Grupo de Pesquisa em Instrumentação Eletrônica

Anotações, resumos e exemplos

Análise de Sistemas Lineares

Guilherme Freire Franco

28 de Abril de 2025

Contents

1. Sistemas

1.1. Sistemas Elementares

1.1.1. Sistema Elementar Atrasador

- **Descrição**: Esse sistema aplica um atraso ao sinal de entrada, deslocando-o no tempo. Matematicamente, se o sinal de entrada é $x(t)$, o sinal atrasado é dado por $y(t) = x(t - t_0)$, onde t_0 é o tempo de atraso.
- **Uso do degrau**: O sinal degrau unitário $u(t)$ pode ser usado para tornar um sistema causal, garantindo que o sinal só exista para $t \geq 0$.
- **Exemplo**: Por exemplo, $x(t - t_0)u(t - t_0)$ representa um sinal atrasado e causal.

Ex.: Podemos atrasar o sinal em 1 segundo $y(t) = (t + 1)$, então um sinal que começaria em um determinado t, agora começa em $t + 1$

1.1.2. Sistema Elementar Somador

- **Descrição:** Esse sistema combina dois ou mais sinais de entrada ao somá-los. Para entradas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, o sistema produz $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$.
- **Propriedade Linear:** Esse é um exemplo direto da propriedade de aditividade de sistemas lineares.
- **Exemplo:** A soma de um sinal senoidal e um sinal exponencial: $y(t) = \sin(\omega \cdot t) + e^{-t}$

1.1.3. Sistema Elementar Amplificador/Atenuador

- **Descrição:** Esse sistema escala a amplitude de um sinal multiplicando-o por uma constante K. Se $K > 1$, o sistema amplifica o sinal; se $0 < K < 1$, ele atenua.
- **Matemática:** y(t) = $K \cdot x(t)$.
- **Exemplo:** Um sinal senoidal amplificado em 2 vezes: $y(t) = 2 \cdot \sin(\omega t)$.

1.1.4. Sistema Elementar Multiplicador

- **Descrição:** Multiplica dois sinais de entrada para gerar a saída. Se os sinais de entrada são $x_1(t)$ e $x_2(t)$, a saída é $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$.
- **Propriedade Importante:** Quando um sinal é multiplicado por outro, a convolução de suas frequências ocorre, criando um espectro modulado.
- **Exemplo:** Um sinal senoidal modulado por uma exponencial decrescente: $y(t) = e^{\{-t\}} \cdot \sin(\omega t)$.

1.2. Classificação de Sistemas

Os sistemas podem ser classificados genericamente nas seguintes categorias:

1. Sistemas lineares e não lineares
2. Sistemas com parâmetros constantes ou com parâmetros variando no tempo
3. Sistemas instantâneos (sem memória) ou dinâmicos (com memória)
4. Sistemas causais ou não causais
5. Sistemas contínuos ou discretos no tempo
6. Sistemas analógicos ou digitais
7. Sistemas inversíveis ou não inversíveis
8. Sistemas estáveis ou instáveis

1.2.1. Sistemas Lineares e Não Lineares

Conceito de linearidade: Um sistema cuja saída seja proporcional a sua entrada é um exemplo de um sistema linear.

Mas a linearidade implica mais do que isso. Ela também implica a **propriedade aditiva**.

A propriedade aditiva determina que caso tenhamos duas entradas diferentes x_1 e x_2, teremos então duas saídas y_1 e y_2.

Então pela propriedade, a soma das entradas resulta na soma das saídas:

$$x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$$

Um sistema **linear**, deve também satisfazer a propriedade de **homogeneidade** ou escalonamento.

A homogeneidade diz que para qualquer valor de k (real ou imaginário), caso a entrada aumentar k vezes, a saída também deve aumentar k vezes.

$$x \to y$$

$$kx \to ky$$

Logo a linearidade implica duas propriedades:
- Homogeneidade(escalonamento)
- Aditividade

Essas duas propriedades podem ser combinadas, e teremos assim a propriedade da **superposição**, que pode ser descrita como:

Superposição

Se temos n valores de entrada qualquer, como exemplo, duas entradas x_1 ex_2 que passam por um sistema, tendo uma saída y_1 e y_2 respectivamente, será linear caso:

Para todos os valores de constantes k_1 e k_2:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 \to k_1 y_1 + k_2 + y_2$$

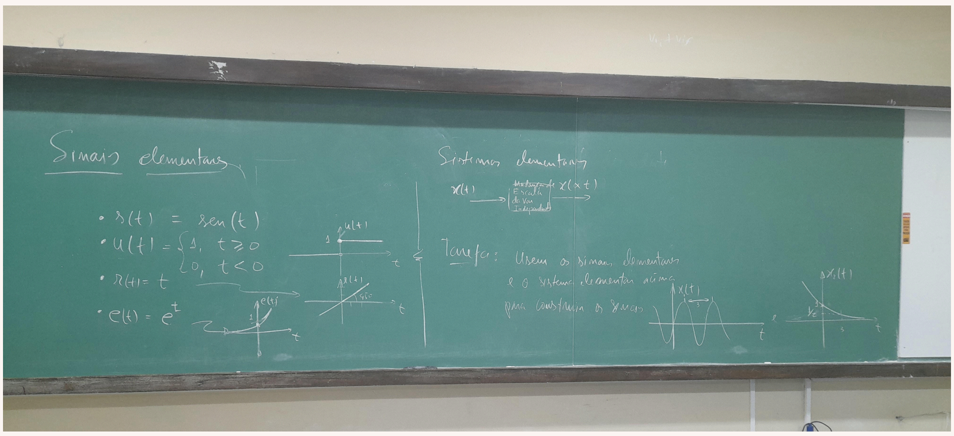
1.3. Atividades

1.3.1. Atividade 1

? Enunciado

Usem os sinais elementares e o sistema de elementar descrito, para construir os sinais.

$$\boxed{x(t)} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \boxed{x(at)}$$



Atividade 01 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

Resposta 1:

Considerando o sinal elementar $s(t)$, que determina uma função seno, operando sobre o produto da frequência angular e o tempo, temos $s(t) = sen(\omega \cdot t)$. Onde a frequência angular é expressa como a divisão entre 2π pelo período T, temos $\frac{2\cdot\pi}{T}$. Portanto, a função elementar é dada por: $sen(\frac{2\cdot\pi}{T} \cdot t)$.

Portanto conseguimos desenvolver um sinal seno com período de 3, determinando o parâmetro T da fórmula como $T = 3$. Sendo assim, esse sinal senoidal, gerado ao longo do tempo terá período 3.

Resposta 2:

O sinal elementar $e(t)$ é determinado pela forma da função elementar exponencial, na forma base $e(t) = A \cdot e^{a\cdot t}$. A partir desse sinal, é preciso determinar quais valores conseguem satisfazer as condições.

$$x(0) = 1, \quad x(3) = \frac{1}{2}$$

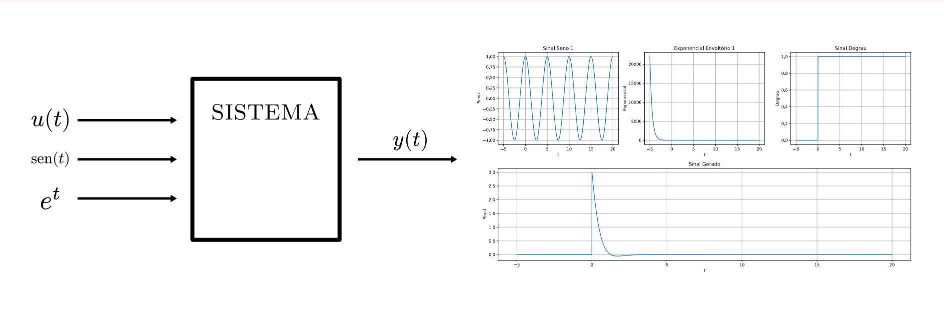
A primeira condição temos um tempo igual a 0, e a resposta do sinal é 1, portanto podemos usando a forma geral do sinal, $e(0) = 1 = A \cdot e^{-\alpha\cdot 0}$, a exponencial se torna 1, tendo assim $1 = A \cdot 1$, a amplitude será 1, e a equação final para essa condição será $e(t) = e^{-\alpha\cdot t}$. O α ser negativo, faz o sinal ser uma exponencial decrescente.

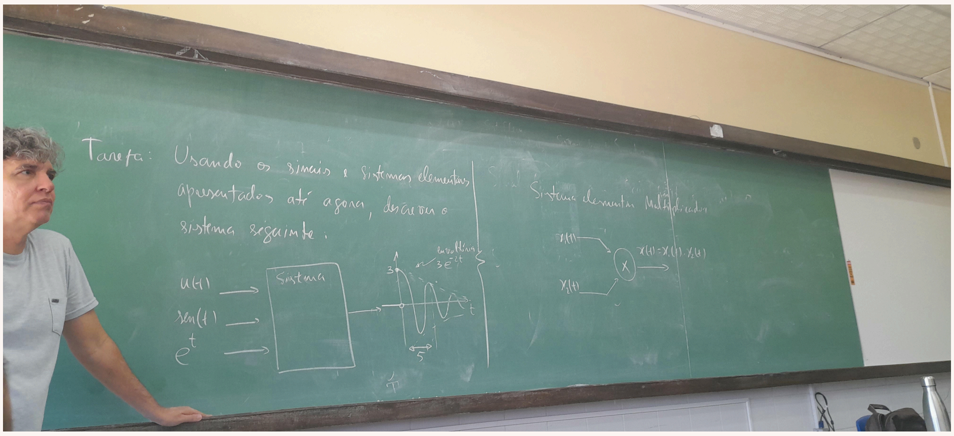
A segunda condição diz que temos um tempo igual a 3, e a resposta do sinal é $\frac{1}{2}$, portanto podemos usando o sinal base encontrado anteriormente, $\frac{1}{2} = e^{-\alpha\cdot 3}$. Usando as propriedades dos exponenciais, e aplicando logaritmo em ambos os lados temos $ln\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \cdot \alpha$. Temos que $ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln(2)$, temos $-ln(2) = -3 \cdot \alpha$. Pode-se simplificar a equação por -3, $\alpha = \frac{ln(2)}{3}$. Substituindo α na equação original teremos $e(t) = e^{-\frac{ln(2)}{3}\cdot t}$. Finalmente, pelas propriedades da exponencial, podemos escrever a função final com: $e(t) = 2^{\frac{t}{3}}$.

1.3.2. Atividade 2

? Enunciado

Usando os sinais e sistemas elementares apresentados até agora, descrever o sistema seguinte





Atividade 02 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

Resposta:

O sinal pode ser obtido pela combinação dos 3 sinais elementares de entrada.

Degrau:

O sinal degrau $u(t)$, faz com que para $t < 0$, o sinal de saída se comporte como se fosse um sinal adormecido. Quando $t \geq 1$, o sinal inicia.

