

Oraux 2025 Wallon

PC/PCE

Sommaire

1. Mathématiques

- [CCINP](#)
- [Mines Télécom](#)
- [Centrale 1](#)
- [Centrale Info](#)
- [Mines Ponts](#)
- [X-ESPCI](#)
- [ENS](#)

2. Physique

- [CCINP](#)
- [Mines Télécom](#)
- [Centrale 1](#)
- [Centrale Info](#)
- [Mines Ponts](#)
- [X-ESPCI](#)
- [ENS](#)

Mathématiques

CCINP

Exercice 1.a [Marion L.]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit A et B deux matrices symétrique réelles telles que $A^2 = B^2$. On souhaite montrer dans cet exercice qu'il existe P orthogonal tel que $PA = B$. On admet que pour D une matrice diagonale, $\text{rg}(D) = \text{rg}(D^2)$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Etablir que $(AX)^\top AX = (BX)^\top BX$.
2. On suppose que 0 n'est pas valeur propre de A .
 - 2.a Justifier que A est inversible, et montrer que BA^{-1} est orthogonale.
 - 2.b Conclure.
3. On suppose que 0 est valeur propre de A d'ordre de multiplicité p .
 - 3.a Montrer que $\text{Im}(A) = \text{Im}(A^2)$, puis que $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$.
 - 3.b Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$, puis 0 est valeur propre de B d'un ordre de multiplicité que l'on déterminera.

Soit R orthogonale telle que : $R^\top AR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ et $R^\top BR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$ où $(\Delta, H) \in S_{n-p}(\mathbb{R})^2$ sont inversibles et telles que $\Delta^2 = H^2$.

4. Montrer qu'il existe P orthogonale telle que $PA = B$ (on s'aidera de 2.).
5. Démontrer la propriété précédemment admise.

Exercice 1.b [Marion L.]

Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2} dx$.

1. Etudier la convergence de cette intégrale.
2. Calculer cette intégrale.

Exercice 2.a [Hugo D.]

Soit E un sev de dimension $n \geq 2$ muni d'un produit scalaire et $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$. Soit u un endomorphisme autoadjoint, et $q(x) = \langle x | u(x) \rangle$.

1. On se place dans le cas où $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, matrice de u .

Montrer que u est autoadjoint, déterminer son spectre, et montrer que les vecteurs colonnes de A forment une BON de \mathbb{R}^2 .

- 2.a Montrer que $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i$, avec x_1, \dots, x_n des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

- 2.b En déduire que $\max \{q(x), x \in S\} = \lambda_n$.

3. Soit $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

- 3.a Montrer que $\max \{q(x), x \in S \cap E_k\} = \lambda_k$.

- 3.b Montrer que $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

4. et 5. [non abordées]

Exercice 2.b [Hugo D.]

Soit u_n une suite monotone. On pose $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

Montrer que M_n est une suite monotone.

Exercice 3.a [Cyril D.]

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{n + n^2 x} \end{cases}$

On définit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ lorsque c'est possible. On pose $g(x) = x f_n(x)$.

1. Montrer que f est définie.
- 2.a Montrer que f est monotone sur \mathbb{R}_+^* .
- 2.b Montrer que f est C^0 sur \mathbb{R}_+^* .
- 3.a Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ est C^0 sur \mathbb{R}_+^* .
- 3.b Montrer que $\sum g_n$ CVN.
4. Montrer qu'il existe $A > 0$, tel que $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{x}$.
5. [non abordée]

Exercice 3.b [Cyril D.]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\text{rg}(A - \lambda I_n)$ vaut $n - 1$ ou n .
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Si λ est valeur propre, quel est son ordre de multiplicité ?

Exercice 4.a [Jules B.]

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- On qualifie un polynôme P de "positif" lorsque $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.
- De la même manière, un polynôme est dit "strictement positif" lorsque $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$.

1. On pose $P(X) = X^2 - 2X + 1$, montrer que P est positif.
On pose maintenant $Q = P'' + P' + P$, montrer que Q est strictement positif.
2. Généralisation

2.a Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $Q = \sum_{k=0}^{2n} P^{(k)}$.
Exprimer Q' en fonction de Q et de P .

2.b En posant $f : t \mapsto e^{-t} Q(t)$, montrer que Q est strictement positif.

3. On pose maintenant $(\cdot | \cdot) : (P | Q) \mapsto \sum_{k=0}^{2n} (PQ)^{(k)}(0)$

- 3.a Montrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire.
- 3.b Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

4. On pose $u_n = d(X^n, \mathbb{R}_1[X])$. Déterminer u_n .

5. En supposant $\ln(n!) = n \ln(n) - n + o(n)$. Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\frac{1}{u_n^{3/2}} \right)_{n \geq 2}$.

