Oraux 2025 Wallon
PC/PCE

Sommaire

Mathématiques

CCINP

⋆⋆⋆

Exercice 1 [–]

On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$,

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée sur $\mathbb{R}_2[X]$.

* * *

Exercice 2 [–]

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}[X]$ $(n \geqslant 3)$ muni du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

1. Déterminer $P_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$.
2. Calculer $min \left\{ \int_{-1}^{1} (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

* * *

Exercice 3 [–]

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.
On pose pour tout $f \in E$:

$$\|f\|_0 = \sqrt{(f(0))^2 + \int_0^1 f'(t)dt}$$

1. Montrer que $|| \cdot ||_0$ est une norme.
2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in [0, 1] \rightarrowtail \dfrac{\sin(n\pi x)}{n^2}$
   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour la norme $\| \cdot \|_0$.

Mines Télécom

⋆⋆⋆

Exercice 3 **[C D.]**

Démontrer l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{grad})\boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{grad}\,P + \mu\boldsymbol{g} + \eta\Delta\boldsymbol{v}$$

L'équation de Schrödinger :

$$ih\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = \hat{H}\boldsymbol{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\boldsymbol{\psi} + V\boldsymbol{\psi}$$

Ainsi que les équations de Maxwell :

$$div\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$div\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Centrale 1

⋆ ⋆ ⋆

Centrale Info

⋆ ⋆ ⋆

Mines Ponts

⋆ ⋆ ⋆

X-ESPCI

⋆ ⋆ ⋆

ENS

⋆⋆⋆

Exercice 1 **[Ilian M.]**

Soit $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_{n+1} = \sin(a_n)$.

Nature de $\sum a_n^2$?

∗ ∗ ∗

Exercice 2 **[Ilian M.]**

Soit $(A, B, C) \in (M_2(\mathbb{R}))^3$.

On définit $[A, B] = AB - BA$ (ndlr, crochet de Lie).

Montrer que $\left[[A, B]^2, C\right] = 0$ avec deux méthodes différentes.

∗ ∗ ∗

Exercice 3 **[Ilian M.]**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Physique

CCINP

⋆⋆⋆

Q1) Système : { S(m) } Référentiel : Géocentrique

RFD $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{r}\mathbf{N} = \frac{GM}{r^2}\mathbf{N}$

D'où $v^2 = \frac{GM}{r}$, et donc $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$

Or, $\mathcal{E}_p = -\frac{GMm}{r}$, d'où $\boxed{2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = 0}$

Q2) a) Sur un tour complet :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{E}_m &= \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_p \\
&= \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) - GMm\left(\frac{1}{R-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right) \\
&= \frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right) - GMm\left(\frac{1}{R-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}\left(\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{R}} - 1\right) \\
&\approx -\frac{1}{2}\frac{GMm\varepsilon}{R^2}
\end{aligned}$$

Or, $\mathcal{W}(\mathbf{F_f}) = \int \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \int -\alpha m v\mathbf{v}\cdot\mathbf{dl} \approx -2\pi R\alpha m v^2$

D'où TEM : $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{W}(\mathbf{F_f}) \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\varepsilon}{4\pi R^2}}$

b) $T = \frac{v}{d} = \sqrt{\frac{GM}{R}}\frac{1}{2\pi R} = \sqrt{\frac{GM}{4\pi^2}}\frac{1}{R^{-3/2}}$

Donc plus généralement, $T_n = K(R-\varepsilon n)^{-3/2}$, où $K = \sqrt{\frac{GM}{4\pi^2}}$

DL : $T_n = KR^{-3/2}\left(1 - \frac{\varepsilon n}{R}\right)^{-3/2} \approx KR^{-3/2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon n}{R}\right)$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} T_k = T_p \quad &\Leftrightarrow \quad KR^{-3/2}\sum_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon n}{R}\right) = T_p \\
&\Leftrightarrow \quad U\left(n + 1 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{R}\frac{n(n+1)}{2}\right) = 1 \qquad \left(U = \frac{KR^{-3/2}}{T_p}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad n^2 + n\left(\frac{4}{3}\frac{R}{\varepsilon} + 1\right) + \frac{4}{3}\frac{R}{\varepsilon} - \frac{1}{U} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad n^2 + \frac{4}{3}\frac{R}{\varepsilon}n - \frac{1}{U} = 0
\end{aligned}$$

AN : $n \approx 2\cdot 10^5$, donc $\boxed{h \approx 200\ km}$

Mines Télécom

⋆⋆⋆

Exercice 3 **[C D.]**

Démontrer l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \mu \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{grad})\boldsymbol{v} \right) = -\boldsymbol{grad}\, P + \mu \boldsymbol{g} + \eta \Delta \boldsymbol{v}$$

L'équation de Schrödinger :

$$ih \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = \hat{H}\boldsymbol{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \boldsymbol{\psi} + V\boldsymbol{\psi}$$

Ainsi que les équations de Maxwell :

$$div \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$div \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{rot E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{rot B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Centrale 1

⋆ ⋆ ⋆

Centrale Info

⋆ ⋆ ⋆

Mines Ponts

⋆ ⋆ ⋆

X-ESPCI

⋆ ⋆ ⋆

ENS

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 **[Ilian M.]**

On considère une masse M enroulée indéfiniment autour d'un cylindre, ce dernier pouvant tourner autour d'un axe horizontal sur lequel il est fixé, avec un pendule de masse m accroché sur une surface latérale.

Etudier le mouvement et les positions d'équilibre du système.

∗ ∗ ∗