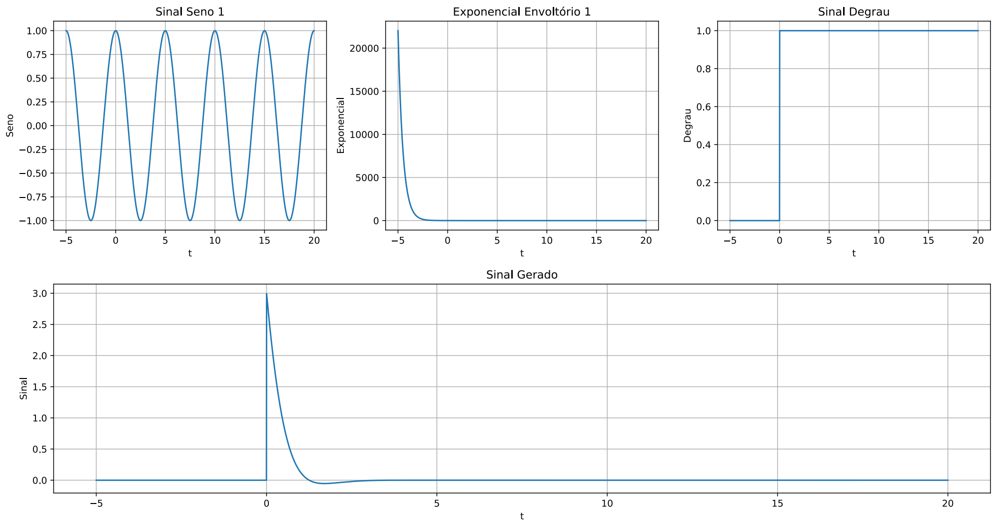
Senoide:

A senoide do sistema, carrega algumas características. Essa senoide completa um ciclo a cada 5 unidades de tempo, além de possuir um atraso de $\frac{\pi}{2}$, sendo assim o sinal da senoide pode ser representado como:

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Exponencial:

Por fim, o envoltório no sinal de saída é formado por uma exponencial decrescente. Representada pela função $3 \cdot e^{-2t}$, faz com que o sinal da senoide seja atenuado, como se fosse um amortecedor.



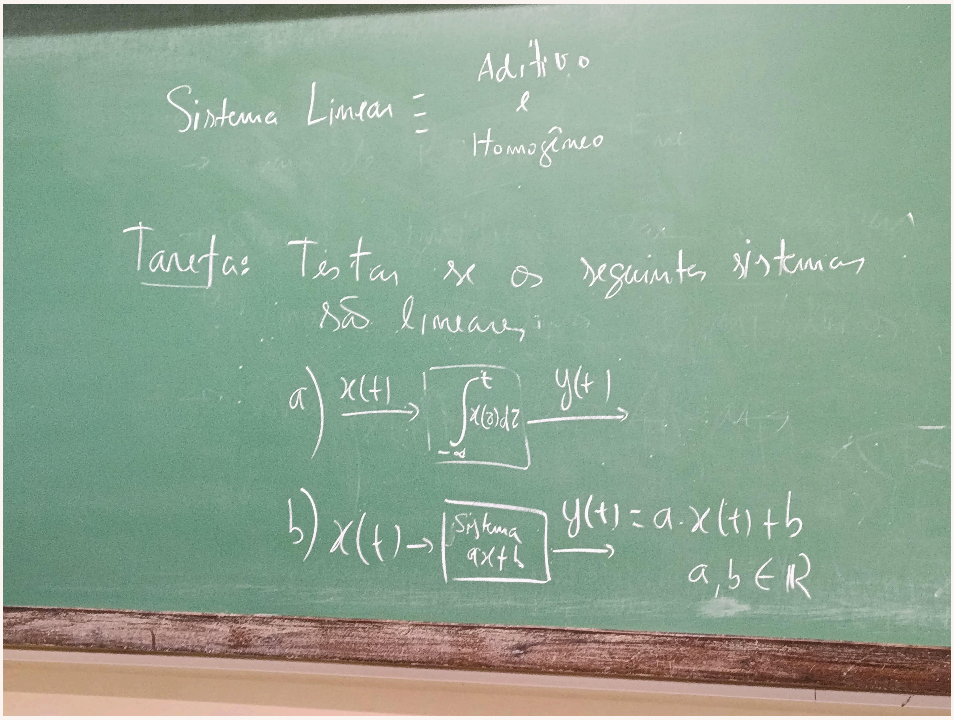
1.3.3. Atividade 3

◇ Atividade 03 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

? Enunciado◇

Testar se os seguintes sistemas são lineares

1. $x(t) \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} x(s)ds \quad \rightarrow \quad y(t)$
2. $x(t) \quad \rightarrow \quad ax+b \quad \rightarrow \quad y(t), \quad y(t) = ax(t) + b, (a, b \in \mathbb{R})$



Para provar que o sistema descrito pela equação é um sistema linear, é usado o princípio da **superposição**, para verificar as duas propriedades fundamentais que determinam a linearidade de um sistema.

Aditividade: Se o sistema é linear, a soma de duas entradas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ resulta na soma das saídas correspondentes.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Homogeneidade: Se o sistema é linear, ao multiplicarmos a entrada $x(t)$ por uma constante k, a saída também será multiplicada por k.

$$x(t) = k \cdot x_1(t) \Rightarrow y(t) = k \cdot y_1(t)$$

Se ambas as propriedades, Aditividade e Homogeneidade, o sistema a ser analisado é **linear**.

- **Aditividade**: $x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$
- **Homogeneidade**: $kx = ky$
- **Superposição**: $k_1 x_1 + k_2 x_2 = k_1 y_1 + k_2 y_2$

Resposta:

1. Sistema 1

Sistema proposto:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s) ds$$

Onde $x(t)$ é a entrada e $y(t)$ é a saída.

Aditividade

Sejam duas entradas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, com saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$, tais que:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(s) ds \quad \text{e} \quad y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(s) ds$$

Agora, consideramos uma entrada composta, conforme o princípio da aditividade:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

A saída correspondente de $x(t)$ será:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s) ds$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [x_1(s) + x_2(s)]\, ds$$

As integrais, tem uma propriedade denominada de "A integral da soma é igual a soma das integrais", que satisfaz a propriedade da aditividade para esse sistema, sendo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(s) ds + \int_{-\infty}^{t} x_2(s) ds$$

Portanto:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

✓ Propriedade de **Aditividade** verificada.

Homogeneidade

Seja uma entrada $x_1(t)$ com saída $y_1(t)$, e considere a constante escalar k, tal que:

$$x(t) = k \cdot x_1(t)$$

A saída correspondente de $x(t)$ será:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)ds$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [k \cdot x_1(s)]\, ds$$

As integrais, tem uma propriedade que nos permite extrair a constante, o que satisfaz a propriedade da homogeneidade para esse sistema, sendo:

$$y(t) = k \cdot \int_{-\infty}^{t} x_1(s)\, ds$$

Portanto:

$$y(t) = k \cdot y_1(t)$$

✓ Propriedade de **Homogeneidade** verificada.

Conclusão

Como o sistema satisfaz as propriedades de **aditividade** e **homogeneidade**, ele satisfaz o **princípio da superposição**. Logo, o sistema descrito pela equação:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)ds$$

é um **sistema linear**.

2. Sistema 2

O princípio para verificar se esse sistema é linear é o mesmo utilizado anteriormente. Verificar se o sistema possui a propriedade de Aditividade e de Homogeneidade.

O sistema é descrito pela equação:

$$y(t) = a \cdot x(t) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Onde $x(t)$ é a entrada e $y(t)$ é a saída.

Aditividade

Sendo duas entradas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, teremos como saídas $y_1(t)$ e $_2(t)$.

$$y_1(t) = a \cdot x_1(t) + b$$

$$y_2(t) = a \cdot x_2(t) + b$$

Considerando agora a entrada composta $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, a saída correspondente deverá ser:

$$y(t) = a \cdot x(t) + b$$

$$y(t) = a \cdot [x_1(t) + x_2(t)] + b$$

Podemos distribuir a nessa equação e teremos:

$$y(t) = ax_1(t) + ax_2(t) + b$$

Foi somado as entradas e obtido um valor de saída, agora precisamos ver se somarmos os valores de saída, teremos a mesma equação:

Somando as saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$:

$$y_1(t) + y_2(t) = [ax_1(t) + b] + [ax_b(t) + b]$$

$$y_1(t) + y_2(t) = ax_1(t) + ax_2(t) + 2b$$

Podemos observar que a soma das entradas não resultou na mesma equação dada pela soma das saídas, portanto a aditividade não é satisfeita porque o termo b duas vezes na soma.

✕ Propriedade de **Aditividade** não verificada.

Homogeneidade

Tendo que $x(t) = k \cdot x_1(t)$, teremos na equação do sistema:

$$y(t) = ax(t) + b$$

$$y(t) = a \cdot [k \cdot x_1(t)] + b$$

$$y(t) = k \cdot ax_1(t) + b$$

Obtemos o resultado quando aplicamos k na entrada, e obtemos um $y(t) = k \cdot ax_1(t) + b$. Temos agora que verificar se aplicando k na saída, teremos essa mesma equação:

$$k \cdot y_1(t) = k \cdot [ax_1(t) + b] = kax_1(t) + kb$$

Pode-se ver que ao multiplicar $y_1(t)$ por k, obtemos a equação:

$$k \cdot y_1(t) = k \cdot ax_1(t) + k \cdot b$$

A qual não são iguais:

$$y(t) \neq k \cdot y_1(t)$$

$$k \cdot ax_1(t) + b \neq k \cdot ax_1(t) + k \cdot b$$

Portanto, a **homogeneidade não é satisfeita** porque o termo b não é escalado pela constante k.

✕ Propriedade de **Aditividade** verificada.

Conclusão

O sistema $y(t) = ax(t) + b$ **não é linear** porque **não satisfaz as propriedades de aditividade e homogeneidade** devido à presença do termo constante b. Esse termo introduz um deslocamento (bias) na saída, quebrando a linearidade.

Para que o sistema fosse linear, a equação deveria ser apenas:

$$y(t) = ax(t)$$

onde $b = 0$.

2. Função Impulso Unitário

A função impulso unitário $\delta(t)$ é uma das mais importantes funções no estudo de sinais e sistemas.

A função impulso unitário pode ser pensada como um pulso retangular extremamente estreito (largura tende a 0) e extremamente alta (altura tende a ∞), mas com a área total fixa em 1.

A área é a quantidade de "conteúdo" sob o gráfico e é definida como o valor da integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

2.1. Representação do Impulso

Apesar de ser matematicamente definida, não é possível gerar um impulso unitário na prática, pois não dá pra gerar algo com largura zero e altura infinita.

Mas podemos aproximá-lo usando pulsos que seguem as mesmas características gerais.

O impulso unitário é zero em **todos os instantes**, exceto em $t = 0$.

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$

No instante $t = 0$ ele é indefinido, porque aí que o pulso ideal teria largura zero e altura infinita. Mas a área permanece igual a 1.

