Dominância em desigualdade e pobreza

Guilherme Jacob

06/09/2018

Dominância Distributiva

Por que dominância?[1]

- A idéia de ordenar desigualdade e pobreza usando medidas numéricas tem muitos atrativos.
  - Por exemplo, a expressão da desigualdade em um plano real permite comparar quaisquer duas distribuições de renda.
- Entretanto, estas comparações são desconcertantemente dependentes da medida utilizada.

Assim, surge a necessidade de ferramentas capazes de análises *mais robustas*. Uma possibilidade é a ideia de **dominância**.

[1] Esta apresentação se baseia nos capítulos 9 e 10 de Duclos e Araar (2006).

Dominância Distributiva

- Comparações ordinais de pobreza e desigualdade envolvem o uso de *classes*[2] de índices distributivos.
- É interessante definirmos estas classes de acordo com "ordens de julgamento normativo (ou ético)".
- Um *julgamento ético de ordem s* é usado para definir uma *classe de índices distributivos de ordem s*.
- Os *testes de dominância* verificam empiricamente se um ordenamento de desigualdade ou pobreza é valido para todos os índices da classe s.

[2] Ou *famílias*.

De modo mais simples:

- Se duas curvas de dominância de uma dada ordem não se cruzam, todos os índices que obedecem os princípios éticos associados àquela ordem de dominância ordenarão as duas distribuições da mesma maneira.
- Portanto, um teste de dominância de ordem s serve para:
    - Testar se um ordenamento distributivo é válido para todos os índices de uma classe de ordem s; e
    - Constatar se a classe de ordem s pode ser interpretada através do uso de julgamentos éticos de mesma ordem s.

Alguns princípios éticos

Definição (Princípio de Pareto).

Seja $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\eta > 0$ uma constante e $\dot{\mathbf{y}} = (y_1, \ldots, y_i + \eta, \ldots, y_n)$. Uma função de bem-estar social W obedece o *princípio de Pareto* se e somente se $W(\mathbf{y}) \leqslant W(\dot{\mathbf{y}})$ para todos os pares possíveis de $\mathbf{y}$ e $\dot{\mathbf{y}}$.

- Em outras palavras, o **princípio (forte) de Pareto** impõe que, *coeteris paribus*, a melhora o bem-estar de um indivíduo deve resultar em *melhora* do bem-estar social.
  - Uma versão menos restritiva, o **princípio (fraco) de Pareto**, exige que, *coeteris paribus*, o bem-estar social *não piore* com a melhora do bem-estar de um indivíduo.
- Como o princípio de Pareto é pouco restritivo, todos os índices que o atendem são índices de classe 0.
- *Exemplo:* um índice de pobreza de classe 0 deverá diminuir sempre que a renda de um indivíduo aumentar, *coeteris paribus*.

- Funciona bem com ordenamentos de pobreza e bem-estar.
- Falha com ordenamentos de desigualdade. Motivos:
  - Aleatoriedade fundamental das distribuições de renda;
  - Heterogeneidade de preferências, dotações e mercados.

Julgamentos de primeira ordem

Definição (Princípio da Anonímia).

Seja $\mathbf{M}$ uma matriz-permutação $n \times n$ e seja $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{M}\mathbf{y}'$. Uma função de bem-estar W obedece o **princípio da anonímia** se e somente se $W(\mathbf{y}) = W(\dot{\mathbf{y}})$ para todos os pares possíveis de $\mathbf{y}$ e $\dot{\mathbf{y}}$.

- **Obs.:** uma matriz-permutação é uma matriz binária onde cada linha e coluna somam 1.
- Também chamado de **princípio da simetria**, este princípio implica que a *identidade* do indivíduo não afeta o índice distributivo. O que importa é a *renda*.
- *Exemplo:* sob este princípio, o valor associado à distribuição $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ deve ser o mesmo ao associado à distribuição $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Definição (Princípio da Invariância Populacional).

Seja $\dot{\mathbf{y}}$ um vetor de tamanho $2n$, com $\dot{\mathbf{y}} = (y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ldots, y_n, \dot{y}_n,)$ e com $y_j = \dot{y}_j, \forall j = 1, \ldots, n$. Uma função de bem-estar social W obedece o *princípio da invariância populacional* se e somente se $W(\mathbf{y}) = W(\dot{\mathbf{y}})$ para todos os pares possíveis de $\mathbf{y}$ e $\dot{\mathbf{y}}$.

