Oraux 2025 Wallon
PC/PCE

Sommaire

Mathématiques

CCINP

⋆⋆⋆

Exercice 1.a **[Marion L.]**

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.
Soit A et B deux matrices symétrique réelles telles que $A^2 = B^2$.
On souhaite montrer dans cet exercice qu'il existe P orthogonal tel que $PA = B$.
On admet que pour D une matrice diagonale, $\mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}(D^2)$.

1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Etablir que $(AX)^\top AX = (BX)^\top BX$.
2. On suppose que 0 n'est pas valeur propre de A.

   2.a Justifier que A est inversible, et montrer que BA^{-1} est orthogonale.

   2.b Conclure.
3. On suppose que 0 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité p.

   3.a Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^2)$, puis que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

   3.b Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$, puis 0 est valeur propre de B d'un ordre de multiplicité que l'on déterminera.

Soit R orthogonale telle que : $R^\top AR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ et $R^\top BR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$
où $(\Delta, H) \in S_{n-p}(\mathbb{R})^2$ sont inversibles et telles que $\Delta^2 = H^2$.

4. Montrer qu'il existe P orthogonale telle que $PA = B$ (on s'aidera de 2.).
5. Démontrer la propriété précédemment admise.

* * *

Exercice 1.b **[Marion L.]**

Soit $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}\mathrm{dx}$.

1. Etudier la convergence de cette intégrale.
2. Calculer cette intégrale.

* * *

Exercice 2.a **[Hugo D.]**

Soit E un sev de dimension $n \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire et $S = \{x \in E \ / \ \|x\| = 1\}$.
Soit u un endormophisme autoadjoint, et $q(x) = \langle x|u(x)\rangle$.

1. On se place dans le cas où n = 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, matrice de u.

   Montrer que u est autoadjoint, déterminer son spectre, et montrer que les vecteurs colonnes de A forment une BON de $\mathbb{R}^2$.

   2.a Montrer que $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i$, avec $x_1, ..., x_n$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

   2.b En déduire que $\max\{q(x), x \in S\} = \lambda_n$.
3. Soit $E_k = Vect(e_1, ..., e_k)$.

   3.a Montrer que $\max\{q(x), x \in S \cap E_k\} = \lambda_k$.

   3.b Montrer que $E_k \cap S \neq \emptyset$.
4. et 5. [non abordées]

* * *

Exercice 2.b **[Hugo D.]**

Soit u_n une suite monotone. On pose $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Montrer que M_n est une suite monotone.

* * *

Exercice 3.a **[Cyrian D.]**

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{n+n^2x} \end{cases}$

On définit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ lorsque c'est possible. On pose $g(x) = x f_n(x)$.

1. Montrer que f est définie.

2.a Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.b Montrer que f est C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.a Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3.b Montrer que $\sum g_n$ CVN.

4. Montrer qu'il existe $A > 0$, tel que $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{x}$.

5. [non abordée]

* * *

Exercice 3.b **[Cyrian D.]**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ vaut $n-1$ ou n.

2. A est-elle diagonalisable ?

3. Si λ est valeur propre, quel est son ordre de multiplicité ?

* * *

Exercice 4.a **[Jules B.]**

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- On qualifie un polynôme P de "positif" lorsque $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$.
- De la même manière, un polynôme est dit "strictement positif" lorsque $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$.

1. On pose $P(X) = X^2 - 2X + 1$, montrer que P est positif.
On pose maintenant $Q = P'' + P' + P$, montrer que Q est strictement positif.

2. Généralisation

2.a Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $Q = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}$.

Exprimer Q' en fonction de Q et de P.

2.b En posant $f : t \mapsto e^{-t}Q(t)$, montrer que Q est strictement positif.

3. On pose maintenant $(\cdot|\cdot) : (P|Q) \mapsto \sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0)$

3.a Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

3.b Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

4. On pose $u_n = d(X^n, \mathbb{R}_1[X])$. Déterminer u_n.

5. En supposant $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o(n)$. Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{1}{u_n^{3/2}}\right)_{n\geqslant 2}$.

* * *

Exercice 4.b **[Jules B.]**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On tire successivement k boules avec remise.
On note X la variable aléatoire suivant le plus grand numéro ayant été tiré.

Déterminer la loi de X.

