

But du document : proposer un modèle pour l'étude de l'instrument développé par Laurent Bolognini : electra.

1 Description de l'instrument

Composé de 3 moteurs, de tiges et de lumières. On peut agir sur la vitesse de rotation des 3 moteurs (et le sens) et l'intensité de chaque lumière.

2 Objectifs

- Caractériser les formes produites par l'instrument : on étudie plus la forme que l'intensité lumineuse ?
- Trouver toutes celles qu'il est possible de créer.
- Si on se donne une forme, est-on capable de la reproduire avec l'instrument, si oui, comment ?

3 Méthode

Proposer un modèle de l'instrument. Un premier modèle consistera à décrire le mouvement dans son état non transitoire = stationnaire ? (donc sans variation des paramètres). On pourra ensuite éventuellement prendre en compte la persistance rétinienne, et les régimes transitoires (donc la possibilité de faire varier la vitesse de moteurs). L'implémenter et visualiser des réalisations du modèle. Caractériser les sorties du modèle : trouver des mesures (pertinentes) qui diffèrent entre les résultats issus de paramètres différents. Piste : utilisation du logiciel OpenMole (algorithme PSE) pour trouver les sorties atteignables : trouver le plus de configurations possibles qui donnent des résultats différents dans l'espace des mesures trouvées précédemment.

4 Modèle

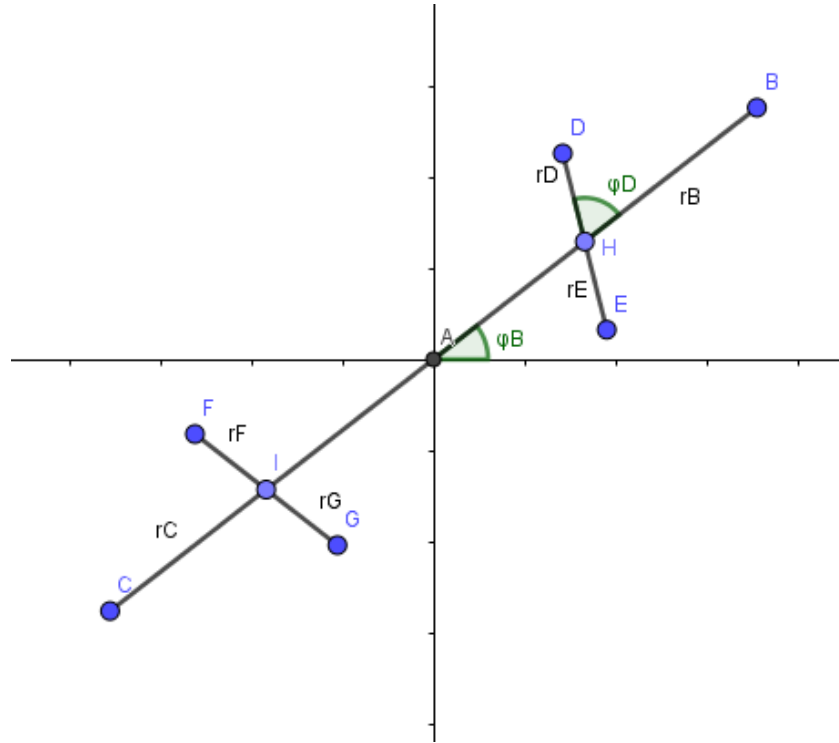


FIGURE 1 – Schéma du modèle, réalisé avec le logiciel GeoGebra

4.1 Non transitoire

Mettre un schéma, + une image de l'instrument ?

Paramètres fixes : rayons : $r_B, r_C, r_D, r_E, r_F, r_G$

"rayons" de points intermédiaires : α_H, α_I .

Si $\alpha_H = 1$, $H = B$, $\alpha_H = 2$, H est le milieu du segment $[BC]$, si $\alpha_H \rightarrow \infty$, $B = A$.

paramètres input : position initiale : angle : ϕ_B, ϕ_D, ϕ_F ($+\pi$ pour les points symétriques).

vitesse des moteurs : v_1, v_2, v_3 (nombre de tours par seconde) + sens de rotation

intensité lumineuse

On prend le point A comme origine du repère.