- Classes de primeira ordem de índices distributivos agrupam todos os índices que atendem, simultaneamente, aos princípios da anonímia e da invariância populacional.
- Assim, estes índices mostram uma melhora social quando a renda em algum percentil da população aumenta e todas as outras permanecem constantes.

Julgamentos de ordens mais altas

Definição (Princípio de Pigou-Dalton).

Seja $\eta > 0$ qualquer constante positiva e seja $\dot{\mathbf{y}} = (y_1, \ldots, y_j + \eta, \ldots, y_k - \eta, \ldots, y_n)$, com $y_i + \eta \leqslant y_k - \eta$. Uma função de bem-estar W obedece o *princípio de Pigou-Dalton* se e somente se $W(\mathbf{y}) \leqslant W(\dot{\mathbf{y}})$ para todos os pares possíveis de $\mathbf{y}$ e $\dot{\mathbf{y}}$.

- Em outras palavras, uma transferência progressiva de renda (que mantenha a média constante) deve resultar em melhora da situação social.
- As medidas nesta classe apresentam uma preferência pela igualdade, sendo descritas como *medidas sensíveis à distribuição*.
- Transferências no *topo da distribuição* tem o **mesmo impacto** que transferências na *base da distribuição*.
- Entretanto, existem razões éticas para nos preocuparmos mais com o que acontece entre os mais pobres.
- A classe de segunda ordem de índices distributivos inclui todos aqueles que atendem o princípio de Pigou-Dalton.

Definição (Princípio da sensibilidade à transferência).

Seja $\eta > 0$ qualquer constante positiva e seja $y_j - y_i = y_l - y_k > 2\eta$ com $y_i < y_k$. Seja $\dot{\mathbf{y}} = (y_1, \ldots, y_i + \eta, \ldots, y_j - \eta, \ldots, y_l + \eta, \ldots, y_n)$.\ Uma função de bem-estar W obedece o *princípio da sensibilidade à transferência* se e somente se $W(\mathbf{y}) \leqslant W(\dot{\mathbf{y}})$ para todos os pares possíveis de $\mathbf{y}$ e $\dot{\mathbf{y}}$.

- Uma *transferência composta favorável* ocorre quando uma transferência progressiva na base da distribuição ocorre junto com uma transferência regressiva no topo.
- Os índices que atendem este princípio devem indicar melhora da situação social quando uma transferência composta favorável ocorre.
- A classe de terceira ordem de índices distributivos inclui todos aqueles que atendem este princípio.

- Indutivamente, podemos gerar julgamentos de n-ésima ordem.
  - Um índice de quarta ordem, por exemplo, deve demonstrar uma melhora na sociedade quando duas transferencias compostas favoráveis simétricas e opostas ocorrem simultaneamente.
- À medida que a ordem s aumenta, maior sensibilidade é atribuída às transferências entre os mais pobres.
- No limite $s \to \infty$, apenas a renda do indivíduo mais pobre importa para comparações entre duas sociedades.
  - Esta ideia é parecida com o *princípio da diferença* formulado em Rawls (1971)[3].
- Nas próximas seções, iremos aplicar o conceito de dominância em questões de *pobreza*, *desigualdade* e *bem-estar*.

[3] Uma versão voltada para economistas pode ser encontrada em Rawls (1974).

Dominância de Pobreza

Dominância de Pobreza

Vamos nos restringir à classe de índices de pobreza aditivos, denotada por $\Pi^s(z^+)$, onde s é a ordem ética da classe e z^+ é um limite superior para todas as linhas de pobreza razoáveis. Os índices desta classe podem ser expressos pela seguinte função:

$$P(z) = \int_0^1 \pi\big(Q(p); z\big) dp$$

onde z é uma linha de pobreza arbitrária e $\pi\big(Q(p); z\big)$ é um indicador do estado de pobreza de alguém com renda \$ Q(p)\$.

- Note que, por definição, os princípios da *anonímia* e *invariância populacional* são atendidos, já que a definição se baseia em quantis da distribuição de renda.

Princípio do Foco em Pobreza

- Também podemos pensar em $\pi\big(Q(p); z\big)$ como a contribuição de um indivíduo com renda $Q(p)$ para o nível geral de pobreza $P(z)$.
- Pontanto, é razoável pensar que $p^* : Q(p^*) > z \implies \pi\big(Q(p^*); z\big) = 0$. Ou seja, o nível de pobreza depende apenas das rendas das pessoas em situação de pobreza.
- Este é o chamado **princípio do foco em pobreza**: variações nas rendas de pessoas não-pobres não podem afetar o nível geral de pobreza.

