

EC 763 : Mathématiques pour l'ingénieur 2

Guillaume Franchi

Cursus Ingénieur 2^{ème} année

Chapitre 4 : L'espace vectoriel \mathbb{R}^p

1. Introduction

Espace vectoriel

- Intuitivement, un **espace vectoriel** est un ensemble sur lequel on définit une addition interne et une multiplication externe par un scalaire.
- On dispose d'un élément neutre pour l'addition, noté $\vec{0}$, et les règles usuelles de calcul sont vérifiées.

Exemples

- L'ensemble

$$\mathbb{R}^p = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_p) : \forall i \in \{1, \dots, p\}, x_i \in \mathbb{R} \}$$

est un espace vectoriel avec :

- $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$ et $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$;
 - $\vec{0} = (0, \dots, 0)$.
- L'ensemble des matrices de dimension $n \times p$, noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$, est un espace vectoriel, avec les opérations vues dans les cours précédents.

2. Sous-espace vectoriel

Définition

Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel E est un **sous-espace vectoriel** (noté *sev*) si :

- $0 \in F$;
- F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in F.$$

Exemples

- L'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$ est un sev de \mathbb{R}^2 .
- L'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$.
- L'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\}$ n'est pas un sev de \mathbb{R}^2 .
- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$, noté $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sev.

Définition

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ des éléments d'un espace vectoriel E .

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ le sev

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

- Il s'agit du plus petit sev (*au sens de l'inclusion*) de E contenant $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$.

3. Bases d'un espace vectoriel

Définition

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des éléments d'un espace vectoriel E .

- La famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est dite **libre** si

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

- La famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est dite **génératrice** si pour tout $\vec{v} \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

- $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une **base** de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exemples

- La famille $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_p = (0, \dots, 0, 1)$ est une base de \mathbb{R}^p , appelée **base canonique**.
- La famille formée des matrices $E_{i,j}$ avec $E_{i,j} = (e_{k,l})_{k,l}$, où $e_{i,j} = 1$ et $e_{k,l} = 0$ si $k \neq i$ et $l \neq j$, est une base de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition

Un espace vectoriel E est dit de **dimension finie** s'il existe une famille finie de vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ qui soit une base de E .

Propriété

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. On appelle ce nombre la **dimension** de E , notée $\dim(E)$.

Propriété

Dans un espace vectoriel E de dimension finie $\dim(E) = n$.

- Toute famille libre avec n éléments est une base.
- Toute famille génératrice avec n éléments est une base.

Propriété

Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une base d'un espace vectoriel E . Tout vecteur $\vec{v} \in E$ s'écrit **de façon unique** :

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ constitue les **coordonnées** de \vec{v} dans cette base.

Exemple

Considérons la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 .

- Les coordonnées de $\vec{u} = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ sont $(2, -4, 1)$.
- Si \vec{v} a pour coordonnées $(-1, 0, 3)$, alors $\vec{v} = 3\vec{e}_3 - \vec{e}_1$.

4. Changement de base

⚙ Dans toute la suite, sauf mention contraire, la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^p .

Propriété

Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on définit

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^p \alpha_{i,j} \vec{e}_i = \alpha_{1,j} \vec{e}_1 + \alpha_{2,j} \vec{e}_2 + \dots + \alpha_{p,j} \vec{e}_p,$$

et on note $P = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}$ la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \dots & \vec{f}_p \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \dots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix} = \|\vec{f}_1 \dots \vec{f}_p\|_{\vec{e}_i}$$

La famille $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ est une base de \mathbb{R}^p ssi la matrice P est inversible.

Exercice

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , les familles suivantes sont-elles des bases ?

- $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$ et $\vec{v}_3 = (-1, 0, 0)$.
- $\vec{v}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 0, 1)$ et $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$.

Définition

La matrice $P = \|\vec{f}_1 \dots \vec{f}_p\|_{\vec{e}_i}$ s'appelle la **matrice de passage** de $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ à $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$, aussi notée :

$$P = P_{\vec{e}_i \rightarrow \vec{f}_i}.$$

Propriété

La matrice P^{-1} vérifie

$$P^{-1} = \|\vec{e}_1 \dots \vec{e}_p\|_{\vec{f}_i} = P_{\vec{f}_i \rightarrow \vec{e}_i}.$$

Propriété

Soit \vec{x} un vecteur de \mathbb{R}^p , de coordonnées $X = (x_1, \dots, x_p)$ dans une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.