Indication : Il faut utiliser et calculer $P(X \leqslant l)$ avec l à déterminer.

* * *

Exercice 5.a **[Jean C.]**

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On pose $T_n(P) = (nX+1)P + (1-X^2)P'$.

1. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, calculer $T_n(X^k)$.

2. Montrer que T_n est un endomorphisme.

3. On note M_2 la matrice de T_2 dans la base canonique.
Déterminer M_2. T_2 est-elle diagonalisable ?

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T_n, et ρ un vecteur propre associé à λ.

On pose $\forall x \in [-1;1]$, $g_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{nt-\lambda+1}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

On pose $h : x \mapsto \rho(x)e^{g_\lambda(x)}$. Montrer que h est constante sur $]-1;1[$.

5. Montrer que : $\dfrac{nt-\lambda+1}{1-t^2} = \dfrac{-n-\lambda+1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+t} + \dfrac{n-\lambda+1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-t}$.
Calculer g_λ sans intégrale.

6. On suppose λ une valeur propre de T_n, et ρ un vecteur propre associé.
Montrer que $\exists(k,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\rho = k(X-1)^\alpha(X+1)^\beta$.

7. Montrer que T_n est diagonalisable.

* * *

Exercice 5.b **[Jean C.]**

Soit $f : \begin{cases} [0;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto x + x^2 - y + y^2 \end{cases}$

On se place sur $]0;1[$.

Déterminer les points critiques.

Montrer que f admet un maximum et le déterminer.

BONUS : Extremum sur $[-1;1]$.

* * *

Exercice 6.a **[Hugo S.]**

On définit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{n^x}{n!}, S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Justifier l'existence de $S(O)$ et donner sa valeur.

2.a Montrer la convergence simple de $\sum u_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2.b Montrer que S est croissante sur $\mathbb{R}$.

3.a Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

3.b Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\mathrm{d}t$, puis montrer l'égalité avec $S(-1)$.

4. Soient $n \geqslant 2, k \geqslant 2$. Montrer l'inégalité : $\dfrac{n!}{k!} \leqslant \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{k-n}$.

Puis en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) \leqslant S_{n-1}(x) + \dfrac{n^n}{n!}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

* * *

Exercice 6.b **[Hugo S.]**

Soit $E = C^0([0;\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $(\cdot|\cdot) : (f,g) \in E \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

2. Donner la famille orthonormale associée aux fonctions cos et sin (procédé d'orthonormalisation de Schmidt souhaité par l'examinateur).

* * *

Exercice 7.a **[Cyprien M.]**

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$ et $b_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de a_n et de b_n.

2.a Exprimer $\forall x \in \mathbb{R}, |1 + e^{ix}\cos(x)|^2$.
En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + e^{ix}\cos(x) \neq 0$.

2.b Calculer a_0, a_1, et a_2.

3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

4.a Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + e^{ix}\cos(x)}\right) - \mathrm{Im}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{ix}cos(x))^{n+1}}{1 + e^{ix}\cos(x)}\right).$$

4.b Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n a_n$.

5. [question intermédiaire oubliée], puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$.

* * *

Exercice 7.b **[Cyprien M.]**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X], (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq b, F = \{P \in E \ / \ P(a) = P(b) = 0\}$.

1. Donner une base de F.

2. Montrer l'existence et l'unicité de $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 1, f(X) = 0$, et $\forall P \in E, f(P) = 0$.

3. Déterminer la fonction f qui convient.

* * *

Exercice 8.a **[Leena G.]**

Soit $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),\ A = (x, y),\ B = (x', x'), f_{A,B} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\forall t \in \mathbb{R}, f_{A,B}(t) = F(tA + (1-t)B) = F(tx + (1-t)x', ty + (1-t)y')$.

1. Déterminer une condition normale et suffisante pour que $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ soit convexe.

2. Montrer que $F(x, y) = x^2 + y^2$ est convexe.

3. Soit $q_M \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que :

$$q_M(u, v) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M)u^2 + 2uv\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M)v^2.$$

Montrer que $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ f''_{A,B}(t) = q_{tA+(1-t)B}(A - B)$.

4. Montrer que F est convexe ssi $M \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, q_M(u, v) \geqslant 0$..

5. Cas général [..]

* * *

Exercice 8.b **[Leena G.]**

Soit $p \in]0; 1[, X(\Omega) = \{-1; 1\}$.

