Université de Strasbourg
Licence d'informatique – Semestre 2

Modèles de Calcul
2015/2016

λ-contrôle

Aucun document autorisé. Durée : 1h30.

1 Syntaxe *(4 points)*

1. Oter les parenthèses inutiles des λ-termes suivants :
   (a) $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((x\ z)\ (y\ z)))))$

   $\lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z)$

   (b) $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(x\ (y\ z)))))$

   $\lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ (y\ z)$
2. Parenthéser complétement les λ-termes suivants :
   (a) $\lambda x.\lambda y.x\ y\ y$

   $(\lambda x.(\lambda y.((x\ y)\ y)))$

   (b) $\lambda x.x\ \lambda y.y\ \lambda z.z\ \lambda w.w\ z\ y\ x$

   $(\lambda x.(x\ (\lambda y.(y\ (\lambda z.(z\ (\lambda w.(((w\ z)\ y)\ x))))))))$

2 Stratégie de réduction *(10 points)*

Réduire les λ-termes suivants en utilisant la stratégie NOR : Indiquer le redex choisi avec le symbole $_\curlywedge$ et utiliser la α-conversion seulement lorsque le problème de capture de variable se pose.

(a) $(\lambda m.\lambda n.\lambda f.n\ (m\ f))\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)\ (\lambda f.\lambda x.x)$

$((\lambda m.\lambda n.\lambda f.n\ (m\ f))_\curlywedge \lambda f.\lambda x.f\ x)\lambda f.\lambda x.x$
$\xrightarrow[\beta]{} (\lambda n.\lambda f.n\ ((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ f))_\curlywedge \lambda f.\lambda x.x$
$\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.(\lambda f.\lambda x.x)_\curlywedge((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ f)$
$\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.x$

(b) $(\lambda p.p\ (\lambda z.(\lambda x.\lambda y.y))\ (\lambda x.\lambda y.x))\ (\lambda f.\lambda x.x)$

$(\lambda p.(p\ \lambda z.\lambda x.\lambda y.y)\ \lambda x.\lambda y.x)_\curlywedge \lambda f.\lambda x.x$
$\xrightarrow[\beta]{} ((\lambda f.\lambda x.x)_\curlywedge \lambda z.\lambda x.\lambda y.y)\ \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{} (\lambda x.x)_\curlywedge \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{} \lambda x.\lambda y.x$

(c) $(\lambda p.p\ (\lambda z.(\lambda x.\lambda y.y))\ (\lambda x.\lambda y.x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)$

$(\lambda p.(p\ \lambda z.\lambda x.\lambda y.y)\ \lambda x.\lambda y.x)_\curlywedge \lambda f.\lambda x.f\ x$
$\xrightarrow[\beta]{} ((\lambda f.\lambda x.f\ x)_\curlywedge \lambda z.\lambda x.\lambda y.y)\ \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{} (\lambda x.(\lambda z.\lambda x.\lambda y.y)x)_\curlywedge \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{} (\lambda z.\lambda x.\lambda y.y)_\curlywedge \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{} \lambda x.\lambda y.y$

(d) $(\lambda p.p\ (\lambda z.(\lambda x.\lambda y.y))\ (\lambda x.\lambda y.x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$

$(\lambda p.(p\ \lambda z.\lambda x.\lambda y.y)\ \lambda x.\lambda y.x)_\curlywedge \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$
$\xrightarrow[\beta]{} ((\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))_\curlywedge \lambda z.\lambda x.\lambda y.y)\ \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{} (\lambda x.(\lambda z.\lambda x.\lambda y.y)\ ((\lambda z.\lambda x.\lambda y.y)\ x))_\curlywedge \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{} (\lambda z.\lambda x.\lambda y.y)_\curlywedge((\lambda z.\lambda x.\lambda y.y)\ \lambda x.\lambda y.x)$
$\xrightarrow[\beta]{} \lambda x.\lambda y.y$

(e) $(\lambda p.p\ (\lambda x.\lambda y.x))\ ((\lambda x.\lambda y.\lambda f.f\ x\ y)\ a\ b)$

$(\lambda p.p\ (\lambda x.\lambda y.x))\ ((\lambda x.\lambda y.\lambda f.f\ x\ y)\ a\ b)$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda x.\lambda y.\lambda f.f\ x\ y)_{\curlywedge} a\ b\ \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda y.\lambda f.f\ a\ y)_{\curlywedge} b\ \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda f.f\ a\ b)_{\curlywedge} \lambda x.\lambda y.x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda x.\lambda y.x)_{\curlywedge} a\ b$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda y.a)_{\curlywedge} b \quad \xrightarrow[\beta]{}\ a$

(f) $(\lambda p.p\ (\lambda x.\lambda y.y))\ ((\lambda x.\lambda y.\lambda f.f\ x\ y)\ a\ b)$

$(\lambda p.p\ (\lambda x.\lambda y.y))\ ((\lambda x.\lambda y.\lambda f.f\ x\ y)\ a\ b)$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda x.\lambda y.\lambda f.f\ x\ y)_{\curlywedge} a\ b\ \lambda x.\lambda y.y$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda y.\lambda f.f\ a\ y)_{\curlywedge} b\ \lambda x.\lambda y.y$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda f.f\ a\ b)_{\curlywedge} \lambda x.\lambda y.y$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda x.\lambda y.y)_{\curlywedge} a\ b$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda y.y)_{\curlywedge} b \quad \xrightarrow[\beta]{}\ b$