Primeira classe de índices de pobreza

A *primeira classe de índices de pobreza*, denotada por $\Pi^1(z^+)$, reúne os índices que atendem:

- Diminuem quando a renda de alguém aumenta
- E cuja linha de pobreza não excede z^+.

Formalmente, denotando a *i*-ésima derivada de $\pi(Q(p); z)$ como $\pi^{(i)}(Q(p); z)$, temos

$$\Pi^1(z^+) = \left\{ P(z) : \begin{array}{l} Q(p) \leqslant z \implies \pi^{(1)}(Q(p); z) \leqslant 0, \\ z \leqslant z^*. \end{array} \right\}$$

- Esta primeira derivada não-positiva de $\pi(Q(p); z)$ é o *princípio de Pareto*.

Segunda classe de índices de pobreza

- O princípio de Pareto é uma restrição muito branda sobre um índice distributivo, já que não leva em consideração a importância de transferências progressivas/regressivas.
- Assim, podemos adicionar um critério mais restritivo: o *princípio de Pigou-Dalton*.
- Neste caso, tomaremos a seguinte formulação:

  Considere duas pessoas. Diante de um dado acréscimo de renda, é razoável pensar que a pessoa mais pobre se beneficiaria mais do que a pessoa mais rica.

- Aumentos de renda resultam em diminuições decrescentes em $\pi\big(Q(p); z\big)$.
  - $\pi\big(Q(p); z\big)$ se torna cada vez menos negativa.
  - A $\pi\big(Q(p); z\big)$ é *convexa* em relação à renda.
- Matematicamente, isso impõe uma restrição na segunda derivada de $\pi\big(Q(p); z\big)$: $\pi^{(2)}\big(Q(p); z\big) \geqslant 0$.
- Então, com esta restrição, vamos definir a segunda classe de índices de pobreza.

A *segunda classe de índices de pobreza* pode ser descrita como:

$$\Pi^2(z^+) = \left\{ P(z) : \begin{array}{l} P(z) \in \Pi^1(z^+), \\ Q(p) \leqslant z \implies \pi^{(2)}(Q(p); z) \geqslant 0, \\ \pi(z; z) = 0. \end{array} \right\}$$

- Claramente, $\Pi^2(z^+) \subset \Pi^1(z^+)$.
- $\pi(z; z) = 0$ significa que $\pi(Q(p); z)$ é contínuo sobre a linha de pobreza.

Terceira classe de índices de pobreza

- Como na seção anterior, adicionaremos o *princípio da sensibilidade à transferência*.
  - Neste caso, uma transferência composta favorável não pode aumentar a pobreza.
  - A segunda derivada de $\pi\big(Q(p); z\big)$ é decrescente em $Q(p)$.
- Isto se traduz matematicamente em uma restrição sobre a terceira derivada de $\pi\big(Q(p); z\big)$: $\pi^{(3)}\big(Q(p); z\big) \leqslant 0$.

Matematicamente,

$$\Pi^3(z^+) = \left\{ P(z): \begin{array}{l} P(z) \in \Pi^2(z^+), \\ Q(p) \leqslant z \implies \pi^{(3)}(Q(p); z) \leqslant 0, \\ \pi^{(1)}(z; z) = 0. \end{array} \right\}$$

- Consequentemente, $\Pi^3(z^+) \subset \Pi^2(z^+)$.

s-ésima classe de índices de pobreza

Para $s \geqslant 3$, temos a seguinte generalização:

$$\Pi^s(z^+) = \left\{ P(z) : \begin{array}{c} P(z) \in \Pi^{(s-1)}(z^+), \\ Q(p) \leqslant z \implies (-1)^s \pi^{(s)}(Q(p); z) \leqslant 0, \\ \pi^{(i)}(z; z) = 0, \ \forall i = 1, \ldots, s-2. \end{array} \right\}$$

- À medida que s aumenta, mais importância é dada às rendas dos indivíduos em pior situação.
- Como $\Pi^s(z^+) \subset \Pi^{s-1}(z^+)$, a medida que s aumenta, mais restrita é a classe de índices.

Dominância de pobreza

Estamos interessados em poder afirmar categoricamente que a pobreza em uma distribuição A é maior que a pobreza em uma distribuição B, *para todos* os índices de pobreza $P(z)$ pertencentes a uma das classes definidas anteriormente.