On pose $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutellement indépendantes, et $\forall n \in \mathbb{N}^*, Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$ sans déterminer la loi de Y_n.

2. En déduire la loi de Y_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

* * *

Exercice 9.a [Kamel R.]

On se place dans un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète réelle d'espérance nulle.

1. Donner le développement en série entière ainsi que le rayon de convergence de $\mathrm{ch}(x)$.

2.a Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n n! \leqslant (2n)!$.

2.b En déduire que $\mathrm{ch}(x) \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+, g(x) = \mathrm{ch}(\lambda) + x\,\mathrm{sh}(\lambda) - e^{\lambda x}$.

3.a Calculer $g(1)$ et $g(-1)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in]-1;1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$ et le déterminer.

Calculer $g''(x)$, puis en déduire que $e^{\lambda x} \leqslant \mathrm{ch}(\lambda) + x\,\mathrm{sh}(\lambda)$.

3.b Montrer que $\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

4. Soit Z une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}\left(e^{\lambda Z}\right)$ soit finie.
Montrer que $\mathbb{P}\left(Z \geqslant a\right) \leqslant e^{-\lambda a}\mathbb{E}\left(e^{\lambda Z}\right)$.

5. Soit Y une variable aléatoire discrète réelle telle que X et Y soient indépendantes.
Montrer que $\mathbb{P}(|X+Y| \geqslant a) \leqslant$ [?].

* * *

Exercice 9.b [Kamel R.]

Soit $B \in \mathbb{C}$. On pose $M_B = \begin{pmatrix} 0 & B & B \\ 1 & 0 & B \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $X_{M_B}(X)$ développé.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur B pour que M_B soit diagonalisable.

* * *

Exercice 10.a [Gaspard V.]

On définit, lorsque cela est possible, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{dt}$.

On admet la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$ et $A > 0$,

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{dt} = \frac{1}{x} - \frac{\cos(A)}{x+A} - \int_0^A \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\mathrm{dt}$$

2.a Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\mathrm{dt}$ converge.

2.b Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0, g(x) = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\mathrm{dt}$.

3. Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Exprimer $g''(x) + g(x)$ simplement, en fonction de x.

5. Montrer que g est continue en 0.

* * *

Exercice 10.b [Gaspard V.]

Soit E un espace vectoriel de dimension 3.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \neq \tilde{O}_E$ et $f \circ f = \tilde{O}_E$.

1. Déterminer $\dim(\mathrm{Im}(f))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

2. Enoncer le théorème de la base incomplète.

Mines Télécom

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1.a **[Raphaël F.]**

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $M^n = O_n$.

1. Montrer que si M est symétrique, alors $M = O_n$.
2. Montrer que si $MM^\top = M^\top M$, alors $M = O_n$.

* * *

Exercice 1.b **[Raphaël F.]**

On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de H.
2. Calculer $H(1)$.
3. Trouver une expression de H (ndlr, sans l'intégrale).

* * *

Exercice 2.a **[Gaspard V.]**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
- $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{1+a^k}{4k!}$

1. Déterminer a.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de $X+Y$.

* * *

Exercice 2.b **[Gaspard V.]**

Soit E un ev de dimension finie tel que $\dim(E) \geqslant 2$. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant :

- $f \circ f = g \circ g = Id_E$.
- $f \circ g + g \circ f = O_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que f et g sont des automorphismes diagonalisables.
2. Montrer que les deux seules valeurs propres possibles pour f et g appartient à $\{-1;1\}$.
3. Soit $u : \begin{cases} \mathrm{Ker}(f - Id_E) & \longrightarrow \mathrm{Ker}(f+Id_E) \\ x & \longmapsto g(x) \end{cases}$
Montrer que u est un isomorphisme et en déduire que la dimension de E est paire.
4. [non abordée]

* * *

Exercice 2.a **[Ilyes B.]**

Soit (X_n) une suite d'évènement indépendants suivant une loi de Bernouilli $p \in [0;1]$.

1. On pose $U_k = X_k X_{k+1}$. Déterminer la loi, l'espérance, et la variance des Y_k.
2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} Y_k$. Déterminer la loi, l'espérance, et la variance de S_n.
3. Montrer que $\mathbb{P}\left(|F_n - p| \geqslant 0\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, où $F_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n S_k}{n}$.

