Oraux 2025 Wallon
PC/PCE

Sommaire

Mathématiques

CCINP

⋆⋆⋆

Exercice 1.a **[Marion L.]**

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.
Soit A et B deux matrices symétrique réelles telles que $A^2 = B^2$.
On souhaite montrer dans cet exercice qu'il existe P orthogonal tel que $PA = B$.
On admet que pour D une matrice diagonale, $\mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}(D^2)$.

1. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Etablir que $(AX)^\top AX = (BX)^\top BX$.
2. On suppose que 0 n'est pas valeur propre de A.

   2.a Justifier que A est inversible, et montrer que BA^{-1} est orthogonale.

   2.b Conclure.
3. On suppose que 0 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité p.

   3.a Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^2)$, puis que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

   3.b Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$, puis 0 est valeur propre de B d'un ordre de multiplicité que l'on déterminera.

Soit R orthogonale telle que : $R^\top AR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ et $R^\top BR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$
où $(\Delta, H) \in S_{n-p}(\mathbb{R})^2$ sont inversibles et telles que $\Delta^2 = H^2$.

4. Montrer qu'il existe P orthogonale telle que $PA = B$ (on s'aidera de 2.).
5. Démontrer la propriété précédemment admise.

$* * *$

Exercice 1.b **[Marion L.]**

Soit $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}\mathrm{dx}$.

1. Etudier la convergence de cette intégrale.
2. Calculer cette intégrale.

$* * *$

Exercice 2.a **[Hugo D.]**

Soit E un sev de dimension $n \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire et $S = \{x \in E \,/\, \|x\| = 1\}$.
Soit u un endormophisme autoadjoint, et $q(x) = \langle x | u(x) \rangle$.

1. On se place dans le cas où n = 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, matrice de u.

   Montrer que u est autoadjoint, déterminer son spectre, et montrer que les vecteurs colonnes de A forment une BON de $\mathbb{R}^2$.

   2.a Montrer que $q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i$, avec $x_1, ..., x_n$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

   2.b En déduire que $\max\{q(x), x \in S\} = \lambda_n$.
3. Soit $E_k = Vect(e_1, ..., e_k)$.

   3.a Montrer que $\max\{q(x), x \in S \cap E_k\} = \lambda_k$.

   3.b Montrer que $E_k = Vect(e_1, ..., e_k)$.
4. et 5. [non abordées]

$* * *$

Exercice 2.b **[Hugo D.]**

Soit u_n une suite monotone. On pose $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Montrer que M_n est une suite monotone.

$* * *$

Exercice 3.a **[Cyrian D.]**

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{n+n^2x} \end{cases}$

On définit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ lorsque c'est possible. On pose $g(x) = xf_n(x)$.

1. Montrer que f est définie.

2.a Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.b Montrer que f est C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.a Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.b Montrer que $\sum g_n$ CVN.

4. Montrer qu'il existe $A > 0$, tel que $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{x}$.

5. [non abordée]

* * *

Exercice 3.b **[Cyrian D.]**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ vaut $n-1$ ou n.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Si λ est valeur propre, quel est son ordre de multiplicité ?

Mines Télécom

⋆⋆⋆

Exercice 1.a **[Raphaël F.]**

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $M^n = O_n$.

1. Montrer que si M est symétrique, alors $M = O_n$.
2. Montrer que si $MM^\top = M^\top M$, alors $M = O_n$.

* * *

Exercice 1.b **[Raphaël F.]**

On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de H.
2. Calculer $H(1)$.
3. Trouver une expression de H (ndlr, sans l'intégrale).

* * *

Exercice 2.a **[Gaspard V.]**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{1+a^k}{4k!}$

1. Déterminer a.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

* * *

Exercice 2.b **[Gaspard V.]**

Soit E un ev de dimension finie tel que $\dim(E) \geqslant 2$. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant :

- $f \circ f = g \circ g = Id_E$.
- $f \circ g + g \circ f = O_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que f et g sont des automorphismes diagonalisables.

2. Montrer que les deux seules valeurs propres possibles pour f et g appartient à $\{-1;1\}$.

3. Soit $u : \begin{cases} \mathrm{Ker}(f - Id_E) & \longrightarrow \mathrm{Ker}(f + Id_E) \\ x & \longmapsto g(x) \end{cases}$
Montrer que u est un isomorphisme et en déduire que la dimension de E est paire.