Consequentemente, estamos interessados em saber se a diferença $\Delta P(z) = P_A(z) - P_B(z)$ é positiva:

$$\begin{aligned}
\Delta P(z) &= \int_0^1 \pi(Q_A(p); z)\, dp - \int_0^1 \pi(Q_B(p); z)\, dp \\
&= \int_0^1 \Big[\pi(Q_A(p); z) - \pi(Q_B(p); z) \Big] dp \\
&= \int_0^z \pi(y; z) \Delta f(y) dy
\end{aligned}$$

Processo recursivo

- Para descobrir isso, faremos diversas iterações usando curvas de dominância estocástica $D^s(z)$ para ordem de dominância $s \in \mathbb{N}, s = 1, 2, \ldots, +\infty$.
- Primeiramente, $D^1(z) = F(z)$.
  - Ou seja: a curva de dominância de primeira ordem nada mais é que função de distribuição acumulada em z.
- Curvas de ordem mais alta são definidas por $D^s(z) = \int_0^z D^{s-1}(y)dy$.
  - Logo, $D^2(z) = \int_0^z F(y)dy$.
- Esta definição recursiva pode parecer um problema a princípio.
- No entanto, existe uma relação entre curvas de dominância e a classe FGT que facilita o cálculo da $D^s(z)$.

Ligação entre índices *FGT* e $D^s(z)$

Pode-se demonstrar que

$$\begin{aligned} D^s(z) &= c \cdot \int_0^z (z-y)^{s-1} dy \\ &= c \cdot P(z; \alpha = s-1) \end{aligned}$$

onde $c = {}^1\!/_{(s-1)!}$.

Prova por indução

1. *Caso $s = 1$:*

$$\begin{aligned} s = 1 \implies D^1(z) &= [1/0!] \cdot \int_0^z (z-y)^0 dy \\ &= \int_0^z (z-y)^0 dy \\ &= \int_0^z dy = F(z) \end{aligned}$$

Prova por indução

2. *Indução:* $D^{n+1}(z) = \frac{1}{n!}\int_0^z (z-y)^n dy$:

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(z) &= \int_0^z D^n(y)dy \\
&= \int_0^z \left[\frac{1}{(n-1)!}\int_0^z (z-y)^{n-1}dy\right]dy \\
&= \int_0^z \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_0^z (z-y)^{n-1}dy\right]dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z \frac{(z-y)^n}{n}dy \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^z (z-y)^n dy
\end{aligned}$$

Dominância de pobreza

Retornando às definições anteriores e aplicando integração por partes:

$$\begin{aligned}\Delta P(z) &= \int_0^z \pi(y;z)\Delta f(y)dy \\ &= \pi(z;z)\Delta D^1(z) - \int_0^z \pi^{(1)}(y;z)\Delta D^1(y)dy\end{aligned}$$

onde $D^s(y) = D^s_A(y) - D^s_B(y)$. Desta forma,

$$\Delta P(z) \geqslant 0 \iff \pi(z;z)\Delta D^1(z) \geqslant \int_0^z \pi^{(1)}(y;z)\Delta D^1(y)dy$$

- Lembremos a definição da classe $\Pi^1(z^+)$:

$$\Pi^1(z^+) = \left\{ P(z) : \begin{array}{l} Q(p) \leqslant z \implies \pi^{(1)}(Q(p); z) \leqslant 0, \\ z \leqslant z^*. \end{array} \right\}$$

- Para que $\Delta P(z) \geqslant 0, \; \forall P(z) \in \Pi^1(z^+)$, a condição é

$$\begin{aligned} \Delta D^1(y) \geqslant 0 &\iff D^s_A(y) - D^s_B(y), \quad \forall y \in [0, z^+] \\ &\iff F_A(y) - F_B(y), \quad \forall y \in [0, z^+]. \end{aligned}$$

Este resultado é chamado de *dominância de pobreza de primeira ordem* e pode ser escrito como:

Dominância de Pobreza de Primeira Ordem.

$$P_A(z) - P_B(z) \geqslant 0, \, \forall P(z) \in \Pi^1(z^+)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$D^1_A(y) - D^1_B(y) \geqslant 0, \, y \in [0, z^+]$$

- (Quase) todos os índices de pobreza já propostos são de primeira ordem.

Se esta condição se verifica, é possível afirmar que, para qualquer $z \in [0, z^+]$:

- *A pobreza em A é menor do que em B*;
- Independente do índice, desde que ele seja elemento de $\Pi^1(z^+)$, a pobreza medida em A é maior que a pobreza medida em B.