* * *

Exercice 2.b **[Ilyes B.]**

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0;+\infty[$. Etudier sa continué sur $]0;+\infty[$.
2. Montrer que f est C^1.
3. Donner un équivalent de f en 0.

* * *

Exercice 3.a **[Paul C.]**

Soit $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. Déterminer l'espérance de $\exp(tX)$, avec $t > 0$. Préciser son existence.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \mathrm{e}^{-tn}\,\mathbb{E}(\exp(tX))$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda_k}{k!} \leqslant \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n e^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

* * *

Exercice 3.b **[Paul C.]**

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $f(x) = (a-b)^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - b)^2 + \sum_{i\leqslant i,j \leqslant n}^{n}(x_i - x_j)^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\|y\| = \sqrt{\langle y|y\rangle}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geqslant \|x-u\|^2 + \|x-v\|^2 \geqslant (\|x\| - \|u\|)^2 + (\|x\| - \|v\|)^2$

où $\begin{cases} u = (a, ..., a) \\ v = (b, ..., b) \end{cases}$

2. Montrer que $\exists R > 0$ / $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > R \Rightarrow f(x) > f(0)$.
3. Déterminer le minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

* * *

Exercice 4.a **[Tristan D.]**

Déterminer les fonctions développables en série entière vérifiant l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 0$$

* * *

Exercice 4.b **[Tristan D.]**

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On donne la loi du couple (X,Y) : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X,Y) = (i,j)) = \dfrac{1}{e2^{i+1}j!}$.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Montrer que $X+1$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

* * *

Exercice 5.a **[Lucy D.]**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle et $\rho(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(\rho)$ et le rang de ρ.
2. ρ est-elle diagonalisable ?

* * *

Exercice 5.b **[Lucy D.]**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fontions définies par $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{cases}$.

1. Etudier la convergence uniforme en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} n^\alpha x e^{-nx} \mathrm{d}x$.

* * *

Exercice 6.a **[Marion L.]**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et indentiquement distribuées, qui suivent une loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.
Soit $A(X,Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la probabilité que le polynôme caractéristique de $A(X,Y)$ soit scindé à racines simples.
2. Déterminer la probabilité que $A(X,Y)$ soit diagonalisable.
3. Déterminer la probabilité que $A(X,Y)$ soit symétrique et ?.

* * *

Exercice 6.b **[Marion L.]**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$.

Soit g telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f(-x)$.

1. Démontrer que g est une solution paire de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$$

* * *

Exercice 7.a **[Matthieu R.]**

Soit E un ev de dimension n et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base othonormale E.
Soit f un endomorphisme de E tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!], i \neq j, \langle e_i | e_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(e_i) | f(e_j) \rangle = 0$$

1. Montrer que $\forall i \in [\![1;n]\!], f(e_1) + f(e_2)$ et $f(e_1) - f(e_i)$ sont orthogonaux.
2. En déduire qu'il existe un $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$.

* * *

Exercice 7.b **[Matthieu R.]**

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}$.

Trouver la rayon de convergence R, puis pour $|x| < R$, calculer la somme de cette série.

* * *

Exercice 7.a **[Hugo S.]**

Soient $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3, M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$ avec $(m_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } i = n \\ 1 & \text{si } j = 1 \\ 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Déterminer les valeurs propres de M, et donner un polynômme annulateur de M de degré 3.

* * *

Exercice 7.b **[Hugo S.]**

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt} \mathrm{dt}$.

1. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une équation différentielle vérifiée par F.

* * *

Exercice 8.a **[Cyprien M.]**

On pose $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{\mathrm{dt}}{1 + t^{\frac{3}{2}}}$.

Quelle est la nature de $\sum u_n$?

* * *

Exercice 8.b **[Cyprien M.]**

Un avion possède n places ($n \geqslant 2$).
Les passagers choisissent à tour de rôle leur place de cette façon :

- Le premier est étourdi et choisit une place au hasard.
- Les suivants essayent d'aller à leur place :
  - Si elle est libre, ils la prennent.
  - Sinon, ils choisissent une place au hasard.

