

TD 1 – Introduction au λ -calcul

1 Syntaxe

Répondre aux questions suivantes pour chacun de ces λ -termes :

- (a) $\lambda x.(x\ 3)$
- (b) $\lambda x.\lambda y. + (x\ 3)$
- (c) $\lambda a.a\ \lambda b.(b\ a)$
- (d) $(\lambda a.a)\ (\lambda b.b)\ a$
- (e) $(\lambda a.a)\ \lambda b.(b\ a)$
- (f) $\lambda x.(x\ \lambda y.y\ x)$
- (g) $(\lambda x.x)\ (\lambda y.y)\ \lambda x.x\ (\lambda y.y)\ z$
- (h) $(\lambda f.\lambda y.\lambda z.f\ z\ y\ z)\ p\ x$
- (i) $\lambda x.x\ \lambda y.(y\ \lambda z.z\ \lambda w.w\ z\ y\ x)$

1. Le terme est-il une constante, une variable, une abstraction ou une application ? Même question pour tous ses sous-termes.
2. Quelle expression obtient-on en supprimant les parenthèses inutiles ?
3. Quelle expression obtient-on en parenthésant complètement ?

2 Interprétation

Donner la signification en termes de fonctions de chacun de ces λ -termes :

- (a) $\lambda x. \times\ 2\ x$
- (b) $\lambda x.\lambda y. +\ x\ y$
- (c) $\lambda x. +\ x$
- (d) $\lambda f.f\ 3$
- (e) $\lambda x.x\ 3$
- (f) $\lambda x.\lambda y. +\ (x\ 3)$
- (g) $\lambda x.x\ 1\ x$

3 Variables libres et variables liées

Pour chacun des λ -termes suivants et pour chaque occurrence de variable, indiquer si cette occurrence est libre ou liée dans ce λ -terme.

- (a) $\lambda x.\lambda y.(\lambda z.y)\ \lambda y.x$
- (b) $(\lambda x.\lambda y.\lambda z.y)\ \lambda y.x$
- (c) $(\lambda a.\lambda b.a)\ \lambda b.(\lambda a.a)\ b$
- (d) $\lambda free.bound\ (\lambda bound.\lambda free.free)\ bound$
- (e) $(\lambda x.x)\ y\ \lambda y.y$
- (f) $(\lambda x.x\ y)\ \lambda y.y$
- (g) $(\lambda x.\lambda y.x\ z\ (y\ z)))\ \lambda x.y\ \lambda y.y$

4 Substitution

Effectuer les substitutions suivantes :

- (a) $(f (\lambda x.x y) \lambda z.x y z)[x := g]$
- (b) $(\lambda x.\lambda y.f x y)[y := x]$
- (c) $((\lambda x.f x) \lambda f.f x)[f := g]$
- (d) $(\lambda f.\lambda y.f x y)[x := g z]$

5 Réduction

Réduire les λ -termes suivants en utilisant la règle de β -conversion autant que possible (ce sont des λ -termes pour lesquels le problème de capture de variable ne se pose pas et où il n'y a qu'un redex à chaque étape) :

- (a) $(\lambda a.\lambda b. + a b) 5$
- (b) $(\lambda x. + x x) \lambda y.y z$
- (c) $(\lambda c.\lambda v.\lambda f.c v f) \lambda x.\lambda y.x$
- (d) $(\lambda c.\lambda v.\lambda f.c v f) \lambda x.\lambda y.y$
- (e) $(\lambda x.\lambda y.y x) (\lambda p.\lambda q.p) \lambda i.i$
- (f) $(\lambda x.x (\lambda x.\lambda b.b c x) (\lambda x.x) \lambda x.\lambda y.x) \lambda f.\lambda d.f d$