Oraux 2025 Wallon
PC/PCE

Sommaire

1. **Mathématiques**
   - CCINP
   - Mines Télécom
   - Centrale 1
   - Centrale Info
   - Mines Ponts
   - X-ESPCI
   - ENS
2. **Physique**
   - CCINP
   - Mines Télécom
   - Centrale 1
   - Centrale Info
   - Mines Ponts
   - X-ESPCI
   - ENS

Mathématiques

CCINP

$\star\star\star$

Exercice 1 [–]

On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$,

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée sur $\mathbb{R}_2[X]$.

$* * *$

Exercice 2 [–]

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}[X]$ $(n \geqslant 3)$ muni du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

1. Déterminer $P_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$.
2. Calculer $min \left\{ \int_{-1}^{1} (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$* * *$

Exercice 3 [–]

Soit $E = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.
On pose pour tout $f \in E$:

$$\|f\|_0 = \sqrt{(f(0))^2 + \int_0^1 f'(t)dt}$$

1. Montrer que $|| \cdot ||_0$ est une norme.
2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in [0, 1] \rightarrowtail \dfrac{\sin(n\pi x)}{n^2}$
   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour la norme $\| \cdot \|_0$.

Mines Télécom

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1.a [Raphaël F.]

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $M^n = O_n$.

1. Montrer que si M est symétrique, alors $M = O_n$.
1. Montrer que si $MM^\top = M^\top M$, alors $M = O_n$.

∗ ∗ ∗

Exercice 1.b [Raphaël F.]

On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ln(t)}{x^2+t^2}dt$.

1. Donner le domaine de définition de H.
2. Calculer $H(1)$.
3. Trouver une expression de H (ndlr, sans l'intégrale).

∗ ∗ ∗

Exercice 2.a [Gaspard V.]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
- $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{1+a^k}{4k!}$

1. Déterminer a.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

∗ ∗ ∗

Exercice 2.b [Gaspard V.]

Soient E un ev de dimension finie tel que $\dim(E) \geqslant 2$. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant :

- $f \circ f = g \circ g = Id_E$.
- $f \circ g + g \circ f = O_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que f et g sont des automorphismes diagonalisables.
2. Montrer que les deux seules valeurs propres possibles pour f et g appartient à $\{-1; 1\}$.
3. Soit $u : \begin{cases} \mathrm{Ker}(f - Id_E) & \longrightarrow \mathrm{Ker}(f + Id_E) \\ x & \longmapsto g(x) \end{cases}$
Montrer que u est un isomorphisme et en déduire que la dimension de E est paire.
4. [non abordé]

∗ ∗ ∗

Centrale 1

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Pierre Q.]**

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{t} \ln(1 - 2t\cos(x) + t^2)$.

1.a Montrer que f est définie sur $]0; 2\pi[$.

1.b Montrer que $f(2\pi - x) = f(x)$.

1.c Montrer que $f\left(\pi - \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} f(x)$.

2. Montrer que f est C^1 sur $]0; 2\pi[$, calculer f' puis f.

3. En déduire le calcul ... (de l'intégrale ci-dessus ?).

∗ ∗ ∗

Exercice 2 **[Guillaume V.]**

Soit f une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On pose :

$$K : \begin{cases} \mathbb{R}\times]0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{cases}$$

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}\times]0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y, t) f(y) dy \end{cases}$$

1. Montrer que $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

2. Montrer que $\lim_{t\to 0} u(x, t) = f(x)$ (on admet l'intégrale de Gauss).

∗ ∗ ∗

Exercice 3 **[Emilie B.]**

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1 + t}}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f, ainsi que les limites de f en ses bornes.
2. Montrer que f est de classe C^1 et établir une équation différentielle sur f.
3. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Déterminer un équivalent de f en 0.

∗ ∗ ∗

Exercice 4 **[Jean C.]**

Soit $a = (a_n)$, $b = (b_n)$, et $c = (c_n)$.

On définit l'opérateur * produit de Cauchy, tel que $c = a * b$ (ie. $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$)

1. $(an)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. On suppose que (a_n) converge vers l, et que $\sum b_n$ CVA.

   Montrer que $a * b$ converge vers $l \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.
3. (a_n) est définie comme à la question 1.

   Montrer que $\sum_{i=1}^{n} c_i = A \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_{n-i} \cdot \sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j$

4. On pose A, B et C les sommes respectives des séries de terme général a_n, b_n et c_n.

   En utilisant les questions précédentes, montrer que $C = AB$ si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ CVA.

∗ ∗ ∗

Exercice 5 **[Florian Fe.]**

On définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n$, avec $u_0 = u_1 = 1$.

On définit également, lorsque c'est possible, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.
   En déduire le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$
2. Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

∗ ∗ ∗

Centrale Info

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Pierre Q.]**

Soit $E = C^0\left([-1;1],\mathbb{R}\right)$. On pose $\langle f|g\rangle = \int_0^1 \left(1-t^2\right) f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que $\langle f|g\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Définissons E_{pair} (resp. E_{impair}) l'ensemble des fonctions de E paires (resp. impaires).

