

Mélanges parfaits de cartes (II)

Mélanges de Monge

par Aimé Lachal*

Résumé.

Dans cet article, qui fait suite à un travail paru dans le numéro précédent de *Quadrature*, on s'intéresse à une classe de mélanges de cartes – appelés mélanges de Monge – bien connus du monde de la magie. On étudie la possibilité de retrouver le jeu de cartes initial après plusieurs mélanges successifs. Il s'agit d'un problème de systèmes dynamiques discrets pour lequel on recherche explicitement une période. L'approche adoptée ici est élémentaire, ce qui rend l'article facilement abordable.

I Description du problème

Cet article fait suite à un travail antérieur publié dans le numéro 76 de *Quadrature* [2] dans lequel j'ai présenté des mélanges parfaits de cartes communément appelés « in-shuffles » et « out-shuffles ». Ces mélanges sont bien connus et fréquemment utilisés dans le monde de la magie. Dans cette deuxième partie, j'examine d'autres exemples de mélanges parfaits : les mélanges de Monge qui se déduisent des précédents par une symétrie (voir par exemple [1, 3, 4]).

- Une première version du mélange de Monge consiste à prendre successivement les cartes du paquet initial et de les placer alternativement au-dessus et au-dessous les unes des autres.
- Disposant d'un jeu de cartes que l'on coupe en son milieu donnant deux paquets de cartes, une deuxième version consiste à intercaler les cartes du premier paquet entre celles du deuxième après avoir retourné ce dernier.

La problématique étudiée dans [2] était la suivante : on cherchait à déterminer le nombre minimal de mélanges pour retomber sur l'ordre initial des cartes. Il s'agissait mathématiquement d'un problème de calcul de période pour certaines permutations des cartes. Dans cette nouvelle partie, je considère

le même problème relativement aux divers mélanges de Monge introduits. Pour cela, je commence par détailler les processus de mélange de Monge à l'aide de permutations de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$ (notées h_1, h_2, h_3, h_4) ou $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ (notées h_1, h_2, h_3, h_4). L'une de ces deux familles sera d'une utilisation plus commode que l'autre selon l'exemple étudié. Les permutations associées à $\{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$ sont particulièrement bien adaptées au calcul explicite des itérations successives (correspondant à la succession de mélanges parfaits) au travers des écritures binaires. On passe d'une permutation h à une permutation h selon la relation $h(i) = h(i+1) - 1$ pour tout $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$. Je porte un intérêt particulier au cas spécifique où n est une puissance de 2.

Cette partie est rédigée de façon à ce qu'elle puisse, autant que possible, être lue indépendamment de la précédente. Néanmoins, la lecture de [2] pourra faciliter la compréhension de cette nouvelle partie.

Plan de l'article

- Dans la section II, nous présentons la modélisation du problème en introduisant les permutations relatives aux différents mélanges de cartes.
- Dans la section III, nous formulons de manière implicite les résultats relatifs au calcul de périodes des mélanges étudiés. Nous examinons en détail le cas d'un jeu de 32 cartes ainsi que celui d'un jeu de 52 cartes.

* Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Pôle de Mathématiques, Bâtiment Léonard de Vinci, 20 avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex, France.
e-mail : aime.lachal@insa-lyon.fr

- Dans la section IV, nous calculons explicitement, en faisant appel au calcul binaire, toutes les itérations successives de certaines permutations significatives, dans le cas particulier où n est une puissance de 2.

II Modélisation

Le jeu de cartes numérotées de bas en haut dans l'ordre $1, 2, 3, \dots, 2n$ est coupé en son milieu et donne les deux paquets de cartes numérotées $1, 2, \dots, n$ pour le premier et $n+1, n+2, \dots, 2n$ pour le deuxième. On constitue un nouveau jeu de $2n$ cartes en prenant à tour de rôle une carte de chacun des paquets de n cartes.

Le mélange de Monge consiste à faire passer les cartes d'un jeu complet d'une main à l'autre en intercalant alternativement les cartes l'une au-dessus et au-dessous de l'autre.