Ou seja: você não precisa calcular x índices de pobreza diferentes, nem testar dominâncias de ordem maiores. **Todos os índices concordarão no ordenamento!**

Integrando por partes novamente, temos:

$$\begin{aligned}\Delta P(z) &= \pi(z;z)\Delta D^1(z) - \int_0^z \pi^{(1)}(y;z)\Delta D^1(y)dy \\ &= \pi(z;z)\Delta D^1(z) - \pi^{(1)}(z;z)\Delta D^2(z) + \int_0^z \pi^{(2)}(y;z)\Delta D^2(y)dy\end{aligned}$$

Consequentemente, para $P(z) \in \Pi^2(z^+)$,

$$\begin{aligned}
\Delta P(z) \geqslant 0 &\iff -\pi^{(1)}(z;z)\Delta D^2(z) + \int_0^z \pi^{(2)}(y;z)\Delta D^2(y)dy \geqslant 0 \\
&\iff \int_0^z \pi^{(2)}(y;z)\Delta D^2(y)dy \geqslant \pi^{(1)}(z;z)\Delta D^2(z) \\
&\iff \int_0^z \pi^{(2)}(y;z)\Delta D^2(y)dy \geqslant 0 \\
&\iff \Delta D^2(y) \geqslant 0, \forall y \in [0, z^+] \\
&\iff D_A^2(y) \geqslant D_B^2(y), \forall y \in [0, z^+]
\end{aligned}$$

Este resultado é chamado de *dominância de pobreza de segunda ordem* e pode ser escrito como:

Dominância de Pobreza de Segunda Ordem.

$$P_A(z) - P_B(z) \geqslant 0, \; \forall P(z) \in \Pi^2(z^+)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D_A^2(y) - D_B^2(y) \geqslant 0, \; y \in [0, z^+]$$

- Lembre que $D^2(z) = c \cdot P(z; \alpha = 1)$.
- Ou seja, neste caso, a média do hiato de pobreza seja maior em A do que em B para qualquer linha de pobreza $z \in [0, z^+]$.
- Se acondição se verifica, diz-se que a pobreza é maior em A do que em B para todos os índices
  - contínuos sobre a linha de pobreza; e
  - que apresentam preferência pela igualdade.

Recursivamente, podemos generalizar a técnica.

Dominância de Pobreza de *n*-ésima Ordem.

$$P_A(z) - P_B(z) \geqslant 0, \forall P(z) \in \Pi^s(z^+)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$D_A^s(y) - D_B^s(y) \geqslant 0, \; y \in [0, z^+]$$

À medida que a ordem de dominância aumenta, mais importância é dada à distância entre a renda dos pobres e a linha de pobreza:

- Ordem 1: curva de *incidência* de pobreza
- Ordem 2: curva de *déficit* de pobreza (ou hiatos de pobreza)
- Ordem 3: curva de *severidade* de pobreza (ou hiatos quadráticos de pobreza)

Conclusão

Aprendemos que:

- A dominância de pobreza de primeira ordem:
  - Está relacionada à extensão da pobreza;
  - É interessante como ponto de partida para as análises;
  - É facilmente observada a partir das curvas de distribuição acumulada;
  - Dominância em F equivale à dominância de pobreza de primeira ordem;
  - Quando ela ocorre, praticamente todos os índices ordenam as distribuições da mesma maneira;
  - Então, a escolha do índice de pobreza é irrelevante.
- A dominância de segunda ordem é:
  - Relacionada à *intensidade* da pobreza;
  - Ajuda a compreender os índices que atendem ao princípio de Pigou-Dalton;
  - É útil para entender o ordenamento da pobreza quando a dominância de primeira ordem falha.
- A dominância de segunda ordem é:
  - Relacionada à *severidade* da pobreza, i.e., à desigualdade entre os

Dominância de Bem-estar

Julgamentos éticos sobre o bem-estar

- Existem inúmeros índices de bem-estar, de modo que uma análise completa seria praticamente impossível (ou tediosa)
- Novos índices continuam a aparecer
- Uma alternativa mais simples e poderosa é aplicar testes de *dominância de bem-estar*
- Diferente da dominância de pobreza, a dominância de bem-estar considera *toda a distribuição de renda*
    - Não usa uma versão censurada da distribuição de renda
    - Não usa o princípio foco de pobreza