On note X_i la place prise par le passager i-ème passager.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n | X_1 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n | X_1 = n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X_i = i | X_1 = k \cap X_k = 1)$ avec $k \in [\![2; i-1]\!]$.
4. On note $p_n = \mathbb{P}(X_n = n)$.
   Montrer que : $\forall k \in [\![2; n-1]\!], \mathbb{P}(X_n = n | X_1 = k) = p_{n-k+1}$.
5. Montrer que : $\mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{n}\left(1 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} p_i\right)$.
6. Montrer que p_n est constante.

Remarque de l'examinateur : p_n ne correspond pas à la probabilité que le n-ième passager soit bien placé, mais bien que celui ci soit bien placé dans un avion à n places.

* * *

Exercice 9.a **[Leena G.]**

On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 2\}$.

On définit $f : \begin{cases} D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto e^{xy} - x \end{cases}$.

1. Montrer que f admet un maximum sur D et l'étudier.
2. [non abordée]

* * *

Exercice 9.b **[Leena G.]**

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On définit $\phi(P) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)x^k$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit un automorphisme de E.
3. [non abordée]

* * *

Exercice 9.a **[Kamel R.]**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n \mathrm{dt} = n!$.

1. Montrer que $\langle P|Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)\mathrm{dt}$ est un produit scalaire.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Déterminer selon a et b, le minimum de $\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at + b)^2 \mathrm{dt}$.

* * *

Exercice 9.b **[Kamel R.]**

1. Rappeler l'expression trigonmétrique de $\tan(a-b)$ selon $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$ converge.
3. Posons $a = \mathrm{Arctan}(n+2)$, et $b = \mathrm{Arctan}(n+1)$.

   3.a Calculer $\tan(a-b)$.

   3.b En déduire $a - b$.

   3.c En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Centrale 1

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 **[Pierre Q.]**

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\ln(1-2t\cos(x)+t^2)$.

1.a Montrer que f est définie sur $]0;2\pi[$.

1.b Montrer que $f(2\pi - x) = f(x)$.

1.c Montrer que $f\left(\pi - \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$.

2. Montrer que f est C^1 sur $]0;2\pi[$, calculer f' puis f.

3. En déduire le calcul ... (de l'intégrale ci-dessus ?).

∗ ∗ ∗

Exercice 2 **[Guillaume V.]**

Soit f une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On pose :

$$K : \begin{cases} \mathbb{R}\times]0;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{cases}$$

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}\times]0;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t)f(y)dy \end{cases}$$

1. Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

2. Montrer que $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ (on admet l'intégrale de Gauss).

∗ ∗ ∗

Exercice 3 **[Emilie B.]**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\mathrm{dt}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f, ainsi que les limites de f en ses bornes.

2. Montrer que f est de classe C^1 et établir une équation différentielle sur f.

3. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Déterminer un équivalent de f en 0.

∗ ∗ ∗

Exercice 4 **[Jean C.]**

Soient $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ et $c = (c_n)$.

On définit l'opérateur * produit de Cauchy, tel que $c = a * b$ (ie. $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$)

1. On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   Est-ce que $a * a$ converge ?

2. On suppose que (a_n) converge vers l, et que $\sum b_n$ CVA.

   Montrer que $a * b$ converge vers $l \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

3. (a_n) est définie comme à la question 1.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i = A\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_{n-i} \cdot \sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j$

4. On pose A, B et C les sommes respectives des séries de terme général a_n, b_n et c_n.

   En utilisant les questions précédentes, montrer que $C = AB$ si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ CVA.

∗ ∗ ∗

Exercice 5 [Florian Fe.]

On définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{2}{n+2}u_n$, avec $u_0 = u_1 = 1$.

On définit également, lorsque c'est possible, $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.
   En déduire le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$
2. Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

* * *

Exercice 6 [Paul C.]

On pose $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\theta(x) = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{s}{1+xs}ds$ et $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Dresser le tableau de variation de θ et déterminer son expression en fonction de x.
2. Poser le changement de variable $u = \dfrac{t-x}{\sqrt{x}}$ et l'effectuer dans l'expression de Γ.

   Déterminer ainsi un équivalent de $\Gamma(x+1)$ en $+\infty$.

* * *

Exercice 7.a - Navale [Paul C.]

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ (ndlr, exercice très similaire à Mines-Télécom 2.b).

1. Montrer que f est définie et C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$ et en 1.

* * *

Exercice 7.b - Navale [Paul C.]

