OPERADOR LAPLACIANO ISOTRÓPICO

FULANO DE TAL
UFES -Centro Universitário Norte do Espírito Santo

Resumo: O operador Laplaciano quando aplicado no escopo do processamento de imagens digitais não é invariante frente a transformação de rotação. Um operador laplaciano de tamanho 3X3 foi analisado quanto ao seu comportamento anisotrópico. Com base na análise feita um algoritmo foi definido para o cálculo de um operador otimizado de modo a reduzir ao máximo a anisotropia..

Palavras-chave: Processamento de Imagens, Operador Laplaciano, Detecção de Bordas.

1 Introdução

O operador Laplaciano, assim como outros operadores de diferenciação são muito utilizados no processamento de imagens digitais. Este trabalho apresenta na seção 2 descrições gerais sobre o operador Laplaciano, na seção 3 a definição do Laplaciano de uma borda, na seção 4 e seção 5 considerações sobre a variação máxima e a variância máxima dos valores encontrados para o operador segundo parâmetros definidos nas seções anteriores. Na seção 6 é apresentado o conceito de Laplaciano Relativo e finalmente na seção 7 são apresentados valores de parâmetros e operador Laplaciano encontrado e algumas considerações finais .

Entre muitas aplicação do operador Laplaciano é possível destacar o uso em algoritmos de detecção de bordas. Os operadores de diferenciação são teoricamente invariantes pelas transformações de translação e rotação [Facon-2001]. Teoricamente quando utilizamos derivadas de segunda ordem, que é o caso do operador Laplaciano, definido pela equação 1, é correto afirmar que o operador é também invariante a transformação de rotação, ou seja tem um comportamento isotrópico.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial(x^2)} + \frac{\partial^2}{\partial(y^2)}$$

Equação 1

Embora o operador Laplaciano definido pela equação 1 seja invariante a rotação, na prática, aproximações matemáticas são feitas para que o operador possa ser aplicado ao processamento de imagens digitais. Tais aproximações fazem com que o Laplaciano perca a característica de invariância frente a transformação de rotação. Em outras palavras , se aplicarmos o Laplaciano sobre duas arestas idênticas orientadas por ângulos diferentes obteremos resultados diferentes. Esta variação nos resultados, anisotropia, influi muito nos resultados finais obtidos, em qualquer processamento que envolva o operador. A anisotropia do Laplaciano é um problema bem conhecido [Kangar-Parsi-1999].Um algoritmo foi definido [Kangar-Parsi-1999], que permite calcular um operador cujo os resultados de sua aplicação se aproximam ao máximo do comportamento isotrópico do operador Laplaciano em sua definição.

2 O operador Laplaciano

Na prática, em se tratando do processamento digital de imagens, o Laplaciano é calculado aplicando-se máscaras como a ilustrada na figura 1.

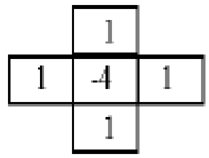

Figura 1.

Para construirmos uma “imagem Laplaciano” [Facon-2001], uma janela é centrada sobre o píxel e os valores da máscara são multiplicados pelos valores dos pontos correspondentes vizinhos do píxel. A soma dessas multiplicações representa o valor do operador aplicado ao pixel do centro dessa vizinhança. Um exemplo desse processo pode ser observado na figura 2 [Facon-2001].

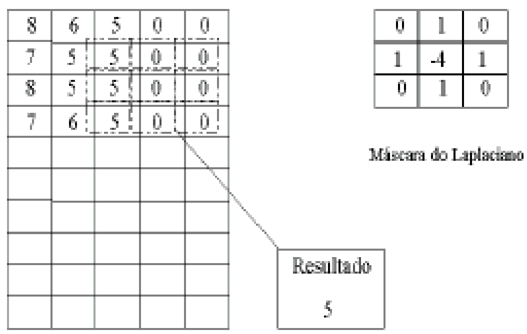

Figura 2

De modo geral podemos representar a máscara 3X3 utilizada para o cálculo do Laplaciano de acordo com a figura 3

$$L(\omega)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline \frac{(1-\omega)}{2} & \omega & \frac{(1-\omega)}{2} \\ \hline \omega & -2(1+\omega) & \omega \\ \hline \frac{(1-\omega)}{2} & \omega & \frac{(1-\omega)}{2} \\ \hline \end{array}$$

Figura 3

3 O Laplaciano de uma Borda .

Os efeitos da anisotropia do operador Laplaciano são mais claramente observados em fronteiras, bordas ou arestas. Por isso as equações para o cálculo do Laplaciano isotrópico enfatiza estas regiões. O Laplaciano de uma borda orientada por um ângulo θ é definido pela equação 2.