Exercice 4.b [Jules B.]

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .
On tire successivement k boules avec remise.
On note X la variable aléatoire suivant le plus grand numéro ayant été tiré.

Déterminer la loi de X .

Indication : Il faut utiliser et calculer $P(X \leq l)$ avec l à déterminer.

Exercice 5.a [Jean C.]

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On pose $T_n(P) = (nX + 1)P + (1 - X^2)P'$.

1. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, calculer $T_n(X^k)$.
2. Montrer que T_n est un endomorphisme.
3. On note M_2 la matrice de T_2 dans la base canonique. Déterminer M_2 . T_2 est-elle diagonalisable ?
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T_n , et ρ un vecteur propre associé à λ .

$$\text{On pose } \forall x \in [-1; 1], g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt - \lambda + 1}{1 - t^2} dt.$$

On pose $h : x \mapsto \rho(x)e^{g_\lambda(x)}$. Montrer que h est constante sur $] -1; 1[$.

5. Montrer que : $\frac{nt - \lambda + 1}{1 - t^2} = \frac{-n - \lambda + 1}{2} \cdot \frac{1}{1 + t} + \frac{n - \lambda + 1}{2} \cdot \frac{1}{1 - t}$.
5. Calculer g_λ sans intégrale.
6. On suppose λ une valeur propre de T_n , et ρ un vecteur propre associé. Montrer que $\exists(k, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\rho = k(X - 1)^\alpha(X + 1)^\beta$.
7. Montrer que T_n est diagonalisable.

* * *

Exercice 5.b [Jean C.]

$$\text{Soit } f : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x + x^2 - y + y^2 \end{cases}$$

On se place sur $]0; 1[$.

Déterminer les points critiques.

Montrer que f admet un maximum et le déterminer.

BONUS : Extremum sur $[-1; 1]$.

Exercice 1.a [Raphaël F.]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $M^n = O_n$.

1. Montrer que si M est symétrique, alors $M = O_n$.
2. Montrer que si $MM^T = M^T M$, alors $M = O_n$.

Exercice 1.b [Raphaël F.]

On pose $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$.

1. Donner le domaine de définition de H .
2. Calculer $H(1)$.
3. Trouver une expression de H (ndlr, sans l'intégrale).

Exercice 2.a [Gaspard V.]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1 + a^k}{4k!}$

1. Déterminer a .
2. Déterminer l'espérance de X .
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 2.b [Gaspard V.]

Soit E un ev de dimension finie tel que $\dim(E) \geq 2$. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant :

- $f \circ f = g \circ g = Id_E$.
- $f \circ g + g \circ f = O_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f et g sont des automorphismes diagonalisables.
2. Montrer que les deux seules valeurs propres possibles pour f et g appartiennent à $\{-1; 1\}$.

$$3. \text{ Soit } u : \begin{cases} \text{Ker}(f - Id_E) & \longrightarrow \text{Ker}(f + Id_E) \\ x & \longmapsto g(x) \end{cases}$$

Montrer que u est un isomorphisme et en déduire que la dimension de E est paire.

4. [non abordée]

Exercice 2.a [Ilyes B.]

Soit (X_n) une suite d'événement indépendants suivant une loi de Bernoulli $p \in]0; 1[$.

1. On pose $U_k = X_k X_{k+1}$. Déterminer la loi, l'espérance, et la variance des Y_k .
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^N Y_k$. Déterminer la loi, l'espérance, et la variance de S_n .
3. Montrer que $\mathbb{P}(|F_n - p| \geq 0) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, où $F_n = \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n}$.

Exercice 2.b [Ilyes B.]

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0; +\infty[$. Etudier sa continuité sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que f est C^1 .
3. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 3.a [Paul C.]

Soit $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. Déterminer l'espérance de $\exp(tX)$, avec $t > 0$. Préciser son existence.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(X \geq n) \leq e^{-tn} \mathbb{E}(\exp(tX))$.

3. Montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda_k}{k!} \leq \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n e^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 3.b [Paul C.]

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $f(x) = (a - b)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - b)^2 + \sum_{i \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\|y\| = \sqrt{|y|y}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq \|x - u\|^2 + \|x - v\|^2 \geq (\|x\| - \|u\|)^2 + (\|x\| - \|v\|)^2$
où $\begin{cases} u = (a, \dots, a) \\ v = (b, \dots, b) \end{cases}$
2. Montrer que $\exists R > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > R \Rightarrow f(x) > f(0)$.
3. Déterminer le minimum global de f sur \mathbb{R}^n .