Classes de índices de bem-estar social

Suponha um índice de bem-estar rank-dependente e aditivo $W = \int_0^1 U(Q(p))\omega(p)dp$. A classe Ω^1 agrupa todos os índices de bem-estar social crescentes em renda. Ou seja,

$$\Omega^1 = \left\{ W : \begin{array}{l} U^{(1)}(Q(p)) \geqslant 0, \\ \omega(p) \geqslant 0. \end{array} \right\}$$

A segunda classe de índices de bem-estar social agrupa aqueles que apresentam melhora na presença de transferências de renda progressivas que mantenham a renda média constante. Ou seja, índices que atendem ao princípio de Pigou-Dalton. Matematicamente,

$$\Omega^2 = \left\{ W : \begin{array}{c} W \in \Omega^1, \\ U^{(2)}(Q(p)) \leqslant 0, \\ \omega^{(1)}(p) \leqslant 0. \end{array} \right\}$$

A terceira classe agrupa índices de bem-estar social que atendem o princípio da sensibilidade à tranferência. I.e., índices que apresentam melhoras maiores na ocorrência de transferências progressivas na base da distribuição de renda.

Matematicamente,

$$\Omega^3 = \left\{ W : \begin{array}{c} W \in \Omega^2, \\ \omega^{(1)}(p) = 0, \\ U^{(3)}(Q(p)) \geqslant 0. \end{array} \right\}$$

Assim,

- $w(p)$ é uma constante;
- Concavidade decrescente das utilidades individuais em relação à renda.

Para uma classe de ordem s, temos:

$$\Omega^s = \left\{ W : \begin{array}{l} W \in \Omega^{(s-1)}, \\ (-1)^i U^{(i)}(Q(p)) \leqslant 0, \forall i = 1, \ldots, s. \end{array} \right\}$$

- À medida que $s \to \infty$, a importância atribuída à renda do indivíduo em pior condição para a avaliação do bem-estar social aumenta.

Dominância de Bem-estar de Primeira Ordem

As seguintes condições são equivalentes:

1. O bem-estar social é maior em B do que em A para todo índice W que atenda os princípios *de Pareto*, *anonímia* e *invariância populacional*;
2. $W_B \geqslant W_A, \forall W \in \Omega^1$;
3. $P_A(z; \alpha = 0) \geqslant P_B(z; \alpha = 0), \forall z \in [0, \infty]$;
4. $D_A^1(z) \geqslant D_B^1(z), \forall z \in [0, \infty]$;
5. $Q_A(p) \geqslant Q_B(p), \forall p \in [0, 1]$.

- As relações (3) e (4) mostram uma analogia entre dominâncias de primeira ordem de bem-estar social e pobreza;
- A relação (5) mostra uma relação clara entre o *desfile de Pen* e este tipo de dominância.

Dominância de Bem-estar de Segunda Ordem

As seguintes condições são equivalentes:

1. O bem-estar social é maior em B do que em A para todo índice W que atenda os princípios *de Pareto*, *anonímia*, *invariância populacional* e o *princípio de Pigou-Dalton*;
2. $W_B \geqslant W_A, \forall W \in \Omega^2$;
3. $P_A(z; \alpha = 1) \geqslant P_B(z; \alpha = 1), \forall z \in [0, \infty]$;
4. $D_A^2(z) \geqslant D_B^2(z), \forall z \in [0, \infty]$;
5. $GL_A(p) \geqslant GL_B(p), \forall p \in [0, 1]$.

- $GL(p) = \int_0^p Q(q)dq$ é a *Curva de Lorenz Generalizada*;
- Ela associa o quantil p à soma das rendas abaixo de $Q(p)$;
- Pode ser vista como um "desfile de Pen" cumulativo;

Dominância de Bem-estar de s-ésima Ordem

As seguintes condições são equivalentes:

1. $W_B \geqslant W_A, \forall W \in \Omega^s$;
2. $P_A(z; \alpha = s-1) \geqslant P_B(z; \alpha = s-1), \forall z \in [0, \infty]$;
3. $D_A^s(z) \geqslant D_B^s(z), \forall z \in [0, \infty]$.

Conclusão

- Analisar a **dominância de bem-estar** é um *procedimento análogo* à análise da **dominância de pobreza**;
    - Principal diferença: o *axioma do foco de pobreza* não faz parte da dominância de bem-estar;
    - Assim, a primeira é uma forma completa, não-censurada da segunda.
- Os índices *FGT* também tem uma função central aqui.
- A *curva de Lorenz Generalizada* é importante para a *dominância de segunda ordem*, pois combina
    - Uma análise sobre o estado geral da distribuição, com a média cumulativa;
    - Uma análise de aspectos distributivos, de equidade, ao operar sobre a curva de Lorenz padrão.

