Aula 2: Desigualdalde

Princípios e Medidas

Guilherme Jacob

29/07/2021

Roteiro

1. Medidas de desigualdade e propriedades centrais
2. Algumas medidas de desigualdade
   a) Variância e Coeficiente de Variação;
   b) Razão de Palma;
   c) Índice de Gini;
   d) Índices de Entropia Generalizada.

Medidas de desigualdade e propriedades centrais

- Uma medida de desigualdade tenta expressar a desigualdade em uma distribuição como um número real.
  - Completude: $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geqslant y$ ou $x \leqslant y$;
  - A distância entre medidas de desigualdade de duas distribuições tem significado.

Medidas de desigualdade e propriedades centrais

- Propriedades centrais da mensuração de desigualdade:
  1. Simetria
  2. Invariância Populacional
  3. Invariância de Escala
  4. Invariância de Translação
  5. Princípio de Pigou-Dalton

Simetria

- Sob simetria, se permutarmos a renda de duas unidades da população, a medida de desigualdade deve permanecer inalterada.
  - Ou seja: não importa quem recebe, mas o quanto recebe.
- Este princípio também é chamado de princípio da anonímia.

Invariância populacional

- Sob invariância populacional, se repetirmos todas as observações m vezes, o índice de desigualdade é o mesmo;
- Isso significa que a medida é independente do tamanho da população;
    - Podemos comparar populações de tamanhos diferentes.

Invariância populacional

Exemplo:

- Considere a população $A = [1, 2, 3]$
- Repetindo cada valor 3 vezes, temos $A' = [1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3]$
- Se uma medida de desigualdade $I(\cdot)$ é população-invariante, $I(A) = I(A')$.

Princípio de Pigou-Dalton (Dalton, 1920; Pigou, 1912)

- Considere uma distribuição de renda A;
- Gere uma distribuição de renda A' com uma transferência regressiva.
  - Transferência regressiva: transferir parte da renda de alguém mais pobre para alguém mais rico.
    - ~~"o de cima sobe e o de baixo desce", com uma quantia fixa~~
- Sob o Princípio (Forte) de Pigou-Dalton, $I(A) < I(A')$.
  - Ou seja: uma transferência regressiva aumenta a medida de desigualdade.
- Sob o Princípio Fraco de Pigou-Dalton, $I(A) \leqslant I(A')$.
  - Ou seja: uma transferência regressiva não pode diminuir a medida de desigualdade.

Invariância de Escala

- Sob invariância de escala, se multiplicarmos a renda de cada indivíduo por uma constante $\lambda > 0$, a medida de desigualdade é a mesma.

Exemplo:

- Considere a população $A = [1, 2, 3]$
- Multiplicando cada valor por $\lambda = 3$, temos $A' = [3, 6, 9]$
- Se uma medida de desigualdade $I(\cdot)$ é escala-invariante, $I(A) = I(A')$.

Invariância de Escala

Esse axioma parece ser só um axioma sobre as unidades da mensuração...

- A medida de desigualdade do Brasil com renda expressa em reais seria a mesma se estivesse expressa em euro, fração do salário mínimo, bilhete da Mega Sena, etc.
- A desigualdade de alturas é a mesma, seja a altura medida em metros ou polegadas.

Mas ele esconde um julgamento ético!

Invariância de Escala

Considere o seguinte caso de um país fictício X:

- No ano 0, a distribuição de renda é $X = [10, 40, 100, 5000]$;
- No ano 1, é cobrado um imposto de renda de proporções fixas, de modo que cada indivíduo paga $1/10$ da sua renda.
  - Assim, $X' = [9, 36, 90, 4500]$.

O que acontece a desigualdade no ano 1?

Invariância de Escala

Agora, considere outro país hipotético Y:

- No ano 0, a distribuição de renda é $Y = [10, 40, 100, 5000]$;
- No ano 1, há uma onda de crescimento econômico de modo que as rendas dobram!
    - Assim, $Y' = [20, 80, 200, 10000]$.

O que acontece com a desigualdade no ano 1?

Invariância de Escala

- Em todas as situações, as distâncias relativas são as mesmas.
    - Por exemplo, razão entre a renda do mais rico para a do mais pobre é constante;
    - Medidas de desigualdade relativa permanecem constantes.