On définit la variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit Y la variable aléatoire définit par : $Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ pair} \\ 0 & \text{si } X \text{ impair} \end{cases}$

1. Trouver la loi, l'espérance, et la variance de Y.

* * *

Exercice 8 [Ilian M.]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice $M^\top M$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales $U, V \in O_n(\mathbb{R})$ telles que la matrice UMV soit diagonale.
3. On considère la matrice réelle suivante : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   La propriété de la question 2. est-elle vérifiée pour cette matrice N ?
4. La propriété de la question 2. est-elle vérifiée pour toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

* * *

Exercice 9 [Oscar P.]

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un ev de dimension finie, f un endormorphisme diagonalisable et $\lambda_1, ..., \lambda_p$ ses valeurs propres.

On pose $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k L_i$ pour tout $k \in [\![0;p-1]\!]$.
2. Montrer que $L_i(f)$ est un projecteur, puis déterminer les caractéristiques de ce projecteur.

* * *

Exercice 10 **[Cyprien M.]**

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n = 2q+1$ et $k \in [\![1; n-1]\!]$.
On note $A_0, ..., A_k$ les points d'affixes respestifs $z_0, ..., z_k$ tel que $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
On note aussi W_n la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n-1]\!]$.
Enfin on note B_k le point d'intersection entre la droite (A_0, A_k) et celle d'équation $x = -1$.

1. Montrer que B_k a pour coordonnée : $b_k = 2\text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(z_k)$ avec $z_k = \text{cotan}\left(\dfrac{W_n\pi}{n}\right)$.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(|z_k|)$.

Centrale Info

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Pierre Q.]**

Soit $E = C^0\left([-1;1],\mathbb{R}\right)$. On pose $\langle f|g\rangle = \int_0^1 \left(1-t^2\right) f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle f|g\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Définissons E_{pair} (resp. E_{impair}) l'ensemble des fonctions de E paires (resp. impaires).

2.a Montrer que $E = E_{pair} \oplus E_{impair}$.

2.b En déduire $E_{pair}^{\perp}$ et $E_{impair}^{\perp}$.

On définit la suite de polynôme $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et $P_n(X) = (X-\lambda_n)P_{n-1} + \mu_n P_{n-2}$

avec $\lambda_n = \dfrac{\langle XP_{n-1}|P_n\rangle}{\|P_{n-1}\|}$ et $\mu_n = -\dfrac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2}$.

On dipose de `pn(p, q)` qui renvoit le polynôme $R = (X-\lambda)P + \mu Q$, avec λ et μ définis précédemment.

3.a Créer une fonction `liste(n)` qui donne les polynômes $(P_0, ..., P_n)$.

3.b On dispose d'une fonction `affiche(P)`.
Afficher les polynômes $(P_0, ..., P_{10})$. Conjecture ?

3.c Créer une fonction qui calcule $\langle P_i|P_j\rangle$ pour $(i,j) \in [\![0;5]\!]^2$. Conjecture ?

4.a Montrer le conjectures de 2.

4.b Montrer que $\langle P_n|P_{n-1}\rangle = 0$ et $\|P_n\|^2 = \langle XP_{n-1}|P_n\rangle$.

4.c Montrer que $\langle P_n|P_{n-2}\rangle = 0$.

∗ ∗ ∗

Exercice 2 **[Guillaume V.]**

Soit E un ev de polynômes dans $\mathbb{R}$.

On pose $L_0 = 1$, $L_1 = X$, et $(n+2)L_{n+2} = (2n+3)XL_{n+1} - (n+1)L_n$.

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur E.

2. Calculer L_2, L_3.

3. Déterminer le degré des (L_n) ainsi que leur parité.

4.a Créer une fonction `L(n, x)` renvoyant la valeur de L_n évalué en x.

4.b On dispose de `ps(i, j)` qui renvoie $\langle L_i, L_j\rangle$.

Donner la matrice $A \in \mathscr{M}_7(\mathbb{R})$ telle que $[A]_{i,j} = \langle\sqrt{2i+1}L_i, \sqrt{2j+1}L_j\rangle$.

Conjecturer $\langle L_i, L_j\rangle$ pour $i = j$ et $i \neq j$.

4.c Afficher les $(L_k)_{k\in[\![0;6]\!]}$ sur $[-1;1]$. Conjecturer [quelque chose] sur les racines.