Exercice 4.a [Tristan D.]

Déterminer les fonctions développables en série entière vérifiant l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 0$$

Exercice 4.b [Tristan D.]

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} .

On donne la loi du couple $(X, Y) : \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \frac{1}{e^{2i+1}j!}$.

1. Déterminer les lois de X et Y .
2. Montrer que $X+1$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 5.a [Lucy D.]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle et $\rho(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$.

1. Déterminer $\text{Ker}(\rho)$ et le rang de ρ .
2. ρ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.b [Lucy D.]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies par $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{cases}$.

1. Etudier la convergence uniforme en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} n^\alpha x e^{-nx} dx$.

Exercice 6.a [Marion L.]

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et indistinctement distribuées, qui suivent une loi uniforme sur $\{0, 1\}$.

Soit $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la probabilité que le polynôme caractéristique de $A(X, Y)$ soit scindé à racines simples.
2. Déterminer la probabilité que $A(X, Y)$ soit diagonalisable.
3. Déterminer la probabilité que $A(X, Y)$ soit symétrique et ?.

Exercice 6.b [Marion L.]

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivables telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$.

Soit g telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f(-x)$.

1. Démontrer que g est une solution paire de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ solutions de l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$$

* * *

Exercice 7.a [Matthieu R.]

Soit E un ev de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale E .
Soit f un endomorphisme de E tel que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket, i \neq j, \langle e_i | e_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(e_i) | f(e_j) \rangle = 0$$

1. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(e_1) + f(e_2)$ et $f(e_1) - f(e_i)$ sont orthogonaux.
2. En déduire qu'il existe un $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$.

* * *

Exercice 7.b [Matthieu R.]

On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}$.

Trouver le rayon de convergence R , puis pour $|x| < R$, calculer la somme de cette série.

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f , ainsi que les limites de f en ses bornes.
2. Montrer que f est de classe C^1 et établir une équation différentielle sur f .
3. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 4 [Jean C.]

Soient $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ et $c = (c_n)$.

On définit l'opérateur * produit de Cauchy, tel que $c = a * b$ (ie. $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$)

1. On définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Est-ce que $a * a$ converge ?

2. On suppose que (a_n) converge vers l , et que $\sum b_n$ CVA.

Montrer que $a * b$ converge vers $l \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

3. (a_n) est définie comme à la question 1.

Montrer que $\sum_{i=1}^n c_i = A \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n b_{n-i} \cdot \sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j$

4. On pose A , B et C les sommes respectives des séries de terme général a_n , b_n et c_n .

En utilisant les questions précédentes, montrer que $C = AB$ si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ CVA.

Exercice 1 [Pierre Q.]

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{t} \ln(1 - 2t \cos(x) + t^2) dt$.

- 1.a Montrer que f est définie sur $]0; 2\pi[$.
- 1.b Montrer que $f(2\pi - x) = f(x)$.
- 1.c Montrer que $f\left(\pi - \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$.
2. Montrer que f est C^1 sur $]0; 2\pi[$, calculer f' puis f .
3. En déduire le calcul ... (de l'intégrale ci-dessus ?).

Exercice 2 [Guillaume V.]

Soit f une fonction lipschitzienne de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On pose :

$$K : \begin{cases} \mathbb{R} \times]0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{cases}$$

$$u : \begin{cases} \mathbb{R} \times]0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y, t) f(y) dy \end{cases}$$

1. Montrer que $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.
2. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$ (on admet l'intégrale de Gauss).

Exercice 5 [Florian Fe.]

On définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$, avec $u_0 = u_1 = 1$.

On définit également, lorsque c'est possible, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq n^2$.
En déduire le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.
2. Exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 6 [Paul C.]

On pose $\forall x \in]-1; +\infty[$, $\theta(x) = 2 \int_0^1 \frac{s}{1+xs} ds$ et $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Dresser le tableau de variation de θ et déterminer son expression en fonction de x .

2. Poser le changement de variable $u = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$ et l'effectuer dans l'expression de Γ .

Déterminer ainsi un équivalent de $\Gamma(x+1)$ en $+\infty$.

Exercice 7.a - Navale [Paul C.]

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ (ndlr, exercice très similaire à Mines-Télécom 2.b).

1. Montrer que f est définie et C^0 sur \mathbb{R}_+^* .
2. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$ et en 1.

Exercice 7.b - Navale [Paul C.]

On définit la variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ pair} \\ 0 & \text{si } X \text{ impair} \end{cases}$

1. Trouver la loi, l'espérance, et la variance de Y .

Exercice 8 [Ilhan M.]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice $M^\top M$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans \mathbb{R}_+^* .
2. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales $U, V \in O_n(\mathbb{R})$ telles que la matrice UMV soit diagonale.