2.a Montrer que $E = E_{pair} \oplus E_{impair}$.

2.b En déduire $E_{pair}^{\perp}$ et $E_{impair}^{\perp}$.

On définit la suite de polynôme $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et $P_n(X) = (X-\lambda_n)P_{n-1} + \mu_n P_{n-2}$

avec $\lambda_n = \dfrac{\langle XP_{n-1}|P_n\rangle}{\|P_{n-1}\|}$ et $\mu_n = -\dfrac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2}$.

On dipose de `pn(p, q)` qui renvoit le polynôme $R = (X-\lambda)P + \mu Q$, avec λ et μ définis précédemment.

3.a Créer une fonction `liste(n)` qui donne les polynômes $(P_0, ..., P_n)$.

3.b On dispose d'une fonction `affiche(P)`.
Afficher les polynômes $(P_0, ..., P_{10})$. Conjecture ?

3.c Créer une fonction qui calcule $\langle P_i|P_j\rangle$ pour $(i,j) \in [\![0;5]\!]^2$. Conjecture ?

4.a Montrer le conjectures de 2.

4.b Montrer que $\langle P_n|P_{n-1}\rangle = 0$ et $\|P_n\|^2 = \langle XP_{n-1}|P_n\rangle$.

4.c Montrer que $\langle P_n|P_{n-2}\rangle = 0$.

* * *

Exercice 2 **[Guillaume V.]**

Soit E un ev de polynômes dans $\mathbb{R}$.

On pose $L_0 = 1$, $L_1 = X$, et $(n+2)L_{n+2} = (2n+3)XL_{n+1} - (n+1)L_n$.

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$ définit un produit scalaire sur E.

2. Calculer L_2, L_3.

3. Déterminer le degré des (L_n) ainsi que leur parité.

4.a Créer une fonction `L(n, x)` renvoyant la valeur de L_n évalué en x.

4.b On dispose de `ps(i, j)` qui renvoie $\langle L_i, L_j\rangle$.

Donner la matrice $A \in \mathscr{M}_7(\mathbb{R})$ telle que $[A]_{i,j} = \langle \sqrt{2i+1}L_i, \sqrt{2j+1}L_j\rangle$.

Conjecturer $\langle L_i, L_j\rangle$ pour $i = j$ et $i \neq j$.

4.c Afficher les $(L_k)_{k\in[\![0;6]\!]}$ sur $[-1;1]$. Conjecturer [quelque chose] sur les racines.

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dX^n}\left((X^2-1)^n\right)$.

5.a Montrer la conjecture pour $i \neq j$.

5.b Montrer la conjecture pour $i = j$.

5.c Montrer la conjecture sur les racines.

5.d [quelque chose sur $L_n(0)$].

* * *

Exercice 3 **[Jean C.]**

Soit $A \in SO_4(\mathbb{R})$ à valeurs propres complexes.

1. Rappeler la définition de $SO_n(\mathbb{R})$. Expliciter $SO_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A admet une valeur propre complexe.

On pose $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $X = X_1 + iX_2$.
Soit $Q \in O_4(\mathbb{R})$ tel que les premières colonnes forment une base de F.

3. Calculez avec python $Q^\top AQ$.
   Remarque : toutes les matrices étaient déjà définies dans python.

On pose $F = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$.

4. Montrer que F est un plan stable par A.

   On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme associé à A.

5. Que peut-on dire de $u(F^\perp)$?
6. Montrer que $u_F \in SO(F)$.
7. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^\top AQ$ soit diagonale par bloc.
8. Généraliser le résultat pour $SO_4(\mathbb{R})$ sans contrainte sur son spectre.

* * *

Mines Ponts

⋆⋆⋆

Exercice 1.a [Armel D.]

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2. En déduire que M est inversible, et déterminer M^{-1}.
2. Sans utiliser le polynôme caractéristique, montrer que M est diagonalisable.
   Déterminer ses valeurs propres et leur ordre de multiplicité.
3. Calculer M^n.
   Indication : on utilisera le théorème de la division euclidienne.
4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{M^n}{n!}$.
   Montrer que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L finie et déterminer cette limite.

∗ ∗ ∗

Exercice 1.b [Armel D.]

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+ixt)}$.

1. Montrer que F est bien définie et continue.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $F(x) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une expression de F sans symbole d'intégrale.

∗ ∗ ∗

Exercice 2.a [Guillaume P.]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le développement asymptotique à deux termes de précision près de $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$
On considère $E_n = \{1, ..., n\} = [\![1; n]\!]$.
On considère également $\Omega_n = {E_n}^{E_n}$ (l'ensemble des applications de E_n dans E_n) muni de la loi uniforme.
On introduit $\forall k \in E_n$, la va $X_{k,n} : \Omega_n \to \{0,1\}$, indicatrice de l'évènement $\{g \in \Omega_n ; k \in g(E_n)\}$.
On introduit $Y_n : \Omega_n \to \mathbb{N}$ la va qui à tout g de Ω_n associe $|g(E_n)|$ (cardinal de $g(E_n)$).