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dX^n}\left((X^2-1)^n\right)$.

5.a Montrer la conjecture pour $i \neq j$.

5.b Montrer la conjecture pour $i = j$.

5.c Montrer la conjecture sur les racines.

5.d [quelque chose sur $L_n(0)$].

∗ ∗ ∗

Exercice 3 **[Jean C.]**

Soit $A \in SO_4(\mathbb{R})$ à valeurs propres complexes.

1. Rappeler la définition de $SO_n(\mathbb{R})$. Expliciter $SO_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que A admet une valeur propre complexe.

On pose $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $X = X_1 + iX_2$.

Soit $Q \in O_4(\mathbb{R})$ tel que les premières colonnes forment une base de F.

3. Calculez avec python $Q^\top AQ$.

   Remarque : toutes les matrices étaient déjà définies dans python.

On pose $F = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$.

4. Montrer que F est un plan stable par A.

On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme associé à A.

5. Que peut-on dire de $u(F^\perp)$?

6. Montrer que $u_F \in SO(F)$.

7. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^\top AQ$ soit diagonale par bloc.

8. Généraliser le résultat pour $SO_4(\mathbb{R})$ sans contrainte sur son spectre.

* * *

Exercice 4 **[Paul C.]**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathscr{R})$. On dit que :

- A vérifie (P) si : $\exists (S,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, r \geqslant 1 \ / \ S^\top = S, N^r = 0$ et $NS = SN$

- A est p-symétrique si : $\mathrm{Cp}(A) = 0$, où $\mathrm{Cp}(A) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (A^\top)^k A^{p-k}$

On dispose des fonctions suivantes :

- `gen(A)` : Génère une matrice A vérifiant P dont les coefficients sont composées de 1 et de -1

- `binom(p, k)` : Calcul le coefficient binomial

- `test(A)` : test si la matrice A est nulle ou non

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que $\overline{X}^\top X \in \mathbb{R}^+$, puis montrer que $\overline{AX} = A\overline{X}$.

2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$, et (X, Y) des vecteurs propres respectivement associés à λ et μ.
   Calculer $Y^\top Cp(A)X$.

Dans la suite, on suppose $p \geqslant 1$ et A p-symétrique.

3. Montrer que les valeurs propres de A sont réelles.

4. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A)$, distinctes, montrer que $E_\lambda(A)$ et $E_\mu(A)$ sont orthogonaux.
   En déduire que les matrices p-symétriques sont diagonalisables.

5. Ecrire la fonction `psym(A)` qui renvoie s'il existe $p \in [\![1; 2n]\!]$ tel que A soit p-symétrique.
   Tester pour $n \in [\![2, 20]\!]$ et générer A par la fonction `gen`.
   Que peut-on conjecturer ?

6. Ecrire la fonction `combi(p, q, m)` où $(p, q, m) \in \mathbb{N}^3$ tels que $n+q < p$ renvoyant la somme suivante : $\sum_{k=m}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{m} \binom{p-q}{k}$.

7. [non traitée]

Mines Ponts

⋆⋆⋆

Exercice 1.a **[Armel D.]**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2. En déduire que M est inversible, et déterminer M^{-1}.
2. Sans utiliser le polynôme caractéristique, montrer que M est diagonalisable.
   Déterminer ses valeurs propres et leur ordre de multiplicité.
3. Calculer M^n.
   Indication : on utilisera le théorème de la division euclidienne.
4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{M^n}{n!}$.
   Montrer que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L finie et déterminer cette limite.

* * *

Exercice 1.b **[Armel D.]**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+ixt)}$.

1. Montrer que F est bien définie et continue.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $F(x) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une expression de F sans symbole d'intégrale.

* * *

Exercice 2.a **[Guillaume P.]**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le développement asymptotique à deux termes de précision près de $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$
On considère $E_n = \{1, ..., n\} = [\![1; n]\!]$.
On considère également $\Omega_n = {E_n}^{E_n}$ (l'ensemble des applications de E_n dans E_n) muni de la loi uniforme.
On introduit $\forall k \in E_n$, la va $X_{k,n} : \Omega_n \to \{0,1\}$, indicatrice de l'évènement $\{g \in \Omega_n ; k \in g(E_n)\}$.
On introduit $Y_n : \Omega_n \to \mathbb{N}$ la va qui à tout g de Ω_n associe $|g(E_n)|$ (cardinal de $g(E_n)$).