(g) $(\lambda m.\lambda n.n\ m)\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)\ (\lambda f.\lambda x.x)$

$((\lambda m.\lambda n.n\ m)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ x)\ \lambda f.\lambda x.x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda n.n\ \lambda f.\lambda x.f\ x)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda f.\lambda x.x)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ \lambda x.x$

(h) $(\lambda m.\lambda n.n\ m)\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)$

$((\lambda m.\lambda n.n\ m)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ x) \lambda f.\lambda x.f\ x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda n.n\ \lambda f.\lambda x.f\ x)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ \lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\ x)_{\curlywedge} x$
$\xrightarrow[\alpha]{}\ \lambda x.(\lambda f.\lambda a.f\ a)_{\curlywedge} x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ \lambda x.\lambda a.x\ a$

(i) $(\lambda m.\lambda n.n\ m)\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)$

$((\lambda m.\lambda n.n\ m)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ \lambda f.\lambda x.f\ x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda n.n\ \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$
$\xrightarrow[\beta]{}\ \lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))_{\curlywedge} x$
$\xrightarrow[\alpha]{}\ \lambda x.(\lambda f.\lambda a.f\ (f\ a))_{\curlywedge} x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ \lambda x.\lambda a.x\ (x\ a)$

(j) $(\lambda m.\lambda n.n\ m)\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$

$((\lambda m.\lambda n.n\ m)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ x)\ \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda n.n\ \lambda f.\lambda x.f\ x)_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$
$\xrightarrow[\beta]{}\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))_{\curlywedge} \lambda f.\lambda x.f\ x$
$\xrightarrow[\beta]{}\ \lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\ x)_{\curlywedge}((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ x)$
$\xrightarrow[\alpha]{}\ \lambda x.(\lambda f.\lambda a.f\ a)_{\curlywedge}((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ x)$
$\xrightarrow[\beta]{}\ \lambda x.\lambda a.(\lambda f.\lambda x.f\ x)_{\curlywedge} x\ a$
$\xrightarrow[\alpha]{}\ \lambda x.\lambda a.(\lambda f.\lambda b.f\ b)_{\curlywedge} x\ a$
$\xrightarrow[\beta]{}\ \lambda x.\lambda a.(\lambda b.x\ b)_{\curlywedge} a$
$\xrightarrow[\beta]{}\ \lambda x.\lambda a.x\ a$

Indication : Le problème de capture se pose uniquement dans les cas (h), (i) et (j).

3 Fonction inconnue *(6 points)*

Dans la suite, les entiers sont modélisés selon le modèle de Church. Ainsi, en notant $\underline{n}$ la λ-expression associée à l'entier n, on a :

$$\begin{aligned}
&\underline{0} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f.\lambda x.x \\
&\underline{1} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f.\lambda x.f\ x \\
&\vdots \\
&\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f.\lambda x.\underbrace{f\ (f\ \ldots\ (f}_{n\ \times}\ x)\ \ldots)
\end{aligned}$$

On s'intéresse au λ-terme P défini par : $P \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ (\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ (\lambda y.x)\ (\lambda x.x))$

1. Réduire sous forme normale (en utilisant NOR) les λ-termes suivants (*Indication : Le problème de capture de variable ne se pose pas au cours de ces réductions*) :

   (a) $P\ \underline{1} \equiv (\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ (\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ (\lambda y.x)\ (\lambda x.x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)$

$$\begin{aligned}
&(\lambda n.\lambda f.\lambda x.((n\ \lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ \lambda y.x)\ \lambda x.x)_{\curlywedge}\lambda f.\lambda x.f\ x \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.(((\lambda f.\lambda x.f\ x)_{\curlywedge}\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ \lambda y.x)\ \lambda x.x \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.((\lambda x.(\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ x)_{\curlywedge}\lambda y.x)\ \lambda x.x \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.((\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))_{\curlywedge}\lambda y.x)\ \lambda x.x \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.(\lambda q.q\ ((\lambda y.x)\ f))_{\curlywedge}\lambda x.x \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.(\lambda x.x)_{\curlywedge}((\lambda y.x)\ f) \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.(\lambda y.x)_{\curlywedge}f \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.x
\end{aligned}$$

   (b) $P\ \underline{2} \equiv (\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ (\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ (\lambda y.x)\ (\lambda x.x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$

$$\begin{aligned}
&(\lambda n.\lambda f.\lambda x.((n\ \lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ \lambda y.x)\ \lambda x.x)_{\curlywedge}\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.(((\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))_{\curlywedge}\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\lambda y.x)\ \lambda x.x \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.((\lambda x.(\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ ((\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ x))_{\curlywedge}\lambda y.x)\lambda x.x \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.(\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))_{\curlywedge}((\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ \lambda y.x)\ \lambda x.x \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.(\lambda q.q\ (((\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ \lambda y.x)\ f))_{\curlywedge}\lambda x.x \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.(\lambda x.x)_{\curlywedge}(((\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))\ \lambda y.x)\ f) \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.((\lambda p.\lambda q.q\ (p\ f))_{\curlywedge}\lambda y.x)\ f \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.(\lambda q.q\ ((\lambda y.x)\ f))_{\curlywedge}f \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.f\ ((\lambda y.x)_{\curlywedge}f) \\
&\xrightarrow[\beta]{} \lambda f.\lambda x.f\ x
\end{aligned}$$

2. D'après vous, que modélise le λ-terme P ?

   La fonction prédécesseur