2. Déterminer la loi de $X_{k,n}$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$.
4. Soit $(k,l) \in E_n^2$. Déterminer la loi du couple $(X_{k,n}, Xl, n)$.
   En déduire : $\mathrm{COV}(X_{k,n}, X_{l,n}) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n + ... \left(1+\frac{...}{n}\right)^{2n}$.
5. Déterminer $\mathbb{V}(Y_n)$.
6. Déterminer un équivalent de $\mathbb{V}(Y_n)$.

∗ ∗ ∗

Exercice 2.b [Guillaume P.]

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose que $\sum \frac{f^{(n)}}{n!}$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Déterminer une expression de la somme de cette série.

∗ ∗ ∗

X-ESPCI

⋆ ⋆ ⋆

ENS

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 **[Ilian M.]**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_{n+1} = \sin(a_n)$.

Nature de $\sum a_n^2$?

∗ ∗ ∗

Exercice 2 **[Ilian M.]**

Soit $(A, B, C) \in (M_2(\mathbb{R}))^3$.

On définit $[A, B] = AB - BA$ (ndlr, crochet de Lie).

Montrer que $\left[[A, B]^2, C\right] = 0$ avec deux méthodes différentes.

∗ ∗ ∗

Exercice 3 **[Ilian M.]**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Physique

CCINP

⋆⋆⋆

Q1) <u>Système</u> : { S(m) } <u>Référentiel</u> : Géocentrique

<u>RFD</u> $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{r}\mathbf{N} = \frac{GM}{r^2}\mathbf{N}$

D'où $v^2 = \frac{GM}{r}$, et donc $\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$

Or, $\mathscr{E}_p = -\frac{GMm}{r}$, d'où $\boxed{2\mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = 0}$

Q2) a) Sur un tour complet :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathscr{E}_m &= \Delta\mathscr{E}_c + \Delta\mathscr{E}_p \\
&= \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) - GMm\left(\frac{1}{R-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right) \\
&= \frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right) - GMm\left(\frac{1}{R-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}\left(\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{R}} - 1\right) \\
&\approx -\frac{1}{2}\frac{GMm\varepsilon}{R^2}
\end{aligned}$$

Or, $\mathscr{W}(\mathbf{F_f}) = \int \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \int -\alpha m v\mathbf{v}\cdot\mathbf{dl} \approx -2\pi R\alpha m v^2$

D'où <u>TEM</u> : $\Delta\mathscr{E}_m = \mathscr{W}(\mathbf{F_f}) \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\varepsilon}{4\pi R^2}}$

b) $T = \frac{v}{d} = \sqrt{\frac{GM}{R}}\frac{1}{2\pi R} = \sqrt{\frac{GM}{4\pi^2}}\frac{1}{R^{-3/2}}$

Donc plus généralement, $T_n = K(R-\varepsilon n)^{-3/2}$, où $K = \sqrt{\frac{GM}{4\pi^2}}$

<u>DL</u> : $T_n = KR^{-3/2}\left(1 - \frac{\varepsilon n}{R}\right)^{-3/2} \approx KR^{-3/2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon n}{R}\right)$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} T_k = T_p \quad &\Leftrightarrow \quad KR^{-3/2}\sum_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon n}{R}\right) = T_p \\
&\Leftrightarrow \quad U\left(n + 1 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{R}\frac{n(n+1)}{2}\right) = 1 \qquad \left(U = \frac{KR^{-3/2}}{T_p}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad n^2 + n\left(\frac{4}{3}\frac{R}{\varepsilon} + 1\right) + \frac{4}{3}\frac{R}{\varepsilon} - \frac{1}{U} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad n^2 + \frac{4}{3}\frac{R}{\varepsilon}n - \frac{1}{U} = 0
\end{aligned}$$

<u>AN</u> : $n \approx 2\cdot 10^5$, donc $\boxed{h \approx 200\ km}$

Mines Télécom

⋆⋆⋆

Exercice 3 **[C D.]**

Démontrer l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{grad})\boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{grad}\,P + \mu\boldsymbol{g} + \eta\Delta\boldsymbol{v}$$

L'équation de Schrödinger :

$$ih\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = \hat{H}\boldsymbol{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\boldsymbol{\psi} + V\boldsymbol{\psi}$$

Ainsi que les équations de Maxwell :

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$div\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{rotE} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{rotB} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Centrale 1

⋆ ⋆ ⋆

Centrale Info

⋆ ⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

X-ESPCI

⋆ ⋆ ⋆

ENS

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Ilian M.]**

On considère une masse M enroulée indéfiniment autour d'un cylindre, ce dernier pouvant tourner autour d'un axe horizontal sur lequel il est fixé, avec un pendule de masse m accroché sur une surface latérale.

Etudier le mouvement et les positions d'équilibre du système.

∗ ∗ ∗