Position des points en fonction du temps (et des positions initiales) :

$$A(x_A, y_A) = (0, 0)$$

$$B(x_B, y_B) = (r_B \cos(2\pi v_1 t + \phi_B), r_B \sin(2\pi v_1 t + \phi_B))$$

$$\text{à } t = 0, B = (r_B \cos(\phi_B), r_B \sin(\phi_B))$$

$$C(x_C, y_C) = (r_C \cos(2\pi v_1 t + \phi_B + \pi), r_B \sin(2\pi v_1 t + \phi_B + \pi))$$

$$H(x_H, y_H) = (\frac{r_B}{\alpha_H} \cos(2\pi v_1 t + \phi_B), \frac{r_B}{\alpha_H} \sin(2\pi v_1 t + \phi_B))$$

$$\text{De même, } I(x_I, y_I) = (\frac{r_C}{\alpha_I} \cos(2\pi v_1 t + \phi_B + \pi), \frac{r_C}{\alpha_I} \sin(2\pi v_1 t + \phi_B + \pi))$$

Pour déterminer la position des points D, E, F, G , on utilise les points intermédiaires (H et I), (utilise le changement de repère orthonormale centrée en H et de vecteurs directeurs un de même direction que \overrightarrow{AH} , l'autre orthogonal, dans lequel $\overrightarrow{HD} = r_D(\cos(2\pi v_2 t + \phi_D), \sin(2\pi v_2 t + \phi_D))$)

$$D(t) = \begin{pmatrix} x_D(t) \\ y_D(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_B}{\alpha_H} \cos(2\pi v_1 t + \phi_B) + r_D \cos(2\pi(v_2 + v_1)t + (\phi_D + \phi_B)) \\ \frac{r_B}{\alpha_H} \sin(2\pi v_1 t + \phi_B) + r_D \sin(2\pi(v_2 + v_1)t + (\phi_D + \phi_B)) \end{pmatrix}$$

Vitesse de D au temps t :

$$D'(t) = \begin{pmatrix} x'_D(t) \\ y'_D(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r_B}{\alpha_H} 2\pi v_1 \sin(2\pi v_1 t + \phi_B) - r_D 2\pi(v_2 + v_1) \sin(2\pi(v_2 + v_1)t + (\phi_D + \phi_B)) \\ \frac{r_B}{\alpha_H} 2\pi v_1 \cos(2\pi v_1 t + \phi_B) + r_D 2\pi(v_2 + v_1) \cos(2\pi(v_2 + v_1)t + (\phi_D + \phi_B)) \end{pmatrix}$$

Accélération de D au temps t :

$$D''(t) = (x''_D(t), y''_D(t)) = (-\frac{r_B}{\alpha_H} (2\pi v_1)^2 \cos(2\pi v_1 t + \phi_B) - r_D (2\pi(v_2 + v_1))^2 \cos(2\pi(v_2 + v_1)t + (\phi_D + \phi_B)), -\frac{r_B}{\alpha_H} (2\pi v_1)^2 \sin(2\pi v_1 t + \phi_B) - r_D (2\pi(v_2 + v_1))^2 \sin(2\pi(v_2 + v_1)t + (\phi_D + \phi_B)))$$

$$D''(t) = \begin{pmatrix} x''_D(t) \\ y''_D(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r_B}{\alpha_H} (2\pi v_1)^2 \cos(2\pi v_1 t + \phi_B) - r_D (2\pi(v_2 + v_1))^2 \cos(2\pi(v_2 + v_1)t + (\phi_D + \phi_B)) \\ -\frac{r_B}{\alpha_H} (2\pi v_1)^2 \sin(2\pi v_1 t + \phi_B) - r_D (2\pi(v_2 + v_1))^2 \sin(2\pi(v_2 + v_1)t + (\phi_D + \phi_B)) \end{pmatrix}$$

Remarque : soit $\alpha \in \mathbb{R}$, (pour tout v_1, v_2, t)

$$B(\alpha v_1, t) = B(v_1, \alpha t),$$

$$D(\alpha v_1, \alpha v_2, t) = D(v_1, v_2, \alpha t)$$

Donc multiplier les 3 vitesses par un facteur identique ne changera pas la figure totale obtenue (l'image de tout les temps) : il existe un temps (et on sait lequel), auquel le point sera au même endroit que pour l'autre vitesse. Une différence peut intervenir si l'on considère la persistance rétinienne.