3. On considère la matrice réelle suivante : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

La propriété de la question 2. est-elle vérifiée pour cette matrice N ?

4. La propriété de la question 2. est-elle vérifiée pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 9 [Oscar P.]

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un ev de dimension finie, f un endomorphisme diagonalisable et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres.

On pose $L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{X - \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j}$.

1. Calculer $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k L_i$ pour tout $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$.

2. Montrer que $L_i(f)$ est un projecteur, puis déterminer les caractéristiques de ce projecteur.

Exercice 2 [Guillaume V.]

Soit E un ev de polynômes dans \mathbb{R} .

On pose $L_0 = 1$, $L_1 = X$, et $(n+2)L_{n+2} = (2n+3)XL_{n+1} - (n+1)L_n$.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$ définit un produit scalaire sur E .

2. Calculer L_2, L_3 .

3. Déterminer le degré des (L_n) ainsi que leur parité.

4.a Créer une fonction $L(\mathbf{n}, \mathbf{x})$ renvoyant la valeur de L_n évalué en x .

4.b On dispose de $\mathbf{ps}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ qui renvoie $\langle L_i, L_j \rangle$.

Donner la matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ telle que $[A]_{i,j} = \langle \sqrt{2i+1}L_i, \sqrt{2j+1}L_j \rangle$.

Conjecturer $\langle L_i, L_j \rangle$ pour $i = j$ et $i \neq j$.

4.c Afficher les $(L_k)_{k \in [0;6]}$ sur $[-1;1]$. Conjecturer [quelque chose] sur les racines.

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n} ((X^2 - 1)^n)$.

5.a Montrer la conjecture pour $i \neq j$.

5.b Montrer la conjecture pour $i = j$.

5.c Montrer la conjecture sur les racines.

5.d [quelque chose sur $L_n(0)$].

Exercice 1 [Pierre Q.]

Soit $E = C^0([-1;1], \mathbb{R})$. On pose $\langle f|g \rangle = \int_0^1 (1-t^2) f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que $\langle f|g \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Définissons E_{pair} (resp. E_{impair}) l'ensemble des fonctions de E paires (resp. impaires).

2.a Montrer que $E = E_{pair} \oplus E_{impair}$.

2.b En déduire E_{pair}^\perp et E_{impair}^\perp .

On définit la suite de polynôme $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et $P_n(X) = (X - \lambda_n)P_{n-1} + \mu_n P_{n-2}$

avec $\lambda_n = \frac{\langle XP_{n-1}|P_n \rangle}{\|P_{n-1}\|}$ et $\mu_n = -\frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2}$.

On dispose de $\mathbf{pn}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ qui renvoie le polynôme $R = (X - \lambda)P + \mu Q$, avec λ et μ définis précédemment.

3.a Créer une fonction $\mathbf{liste}(\mathbf{n})$ qui donne les polynômes (P_0, \dots, P_n) .

3.b On dispose d'une fonction $\mathbf{affiche}(\mathbf{P})$.

Afficher les polynômes (P_0, \dots, P_{10}) . Conjecture ?

3.c Créer une fonction qui calcule $\langle P_i|P_j \rangle$ pour $(i, j) \in [0;5]^2$. Conjecture ?

4.a Montrer le conjectures de 2.

4.b Montrer que $\langle P_n|P_{n-1} \rangle = 0$ et $\|P_n\|^2 = \langle XP_{n-1}|P_n \rangle$.

4.c Montrer que $\langle P_n|P_{n-2} \rangle = 0$.

Exercice 3 [Jean C.]

Soit $A \in SO_4(\mathbb{R})$ à valeurs propres complexes.

1. Rappeler la définition de $SO_n(\mathbb{R})$. Expliciter $SO_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A admet une valeur propre complexe.

On pose $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $X = X_1 + iX_2$.

Soit $Q \in O_4(\mathbb{R})$ tel que les premières colonnes forment une base de F .

3. Calculez avec python $Q^\top A Q$.

Remarque : toutes les matrices étaient déjà définies dans python.

On pose $F = \text{Vect}(X_1, X_2)$.

4. Montrer que F est un plan stable par A .

On note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme associé à A .

5. Que peut-on dire de $u(F^\perp)$?

6. Montrer que $u_F \in SO(F)$.

7. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^\top A Q$ soit diagonale par bloc.