Dominância de Desigualdade

Dominância de desigualdade

- Como veremos, os índices de desigualdade tem propriedades parecidas com os índices de bem-estar social;
  - Eles reagem de forma similar a variações e realocações de renda.
- No entanto, os índices de desigualdade *relativa* devem ser homogêneos de grau 0;
  - Uma transformação equiproporcional das rendas não afeta estes índices;
  - $I(\mathbf{y}) = I(c \cdot \mathbf{y})$.

Primeira Classe de Índices de Desigualdade

- Considere a *classe de índices de desigualdade de primeira ordem* $\Upsilon^1(I^+)$.
- As proporções de renda (ou quantis normalizados) são denotados por $\bar{Q}(p) = Q(p)/\mu$.
- Índices da classe $\Upsilon^1(I^+)$ raramente são discutidos na literatura, já que os efeitos distributivos são limitados às proporções de renda inferiores à I^+.
- Em vez de atender ao princípio de Pigou-Dalton, estes índices atendem a um princípio de Pareto restrito: apenas as rendas abaixo de I^+ afetam a desigualdade.
- Por isso, $\Upsilon^2 \not\subset \Upsilon^1(I^+)$.

Segunda Classe de Índices de Desigualdade

A classe Υ^2 agrupa todos os índices de desigualdade que atendem ao princípio de Pigou-Dalton.

- Transferências progressivas reduzem a desigualdade.
- Estes índices são Schur-convexos[4].
- Quase todos os índices de desigualdade são desta classe;
    - *Exceção:* variância dos logaritmos.

[4] Uma exposição mais longa sobre o assunto pode ser lida em Le Breton (2006).

Terceira Classe de Índices de Desigualdade

A classe Υ^3 agrupa todos os índices de desigualdade que, além de pertencerem a Υ^2, diminuem *fracamente* na ocorrência de transferências compostas favoráveis.

- Os índices de Atkinson e Entropia Generalizada atendem estas condições.
  - *Exceção:* S-Gini.

À medida que a ordem dos julgamentos éticos aumenta, mais sensível é a medida quanto aos indivíduos com menores proporções de renda.

Analogia

- Quando comparamos distribuições com médias iguais, Υ^s e Ω^s ordenam a distribuição da mesma forma.
  - Assim, podemos analisar a dominância de desigualdade pela dominância de bem-estar!
- Quando as médias diferem, esta relação não é direta.
  - Mas pode ser feita[5] se normalizarmos as rendas pela suas médias respectivas.

[5] Para índices de desigualdade *relativa*, apenas.

Testes de dominância

Diante do exposto no slide anterior, podemos definir uma curva *normalizada* de dominância estocástica como:

$$\bar{D}^s(l\mu) = \frac{D^s(l \cdot \mu)}{(l\mu)^{(s-1)}}.$$

Ela também guarda relação com os índices *FGT* $\bar{P}(z;\alpha)$:

$$\begin{aligned}\bar{D}^s(l\mu) &= c\bar{P}(z;\alpha = s-1) \\ &= c\int_0^1 \left[\frac{g\left(p;l\mu\right)}{l\mu}\right] dp,\end{aligned}$$

- Portanto, estimar a curva normalizada de dominância em $l\mu$ e ordem s é equivalente a computar o índice *FGT* normalizado para uma linha de pobreza igual a $l\mu$ e $\alpha = s - 1$.

Dominância de Desigualdade de Primeira Ordem

As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $I_A - I_B \geqslant 0, \forall I \in \Upsilon^1(l^+)$;
2. $\bar{D}^s_A(l\mu_A) \geqslant \bar{D}^s_B(l\mu_B), \forall \lambda \in [0, l^+]$;
3. $\bar{g}_A(p; l^+\mu_A) \geqslant \bar{g}_B(p; l^+\mu_B), \forall p \in [0, 1]$.

- Note que $\bar{D}^s_A(l\mu_A) \geqslant \bar{D}^s_B(l\mu_B)$ simplesmente compara a proporção de pessoas com renda inferior a $l \cdot \mu$ em A e B, respectivamente.
- Se há menos indivíduos nestas condições em B do que em A, $\forall l \leqslant l^+$, a desigualdade é maior em A, $\forall I(l) \in \Upsilon^1(l^+)$.