4.2 Persistance rétinienne

Il semblerait que l'oeil garde une image rémanente pendant 1/25 seconde sur la rétine.

Dans le modèle, cela reviendrait non pas à avoir en sortie à l'instant t la position des

lumières à cet instant, mais l'ensemble des positions des lumières occupées durant les 1/25 secondes précédentes. Remarque, plus les vitesses des moteurs (donc de déplacement des lumières) sont importantes, plus les lumières parcourent de distance pendant ces 1/25 secondes, et donc plus les figurent ont une grande "longueur".

4.3 Transitoire

piste ? Relier la tension d'entrée du moteur u à la sortie : vitesse angulaire ω . L'idée serait que quand on tourne le bouton, on fait varier la tension du moteur et donc sa vitesse (prendre en compte l'inertie). On pourrait donc chercher des fonctions du temps comme contrôle du système (la position du bouton de contrôle du moteur).

Une source pour les équations sur un moteur... https://www.wikimeca.org/index.php/Moteur_%C3%A0_courant_continu

Les paramètres :

Partie électrique :

- R est la résistance électrique interne du moteur (Ohm)
- K_e est la constante de force électromotrice

Partie mécanique

- J rotor vu comme un volant d'inertie J
- K_c est la constante de couple
- f est le coefficient de frottement visqueux.

Les deux quantités qui interviennent dans l'équation différentielle simplifiée (pas d'inductance) :

$$A = \frac{K_c}{(R*f + K_c*K_e)}$$

$$C = \frac{J*R}{(R*f + K_c*K_e)}$$

On suppose connu les valeurs de ces paramètres pour les trois moteurs de l'installation (soit mesurés physiquement, soit c'est donné par le fabricant, au pire par calibration ?)

La dynamique du moteur simplifiée est décrite par :

point de vue fonction de transfert : $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{A}{C*p+1}$

point de vue EDO : $C * \omega'(t) + \omega(t) = A * u(t)$

solution, en imposant $y(0) = \omega(0) = 0$: $\omega(t) := y(t) = e^{-\frac{t}{C}} * \int_0^t \frac{A}{C} u(x) e^{\frac{x}{C}} dx$

On suppose les trois moteurs "indépendants", ils ont chacun leurs paramètres (électriques et mécaniques) mais fonctionnent selon les mêmes équations. Dans le régime stationnaire, on supposait la vitesse des moteurs constante au cours du temps (égale respectivement à v_1 , v_2 et v_3). Désormais, cette vitesse $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ peut varier au cours du temps, en particulier, on suppose qu'elle est nulle initialement, puis qu'on applique une

tension au moteur. Les équations de la dynamique dans le cadre stationnaire sont ainsi conservées, et seule la vitesse v_i est remplacée par ω_i , donc l'angle à l'instant t n'est plus $v_1 * t$ mais $\int_0^t v_1(x)dx$ (condition initiale nulle).

Remarque : Si on applique une tension constante U , la vitesse de rotation en sortie tend vers $U * A$. On peut déduire de cette dernière égalité la valeur de la tension à appliquer au moteur pour obtenir la vitesse de rotation désirée.

5 Étude mathématique...

... pour le modèle stationnaire

Courbe paramétrée pour la dynamique de chacun de points. On se concentre d'abord sur la courbe paramétrée produite par un point, on pourra ensuite éventuellement s'intéresser à la figure produite par tous les points (union des courbes paramétrées).

Étude des points singulier : condition nécessaire pour en avoir.

Étude de la périodicité : condition suffisante si il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{m}{v_1} = \frac{n}{v_2}$.

Étude de la monotonie de chaque composantes (x et y)

Points doubles : t_1 et t_2 tels que : $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$.

6 Mesures

Stationnaire :

La trajectoire remplit l'espace ?

Nombre de point singulier : seuil sur la dérivée

nombre de boucle : c'est quoi une boucle ?

concavité/ convexité locale ? : rayon de courbure : les distribution des rayons de courbure sur la trajectoire : diversité ou uniforme ?

Nombre de composantes connexes dans l'espace (Julien ?, JTS lib scala pour les trucs de géométrie)

La courbe est elle fermée (périodicité)

boucles

point de rebroussement

ligne droite

Indice de Moran (agrégation spatiale ? voir avec Juste pour la lib à importer en scala)

Sur les vitesses, accélération ?