Como não é possível gerar um impulso unitário na prática, são usadas **funções "aproximadas"** que se comportam de maneira semelhante. - Pulsos **retangulares** estreitos e altos - Pulsos **exponenciais**, como $\alpha e^{-\alpha t} u(t)$ - Pulsos **triangulares** ou **gaussianos**

Essas aproximações, tendo características como: - Conforme o parâmetro que controla sua *largura* diminui($\alpha \to \infty$ no caso da exponencial), o pulso se torna mais estreito e mais alto. - A área total é sempre igual a 1, independente da forma ou altura.

2.2. Intensidade do Impulso

O impulso pode ser escalado por um fator k, resultando em um novo impulso com área k:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k \cdot \delta(t)dt = k$$

Isso significa que, multiplicando $\delta(t)$ por k, estamos ajustando a "intensidade" do impulso, mas ele ainda será uma função concentrada em $t = 0$.

2.3. Impulsos na prática

Na prática a função impulso é usada como uma ferramenta para modelar um "estímulo instantâneo" ou "pontual" em sistemas.

Por exemplo, quando aplicamos um impulso unitário a um sistema, ele revela a **resposta ao impulso** (função resposta ao impulso) que é útil para entender como ele reage.

2.4. Multiplicação de uma função por impulso

Lathi Pag. 94

2.5. Atividades

2.5.1. Atividade 4

? Enunciado

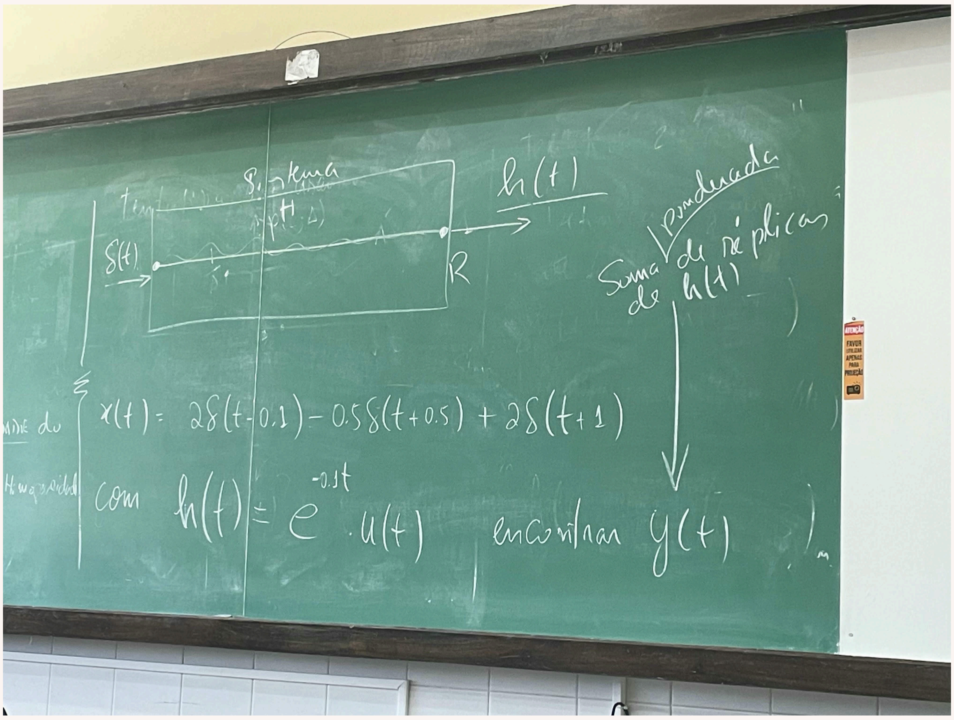
Atividade 04 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

Com o trem de impulso $x(t)$, determinado por:

$$x(t) = 2\delta(t - 0.1) - 0.5\delta(t + 0.5) + 2\delta(t + 1)$$

Encontrar a saída do sistema $y(t)$, dada a resposta ao impulso sendo:

$$h(t) = e^{-0.1t}u(t)$$



Resposta

A resposta ao impulso pode ser calculada separadamente para cada impulso do trem de impulso, devido às propriedades lineares do sistema ao qual o sinal é submetido, portanto podemos separar os impulsos e calcular a resposta:

Para $x_1 = 2\delta(t - 0.1)$, a resposta é $2h(t - 0.1)$

$$2h(t - 0.1) = 2e^{-0.1(t-0.1)}u(t - 0.1)$$

Para $x_2 = -0.5\delta(t + 0.5)$, a resposta é $-0.5h(t + 0.5)$

$$-0.5h(t + 0.5) = -0.5e^{-0.1(t+0.5)}u(t + 0.5)$$

Para $x_3 = 2\delta(t + 1)$, a resposta é $2h(t + 1)$

$$2h(t+1) = 2e^{-0.1(t+1)}u(t+1)$$

Agora somamos a resposta dos três impulsos para obter a resposta total $y(t)$:

✓ Resposta

$y(t) = 2e^{-0.1(t-0.1)}u(t-0.1) - 0.5e^{-0.1(t+0.5)}u(t+0.5) + 2e^{-0.1(t+1)}u(t+1)$

3. Convolução

A convolução é representada por uma resposta $y(t)$ de estado nulo, dada por uma integral que aparece frequentemente em ciências, física, engenharia e matemática. Por essa razão, essa integral possui um nome especial: **Integral de Convolução**.

A Integral de Convolução de duas funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é representada simbolicamente por $x_1(t)*x_2(t)$, sendo definida por:

$$x_1(t)*x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) \cdot d\tau$$

Em outras palavras, a convolução pode ser dita como uma operação que combina dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para produzir um terceiro sinal $c(t)$.

Ela mede como a forma de um sinal é modificada pela forma do outro.

Em convolução, τ (tau) é uma variável de integração que “desliza” ao longo do tempo t.

Quando fazemos convolução de sinais, muitas das vezes temos o que chamamos de sinal de entrada $x(t)$ e uma resposta ao impulso denotada com $h(t)$.

A resposta ao impulso $h(t)$ é simplesmente a maneira como um sistema reage quando recebe uma entrada muito curta e intensa: o impulso dirac $\delta(t)$.

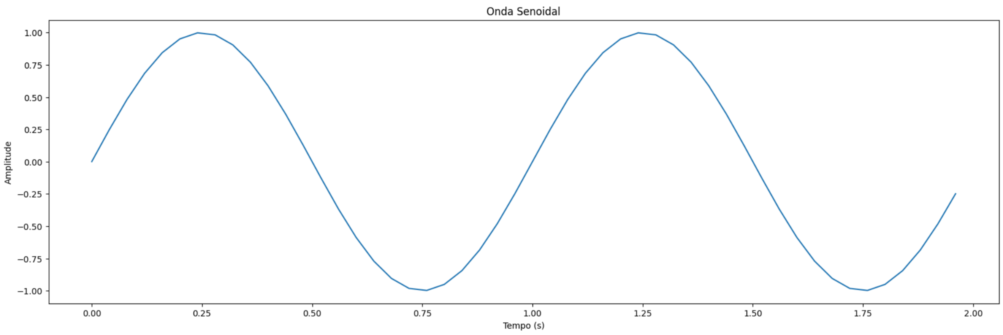
Podemos pensar o seguinte, quando se bate em um sino com um martelo, ele vai vibrar e produzir um som que vai durar por um tempo. Esse som gerado quando se bate no sino, é a **resposta do sino**, ao “impulso” da batida.

Assumimos que o sino é o sistema, batemos no sino com um martelo, essa batida é rápida, essa batida é um impulso sendo aplicado no sistema. O som e vibração gerados por essa batida são a resposta do sistema ao impulso.

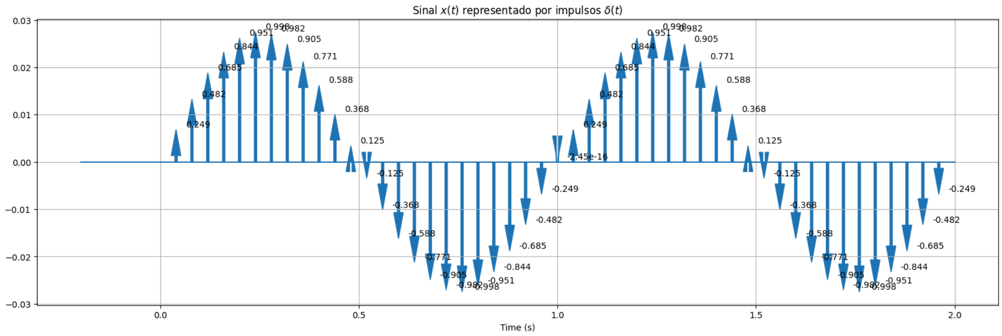
Da mesma forma, se for aplicado um impulso $\delta(t)$ a um sistema, a resposta que ele gera ao longo do tempo é $h(t)$.

A ideia fundamental é que qualquer sinal de entrada $x(t)$ pode ser pensado como a soma de vários impulsos muito pequenos escalados e deslocados no tempo.

Por exemplo, vamos pensar em um sinal dado por uma senoide.



Como dito, esse sinal de entrada $x(t)$ que é uma senoidal, pode ser pensado como a soma de vários impulsos muito pequenos.

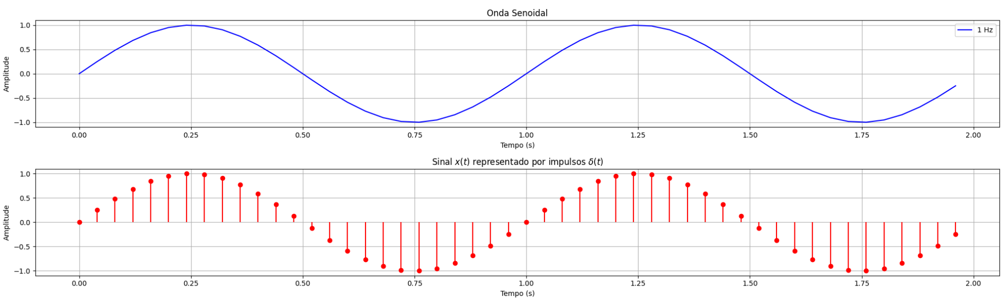


Se nós sabemos como o sistema responde para um único impulso, essa resposta sendo um $h(t)$, podemos prever como ele responderá a qualquer entrada, simplesmente somando as respostas individuais dos impulsos que compõem $x(t)$.

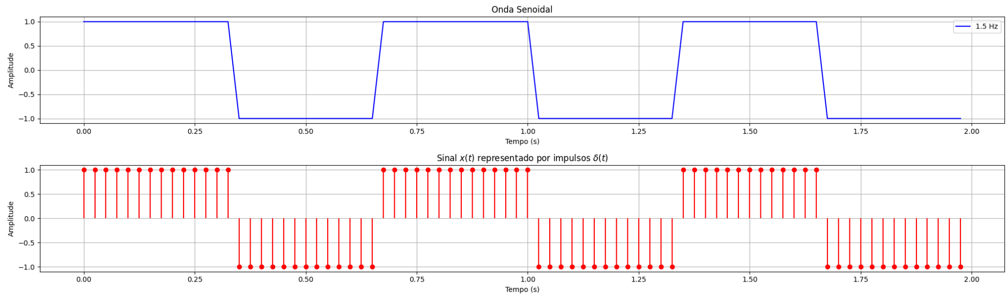
Quando aplicamos um impulso $\delta(t)$ no sistema, o que queremos é medir **como o sistema responde a uma entradam muito rápida e intensa**. Essa resposta é dada por $h(t)$, que é o comportamento do sistema a esse impulso.