Invariância de Translação

- Alternativamente, podemos pensar uma medida de desigualdade que não mude se quantidades fixas forem adicionadas;
- Sob invariância de translação, se adicionarmos uma constante qualquer $\gamma \neq 0$ à cada renda, a medida de desigualdade permanece a mesma.
  - Exemplo: variância.
- O problema dessa propriedade é que ela trata de maneiras simétricas adições e subtrações.

Invariância de Translação

Considere o seguinte caso de um país fictício X:

- No ano 0, a distribuição de renda é $X = [10, 40, 100, 5000]$;
- No ano 1, é cobrado um imposto de renda fixo, de modo que cada indivíduo paga \$ 5.
  - Assim, $X' = [5, 35, 95, 4995]$.

O que acontece com a desigualdade no ano 1?

Invariância de Translação

Agora, considere outro país hipotético Y:

- No ano 0, a distribuição de renda é $Y = [10, 40, 100, 5000]$;
- No ano 1, há uma onda de crescimento econômico de modo que as rendas aumentam em \$ 10.
    - Assim, $Y' = [20, 30, 110, 5010]$.

O que acontece com a desigualdade no ano 1?

Invariância de Translação

- Em todas as situações, as distâncias absolutas são as mesmas.
  - Por exemplo, diferença entre a renda do mais rico para a do mais pobre é constante;
  - Medidas de desigualdade absolutas permanecem constantes.
- Atkinson e Brandolini (2010) mostram que a opção entre desigualdade relativa vs. desigualdade absoluta pode mudar o modo como vemos a evolução da desigualdade.

Invariância de Translação

FIGURE 2. Evolution of World Inequality, 1820–1992: Different Parameter Values

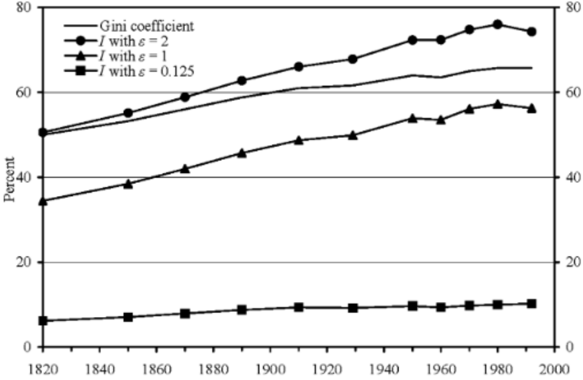


Figura 1: Série de medidas de desigualdade relativa

Invariância de Translação

FIGURE 3. Evolution of World Inequality, Absolute Measures, 1820–1992

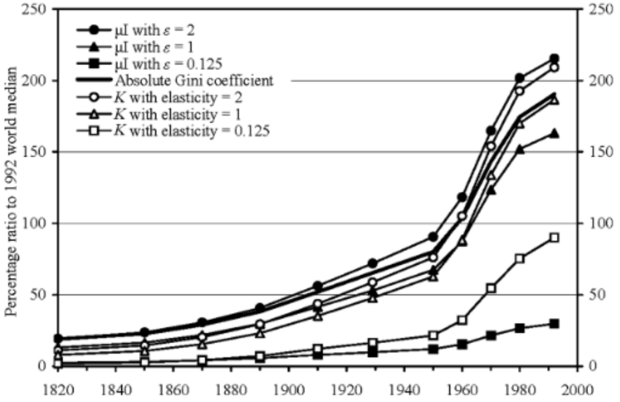


Figura 2: Série de medidas de desigualdade absoluta

Crítica de Kolm

- Kolm (1976) usa outra nomenclatura para as medidas de desigualdade:
  - Desigualdade Relativa $\rightarrow$ "Direitistas";
  - Desigualdade Absolutas $\rightarrow$ "Esquerdistas".
- Ele vê estas medidas como casos extremos, sugerindo uma medida "centrista" com duas propriedades:
  - A desigualdade aumenta se as rendas são multiplicadas por uma constante $\lambda > 1$;
  - A desigualdade diminui se as rendas são acrescidas de uma constante $\gamma > 0$.
- Exemplo: Krtscha (1994).

Recapitulando: curva de Lorenz

- Curva de Lorenz: os $p\%$ menos ricos possuem $L(p)\%$ da renda total;
  - Por exemplo: a frase "os 20% mais pobres possuem 10% da renda total" é escrita como $L(20\%) = 10\%$.
- Por se basear em proporções, a curva de Lorenz:
  - Não depende do tamanho da população; e
  - Não depende da escala das rendas;
    - Podemos comparar distribuições com rendas totais diferentes.
- Quanto mais a curva observada se afasta da curva de igualdade perfeita, mais desigual é a distribuição.