4. [non abordée]

* * *

Exercice 2.a **[Ilyes B.]**

Soit (X_n) une suite d'évènement indépendants suivant une loi de Bernouilli $p \in [0;1]$.

1. On pose $U_k = X_k X_{k+1}$. Déterminer la loi, l'espérance, et la variance des Y_k.
2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} Y_k$. Déterminer la loi, l'espérance, et la variance de S_n.
3. Montrer que $\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant 0) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, où $F_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n S_k}{n}$.

* * *

Exercice 2.b **[Ilyes B.]**

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0;+\infty[$. Etudier sa continué sur $]0;+\infty[$.
2. Montrer que f est C^1.
3. Donner un équivalent de f en 0.

* * *

Exercice 3.a **[Paul C.]**

Soit $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. Déterminer l'espérance de $\exp(tX)$, avec $t > 0$. Préciser son existence.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \mathrm{e}^{-tn}\, \mathbb{E}(\exp(tX))$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda_k}{k!} \leqslant \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n e^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

* * *

Exercice 3.b **[Paul C.]**

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $f(x) = (a-b)^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - b)^2 + \sum_{i \leqslant i,j \leqslant n}^{n} (x_i - x_j)^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\|y\| = \sqrt{\langle y|y\rangle}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geqslant \|x-u\|^2 + \|x-v\|^2 \geqslant (\|x\| - \|u\|)^2 + (\|x\| - \|v\|)^2$

où $\begin{cases} u = (a, ..., a) \\ v = (b, ..., b) \end{cases}$

2. Montrer que $\exists R > 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > R \Rightarrow f(x) > f(0)$.
3. Déterminer le minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

Centrale 1

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Pierre Q.]**

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\ln(1-2t\cos(x)+t^2)$.

1.a Montrer que f est définie sur $]0;2\pi[$.

1.b Montrer que $f(2\pi - x) = f(x)$.

1.c Montrer que $f\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}f(x)$.

2. Montrer que f est C^1 sur $]0;2\pi[$, calculer f' puis f.
3. En déduire le calcul ... (de l'intégrale ci-dessus ?).

* * *

Exercice 2 **[Guillaume V.]**

Soit f une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On pose :

$$K : \begin{cases} \mathbb{R}\times]0;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{cases}$$

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}\times]0;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t)f(y)dy \end{cases}$$

1. Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.
2. Montrer que $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ (on admet l'intégrale de Gauss).

* * *

Exercice 3 **[Emilie B.]**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\mathrm{dt}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f, ainsi que les limites de f en ses bornes.
2. Montrer que f est de classe C^1 et établir une équation différentielle sur f.
3. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Déterminer un équivalent de f en 0.

* * *

Exercice 4 **[Jean C.]**

Soient $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ et $c = (c_n)$.

On définit l'opérateur * produit de Cauchy, tel que $c = a * b$ (ie. $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$)

1. On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   Est-ce que $a * a$ converge ?

2. On suppose que (a_n) converge vers l, et que $\sum b_n$ CVA.

   Montrer que $a * b$ converge vers $l \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

3. (a_n) est définie comme à la question 1.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i = A\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_{n-i} \cdot \sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j$

4. On pose A, B et C les sommes respectives des séries de terme général a_n, b_n et c_n.

   En utilisant les questions précédentes, montrer que $C = AB$ si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ CVA.

* * *

Exercice 5 [Florian Fe.]

On définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{2}{n+2} u_n$, avec $u_0 = u_1 = 1$.

On définit également, lorsque c'est possible, $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.
En déduire le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$
2. Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

* * *

Exercice 6 [Paul C.]

On pose $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\theta(x) = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{s}{1+xs} ds$ et $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Dresser le tableau de variation de θ et déterminer son expression en fonction de x.
2. Poser le changement de variable $u = \dfrac{t-x}{\sqrt{x}}$ et l'effectuer dans l'expression de Γ.

Déterminer ainsi un équivalent de $\Gamma(x+1)$ en $+\infty$.

* * *

Exercice 7.a - Navale [Paul C.]

On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2 x}$ (ndlr, exercice très similaire à Mines-Télécom 2.b).

1. Montrer que f est définie et C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$ et en 1.

* * *

Exercice 7.b - Navale [Paul C.]

