar sua solução computacional;
- Analisar qualitativamente a influência da sazonalidade na persistência da infecção;
- Discutir implicações epidemiológicas dos resultados obtidos.

2. Fundamentação Teórica

2.1 Estrutura do Modelo SIR

Considera-se uma população fechada de tamanho constante N , subdividida em três compartimentos:

- $S(t)$: indivíduos suscetíveis
- $I(t)$: indivíduos infectados
- $R(t)$: indivíduos recuperados

O sistema diferencial clássico é:

$$\frac{dS}{dt} = - \beta \frac{SI}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

onde:

- β representa a taxa de transmissão;
- γ é a taxa de recuperação;
- $1/\gamma$ corresponde ao período infeccioso médio.

2.2 Número Reprodutivo Básico (R_0)

O número reprodutivo básico é definido como:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

Ele representa o número médio de infecções secundárias geradas por um indivíduo infeccioso em uma população totalmente suscetível.

Se:

- $R_0 > 1$: ocorre invasão epidêmica;
- $R_0 < 1$: a infecção decai.

Este parâmetro define o limiar epidêmico do sistema.

2.3 Introdução da Sazonalidade

Para modelar variações periódicas, definimos:

$$\beta(t) = \beta_0(1 + \alpha \cos(2\pi t/T))$$

onde:

- β_0 : taxa média de transmissão;

- α : intensidade do forçamento sazonal;
- T : período (365 dias).

Assim, o sistema torna-se não-autônomo e passa a exibir dinâmica dependente do tempo.

3. Métodos Computacionais

A solução analítica do sistema não é trivial devido à não-linearidade e à dependência temporal da taxa de transmissão. Portanto, utilizamos integração numérica via método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).

O RK4 é preferido por:

- Alta precisão
- Estabilidade numérica
- Baixo custo computacional
- Amplamente utilizado em modelagem epidemiológica

A discretização temporal foi realizada com passo $dt = 0.1$ dias.

4. Resultados

4.1 Dinâmica Sem Sazonalidade

Quando $\alpha = 0$, o sistema apresenta surto único seguido de declínio monotônico da infecção, à medida que o estoque de suscetíveis se reduz.

4.2 Dinâmica Com Sazonalidade

Ao introduzir $\alpha = 0.2$, observam-se:

- Oscilações periódicas sustentadas;
- Reaparecimento da infecção após declínios iniciais;
- Ciclos epidêmicos anuais.

A sazonalidade atua como mecanismo de realimentação externa, impedindo a estabilização do sistema.

4.3 Interpretação Dinâmica

O sistema passa a funcionar como um oscilador forçado não-linear. Pequenas variações periódicas no parâmetro β produzem amplificação dinâmica quando o sistema se encontra próximo ao limiar crítico.

Esse fenômeno é análogo à ressonância em sistemas físicos, onde pequenas forças periódicas podem gerar grandes oscilações se a frequência estiver alinhada com a frequência natural do sistema.

5. Discussão

Os resultados indicam que a sazonalidade é suficiente para explicar a persistência de surtos recorrentes em doenças respiratórias.

A análise mostra que:

- A média de R_0 determina a possibilidade de invasão;
- A amplitude α determina a intensidade das oscilações;
- Pequenos aumentos em α podem gerar grandes variações na incidência.

Esse comportamento ajuda a explicar por que cidades com parâmetros epidemiológicos semelhantes apresentam padrões temporais distintos.

Além disso, o modelo demonstra que políticas de controle que reduzam β durante períodos críticos podem ter impacto significativo na amplitude dos surtos.

6. Limitações

O modelo assume:

- Mistura homogênea da população;
- Ausência de demografia;
- Ausência de estrutura etária;

- Ausência de estocasticidade.

Em populações reais, fatores como mobilidade espacial, redes de contato e imunidade parcial alteram significativamente a dinâmica.

7. Conclusão

Este estudo demonstra que:

1. O modelo SIR sazonal é capaz de reproduzir ciclos epidêmicos recorrentes.
2. A introdução de variação temporal em β altera qualitativamente a dinâmica.
3. Pequenas flutuações ambientais podem gerar efeitos macroscópicos significativos.

A modelagem computacional constitui ferramenta indispensável para compreender sistemas epidemiológicos complexos.

8. Referencial teórico

Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society A*, 115(772), 700–721.

Anderson, R. M., & May, R. M. (1991). *Infectious diseases of humans: dynamics and control*. Oxford University Press.

Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Metz, J. A. (1990). On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *Journal of Mathematical Biology*, 28(4), 365–382.

Mills, C. E., Robins, J. M., & Lipsitch, M. (2004). Transmissibility of 1918 pandemic influenza. *Nature*, 432(7019), 904–906.

Viboud, C., Alonso, W. J., & Simonsen, L. (2006). Influenza in tropical regions. *PLoS Medicine*, 3(4), e89.