Ou seja, se aplicarmos um impulso no sistema, a saída será exatamente $h(t)$, a **resposta ao impulso**

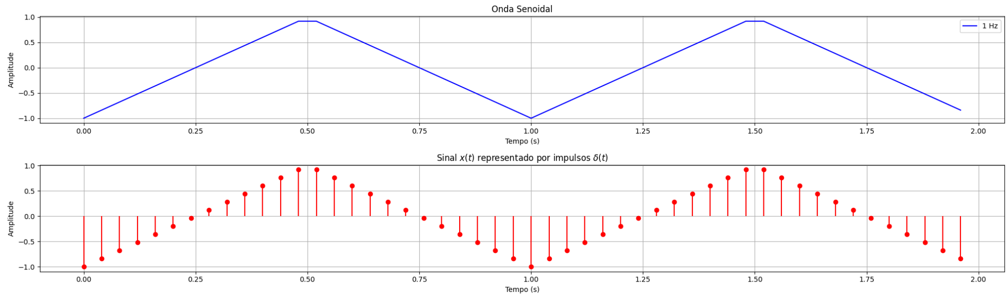
No primeiro gráfico, temos um sinal de entrada senoidal. Podemos interpretá-lo como sendo formado por vários impulsos pequenos ao longo do tempo. Como o sistema responde a cada impulso com $h(t)$, a saída será a soma das respostas individuais desses impulsos.



No segundo gráfico, a onda quadrada pode ser vista como uma sequência de impulsos positivos e negativos espaçados regularmente.



No terceiro gráfico, a onda triangular pode ser decomposta como uma soma de impulsos que crescem e decrescem linearmente ao longo do tempo.



3.1. Propriedades

3.1.1. Comutatividade

A comutatividade da convolução afirma que a ordem dos sinais envolvidos não importa: o resultado da operação será o mesmo.

A operação de convolução é comutativa, ou seja:

$$x_1(t)^* x_2(t) = x_2(t)^* x_1(t)$$

Intuição:

Se pensar na convolução como uma maneira de "combinar" dois sinais, a ordem em que os combina não altera o resultado final.

Essa propriedade pode ser provada pela mudança de variável.

A convolução é definida como:

$$x_1(t)^* x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) \cdot d\tau$$

Prova:

Para provar a comutatividade, aplicamos a mudança de variável. Tendo assim: - $z = t - \tau$, então $\tau = t - z$ - Isso implica que $d\tau = -dz$

1. Substituímos na fórmula de convolução

$$x_1(t)^* x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau) \cdot d\tau$$

2. Aplicamos a mudança de variável $z = t - \tau$

$$x_1(t)^* x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-z) \cdot x_2(z)(-dz)$$

3. O sinal negativo de $-dz$ inverte os limites de integração, mas como são infinitos($-\infty$ a ∞), isso não muda o valor:

$$x_1(t)^*x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(z) \cdot x_1(t-z)dz$$

4. Reescrevendo

$$x_1(t)^*x_2(t) = x_2(t)^*x_1(t)$$

3.1.2. Distributividade

A distributividade afirma que a operação de convolução se distribui sobre a soma de dois sinais. Ou seja, convoluir um sinal $x_1(t)$ com a soma de dois outros sinais $x_2(t) + x_3(t)$ é o mesmo que convoluir $x_1(t)$ separadamente com $x_2(t)$ e $x_3(t)$, e depois somar os resultados.

De acordo com a propriedade distributiva:

$$x_1(t)^*[x_2(t) + x_3(t)] = x_1{}^*x_2(t) + x_1(t)^*x_3(t)$$

Intuição:

É possível pensar na convolução como um "processo de mistura" entre os sinais: 1. Primeiro, é misturado $x_1(t)$ com $x_2(t) + x_3(t)$. 2. Como a soma de $x_2(t)$ e $x_3(t)$ não interfere na operação de convolução, é possível "quebrar" a soma em partes e misturá-las separadamente. 3. O resultado final é a soma dos dois "efeitos" da convolução.

3.1.3. Associatividade

A associatividade afirma que, quando convoluímos três sinais $x_1(t), x_2(t)$, e $x_3(t)$, a ordem em que realizamos as operações não importa.

De acordo com a propriedade associativa:

$$x_1(t)^*[x_2(t)^*x_3(t)] = [x_1(t)^*x_2(t)]^*x_3(t)$$

Intuição:

A associatividade pode ser entendida como o fato de que o efeito cumulativo da convolução de três sinais não depende de como os agrupamos.

Isso significa que no caso de sistemas lineares invariantes no tempo, a ordem de combinação das respostas ao impulso de múltiplos subsistemas não altera a resposta final.

3.1.4. Deslocamento

A propriedade de deslocamento diz que se deslocarmos $x_1(t)$, $x_2(t)$ ou ambos, o resultado da convolução também será deslocado, mas de maneira correspondente.

Tendo como base:

$$x_1(t)^*x_2(t) = c(t)$$

Caso 1: Deslocamento de $x_2(t)$

Se deslocarmos $x_2(t)$ no tempo, por exemplo, para $x_2(t-T)$, a convolução resultante será o mesmo $c(t)$, mas deslocado por T, sendo assim:

$$x_1(t)^* x_2(t-T) = c(t-T)$$

Isso acontece, porque deslocar um dos sinais equivale a deslocar *o resultado final* no tempo

Caso 2: Deslocamento de $x_1(t)$

De forma análoga, se deslocarmos $x_1(t)$ em T, o resultado será deslocado por T:

$$x_1(t-T)^* x_2(T) = c(t-T)$$

Sendo assim é verdadeiro dizer que deslocando ou $x_1(t)$ ou $x_2(t)$ individualmente, resultará no mesmo sinal de saída:

$$x_1(t)^* x_2(t-T) = x_1(t-T)^* x_2(t) = c(t-T)$$

Caso 3: Deslocamento de ambos os sinais

Se deslocarmos ambos os sinais, por T_1 e T_2, o resultado será deslocado pela soma dos deslocamentos $T_1 + T_2$:

$$x_1(t-T_1)^* x_2(t-T_2) = c(t-T_1-T_2)$$

Isso faz sentido porque o deslocamento total no resultado final é a combinação dos deslocamentos individuais de cada sinal.

Intuição: - Quando deslocamos um sinal no tempo, estamos simplesmente "movendo" ele para frente ou para trás - A convolução acompanha esses deslocamentos, movendo o resultado n tempo pela mesma quantidade

3.2. Convolução com um Impulso

A convolução de uma função $x(t)$ com o impulso unitário resulta na própria função $x(t)$. Pela definição da convolução:

$$x(t)^* \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Essa propriedade é fundamental no processamento de sinais e sistemas **lineares invariantes no tempo** (LTI), porque o impulso $\delta(t)$ atua como a "identidade" da convolução.

Como $\delta(t-T)$ é um impulso localizado em $\tau = t$, de acordo com a propriedade de amostragem do impulso, a integral acima e o valor de $x(\tau)$ para $\tau = t$, ou seja, $x(t)$. Portanto:

$$x(t)^* \delta(t) = x(t)$$

O impulso $\delta(t-T)$ possui a propriedade de **amostragem**, que afirma que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(\tau - T)d\tau = f(T)$$

Isso significa que o impulso "seleciona" o valor da função no ponto em que ele está localizado ($\tau = T$)

Aplicação à convolução:

Substituímos essa propriedade de amostragem do impulso na definição da convolução:

$$x(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau$$

Aqui, $\delta(t-\tau)$ desloca o impulso para $\tau = t$. De acordo com a propriedade de amostragem, o resultado da integral será o valor de $x(\tau)$ avaliado em $\tau = t$:

$$x(t)*\delta(t) = x(t)$$

Intuição:

O impulso $\delta(t)$ age como uma "ferramenta de identidade" da convolução, replicando a função $x(t)$ sem alterar sua forma. Em termos físicos ou de sistemas: - Um sistema LTI convoluído com um impulso $\delta(t)$ gera como saída a própria $x(t)$. - O impulso é como "aplicar a entrada diretamente" ao sistema.

Exemplos:

1. Impulso unitário sem deslocamento

   Se $x(t) = e^{-t}u(t)$ (uma exponencial decrescente) e convoluímos com $\delta(t)$:

   $$x(t)*\delta(t) = \int_{-\infty}^{oo} e^{-\tau}u(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = e^{-t}u(t)$$

2. Impulso deslocado

   Se convoluímos $x(t)$ com $\delta(t-T)$ o resultado será uma versão deslocada de $x(t)$:

   $$x(t)*\delta(t-T) = x(t-T)$$

3.3. Convolução de degraus

Fórmula da convolução:

Podemos fazer a convolução de $u(t)$ com $u(t)$, dada por:

$$y(t) = u(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau) d\tau$$

E para determinar a convolução $u(t)*u(t)$ precisamos entender o comportamento do termo $u(\tau)u(t-\tau)$ para encontrarmos os intervalos de integração onde essa integral não é nula.

A convolução de $u(t)*u(t)$ depende do comportamento das funções $u(\tau)$ e $u(t-\tau)$ no intervalo de integração $[-\infty, \infty]$. No entanto: 1. O degrau unitário $u(t)$ é **zero** para $t < 0$. Isso significa que fora desse intervalo(quando t assume valores menores que 0), $u(t)$ é inútil para a integral. Seu valor 0 não contribui para a integral. 2. O produto $u(\tau)u(t-\tau)$ será **diferente de zero** somente quando ambos os termos forem iguais a 1.

Por isso, ao determinar o intervalo de integração, precisamos identificar **onde as funções degrau são "ativas"**, pois fora desse intervalo a integral é 0.

Análise dos termos $u(t)$ e $u(t-\tau)$:

O degrau unitário é definido como:

$$u(t) = \{1, t \geq 0$$
$$0, t < 0$$

Os degraus $u(\tau)$ e $u(t-\tau)$ definem condições sobre o intervalo em que a função de convolução é diferente de zero.

Analisando $u(\tau)$: - Temos $u(\tau) = 1$ quando $\tau \geq 0$ - Temos $u(\tau) = 0$ quando $\tau < 0$ - Isso significa que o produto $u(\tau)u(t-\tau)$ será automaticamente 0 para $\tau < 0$

Analisando $u(t-\tau)$: - Temos $u(t-\tau) = 1$ quando $t-\tau \geq 0$, ou seja $\tau < t$ - Temos $u(t-\tau) = 0$ quando $\tau > t$ - Isso significa que o produto $u(\tau)u(t-\tau)$ será automaticamente 0 para $\tau > t$

Agora precisamos identificar o intervalo onde ambos os $u(\tau)$ e $u(t-\tau)$ são **diferentes de zero**.

Encontrar o intervalo onde a integral é válida:

O importante quando realizamos a convolução entre degraus, é sabermos em qual intervalo teremos o resultado da integral diferente de zero.

