

INAC1 traitement du signal
Interrogation écrite
mercredi 13 mars 2019

NOM :

PRENOM :

1.) Soit $z \in \mathbb{C}$. Réponds fa VRAI ou FAUX :

(a) $\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$

(b) $\operatorname{Im}(z) = z - \bar{z}$

(c) $2\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$

2.) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. Réponds fa VRAI ou FAUX

(a) $|z - a|^2 = z^2 + a^2 - 2az$

(b) $|z - a|^2 = |z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Im}(az)$

(c) $|z - a|^2 = |z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{a})$

3.) Soient n et $m \in \mathbb{N}$. Réponds fa VRAI ou FAUX

(a) $e^{in\theta} - e^{im\theta} = 2e^{i\left(\frac{n+m}{2}\theta}\right)} \cos\left(\left(\frac{n-m}{2}\right)\theta\right)$:

(b) $|e^{in\theta} - e^{im\theta}| = \sin\left(\left(\frac{n-m}{2}\right)\theta\right) \cdot e_\theta$ avec $e_\theta \in \{-1, 1\}$:

(c) $e^{in\theta} - e^{im\theta} = 2ie^{i\left(\frac{n-m}{2}\theta}\right)} \sin\left(\left(\frac{n+m}{2}\right)\theta\right)$:

4.) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $T_0 > 0$. Évaluez les quantités suivantes

(a) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} dt =$

(b) $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{int} dt =$

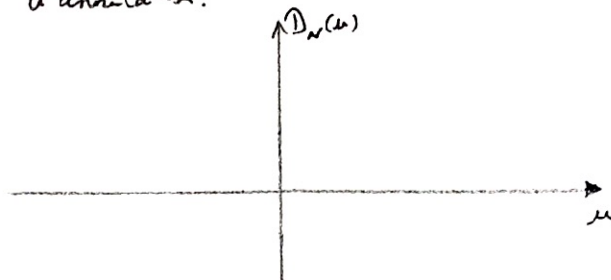
(c) $\int_0^{2T_0} e^{i2\pi \frac{t}{T_0}} dt =$

5.) Le noyau de Dirichlet est défini comme :

$$u \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]: \quad D_N(u) = \frac{\sin(\pi(2N+1)u)}{\sin(\pi u)} \quad \text{si } u \neq 0$$

$$D_N(0) = 2N+1$$

Dessinez sommairement le graphe de D_N sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ en indiquant quelques points d'annulation.



6.) Soit $x(t)$ la fonction 1-périodique définie sur $[0, 1]$ par :

$$x(t) = e^{-t}$$

Répondre par VRAI ou FAUX :

Ⓐ la fonction x est entièrement caractérisée par les coefficients de Fourier $a_k = \int_0^1 x(t) \cos(2\pi k t) dt$

Ⓑ les coefficients de Fourier complexes C_k de x sont

$$\forall k \in \mathbb{Z}: \quad C_k = \frac{1}{1 + i2\pi k} (1 - e^{-i2\pi k})$$

Ⓒ la meilleure approximation quadratique d'ordre 1 de x est

$$S_1(t) = (1-e) \left(1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1+i2\pi} e^{i2\pi t} \right) \right)$$

7.) Soient $x(t)$ un signal et $t \mapsto p_N(t)$ un polynôme trigonométrique, les deux périodiques de période 1. Répondre par VRAI ou FAUX :

Ⓐ la distance quadratique entre x et p_N est

$$d(x, p_N) = \sqrt{\int_0^1 |x(t) - p_N(t)|^2 dt}$$

Ⓑ il existe plusieurs polynômes trigonométriques p_N qui minimisent la distance quadratique $d(x, p_N)$

Ⓒ le polynôme trigonométrique optimal selon la distance quadratique est S_N , le somme partielle de Fourier d'indice N du signal x