On définit la variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit Y la variable aléatoire définit par : $Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ pair} \\ 0 & \text{si } X \text{ impair} \end{cases}$

1. Trouver la loi, l'espérance, et la variance de Y.

* * *

Exercice 8 [Ilian M.]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice $M^\top M$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales $U, V \in O_n(\mathbb{R})$ telles que la matrice UMV soit diagonale.
3. On considère la matrice réelle suivante : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
La propriété de la question 2. est-elle vérifiée pour cette matrice N ?
4. La propriété de la question 2. est-elle vérifiée pour toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

* * *

Exercice 9 [Oscar P.]

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un ev de dimension finie, f un endormorphisme diagonalisable et $\lambda_1, ..., \lambda_p$ ses valeurs propres.
On pose $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k L_i$ pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$.
2. Montrer que $L_i(f)$ est un projecteur, puis déterminer les caractéristiques de ce projecteur.

Centrale Info

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Pierre Q.]**

Soit $E = C^0\left([-1;1], \mathbb{R}\right)$. On pose $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right) f(t)g(t)\mathrm{dt}$.

1. Montrer que $\langle f|g\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Définissons E_{pair} (resp. E_{impair}) l'ensemble des fonctions de E paires (resp. impaires).

2.a Montrer que $E = E_{pair} \oplus E_{impair}$.

2.b En déduire $E_{pair}^{\perp}$ et $E_{impair}^{\perp}$.

On définit la suite de polynôme $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et $P_n(X) = (X-\lambda_n)P_{n-1} + \mu_n P_{n-2}$

avec $\lambda_n = \dfrac{\langle XP_{n-1}|P_n\rangle}{\|P_{n-1}\|}$ et $\mu_n = -\dfrac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2}$.

On dipose de `pn(p, q)` qui renvoit le polynôme $R = (X-\lambda)P + \mu Q$, avec λ et μ définis précédemment.

3.a Créer une fonction `liste(n)` qui donne les polynômes $(P_0, ..., P_n)$.

3.b On dispose d'une fonction `affiche(P)`.
Afficher les polynômes $(P_0, ..., P_{10})$. Conjecture ?

3.c Créer une fonction qui calcule $\langle P_i|P_j\rangle$ pour $(i,j) \in [\![0;5]\!]^2$. Conjecture ?

4.a Montrer le conjectures de 2.

4.b Montrer que $\langle P_n|P_{n-1}\rangle = 0$ et $\|P_n\|^2 = \langle XP_{n-1}|P_n\rangle$.

4.c Montrer que $\langle P_n|P_{n-2}\rangle = 0$.

⋆⋆⋆

Exercice 2 **[Guillaume V.]**

Soit E un ev de polynômes dans $\mathbb{R}$.

On pose $L_0 = 1$, $L_1 = X$, et $(n+2)L_{n+2} = (2n+3)XL_{n+1} - (n+1)L_n$.

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(x)Q(x)\mathrm{dx}$ définit un produit scalaire sur E.

2. Calculer L_2, L_3.

3. Déterminer le degré des (L_n) ainsi que leur parité.

4.a Créer une fonction `L(n, x)` renvoyant la valeur de L_n évalué en x.

4.b On dispose de `ps(i, j)` qui renvoie $\langle L_i, L_j\rangle$.

Donner la matrice $A \in \mathscr{M}_7(\mathbb{R})$ telle que $[A]_{i,j} = \langle\sqrt{2i+1}L_i, \sqrt{2j+1}L_j\rangle$.

Conjecturer $\langle L_i, L_j\rangle$ pour $i = j$ et $i \neq j$.

4.c Afficher les $(L_k)_{k\in[\![0;6]\!]}$ sur $[-1;1]$. Conjecturer [quelque chose] sur les racines.

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dX^n}\left((X^2-1)^n\right)$.

5.a Montrer la conjecture pour $i \neq j$.

5.b Montrer la conjecture pour $i = j$.

5.c Montrer la conjecture sur les racines.

5.d [quelque chose sur $L_n(0)$].

⋆⋆⋆

Exercice 3 **[Jean C.]**

Soit $A \in SO_4(\mathbb{R})$ à valeurs propres complexes.

1. Rappeler la définition de $SO_n(\mathbb{R})$. Expliciter $SO_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que A admet une valeur propre complexe.

On pose $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $X = X_1 + iX_2$.

Soit $Q \in O_4(\mathbb{R})$ tel que les premières colonnes forment une base de F.