A integral resultar em zero, é inútil em qualquer análise de convolução, portanto limitamos o intervalo de integração para selecionar apenas onde os termos da integral sejam diferentes de zero.

Portanto, a integral será diferente de zero apenas onde os dois termos $u(\tau)$ e $u(t-\tau)$ forem iguais a 1.

Sendo: - $u(\tau) = 1$ para $\tau \geq 0$ - $u(t-\tau) = 1$ para $\tau \leq t$

É possível identificar que a interseção dos dois intervalos ocorre quando:

$$0 \leq \tau \leq t$$

A interseção $0 \leq \tau \leq t$, que é o intervalo final de integração. Fora desse intervalo, $u(\tau)u(t-\tau) = 0$, então não contribui para o resultado da integral.

Esse se torna então nosso intervalo de integração, onde podemos alterar a integral para:

$$\int_0^t u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Substituir os valores de $u(\tau)$ e $u(t-\tau)$:

Dentro do intervalo $0 \leq \tau \leq t$, $u(\tau) = 1$ e $u(t-\tau) = 1$, pois ambas as funções degrau valem 1. Assim a integral se torna:

$$\int_0^t 1 \cdot 1 d\tau = \int_0^t 1 d\tau$$

Resolver a integral:

Agora resolvemos a integral:

$$\int_0^t 1 d\tau = [\tau]_0^t = t - 0 = t$$

Multiplicação pelo degrau $u(t)$:

O resultado da convolução depende da definição de $u(t)$. Para manter a definição de que a convolução só vale para $t \geq 0$, multiplicamos o resultado por $u(t)$, garantindo que a resposta válida apenas para $t \geq 0$. Assim, o resultado final é:

$$y(t) = t \cdot u(t)$$

Intuição:

1. A convolução de dois degraus é não nula apenas onde os dois degraus estão ativos simultaneamente ($0 \leq \tau \leq t$).
2. Dentro desse intervalo, ambos $u(\tau)$ e $u(t - \tau)$ valem 1, simplificando a integral para $\int_0^t 1 d\tau$.
3. Resolver a integral fornece t, e multiplicar $u(t)$ garante que a resposta seja válida apenas para $t \geq 0$.

$$u(t) * u(t) = t \cdot u(t)$$

3.4. Atividades

3.4.1. Atividade 5

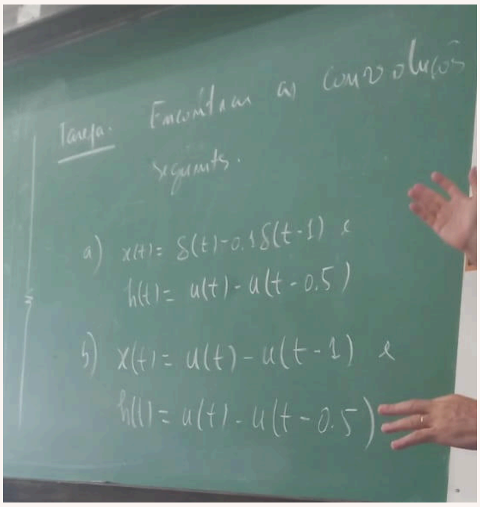
? Enunciado

Atividade 05 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

Encontrar as seguintes convoluções

a) $x(t) = \delta(t) - 0.1\delta(t - 1)$
$h(t) = u(t) - u(t - 0.5)$

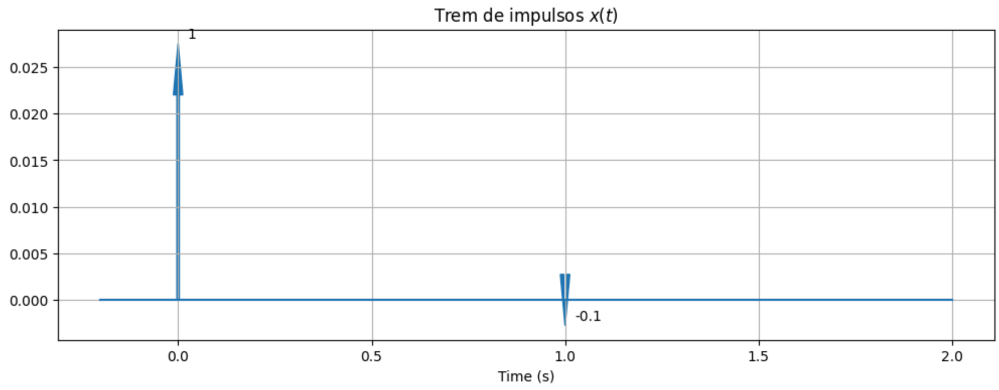
b) $x(t) = u(t) - u(t - 1)$
$h(t) = u(t) - u(t - 0.5)$



Resposta

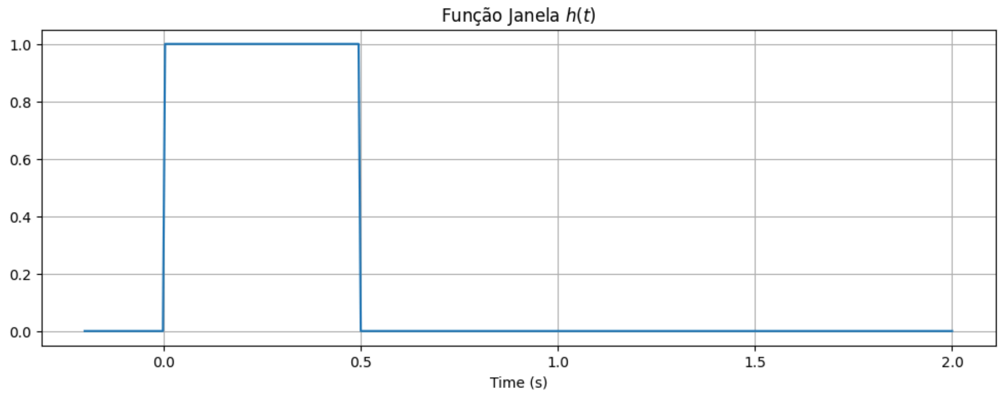
1º Convolução

Essa convolução é a combinação de dois sinais, onde o sinal $x(t)$ é composto por dois impulsos, caracterizando-o como um trem de impulsos, onde temos: - $\delta(t) \rightarrow$ Um impulso unitário no tempo $t = 0$ - $-0.1\delta(t - 1) \rightarrow$ Um impulso de amplitude -0.1 localizado em $t = 1$



Sendo o sinal $x(t)$ convolvido com a resposta ao impulso dado por uma "função janela" $h(t)$. Esse sinal representa uma janela de ativação iniciada em $t = 0$ e desativada em $t = 0.5$.

A função $h(t)$ representa um **pulso** de largura 0.5 que é iniciado quando tempo $t = 0$ e é finalizado quando o tempo $t = 0.5$, sendo zero em outros intervalos de tempo, geralmente usada para modelar um comportamento que ocorre entre esses dois instantes.



Para determinar a convolução $y(t) = x(t) * h(t)$, usaremos de suas propriedades.

A convolução é definida como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Onde temos os dois sinais que serão convolvidos:

$$x(t) = \delta(t) - 0.1\delta(t - 1)$$

$$h(t) = u(t) - u(t - 0.5)$$

E sabemos, que o impulso é a identidade da convolução, portanto a convolução de um sinal com um impulso, retorna o próprio sinal, e a convolução de um sinal com **um *impulso* deslocado no tempo**, retorna **o *sinal* deslocado no tempo**. 1. $\delta(t) * h(t) = h(t)$ 2. $\delta(t - T) * h(t) = h(t - T)$

Portanto podemos separar os termos dos sinais, e utilizando a propriedade distributiva da convolução, podemos realizar as operações individualmente:

$$y(t) = [\delta(t) - 0.1\delta(t - 1)] * [u(t) - u(t - 0.5)]$$

Distribuindo temos: 1. $\delta(t)*[u(t)-u(t-0.5)]$ 2. $-0.1\delta(t-1)*[u(t)-u(t-0.5)]$

$$y(t)=\delta(t)*[u(t)-u(t-0.5)]-0.1\delta(t-T)*[u(t)-u(t-0.5)]$$

Primeiro Termo: $\delta(t)*[u(t)-u(t-0.5)]$

Convoluir $\delta(t)$ com $u(t)-u(t-0.5)$ resulta na própria função $u(t)-u(t-0.5)$, já que $\delta(t)*h(t)=h(t)$:

$$\delta(t)*[u(t)-u(t-0.5)]=u(t)-u(t-0.5)$$

Segundo Termo: $-0.1\delta(t-1)*[u(t)-u(t-0.5)]$

Convoluir $\delta(t-1)$ com $u(t)-u(t-0.5)$ resulta na função original, deslocada $T=1$ no tempo:

$$\delta(t-1)*[u(t)-u(t-0.5)]=u(t-1)-u(t-1-0.5)$$

$$=u(t-1)-u(t-1.5)$$

$$=-0.1[u(t-1)-u(t-1.5)]$$

Soma dos resultados

Agora somamos o primeiro e o segundo termo para encontrar $y(t)$

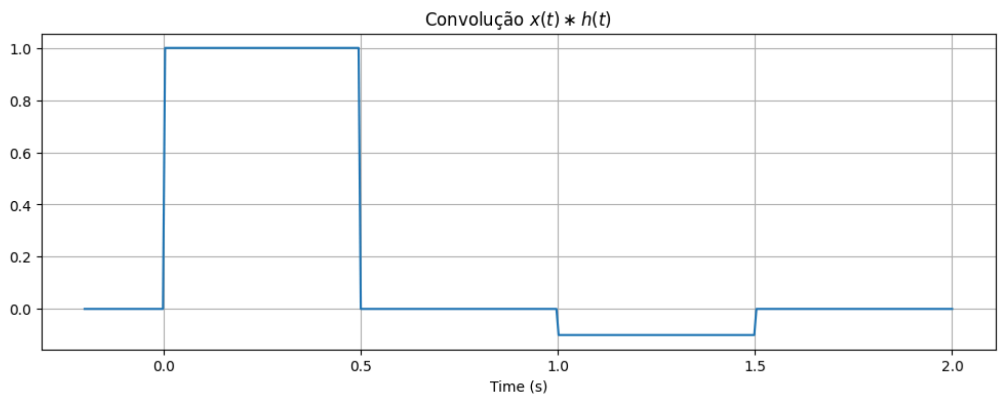
$$y(t)=[u(t)-u(t-0.5)]-0.1[u(t-1)-u(t-1.5)]$$

ou

$$y(t)=u(t)-u(t-0.5)-0.1u(t-1)+0.1u(t-1.5)$$

Onde podemos reorganizar a função janela gerada pela convolução e obteremos:

$$y(t)=\{1, 0\leq t<0.5$$
$$-0.1, 1\leq t<1.5$$
$$0, \text{outros casos}$$



Uma outra maneira de visualizar essa operação, é que como $x(t)$ contém impulsos $\delta(t)$, a convolução pode ser interpretada como **cópias escaladas de $h(t)$**:

$$y(t)=h(t)-0.1h(t-1)$$

Ou seja, $h(t)$ aparece em $t=0$ e uma versão atenuada aparece em $t=1$.

