

EC 763 : Mathématiques pour l'ingénieur 2

Guillaume Franchi

Cursus Ingénieur 2^{ème} année

Chapitre 5 : Diagonalisation de matrices

1. Objectif

⚙️ Considérons une matrice carrée $M \in M_p(\mathbb{R})$. M représente une application linéaire f de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^p , donnée par la formule

$$f(\vec{x}) = M \cdot X, \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

et $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$ dans la base canonique.

⚙️ Pour des raisons évidentes de simplification des calculs, on aimerait faire en sorte que M soit diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \implies f(\vec{x}) = M \cdot X = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_p x_p \end{pmatrix}.$$

💡 Il s'agit de trouver une base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de \mathbb{R}^p dans laquelle la matrice M s'écrit

$$M' = P^{-1}MP \quad \text{où} \quad P = P_{\vec{e}_i \rightarrow \vec{v}_i} = \|\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p\|_{\vec{e}_i} \quad \text{et} \quad M' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p).$$

Définition

La matrice M est alors dite **diagonalisable** dans la base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$.

Remarques

- Trouver une telle base n'est pas toujours possible...
- Lorsque c'est le cas, les calculs sont grandement simplifiés :
 - $M^k = (PM'P^{-1})^k = PM'^kP^{-1}$ et $M'^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k)$.
 - $\det(M) = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_p$.

2. Vecteurs propres, valeurs propres

Définition

- Un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$, représenté par le vecteur colonne X , est un **vecteur propre** de M s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$M \cdot X = \lambda X.$$

- Le réel λ est alors une **valeur propre** de M .

Propriété

- La matrice M est diagonalisablessi il existe une base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de vecteurs propres de M .
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres associées, on a alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} = P^{-1}MP \quad \text{où} \quad P = P_{\vec{e}_i \rightarrow \vec{v}_i}.$$

Méthode

Pour diagonaliser une matrice, il faut donc :

- Déterminer toutes ses valeurs propres ;
- Déterminer les vecteurs propres associés.

 Comment le faire efficacement ?

Propriété

Les valeurs propres de M sont les racines du **polynôme caractéristique** de M :

$$P_M(x) = \det(M - xI_p).$$

Exemple

Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Pour ce faire :

- Calculer le polynôme caractéristique P_M .
- Déterminer ses racines λ_1 et λ_2 .
- Trouver des vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 satisfaisant $M\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$ et $M\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$.

Exemple

Appliquer la méthode précédente à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Propriété

- Soit M une matrice symétrique (*i.e.* $M^T = M$), alors M est diagonalisable dans une base orthonormale.
- Il existe donc une matrice P telle que
 - $P^T P = PP^T = I_p$;
 - $P^T MP = D$ avec D diagonale.

Exemple

Diagonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Cas des matrices rectangulaires

- 💡 On considère à présent une **matrice rectangulaire** X de dimension $n \times p$.
- 💡 En analyse de données, une telle matrice représente n individus décrits par p variables.
- 💡 La diagonalisation de la matrice X n'a ici pas de sens...
- 💡 On va considérer une « pseudo-diagonalisation », en se basant sur la matrice de covariance de X

$$\Sigma = \frac{1}{n} X^T X.$$

- 💡 Il s'agit d'un élément clé de l'**Analyse en Composantes Principales** (ACP).

Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

Soit X une matrice rectangulaire de dimension $n \times p$.

Il existe une matrice U de dimension $n \times n$ et une matrice V de dimension $p \times p$ telles que

$$X = U\Sigma V^T$$

avec $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \sigma_m & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et

- $U^T U = UU^T = I_n$;
- $V^T V = VV^T = I_p$;
- Les coefficients $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m > 0$ sont les racines carrées des valeurs propres strictement positives de $X^T X$.