Transformações Lineares

Transformações lineares são funções entre espaços vetoriais que preservam a estrutura de adição vetorial e multiplicação por escalar. Elas satisfazem duas propriedades principais: preservação da adição e preservação da multiplicação por escalar. Estas transformações têm diversas aplicações em áreas como matemática, física e engenharia.

by Guilherme da Silva Scher

Exemplo de Transformação Linear

Considere a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x + y, x - y)$. Para verificar se T é linear, precisamos verificar se ela satisfaz as propriedades de preservação da adição e multiplicação por escalar. Ao fazer essa verificação, podemos concluir que T é de fato uma transformação linear.

Preservação da Adição

$T((x1, y1) + (x2, y2)) = T(x1 + x2, y1 + y2) = (2(x1 + x2) + (y1 + y2), (x1 + x2) - (y1 + y2))$.

$T(x1, y1) + T(x2, y2) = (2x1 + y1, x1 - y1) + (2x2 + y2, x2 - y2) = (2(x1 + x2) + (y1 + y2), (x1 + x2) - (y1 + y2))$.

As duas expressões são iguais, portanto T preserva a adição.

Preservação da Multiplicação por Escalar

$T(a(x, y)) = T(ax, ay) = (2(ax) + ay, (ax) - ay) = a(2x + y, x - y) = aT(x, y)$.

Portanto, T também preserva a multiplicação por escalar.

Autovalores e Autovetores

1

Autovetor

Um vetor não nulo v é um autovetor de uma transformação linear T se $T(v) = \lambda v$ para algum escalar λ, chamado de autovalor correspondente.

2

Autovalor

É o escalar λ tal que existe um autovetor v não nulo satisfazendo $T(v) = \lambda v$.

3

Exemplo

Considere a matriz A = [2 1; 1 2]. Encontramos os autovalores resolvendo o determinante da matriz $A - \lambda I$ igual a zero, obtendo $\lambda 1 = 1$ e $\lambda 2 = 3$. Os autovetores associados a esses autovalores são da forma v1 = [1; -1] e v2 = [1; 1].