2º Convolução

Essa convolução parte do princípio que estamos combinando duas janelas. Os sinais a serem convolvidos são ambos janelas, ou seja, expressões que representam a abertura e fechamento de um degrau.

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$h(t) = u(t) - u(t-0.5)$$

Sendo assim, para combinar esses dois sinais a partir da convolução:

$$y(t) = x(t)*h(t)$$

Para isso, podemos expandir a expressão como:

$$x(t) * h(t) = [u(t) - u(t-1)] * [u(t) - u(t-0{,}5)]$$

$$x(t) * h(t) = \boxed{u(t) * [u(t) - u(t-0{,}5)]} - \boxed{u(t-1) * [u(t) - u(t-0{,}5)]}$$

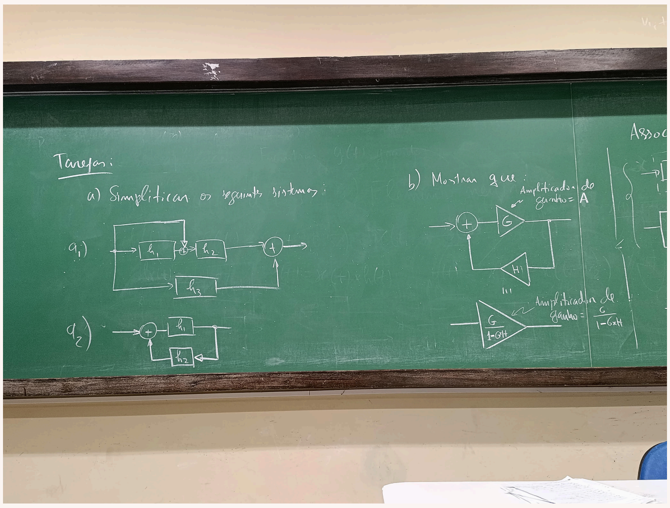
$$x(t) * h(t) = \boxed{u(t) * u(t) - u(t) * u(t-0{,}5)} - \boxed{u(t-1) * u(t) + u(t-1) * u(t-0{,}5)}$$

3.4.2. Atividade 6

Atividade 06 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

? Enunciado

a) Simplificar os sistemas b) Mostrar a determinação do ganho



3.4.3. Atividade 7

Atividade 07 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

? Enunciado

Encontrar a resposta do sistema representado para $h(t)$ quando o sinal de entrada é:

1. Para $h(t) = e^{-t}u(t)$ e $x(t) = 2e^{1/2t}$
2. Para $h(t) = e^{-t}u(t)$ e $x(t) = 3e^{(-1+j)t}$

4. Transformada de Fourier

Podemos analisar sistemas lineares por diversas formas em função da propriedade da linearidade, como descrito na [[Análise - Classificação de sistemas | classificação de sistemas]] para sistemas lineares, são satisfeitas duas propriedades:

Definição

Aditividade A propriedade aditiva determina que caso tenhamos duas entradas diferentes x_1 e x_2, teremos então duas saídas y_1 e y_2.

Então pela propriedade, a soma das entradas resulta na soma das saídas:

$$x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$$

Definição

Homogeneidade A homogeneidade diz que para qualquer valor de k (real ou imaginário), caso a entrada aumentar k vezes, a saída também deve aumentar k vezes.

$$x \to y$$

$$kx \to ky$$

Sendo assim, de forma resumida, a entrada de um sistema linear pode ser expresso como a soma de componentes mais simples.

Para sinais periódicos, foi visto que é possível representá-los através da série de fourier como a soma de senóides ou exponenciais eternas na forma de $e^{j\omega t}$.

A Integral de Fourier estende essa representação espectral para sinais **não periódicos**.

4.1. Representação de sinais não periódicos pela Integral de Fourier

Aplicando um processo de limite, é possível descrever um **sinal não periódico** $x(t)$, pela soma contínua (integral) de exponenciais de duração infinita.

Para realizar essa representação, é preciso construir um novo sinal periódico denominado de $x_{T_0}(t)$ que é formado pela repetição do sinal original $x(t)$ em intervalos de T_0 segundos.

O perído T_0 é feito para que seja grande o suficiente para evitar sobreposição de pulsos seguidos.

Sendo assim, o sinal $x_{T_0}(t)$ pode ser representado por uma série exponencial de Fourier, e se fizermos o período dessa função tender ao infinito ($T_0 \to \infty$), os pulsos no sinal periódico irão se repetir após um intervalo infinito.

$$\lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = x(t)$$

4.2. Atividades

4.2.1. Atividade 8

Atividade 09 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

? Enunciado

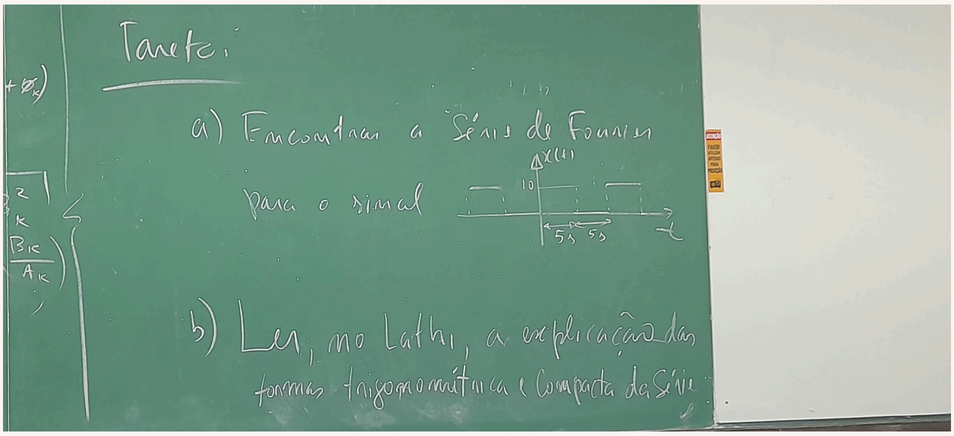
1. $< cos(6\pi t), sen(6\pi t) >$
2. $< cos(6\pi t), cos(7\pi t) >$

4.2.2. Atividade 9

Atividade 10 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

? Enunciado

Encontrar a serie de fourier para o sinal

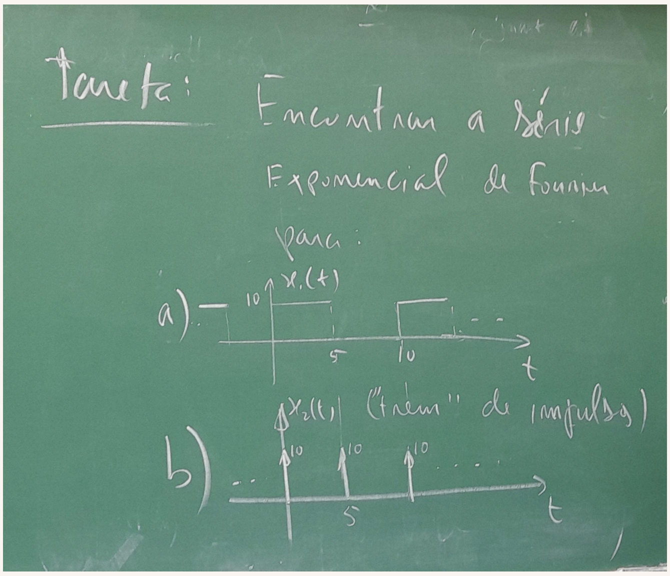


4.2.3. Atividade 10

Atividade 11 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

? Enunciado

Encontrar a série exponencial de Fourier dos sinais:



4.2.4. Atividade 11

? Enunciado

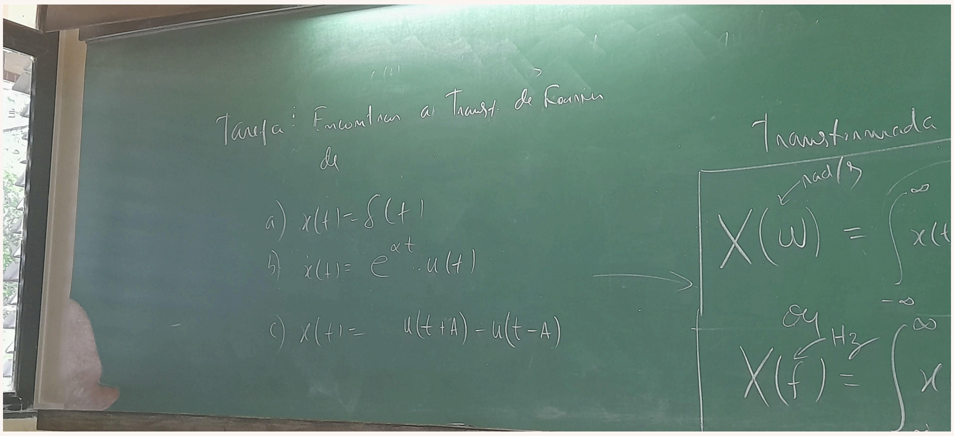
Atividade 12 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

Encontrar a transformada de Fourier dos sinais:

a) $x(t) = \delta(t)$

b) $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$

c) $x(t) = u(t + A) - u(t - A)$

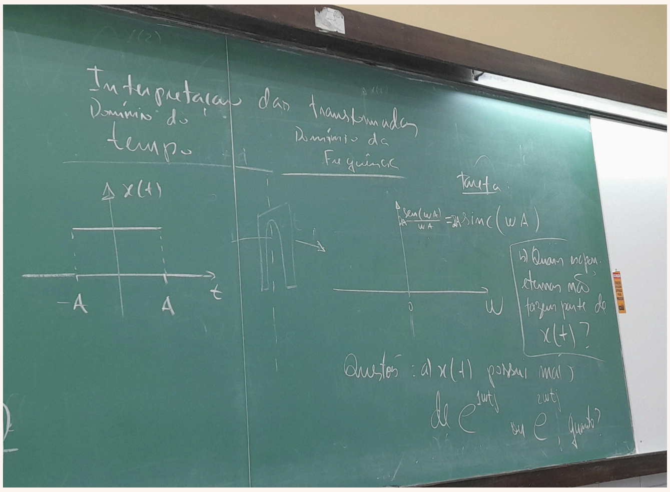


4.2.5. Atividade 12

? Enunciado

Atividade 13 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

1. Desenhar a função $2A \cdot \text{sinc}\ (\omega A)$
2. $X(t)$ possui mais de qual exponencial: $e^{1j\omega t}$ ou $e^{2j\omega t}$?
3. Quais exponenciais eternas não fazem parte de $X(t)$