2. Déterminer la loi de $X_{k,n}$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$.
4. Soit $(k,l) \in E_n^2$. Déterminer la loi du couple $(X_{k,n}, X_{l,n})$.
   En déduire : $\mathrm{COV}(X_{k,n}, X_{l,n}) = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n + ... \left(1+\frac{...}{n}\right)^{2n}$.
5. Déterminer $\mathbb{V}(Y_n)$.
6. Déterminer un équivalent de $\mathbb{V}(Y_n)$.

* * *

Exercice 2.b **[Guillaume P.]**

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose que $\sum \frac{f^{(n)}}{n!}$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Déterminer une expression de la somme de cette série.

* * *

Exercice 3.a **[Robin K.]**

Soit $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$, C^0 et positive, et $(a,b) \in \mathbb{R}_+$.

On suppose $\forall x \geqslant 1, f(x) \leqslant a \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t + b$.

Montrer que $f(x) \leqslant b e^{a-\frac{a}{x}}$.

* * *

Exercice 3.b **[Robin K.]**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \iff \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \iff E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
2. Donner des exemples d'endormophismes qui vérifient ces conditions.

* * *

Exercice 4.a **[Guillaume V.]**

Soit $E = \{f \in C^1([0;1],\mathbb{R}) \ / \ f(0) = 0, f(1) = 1\}$.

Déterminer $\displaystyle\inf_{f\in E} \left\{ \int_0^1 |f - f'| \right\}$.

* * *

Exercice 4.b **[Guillaume V.]**

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.

On définit le produit scalaire $\forall (P,Q) \in E$:

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. Déterminer une base orthonormale de E à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
2. Soit $P \in E$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^1 P^2(t)\mathrm{d}t = 1$. Montrer que : $\displaystyle\sup_{x\in[-1;1]} P(x) \leqslant 2\sqrt{2}$.

3? [non abordée]

* * *

X-ESPCI

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Ilian M.]**

On pose $\gamma(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et on donne $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma(x)\mathrm{dx} = 1$.

On pose aussi $(X_1, ..., X_n)$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et telles que $\forall i \in [\![1; n]\!], \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \dfrac{1}{2}$.

On exprime alors $S_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n \lambda_k}{\sqrt{n}}$.

Montrer alors que $\forall Q \in \mathbb{R}[X], \mathbb{E}(Q(S_n)) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} Q(x)\gamma(x)\mathrm{dx}$.

Indication : s'intéresser aux monômes de degrés pairs et impairs.

∗ ∗ ∗

Exercice 2 **[Pierre Q.]**

Soit P de degré d, $P \in \mathbb{Z}[X]$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_d$ ses racines complexes.

On suppose $\forall k \in [\![1; d]\!], |\lambda_k| \leqslant 1$. On note $f(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que f est à valeurs entières.
2. Montrer que $\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geqslant n_0, f(p+n) = f(p)$.
3. Montrer que les λ_k sont soit nuls, soit racines de l'unité.

ENS

⋆⋆⋆

Exercice 1.a **[Ilian M.]**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_{n+1} = \sin(a_n)$.

Nature de $\sum a_n^2$?

∗ ∗ ∗

Exercice 1.b **[Ilian M.]**

Soit $(A, B, C) \in (M_2(\mathbb{R}))^3$.

On définit $[A, B] = AB - BA$ (ndlr, crochet de Lie).

Montrer que $\left[[A, B]^2, C\right] = 0$ avec deux méthodes différentes.

∗ ∗ ∗

Exercice 1.c **[Ilian M.]**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Physique

CCINP

⋆⋆⋆

Mines Télécom

⋆ ⋆ ⋆

Centrale 1

⋆⋆⋆

Centrale Info

⋆ ⋆ ⋆

Mines Ponts

⋆ ⋆ ⋆

X-ESPCI

⋆ ⋆ ⋆

ENS

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Ilian M.]**

On considère une masse M enroulée indéfiniment autour d'un cylindre, ce dernier pouvant tourner autour d'un axe horizontal sur lequel il est fixé, avec un pendule de masse m accroché sur une surface latérale.

Etudier le mouvement et les positions d'équilibre du système.

∗ ∗ ∗