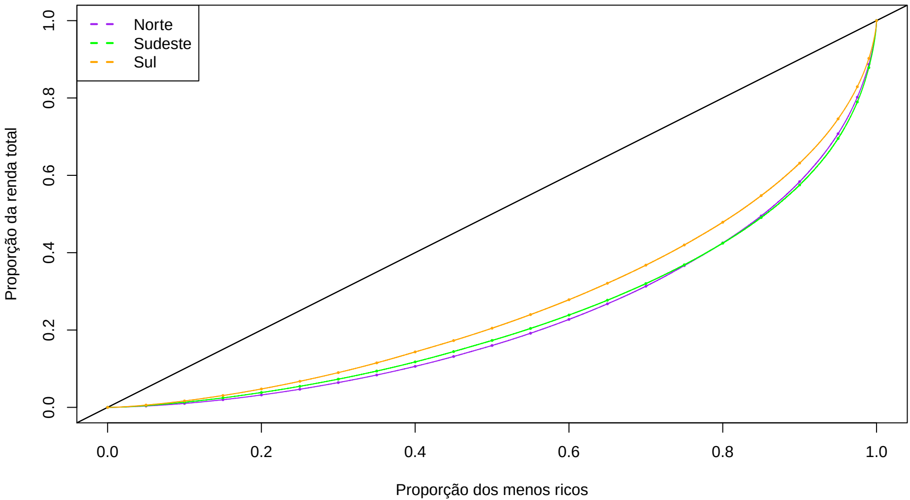
Lorenz-dominância (Atkinson, 1970; Dasgupta, Sen e Starrett, 1973)

- Suponha duas distribuições, A e B;
  - Com curvas de Lorenz $L_A(p)$ e $L_B(p)$, respectivamente.
- Há Lorenz-dominância de A sobre B quando $L_A(p) \geqslant L_B(p), \forall p \in [0, 1]$
  - Ou seja: quando os p% menos ricos de A possuem uma proporção maior da renda total de A do que os mesmos p% em B em relação à renda total de B, para todo p% entre 0% e 100%.

Lorenz-dominância (Atkinson, 1970; Dasgupta, Sen e Starrett, 1973)

- Em notação, A Lorenz-domina B é escrito como $A \preceq B$;
- Quando $A \preceq B$, todas as medidas que atendam os quatro princípios (SIM, IP, IE e PPD) vão ordenar as distribuições da mesma maneira.

Lorenz-dominância (Atkinson, 1970; Dasgupta, Sen e Starrett, 1973)



Propriedades Adicionais

- Normalização
- Decomponibilidade por Grupo
- Sensibilidade à transferência

Normalização

- O princípio da normalização estabelece que a medida só pode assumir valores no intervalo $[0, 1]$.
- Existe um valor de igualdade perfeita e desigualdade perfeita.

Decomponibilidade por Grupo (Shorrocks, 1984)

- Sob este princípio, a medida de desigualdade pode ser decomposta em duas componentes:
  - Desigualdade Intra-grupos; e
  - Desigualdade Inter-Grupos.
- Isso ajuda a responder perguntas do tipo:
  - A desigualdade nesta região decorre da desigualdade dentro de cada município ou entre cada município?
  - Quanto da desigualdade total é atribuído à desigualdade dentro de cada setor ou entre setores?

Sensibilidade à transferência (Shorrocks e Foster, 1987)

- Transferência Composta Favorável:
  - Duas transferências simultâneas:
    1. Uma transferência regressiva de $\$\delta$ entre os mais ricos; e
    2. Uma transferência progressiva de $\$\delta$ entre os mais pobres.
  - Pelo princípio de Pigou-Dalton:
    1. Aumenta a desigualdade entre os mais ricos; e
    2. Reduz a desigualdade entre os mais pobres.

Sensibilidade à transferência (Shorrocks e Foster, 1987)

- Pelo princípio da sensibilidade à diferença, quando ocorre uma transferência composta favorável, a medida de desigualdade deve diminuir.
- Esse princípio ajuda a diferenciar *desigualdade* e *polarização* de renda.

Algumas medidas de desigualdade

1. Variância e Coeficiente de Variação;
2. Razão de Palma;
3. Índice de Gini;
4. Índices de Entropia Generalizada.

Variância e Coeficiente de Variação

- A variância da renda é definida como:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2}{n}$$

- Atende: Simetria, Invariância Populacional, Pigou-Dalton,
- Decomponibilidade por Grupo.
- Falha: Invariância de escala.
- Lorenz-dominância não funciona.