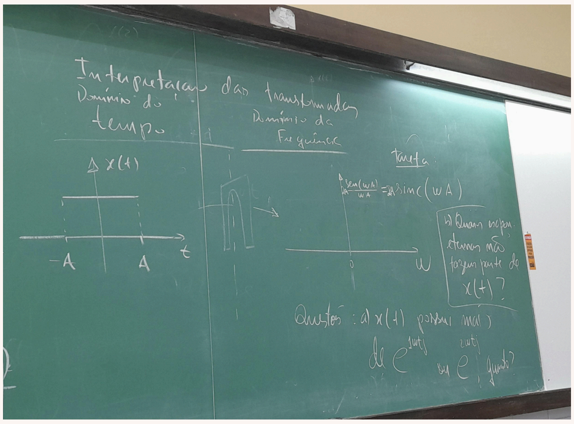


4.2.6. Atividade 12

◇ Atividade 13 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

? Enunciado◇

1. Desenhar a função $2A \cdot \text{sinc}\ (\omega A)$
2. $X(t)$ possui mais de qual exponencial: $e^{1j\omega t}$ ou $e^{2j\omega t}$?
3. Quais exponenciais eternas não fazem parte de $X(t)$



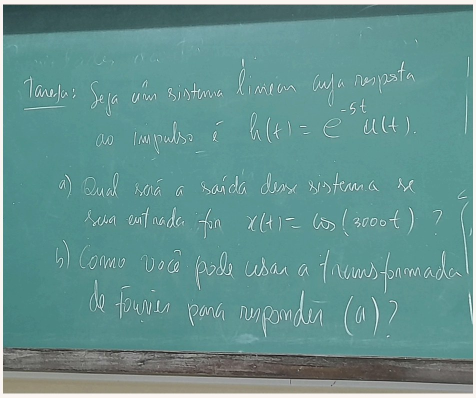
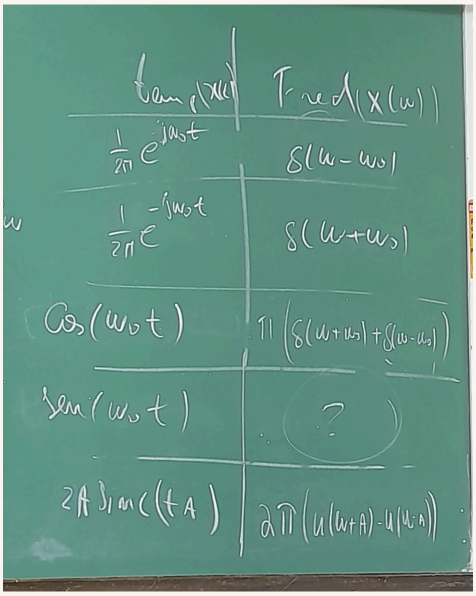
4.2.7. Atividade 13

■ Atividade 14 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

? Enunciado■

Se um sistema Linear cuja resposta ao impulso é $h(t) = e^{-5t}u(t)$

1. Qual será a saída desse sistema se sua entrada for $x(t) = cos(3000t)$? ?
2. Como você pode usar a transformada de Fourier para responder

4.2.8. Atividade 14

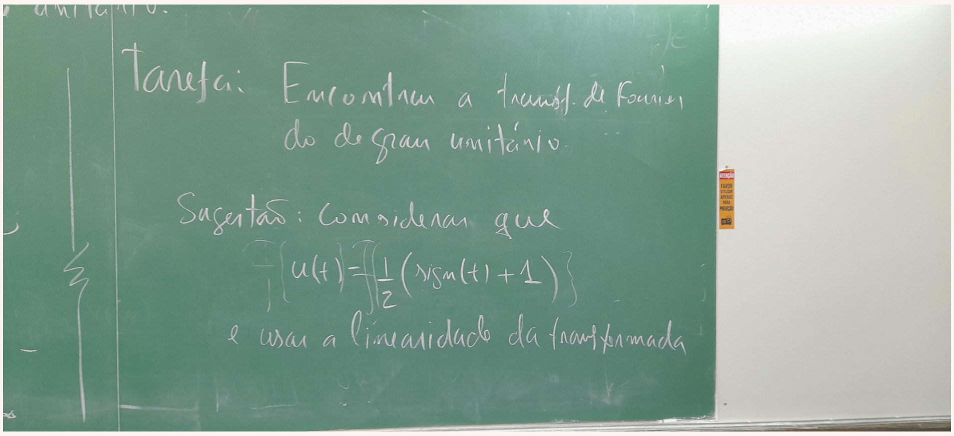
? Enunciado

Encontrar a Transformada de Fourier do Degrau unitário

Sugestão: Considere que

$$u(t) = \frac{1}{2}(\text{sign}(t) + 1)$$

E use a linearidade da transformada.



Atividade 15 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

5. Transformada de Laplace

A resposta de um sistema no domínio do tempo é determinada analisando como ela reage a diferentes entradas ao longo do tempo.

Em sistemas lineares invariantes no tempo, uma maneira fundamental de encontrar essa resposta é usando a **convolução**.

Essa sendo uma operação matemática que **combina dois sinais** para produzir um terceiro sinal.

No contexto de sistemas LIT (Lineares Invariantes no Tempo), a convolução entre a entrada $x(t)$ e a resposta ao impulso do sistema $h(t)$ nos dá uma saída $y(t)$.

A fórmula da convolução é:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Isso significa que a saída do sistema em um determinado instante t é obtida somando todas as contribuições da entrada $x(t)$ ponderadas pela resposta ao impulso $h(t)$, deslocada no tempo.

Como descrito nas definições da convolução, a resposta ao impulso $h(t)$ é simplesmente a maneira como um sistema reage quando recebe uma entrada muito curta e intensa: o impulso dirac $\delta(t)$.

E como sabemos, sistemas lineares têm a propriedade da superposição, ou seja, se a entrada for comporta por várias partes, a resposta total do sistema será a soma das respostas individuais dessas partes.

Isso significa que podemos dividir um sinal de entrada $x(t)$ em componentes menores, calcular a resposta do sistema para cada uma e depois somá-las.

No **domínio do tempo**, essa decomposição pode ser feita usando impulsos. Isso leva ao conceito de resposta ao impulso do sistema, que permite encontrar a saída para qualquer entrada via convolução.

No **domínio da frequência**, ao invés de decompor $x(t)$ em impulsos, decompomos o sinal em funções exponenciais da forma e^{st}, onde s é um número complexo. Essa ideia está relacionada à análise de Fourier e Laplace.

Assim como a série de Fourier decompõe sinais periódicos em somas de senos e cossenos, a **Transformada de Laplace** decompõe qualquer sinal em exponenciais complexas.

Essas funções exponenciais e^{st} são importantes porque, em sistemas lineares, elas se comportam de maneira simples: a resposta a uma entrada exponencial, é outra exponencial multiplicada por um fator, o que facilita muito a análise do sistema.

Dessa forma a Transformada de Laplace permite estudar sistemas LIT de um jeito mais simples e visual, focando no comportamento de suas frequências.

Para um sinal $x(t)$, a transformada de Laplace $X(s)$ é definda por:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

O sinal $x(t)$ é dito ser a *transformada inversa de Laplace de* $X(s)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

Onde c é uma constante escolhida para garantir a convergência da integral.

Essas duas equações são conhecidas como *par da transformada de Laplace bilateral*, no qual $X(s)$ é a transformada direta de $x(t)$ e $x(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $X(s)$.

A transformada de Laplace definida dessa forma, pode trabalhar com sinais que existem em todo o intervalo de tempo, de $-\infty$ até ∞ (sinais causais e não causais). Por essa razão ela é chamada de bilateral.

5.1. Linearidade

A operação da Transformada de Laplace é uma operação linear, sendo possível aplicar o princípio da superposição.

Por exemplo, sabendo que:

$$x_1(t) \Leftrightarrow X_1(s)$$

$$x_2(t) \Leftrightarrow X_2(s)$$

Então de acordo com a superposição:

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \Leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

Podemos provar esse fator, realizando a transformada desses termos e verificando o que acontece.

$$\mathcal{L}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] . e^{-st} \, dt$$

Seguindo as propriedades da própria integral, temos que a integral da soma de duas funções é igual a soma das integrais das funções individualmente.

$$\mathcal{L}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-st} \, dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-st} \, dt$$

As integrais sendo realizadas, são ambas seguindo o formato da transformada de laplace, portanto está provado que a transformada de Laplace da soma de quaisquer duas funções $x_n(t)$ escalados por um fator a_n é igual a transformada de cada uma dessas funções separadamente.

$$\mathcal{L}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$$

Esse resultado pode ser estendido a qualquer soma finita.

5.2. Região de convergência.

A *região de convergência* (RDC), também chamada de região de existência, da transformada de Laplace $X(s)$ é o conjunto de valores de s (a região do plano complexo) para os quais a integral (1) converge.

Vamos demonstrar a região de convergência a partir da resolução de um exemplo. ### Exemplo

? Enunciado

Para um sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$, determine a Transformada de Laplace $X(s)$ e sua RDC(Região de convergência).

$$x(t) = e^{-at} u(t) \longrightarrow X(s) = ? \, , \, RDC = ?$$

Pela definição nós temos a transformada de Laplace do sinal de entrada e como temos um degrau presente, sabemos que $u(t) = 1$ quando $t \geq 0$, portanto, essa é a janela que nos importa, ou seja, não precisamos integrar quando a função é igual a 0, então ajustamos o intervalo de integração para integrar apenas para valores diferentes de zero.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) \, e^{-st} \, dt \qquad \Bigg| \qquad u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \rightarrow u(t) = 1, \; t \geq 0$$

A integral agora tem um novo intervalo de $[0, \infty]$ e como temos uma multiplicação de exponenciais, podemos juntar ambas em apenas um termo, pela propriedada de potências, $e^{-at}e^{-st} = e^{-(s+a)t}$.

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} \, dt \rightsquigarrow \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} \, dt$$

Resolvendo a integral definida, usamos a propriedade da integral da exponencial $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$.

$$\left[-\frac{1}{s+a} \cdot e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty}$$

Resolvendo, temos que a expressão elevada a 0, se simplifica e a exponencial desaparece. A única parte que precisamos nos preocupar agora é com o comportamento da parte elevada ao infinito.

$$-\frac{e^{-(s+a)\infty}}{s+a} - \left(-\frac{e^{-(s+a)0}}{s+a} \right) = -\frac{e^{-(s+a)\infty}}{s+a} + \frac{1}{s+a}$$

Como nessa expressão temos que o s é uma variável complexa dada por $s = \alpha + j\beta$, temos que verificar as condições pra quando o termo exponencial se torna zero.

$$s \to \alpha + j\beta \qquad e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$-\frac{e^{-(s+a)\infty}}{s+a} = -\frac{e^{-s\cdot\infty} \cdot e^{-a\cdot\infty}}{s+a} = -\frac{e^{-(\alpha+j\beta)\infty}}{s+a}$$

Podemos expandir, o número complexo e fazer a distribuição dos termos. Temos agora um produto entre $e^{-\alpha\cdot\infty}, \alpha \in \mathbb{R}$ e $e^{-j\beta\cdot\infty}$. Nós sabemos que o termo $e^{-j\beta\cdot\infty}$ pode ser visto como a soma de um cosseno e um seno, e o módulo desse termo é 1, ou seja ele, esse é um termo que não tende a 0, apenas continua oscilando eternamente.