$$L(\omega) f(r,\theta) = U(r,\theta) + \omega V(r,\theta)$$

Equação 2

As variáveis envolvidas na equação 2 são:
$L(\omega)\ f(r, \theta)$: Laplaciano em relação a Borda
θ : ângulo de orientação da borda, de acordo com a figura 4
r : distância r de um píxel a aresta, de acordo com a figura 4.
$U(r, \theta)$: Função definida pela equação 3
$V(r, \theta)$: Função definida pela equação 4

$$U(r,\theta) = (f_{i+1,\, j+1} + f_{i-1,\, j+1} + f_{i-1,\, j-1} + \qquad f_{i+1,\, j-1} - 4f_{i,j})/2$$

Equação 3

$$V(r,\theta) = f_{i+1,\, j+1} + f_{i-1,\, j+1} + f_{i-1,\, j-1} + \qquad f_{i+1,\, j-1} - 4f_{i,j} - U(r,\theta)$$

Equação 4

As variáveis envolvidas no cálculo das equações 3 e 4 são:
i e j : referem-se as coordenada dos elementos da máscara que define a vizinhança 3X3 da figura 4.

f(i,j) : refere-se ao valor do pixel em relação a escala de níveis de cinza.

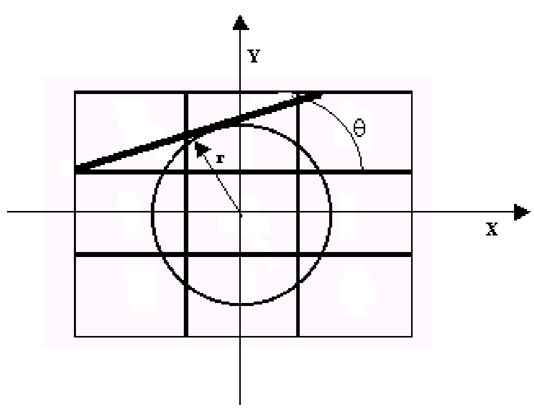

Figura 4

Em resumo o objetivo deste estudo é definir uma forma para calcularmos ω, equação 1, de modo a deixar o Laplaciano o mais isotrópico possível . O valor de ω foi calculado de três formas distintas, levando-se em conta a variação mínima dos valores do Laplaciano , a variância mínima e o Laplaciano Relativo.

4 Variação Mínima

Com o cálculo do Laplaciano com a equação 1, aplicada a vizinhança 3X3 descrita na figura 3, encontramos valores distintos para cada píxel da vizinhança. A diferença entre o maior valor encontrado e o menor valor encontrado é chamado de variação, formalmente definido pela equação 5.

$$D(\omega,r) = max\ [L(\omega) f(r,\theta)] - min\ [L(\omega) f(r,\theta)]$$

Equação 5

O valor de ω que produz a variação mínima no Laplaciano é definido como ω_d e formalmente representado pela equação 6

$$\omega_d = arg\ min\ D(\ \omega,\ r\ )$$

Equação 6

5 Variância Mínima

Considerando a equação 1, o valor de ω que produz a mínima variância é definido por ω_v e formalmente representado pela equação 7.

$$\varpi_v(r) = -\frac{\langle UV\rangle - \langle U\rangle\langle V\rangle}{\langle V^2\rangle - \langle V\rangle^2}$$

Equação 7

Onde <U>, <V>, etc..., são integrais das funções descritas pelas equações 3 e 4

6 Laplaciano Relativo

Ao invés de reduzirmos a anisotropia do Laplaciano, podemos optar por minimizar a anisotropia do Laplaciano Relativo definido pela equação 8.

$$A = -\frac{\langle U \rangle + \omega \langle V \rangle}{U(r,\theta) + \omega V(r,\theta)}$$

Equação 8

O parâmetro ω que minimiza a variância de A, equação 8, é definido como ωr e formalmente definido pela equação 9

$$\omega_r(r) = -\frac{\langle V \rangle \langle UV \rangle - \langle U \rangle \langle V^2 \rangle}{\langle U \rangle \langle UV \rangle - \langle V \rangle \langle U^2 \rangle}$$

Equação 9

7 Conclusão

SEM Conclusão no estudo teórico do 1º semestre

8 Referências

[Kangar-Parsi-1999] Kangar-Parsi,Behzad, Kangar-Parsi Behrooz, e Rosenfeld, Azriel, “**Optimally Isotropic Laplacian Operator**”, IEEE Transactions on Image Processing, 1999, Vol 8, N.º 10, pp 1467-1472.

[Facon-2001] Facon , Jacques, **Processamento e Análise de Imagens**. Pontifícia Universidade Católica do Paraná , 2001, 148 pgs.