8. Généraliser le résultat pour $SO_4(\mathbb{R})$ sans contrainte sur son spectre.

Exercice 4 [Paul C.]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$. On dit que :

- A vérifie (P) si : $\exists (S, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, r \geq 1 / S^\top = S, N^r = 0$ et $NS = SN$
- A est p -symétrique si : $\text{Cp}(A) = 0$, où $\text{Cp}(A) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} (A^\top)^k A^{p-k}$

On dispose des fonctions suivantes :

- **gen(A)** : Génère une matrice A vérifiant P dont les coefficients sont composés de 1 et de -1
- **binom(p, k)** : Calcule le coefficient binomial
- **test(A)** : test si la matrice A est nulle ou non

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\overline{X}^\top X \in \mathbb{R}^+$, puis montrer que $\overline{AX} = A\overline{X}$.

2. Soit $(\lambda, \mu) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, et (X, Y) des vecteurs propres respectivement associés à λ et μ .

Calculer $Y^\top \text{Cp}(A) X$.

Dans la suite, on suppose $p \geq 1$ et A p -symétrique.

3. Montrer que les valeurs propres de A sont réelles.

4. Soit $(\lambda, \mu) \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, distinctes, montrer que $E_\lambda(A)$ et $E_\mu(A)$ sont orthogonaux. En déduire que les matrices p -symétriques sont diagonalisables.

5. Ecrire la fonction **psym(A)** qui renvoie s'il existe $p \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$ tel que A soit p -symétrique.

Tester pour $n \in \llbracket 2, 20 \rrbracket$ et générer A par la fonction **gen**.

Que peut-on conjecturer ?

6. Ecrire la fonction **combi(p, q, m)** où $(p, q, m) \in \mathbb{N}^3$ tels que $n+q < p$ renvoyant la somme suivante : $\sum_{k=m}^p (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{m} \binom{p-q}{k}$.

7. [non traitée]

Exercice 2.a [Guillaume P.]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le développement asymptotique à deux termes de précision près de $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On considère $E_n = \{1, \dots, n\} = \llbracket 1; n \rrbracket$.

On considère également $\Omega_n = E_n^{E_n}$ (l'ensemble des applications de E_n dans E_n) muni de la loi uniforme.

On introduit $\forall k \in E_n$, la va $X_{k,n} : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, indicatrice de l'évènement $\{g \in \Omega_n; k \in g(E_n)\}$.

On introduit $Y_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{N}$ la va qui à tout g de Ω_n associe $|g(E_n)|$ (cardinal de $g(E_n)$).

2. Déterminer la loi de $X_{k,n}$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(Y_n)$.
4. Soit $(k, l) \in E_n^2$. Déterminer la loi du couple $(X_{k,n}, X_{l,n})$.
En déduire : $\text{COV}(X_{k,n}, X_{l,n}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n + \dots \left(1 + \frac{\dots}{n}\right)^{2n}$.
5. Déterminer $\mathbb{V}(Y_n)$.
6. Déterminer un équivalent de $\mathbb{V}(Y_n)$.

Exercice 2.b [Guillaume P.]

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose que $\sum \frac{f^{(n)}}{n!}$ CVU sur tout segment de \mathbb{R} .

Déterminer une expression de la somme de cette série.

Exercice 1.a [Armel D.]

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 . En déduire que M est inversible, et déterminer M^{-1} .

2. Sans utiliser le polynôme caractéristique, montrer que M est diagonalisable.
Déterminer ses valeurs propres et leur ordre de multiplicité.

3. Calculer M^n .

Indication : on utilisera le théorème de la division euclidienne.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{M^n}{n!}$.

Montrer que $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite L finie et déterminer cette limite.

Exercice 1.b [Armel D.]

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+ixt)}$.

1. Montrer que F est bien définie et continue.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $F(x) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une expression de F sans symbole d'intégrale.

X-ESPCI

Exercice 1 [Ilia M.]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_{n+1} = \sin(a_n)$.
Nature de $\sum a_n^2$?

Exercice 2 [Ilia M.]

Soit $(A, B, C) \in (M_2(\mathbb{R}))^3$.
On définit $[A, B] = AB - BA$ (ndlr, crochet de Lie).
Montrer que $[[A, B]^2, C] = 0$ avec deux méthodes différentes.

Exercice 3 [Ilia M.]

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Physique

CCINP

Centrale 1

★ ★ ★

Centrale Info

★ ★ ★

Mines Ponts

★ ★ ★

X-ESPCI

Exercice 1 [Ilain M.]

On considère une masse M enroulée indéfiniment autour d'un cylindre, ce dernier pouvant tourner autour d'un axe horizontal sur lequel il est fixé, avec un pendule de masse m accroché sur une surface latérale.

Etudier le mouvement et les positions d'équilibre du système.