Travaux dirigés Systèmes linéaires n°3

Mathématiques pour l'informatique

—IMAC 2—

▸ Exercice 1. *Pivot de Gauss manuel*

1. *Résoudre le système suivant à l'aide du pivot de Gauss en utilisant l'algorithme prévu pour la machine.*

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 6 & 23 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$$

2. *Vérifier avec Eigen.*

▸ Exercice 2. *Pivot de Gauss*

1. *Implémenter la méthode du pivot de Gauss.*
2. *Implémenter la méthode de Gauss-Jordan.*
3. *Dans la méthode dite de* pivot total, *on s'autorise aussi à permuter les lignes* et les colonnes *de la sous-matrice restant à traiter pour maximiser le pivot. Comment modifier votre programme ?*

▸ Exercice 3. *Pivot de Gauss : erreurs numériques*

Soit le système

$$\begin{array}{cc|c} \epsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$$

où $|\epsilon| \ll 1$.

1. *Résoudre manuellement ce système avec le pivot de Gauss partiel en utilisant :*
   — *calcul algébrique exact (expression formelle du résultat).*
   — *calcul numérique que ferait la machine, en y incluant les erreurs numériques successives.*
2. *Mêmes questions avec le pivot total.*

▸ Exercice 4. *Jacobi*

1. *Rappeler la méthode de Jacobi.*
2. *Donner la complexité de la méthode de Jacobi.*

3. *Quels sont les critères de convergence pour cette méthode ?*
4. *Le système suivant satisfait-il les critères de convergence ?*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 7 \\ -5 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. *Conditionner le système suivant afin qu'il converge avec la méthode de Jacobi.*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6. *Comment calcule-t-on l'inverse d'une matrice diagonale ? Quelle est la complexité de cette opération ?*
7. *On peut écrire la méthode de Jacobi matriciellement. Le système à résoudre s'écrit* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. *On pose* $A = D + E + F$ *où* D *est une matrice diagonale,* E *est une matrice triangulaire supérieure et* F *une matrice triangulaire inférieure (*E *et* F *ont une diagonale nulle). On obtient :*

$$(D + E + F)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$D\mathbf{x} + (E + F)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$D\mathbf{x} = -(E + F)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = -D^{-1}(E + F)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}$$

   Montrer que l'approche matricielle est équivalente à l'approche initiale.
8. *Donner la complexité de la méthode de Jacobi matricielle.*
9. *Quels sont les avantages et les inconvénients de la méthode matricielle ?*

▸ Exercice 5. *Comparatif*

1. *Générer un système matriciel* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *aléatoire. Quelle précaution faudrait-il prendre ?*
2. *Comparer la précision et la rapidité sur des méthodes :*
   - *Jacobi (codé par vos soins)*
   - *LU avec le code :*
     ```
     PartialPivLU<MatrixXd> lu(A);
     VectorXd x = A*lu.solve(b);
     ```
   - *QR avec le code :*
     ```
     ColPivHouseholderQR<MatrixXd> qr(A);
     VectorXd x = A*qr.solve(b);
     ```
   - *SVD avec le code :*
     ```
     JacobiSVD<MatrixXd> svd(A, ComputeThinU | ComputeThinV);
     VectorXd x = A*svd.solve(b);
     ```

▸ **Exercice 6.** ***Mises en situation***
Voici une liste de situations où l'on utilise des méthodes numériques pour résoudre des problèmes. Choisir pour chaque cas la méthode la plus adaptée en justifiant vos choix.

1. *Synthèse d'images et illumination globale : la radiosité. Il faut résoudre des systèmes mettant en jeu de très grosses matrices tri-diagonales.*
2. *La météo civile.*
3. *La météo militaire.*
4. *Logiciel d'assistance au pilotage d'un avion.*
5. *Dans un dispositif temps réel (jeu vidéo par exemple) où l'on traite des matrices* 3×3.
6. *Dans un dispositif temps réel où l'on traite des matrices* 500×500.
7. *Dans le cas où l'on traite uniquement des matrices triangulaires.*
8. *Dans le cas ou les données sont nombreuses, mais de mauvaise qualité.*