3. Calculez avec python $Q^\top AQ$.

   Remarque : toutes les matrices étaient déjà définies dans python.

On pose $F = \text{Vect}(X_1, X_2)$.

4. Montrer que F est un plan stable par A.

On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme associé à A.

5. Que peut-on dire de $u(F^\perp)$?

6. Montrer que $u_F \in SO(F)$.

7. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^\top AQ$ soit diagonale par bloc.

8. Généraliser le résultat pour $SO_4(\mathbb{R})$ sans contrainte sur son spectre.

* * *

Exercice 4 **[Paul C.]**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathscr{R})$. On dit que :

- A vérifie (P) si : $\exists (S,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, r \geqslant 1 \;/\; S^\top = S, N^r = 0$ et $NS = SN$

- A est p-symétrique si : $\text{Cp}(A) = 0$, où $\text{Cp}(A) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (A^\top)^k A^{p-k}$

On dispose des fonctions suivantes :

- `gen(A)` : Génère une matrice A vérifiant P dont les coefficients sont composées de 1 et de -1

- `binom(p, k)` : Calcul le coefficient binomial

- `test(A)` : test si la matrice A est nulle ou non

Mines Ponts

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1.a [Armel D.]

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2. En déduire que M est inversible, et déterminer M^{-1}.
2. Sans utiliser le polynôme caractéristique, montrer que M est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et leur ordre de multiplicité.
3. Calculer M^n.
Indication : on utilisera le théorème de la division euclidienne.
4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{M^n}{n!}$.
Montrer que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L finie et déterminer cette limite.

* * *

Exercice 1.b [Armel D.]

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+ixt)}$.

1. Montrer que F est bien définie et continue.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $F(x) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une expression de F sans symbole d'intégrale.

* * *

Exercice 2.a [Guillaume P.]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le développement asymptotique à deux termes de précision près de $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$
On considère $E_n = \{1, ..., n\} = [\![1; n]\!]$.
On considère également $\Omega_n = {E_n}^{E_n}$ (l'ensemble des applications de E_n dans E_n) muni de la loi uniforme.
On introduit $\forall k \in E_n$, la va $X_{k,n} : \Omega_n \to \{0, 1\}$, indicatrice de l'évènement $\{g \in \Omega_n ; k \in g(E_n)\}$.
On introduit $Y_n : \Omega_n \to \mathbb{N}$ la va qui à tout g de Ω_n associe $|g(E_n)|$ (cardinal de $g(E_n)$).

2. Déterminer la loi de $X_{k,n}$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$.
4. Soit $(k, l) \in E_n^2$. Déterminer la loi du couple $(X_{k,n}, X_{l,n})$.
En déduire : $\mathrm{COV}(X_{k,n}, X_{l,n}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n + ... \left(1 + \frac{...}{n}\right)^{2n}$.
5. Déterminer $\mathbb{V}(Y_n)$.
6. Déterminer un équivalent de $\mathbb{V}(Y_n)$.

* * *

Exercice 2.b [Guillaume P.]

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose que $\sum \dfrac{f^{(n)}}{n!}$ CVU sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Déterminer une expression de la somme de cette série.

* * *

X-ESPCI

⋆ ⋆ ⋆

ENS

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Ilian M.]**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_{n+1} = \sin(a_n)$.

Nature de $\sum a_n^2$?

* * *

Exercice 2 **[Ilian M.]**

Soit $(A, B, C) \in (M_2(\mathbb{R}))^3$.

On définit $[A, B] = AB - BA$ (ndlr, crochet de Lie).

Montrer que $\left[[A, B]^2, C\right] = 0$ avec deux méthodes différentes.

* * *

Exercice 3 **[Ilian M.]**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Physique

CCINP

⋆⋆⋆

Mines Télécom

⋆ ⋆ ⋆

Centrale 1

⋆ ⋆ ⋆

Centrale Info

⋆ ⋆ ⋆

Mines Ponts

⋆ ⋆ ⋆

X-ESPCI

⋆ ⋆ ⋆

ENS

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Ilian M.]**

On considère une masse M enroulée indéfiniment autour d'un cylindre, ce dernier pouvant tourner autour d'un axe horizontal sur lequel il est fixé, avec un pendule de masse m accroché sur une surface latérale.

Etudier le mouvement et les positions d'équilibre du système.

∗ ∗ ∗