Variância e Coeficiente de Variação

- O coeficiente de variação (CV) resolve a invariância de escala:

$$CV = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2}} = \frac{\sigma}{\mu}$$

- Lorenz-dominância funciona.

Variância e Coeficiente de Variação

- Considere duas distribuições de renda:
  - $A = (10, 40, 100)$; e
  - $B = (20, 20, 110)$.
- $\mu = 50$ nas duas distribuições.
- Neste caso, $CV_A^2 = 2.24$ e $CV_B^2 = 2.88$.
  - Pelo CV^2 , A é mais desigual que B.
- Porém, em B, mais pessoas recebem a mesma renda.
  - Ou seja: poderíamos argumentar que B seria menos "desigual".

Variância e Coeficiente de Variação

- O CV^2 coloca muito peso nas rendas mais altas;
  - Média das distâncias quadráticas em relação à média.
- Falha na sensibilidade à transferência.
  - Dispersão $\neq$ Desigualdade.

Razão de Palma (Cobham, Schlögl e Sumner, 2016; Palma, 2011)

- Analisadno as distribuições de renda dos países ao longo do tempo, Palma (2011) encontrou um padrão:
  - O grupo entre os decis 5 e 9 costumam possuir aproximadamente 50% da renda total
- A variabilidade das distribuições é explicada por duas frações:
  - Total da renda apropriado pelos 40% mais pobres; e
  - Total da renda apropriado pelos 10% mais ricos.

Razão de Palma (Cobham, Schlögl e Sumner, 2016; Palma, 2011)

- Em termos da curva de Lorenz:
  - A fração da renda dos 40% mais pobres: $L(40\%)$;
  - A fração da renda dos 10% mais ricos: $1 - L(90\%)$.
- Razão de Palma:

$$P_R = \frac{1 - L(90\%)}{L(40\%)}$$

- Vantagem: fácil de explicar.

Razão de Palma (Cobham, Schlögl e Sumner, 2016; Palma, 2011)

	Medidas			
Região	Palma	Gini	Theil-L	Theil-T
Sul	2.569	0.462	0.381	0.427
Sudeste	3.612	0.523	0.492	0.567
Norte	3.917	0.532	0.526	0.561

Fonte: PNAD Contínua 2019, 1ª Visita. Microdados.

Razão de Palma (Cobham, Schlögl e Sumner, 2016; Palma, 2011)

- E o Princípio de Pigou-Dalton?
- Divida a população em três partes:
  - 40% mais pobres;
  - 10% mais ricos; e
  - A "classe média", entre 40% mais pobres e os 10% mais ricos.
- A medida aumenta quando há transferência regressiva de membros:
  - Da classe mais pobre para membros de qualquer outra classe;
  - Da "classe média" para a classe mais rica.
- É insensível às transferências dentro de cada classe.
  - É possível ter transferência regressiva e não ter aumento da medida.

Índice de Gini

- Sem dúvida, é a medida de desigualdade mais utilizada.
- Existe uma dúzia de maneiras de ver o índice de Gini, mas duas são mais interessantes:
  - Como áreas abaixo da curva de Lorenz sob igualdade perfeita;
  - Como média de distância entre rendas.

Índice de Gini

- Lembrando: quanto mais afastada da diagonal, mais desigual é a sociedade.
- O índice de Gini é proporcional à área entre a diagonal e a curva observada.
  - No caso de igualdade perfeita, a área é 0.
  - No caso de desigualdade perfeita, a área entre as curvas é de 0.5.
- O índice de Gini é o dobro destas áreas.

Índice de Gini

- Índice de Gini como metade da média dos módulos das diferenças relativas:

$$G = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{|y_i - y_j|}{\mu}$$

- Isso mostra como o índice de Gini não pode ser decomposto:
  - Pode decompor o numerador, mas não o denominador.
  - A não ser que os grupos sejam classes de renda não-sobrepostas.

Índices de Entropia Generalizada

- Até agora, só a variância era dominível em grupos;
- Shorrocks (1980) provou a seguinte aformação:
  - Uma medida de desigualdade que atende simultanteamente:
    - Princípio de Pigou-Dalton;
    - Invariância populacional;
    - Invariância de escala;
    - Decomponibilidade por Grupo
  - ... só pode ser um Índice de Entropia Generalizada.
    - Ou uma transformação dele.