Les coordonnées $X' = (x'_1, \dots, x'_p)$ de \vec{x} dans une autre base $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ sont données par

$$X' = P^{-1}X \iff PX' = X.$$

Remarque

Attention, dans cette dernière écriture matricielle, les vecteurs X et X' sont écrits en colonnes.

Exercice

Dans \mathbb{R}^2 on considère les vecteurs \vec{f}_1 et \vec{f}_2 définis par

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2. \end{cases}$$

- Vérifier que (\vec{f}_1, \vec{f}_2) forme une base de \mathbb{R}^2 .
- Soit $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Quelles sont les coordonnées de \vec{x} dans la base (\vec{f}_1, \vec{f}_2) ?

⚙️ Soit M une matrice carrée de $M_p(\mathbb{R})$. On dit que le vecteur \vec{y} est l'**image** du vecteur \vec{x} par M si

$$Y = MX$$

Où X et Y sont les vecteurs colonnes des coordonnées respectives de \vec{x} et \vec{y} dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$.

Propriété

Si X' et Y' sont les coordonnées des vecteurs \vec{x} et \vec{y} dans une base $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$, alors $Y' = M'X'$ où

$$M' = P^{-1}MP \quad \text{avec} \quad P = P_{\vec{e}_i \rightarrow \vec{f}_i} = \|\vec{f}_1 \dots \vec{f}_p\|_{\vec{e}_i}.$$

Exercice

On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, et on considère les vecteurs

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = (1, 0, -1) \\ \vec{f}_2 = (0, 1, 1) \\ \vec{f}_3 = (1, 0, 1) \end{cases}$$

exprimés dans la base canonique.

- Vérifier que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer la représentation de M dans cette nouvelle base.

5. Produit scalaire et distance

Définitions

Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_p)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^p .

- Le **produit scalaire** de \vec{x} et \vec{y} est le nombre réel donné par

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p.$$

- La **norme** du vecteur \vec{x} est donnée par :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}.$$

Propriétés

- Le produit scalaire est symétrique, et linéaire en chacun de ces arguments :
 - $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$;
 - $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^p, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \langle \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.
- Le produit scalaire est défini positif :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^p, \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0,$$

avec égalité ssi $\vec{x} = \vec{0}$.

- Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^p, \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.
- Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$.
- Pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p, \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (*inégalité triangulaire*).

Orthogonalité

Deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} de \mathbb{R}^p sont **orthogonaux** si

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

Propriété

Soient \vec{x} et \vec{y} deux vecteurs orthogonaux de \mathbb{R}^p , on a

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Familles orthogonales et orthonormales

Une famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ de \mathbb{R}^p est dite :

- **orthogonale** si

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0.$$

- **orthonormale** si elle est orthogonale et si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \|\vec{v}_i\| = 1.$$

Remarques

- La base canonique de \mathbb{R}^p est une base orthonormale.
- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Exercice

- Montrer que la famille de vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, 0, 0, -1), \vec{v}_3 = (0, 1, -1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v}_4 = (1, -1, -1, 1)$$

est orthogonale.

- En déduire une base orthonormale de \mathbb{R}^4 .

💡 Soient \vec{x} et \vec{y} deux vecteurs de \mathbb{R}^p , dont les coordonnées s'écrivent en vecteurs colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire de \vec{x} et \vec{y} est donné par

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = X^T Y.$$

Propriété

Soit $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ une famille de \mathbb{R}^p , et P la matrice

$$P = \|\vec{f}_1 \dots \vec{f}_p\|.$$

$(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^p ssi

$$P^T P = P P^T = I_p.$$

Remarque

En particulier, la matrice de passage de la base canonique $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ vers une base orthonormale $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$, notée $P = P_{\vec{e}_i \rightarrow \vec{f}_i}$ est inversible, d'inverse $P^{-1} = P^T$.

Exercice

Soit P la matrice de passage de la base canonique vers une base orthonormale.

- Montrer que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^p$

$$\langle PX, PY \rangle = \langle X, Y \rangle$$

où les vecteurs sont notés en colonnes.

- En déduire que pour tout $X \in \mathbb{R}^p$,

$$\|PX\| = \|X\|.$$

- Qu'en déduit-on ?