Dominância de Desigualdade de Segunda Ordem

As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A desigualdade relativa é maior em B do que em A para qualquer índice que obedeça os princípios de anonímia, invariância populacional e Pigou-Dalton.
2. $I_A \geqslant I_B, \forall I \in \Upsilon^2$;
3. $\bar{P}_A(\mu_B; \alpha = 1) \geqslant \bar{P}_B(\mu_B; \alpha = 1), \forall \lambda \in [0, \infty]$;
4. $\bar{D}_A^2(\lambda \mu_A) \geqslant \bar{D}_B^2(\lambda \mu_B), \forall \lambda \in [0, \infty]$;
5. $L_A(p) \geqslant L_B(p), \forall p \in [0, 1]$.

- A *dominância de segunda ordem* equivale à *dominância de Lorenz*.
  - Essa conclusão deriva de um resultado clássico de Hardy, Littlewood e Pólya (1934), como nota Kolm (1976).

Dominância de Desigualdade de s-ésima Ordem

As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $I_A \geqslant I_B, \forall I \in \Upsilon^s$;
2. $\bar{P}_A(\mu_B; \alpha = s - 1) \geqslant \bar{P}_B(\mu_B; \alpha = s - 1), \forall \lambda \in [0, \infty]$;
3. $\bar{D}^s_A(\lambda\mu_A) \geqslant \bar{D}^s_B(\lambda\mu_B), \forall \lambda \in [0, \infty]$.

- A partir de $s = 3$, $\Upsilon^s \subset \Upsilon^{s-1}$.
- O aumento da ordem do julgamento ético se faz na medida em que a dominância atual é incapaz de ordenar as distribuições.

Conclusão

Chegamos às seguintes conclusões:

- A *dominância de Lorenz* é crucial para as análises sobre desigualdade.
  - Sempre faça o gráfico da *curva de Lorenz*!
- Se a dominância de segunda ordem ocorre, você pode usar qualquer medida de desigualdade que ache mais conveniente.
- Se não há dominância, você pode adicionar um nível extra de sensibilidade à transferência para entender qual é a sociedade mais desigual.

No entanto, terminamos com uma crítica:

- Levando a sensibilidade à transferência ao extremo, tornamo-nos cada vez mais sensíveis às desigualdades entre os mais pobres;
- Por outro lado, já que a igualdade entre os pobres mais que compensa a desigualdade entre os ricos, perdemos cada vez mais a sensibilidade à *polarização*[6];
- Será que a polarização não é um processo pelo menos tão relevante quanto a desigualdade?

[6] Um argumento similar é encontrado em Taptué (2015), Wolfson (1994) e Wolfson (1997). Sobre o conceito de polarização, vide Foster e Wolfson (2010), trabalho originalmente publicado em 1992.

Referências

Referências I

DUCLOS, J.-Y.; ARAAR, A. **Poverty and Equity: Measurement, Policy and Estimation with DAD**. 1. ed. Nova York: Springer US, 2006.

FOSTER, J. E.; WOLFSON, M. C. Polarization and the decline of the middle class: Canada and the U.S. **The Journal of Economic Inequality**, v. 8, n. 2, p. 247–273, jun. 2010.

HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G. **Inequalities**. 2. ed. Cambridge, Massachussets: Cambridge University Press, 1934.

KOLM, S.-C. Unequal inequalities. I. **Journal of Economic Theory**, v. 12, n. 3, p. 416–442, jun. 1976.

LE BRETON, M. **Notes on Inequality Measurement: Hardy, Littlewood and Polya, Schur Convexity and Majorization**. Alba di Canazei: Universitá di Verona, dez. 2006. Disponível em:

Referências II

<http://dse.univr.it/it/documents/it2/le_breton_it2_notes.pdf>.

RAWLS, J. **A Theory of Justice**. Cambridge, Massachussets: Harvard University Press, 1971.

____. Some Reasons for the Maximin Criterion. **The American Economic Review**, v. 64, n. 2, p. 141–146, maio 1974.

TAPTUÉ, A.-M. **Three Essays on Polarization**. Québec, Canadá: Université Laval, 2015.

WOLFSON, M. C. When Inequalities Diverge. **The American Economic Review**, v. 84, n. 2, p. 353–358, maio 1994.

____. Divergent inequalities: theory and empirical results. **Review of Income and Wealth**, v. 43, n. 4, p. 401–421, dez. 1997.