Índices de Entropia Generalizada

Os índices de Entropia Generalizada têm a seguinte fórmula:

$$IEG_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2-\alpha}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^\alpha - 1\right], & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \\ -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{y_i}{\mu}, & \alpha \to 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu}\ln\frac{y_i}{\mu}, & \alpha \to 1. \end{cases}$$

onde α é um parâmetro de aversão/sensibilidade à desigualdade.

Índices de Entropia Generalizada

- Quanto menor o valor de α, mais importância é dada para as transferências entre os mais pobres.
  - Ou seja: transferências regressivas entre os mais pobres afetam mais a desigualdade do que entre os mais ricos.
- Quanto maior o valor de α, mais importância é dada para as transferências entre os mais ricos.
- Os casos especiais IEG_0 e IEG_1 são chamados de Theil-L e Theil-T.
  - Também podemos mostrar que $IEG_2 = CV^2$.

Antes do fim...

Segundo Subramanian (2019, p. 39), existem dois extremos:

- *Fetichistas da mensuração*, que raramente vêem a desigualdade como uma condição humana sentida e experimentada além das equações e fórmulas;
- *Niilistas da mensuração*, que consideram as medidas como um exercício frio, calculista e desalmado realizado por especialistas que usam símbolos arcanos e dados pouco confiáveis para construir imagens incorretas da realidade.

Mas a verdade está entre os dois.

Antes do fim. . .

Ainda segundo Subramanian (2019, p. 39),

- Mensuração é uma maneira de garantir que as nossas descrições são baseadas em evidências mais tangíveis e objetivas do que julgamentos baseados em impressões e empiricismo casual;
- Mensuração é indispensável, mas é pior que inútil quando ignora a coerência lógica e o apelo normativo.

Antes do fim...

1. Análise de desigualdade não é apenas medir concentração. Existe um julgamento ético sobre quais distribuições são mais ou menos justas.
2. É importante avaliar como cada medida trata diferenças na base ou no topo da distribuição de renda;
    - Ou seja: a sensibilidade em relação à renda dos mais pobres.

Referências

ATKINSON, A. B. On the Measurement of Inequality. **Journal of Economic Theory**, v. 2, n. 3, 3, p. 244–263, set. 1970.

ATKINSON, A. B.; BRANDOLINI, A. On Analyzing the World Distribution of Income. **The World Bank Economic Review**, v. 24, n. 1, p. 1–37, jan. 2010.

COBHAM, A.; SCHLÖGL, L.; SUMNER, A. Inequality and the Tails: the Palma Proposition and Ratio. **Global Policy**, v. 7, n. 1, p. 25–36, 2016.

DALTON, H. The Measurement of the Inequality of Incomes. **The Economic Journal**, v. 30, set. 1920.

DASGUPTA, P.; SEN, A.; STARRETT, D. Notes on the measurement of inequality. **Journal of Economic Theory**, v. 6, n. 2, p. 180–187, 1973.

Referências

FOSTER, J. *et al.* **A Unified Approach to Measuring Poverty and Inequality**. Washignton, D.C.: The World Bank, 2013.

KOLM, S.-C. Unequal inequalities. I. **Journal of Economic Theory**, v. 12, n. 3, p. 416–442, 1976.

KRTSCHA, M. **A New Compromise Measure of Inequality** (W. Eichhorn, Ed.)Models and Measurement of Welfare and Inequality. **Anais**...Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1994

PALMA, J. G. Homogeneous Middles vs. Heterogeneous Tails, and the End of the 'Inverted-U': It's All About the Share of the Rich. **Development and Change**, v. 42, n. 1, p. 87–153, 2011.

PIGOU, A. C. **Wealth and Welfare**. London: Macmillan, 1912.

SHORROCKS, A. F. The Class of Additively Decomposable Inequality Measures. **Econometrica**, v. 48, n. 3, p. 613–625, 1980.

Referências

SHORRROCKS, A. F. Inequality Decomposition by Population Subgroups. **Econometrica**, v. 52, n. 6, p. 1369–1385, 1984.

SHORRROCKS, A. F.; FOSTER, J. E. Transfer Sensitive Inequality Measures. **The Review of Economic Studies**, v. 54, n. 3, p. 485–497, jul. 1987.

SUBRAMANIAN, S. **Inequality and Poverty**. Singapura: Springer Singapore, 2019.

VILLAR, A. **Lectures on Inequality, Poverty and Welfare**. Cham, Suíça: Springer International Publishing, 2017.