O importante para nós analisarmos é o comportamento da parte real do número complexo, $e^{-\alpha\cdot\infty}$, porque dependendo do seu comportamento, teremos respostas totalmente diferentes.

$$e^{-(\alpha+j\beta)\infty} = e^{-\alpha.\infty} \cdot e^{-j\beta.\infty} \rightsquigarrow e^{-\alpha.\infty} \begin{cases} \alpha > 0 \to e^{-(+\alpha).\infty} = e^{-\infty} = 0 \\ \alpha < 0 \to e^{-(-\alpha).\infty} = e^{+\infty} = \infty \\ \alpha = 0 \to e^{-(0).\infty} = e^{0} = 1 \end{cases}$$

$$e^{-j\beta.\infty} \to \cos(\beta.\infty) + j\,\mathrm{sen}(\beta.\infty)$$

$$\to |e^{-j\beta\infty}| = 1$$

Como pode ser visto, para diferentes valores de α temos diferentes valores para a exponencial.

- Quando $\alpha < 0$ isso faz com que a exponencial tenda a infinito, isso faz a integral **divergir** e não faz sentido físico. $e^{-(-\alpha)\cdot\infty} = e^{+\infty} = \infty \to \frac{\infty}{s+a}$.
- Quando $\alpha = 0$ a exponencial se torna 1, isso é um valor válido para nós. $e^{-0\cdot\infty} = e^0 = 1 \to \frac{1}{s+a}$.
- Quando $\alpha > 0$ a exponencial tende a 0, por estar elevada a $-\infty$. $e^{-\alpha\cdot\infty} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \to \frac{0}{s+a}$.

Portanto, o que chamamos de região de convergência, é a região no plano complexo que o número complexo s esteja, para que a integral converja. Nesse caso para valores de α menores que 0, a integral diverge.

$$-\frac{e^{-s\cdot\infty}}{s+a} + \frac{1}{s+a}, \quad Re(s) > 0 \to -\frac{0}{s+a} + \frac{1}{s+a} = \frac{1}{s+a}$$

Temos assim que a Transformada de Laplace do sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$ é $X(s) = \frac{1}{s+a}$ em que sua Região de Convergência (RDC) é $Re(s+a) > 0$.

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \qquad Re(s+a) > 0$$

A Região de Convergência é $Re(s+a)$ pois na integral de laplace o termo que temos é $e^{-(s+a)t}$, então estamos somando a parte real do número complexo α com o número real a, então precisamos garantir que essa soma seja um número positivo, por isso $Re(s+a)$.

5.3. Propriedades

5.3.1. Diferenciação no Tempo

Definição

A propriedade de diferenciação no tempo afirma que:

$$x(t) \Leftrightarrow X(s)$$

então

$$\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

A aplicação repetida dessa propriedade resulta em

$$\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

A dual da propriedade de diferenciação no tempo é a propriedade de diferenciação na frequência, que afirma:

$$tx(t) \Leftrightarrow -\frac{d}{ds}X(s)$$

A prova da transformada de Laplace na diferenciação no tempo é dada por

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt$$

Onde temos a transformada de laplace aplicada para uma derivada de um certo sinal $x(t)$.

A integral da Transformada de Laplace para a derivada começa em 0^- (ou seja, imediatamente antes de $t = 0$) está relacionada às propriedades dos sinais e a necessidade de capturar corretamente o comportamento inicial de $x(t)$.

A transformada de laplace unilateral, que é mais usada em análise de sistemas físicos, só considera valores $x(t)$ para $t \geq 0$. Portanto, a integral normalmente começaria em $t = 0$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{dx}{dt} e^{-st} dt$$

Porém, se houver uma descontinuidade ou um salto em $x(t)$ exatamente em $t = 0$, a derivada $\frac{dx}{dt}$ pode conter um **impulso dirac** $\delta(t)$. Para incluir corretamente esse comportamento do sinal, a integral deve considerar **valores imediatamente antes de $t = 0$**, ou seja, 0^-.

A integral da Transformada de Laplace aplicada a uma diferenciação temporal, pode ser resolvida pela técnica da integração por partes, dada por

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

Onde podemos determinar:

$$u = e^{-st} \rightarrow du = -se^{-st}\,dt$$

$$dv = \frac{dx}{dt}\,dt \rightarrow v = x(t)$$

O termo diferencial $\frac{dx}{dt}dt$, quando aplicada a uma integral, apenas indica que temos a taxa de variação de x ao longo do tempo t, sendo integrada ao longo do tempo t.

$$\int \frac{dx}{dt}\,dt \Leftrightarrow \int x'(t)\,dt = x(t)$$

Sendo assim, aplicando na fórmula de solução da integração por partes

$$u \cdot v - \int v\,du$$

$$e^{-st} \cdot x(t) - \int_{0^-}^\infty x(t) \cdot (-se^{-st})\,dt$$

Onde extraímos da integral a constante $-s$ que multiplica du e teremos

$$[e^{-st} \cdot x(t)]_{0^-}^\infty + s\int_{0^-}^\infty x(t) \cdot e^{-st}\,dt$$

Analisando o primeiro termo, $u \cdot v$, na integração

$$[e^{-st} \cdot x(t)]_{0^-}^\infty$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} \quad - \quad x(0^-)e^{-s(0^-)}$$

Para $t \to \infty$, é importante analisarmos o comportamento da expressão que temos $x(t)e^{-st}$, pois é crucial para determinar a **Região de Convergência** da transformada.

Para que a integral da Transformada de Laplace converja, ela precisa ser **finita**, ou seja, não pode divergir para infinito. Isso significa que o termo $x(t)e^{-st}$ deve tender a 0 a medida que $t \to \infty$.

A convergência da integral depende de dois fatores:

- O crescimento de $x(t)$ quando $t \to \infty$
- O termo de amortecimento e^{-st}

Se $x(t)$ crescer muito rápido, o termo e^{-st} precisa ser forte o suficiente para compensar o crescimento e garantir que a integral permaneça finita.

Então supomos que $\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}$ não diverge para infinito, ou seja, é finita, então para valores de s dentro da Região de Convergência da Transformada de Laplace temos que

$$\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} = 0$$

$$x(\infty) \cdot e^{-s\cdot\infty} \to x(\infty) \cdot e^{-\infty} \to x(\infty) \cdot \frac{1}{e^{\infty}} \to x(\infty) \cdot 0 = 0$$

Essa condição é necessária para que a Transformada de Laplace **exista**.

Para $t \to 0^-$, esse termo 0^- apenas indica que estamos avaliando o valor imediatamente antes de $t = 0$. Esse conceito é importante porque, em sistemas de controle e sinais, podemos ter descontinuidades no tempo $t = 0$, e precisamos distinguir o comportamento da função antes e depois desse instante.

Se a função for contínua em $t = 0$, então:

$$x(0^-) = x(0^+)$$

Mas se houver um salto, então $x(0^-) \neq x(0^+)$, e a diferença $x(0^+) - x(0^-)$ define a magnitude do salto.

Na Transformada de Laplace, ao usar a **propriedade de diferenciação no tempo**, temos:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0^-)$$

Isso significa que o termo $x(0^-)$ contribui como um valor inicial da transformada. Se houver uma descontinuidade em $t = 0$, essa contribuição afeta a resposta de $X(s)$.

Quando calculamos o termo $e^{-s(0^-)}$, estamos essencialmente avaliando:

$$e^{-s(0^-)} = e^0 = 1$$

Isso porque 0^- ocorre infinitesimamente próximo de 0, então $s \cdot 0^-$ também tende a 0.

Sabemos que

$$e^0 = 1$$

Portanto, na prática $e^{-s(0^-)}$ **sempre será igual a 1**, independente do valor de s.

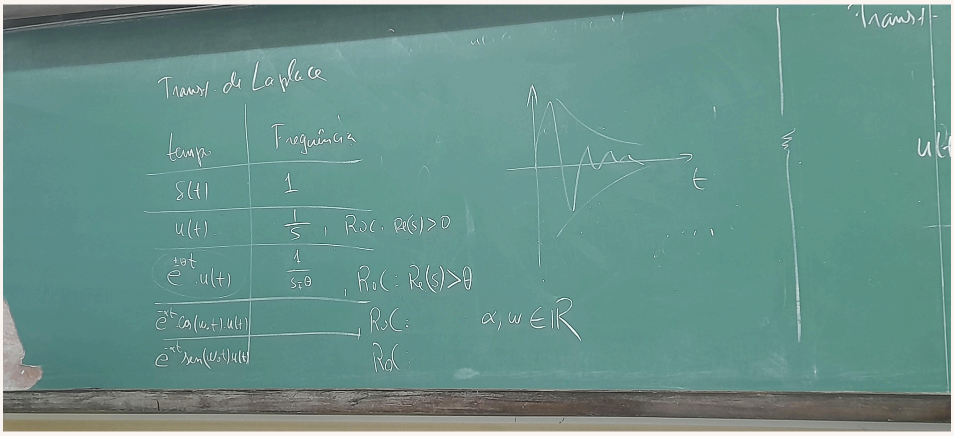
5.4. Atividades

5.4.1. Atividade 15

Atividade 16 passada pelo professor Jugurta no período 2024.1

? Enunciado

Determine a transformada de Laplace do sinal $e^{-\alpha t}\cos(w \cdot t)u(t)$



Resposta

Montando a Integral da Transformada de Laplace de $x(t) = e^{-at}cos(w \cdot t)u(t)$ temos:

$$x(t) = e^{-at} . \cos(w.t) . u(t), \quad \alpha, w \in \mathbb{R} \qquad X(s) = \int_0^\infty e^{-at} \cos(w.t) . e^{-st} \, dt$$

Simplificamos os expoentes da exponencial para obter um único termo. A partir disso, solucionamos a integral utilizando a regra de Integração por Partes.

Quando montamos a solução, acabamos obtendo na parte da integral $\int v \cdot du$ a integral que forma a Transformada de Laplace de $x(t) = e^{-at}sen(w \cdot t)u(t)$, podemos então substituir pela sua expressão na tabela das transformadas.

$$\int u . dv = u . v - \int v . du$$

$$\int_0^\infty e^{-(s+a)t} . \cos(w.t) \, dt = \frac{e^{-(s+a)t} . sen(w.t)}{w} + \frac{s+a}{w} . \int sen(w.t) \, e^{-(s+a)t} \, dt$$

$$u = e^{-(s+a)t} \rightarrow du = -(s+a) \, e^{-(s+a)t}$$

$$dv = \cos(w.t) \, dt \rightarrow v = \frac{sen(w.t)}{w}$$

Resolvendo a solução com os limites de integração, temos que para $t \to \infty$, toda a expressão some e se torna 0.

$$\left[\cancelto{0}{\frac{e^{-(s+a)t} \cdot sen(w.t)}{w}} + \frac{s+a}{\cancel{w}} \cdot \frac{\cancel{w}}{(s+a)^2 + w^2} \right]_0^{\infty} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + w^2}$$

Como o termo crítico para a convergência da integral é $e^{-(s+a)t}$, temos que a Região de Convergência é dada por:

$$\text{ROC: } R_e(s+a) > 0$$
$$R_e(s) > -a$$