II.1 Premier modèle

II.1.1 Première variante

On numérote les cartes de 1 à $2n$ à partir du bas du paquet. On commence par prendre la carte n° 1 qui va démarrer le nouveau paquet, puis la carte n° 2 que l'on place au-dessous du nouveau paquet (donc au-dessous de la carte n° 1), puis la carte n° 3 que l'on place au-dessus du nouveau paquet (donc au-dessus de la n° 1), puis la carte n° 4 que l'on place au-dessous du nouveau paquet (donc au-dessous de la n° 2), puis la carte n° 5 que l'on place au-dessus du nouveau paquet (donc au-dessus de la n° 3), et ainsi de suite (figure 1). À l'issue du mélange, on obtient dans l'ordre, de bas en haut, les cartes n°s $2n, 2n-2, 2n-4, \dots, 4, 2, 1, 3, \dots, 2n-3, 2n-1$. On rencontre donc les cartes de numéros pairs dans l'ordre décroissant, puis celles de numéros impairs dans l'ordre croissant.

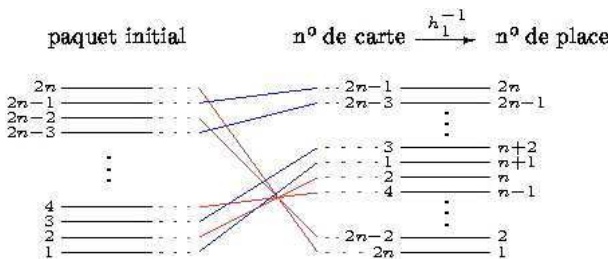


Figure 1. Permutation h_1^{-1} .

De manière générale, la j^{e} carte porte le n° $(n+1-j/2)$ lorsque j est pair et le n° $(n+(j+1)/2)$ lorsque j est impair. Inversement, une carte portant un numéro i entre 1 et n occupe à l'issue du mélange la place n° $(2n+2-2i)$, et une carte portant un numéro i

entre $n+1$ et $2n$ occupe la place n° $(2i-2n-1)$. On désigne par $h_1(i)$ le numéro de classement final de la carte de numéro initial i , ainsi que par $h_1^{-1}(j)$ le numéro initial de la carte classée en position finale n° j . Ce mélange correspond aux permutations réciproques h_1 et h_1^{-1} des entiers $1, 2, \dots, 2n$ données par

$$h_1(i) = \begin{cases} 2n+2-2i & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ 2i-2n-1 & \text{si } n+1 \leq i \leq 2n, \end{cases}$$

et

$$h_1^{-1}(j) = \begin{cases} \frac{j+1}{2} + n & \text{si } j \text{ est impair,} \\ n+1 - \frac{j}{2} & \text{si } j \text{ est pair.} \end{cases}$$

La permutation analogue h_1 associée à la numérotation $0, 1, 2, \dots, 2n-1$ est donnée par

$$h_1(i) = \begin{cases} 2n-1-2i & \text{si } 0 \leq i \leq n-1, \\ 2i-2n & \text{si } n \leq i \leq 2n-1. \end{cases}$$

II.1.2 Deuxième variante

On commence par prendre la carte n° 1 qui va démarrer le nouveau paquet, puis la carte n° 2 que l'on place à présent au-dessus du nouveau paquet (donc au-dessus de la carte n° 1), puis la carte n° 3 que l'on place au-dessous de la n° 1, puis la carte n° 4 que l'on place au-dessus de la n° 2, puis la carte n° 5 que l'on place au-dessous de la n° 3, et ainsi de suite (figure 2). On obtient cette fois dans l'ordre, de bas en haut, les cartes n°s $2n-1, 2n-3, \dots, 3, 1, 2, 4, \dots, 2n-2, 2n$, c'est-à-dire les cartes de numéros impairs dans l'ordre décroissant, puis celles de numéros pairs dans l'ordre croissant.

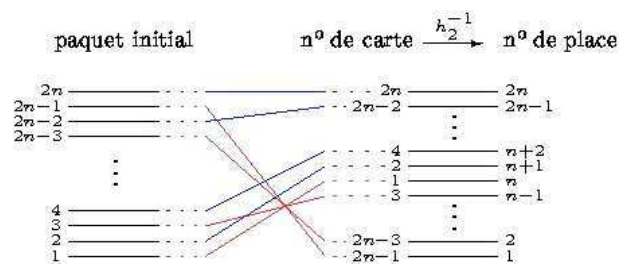


Figure 2. Permutation h_2^{-1} .

Remarquons que ce mélange se déduit du précédent simplement en retournant le jeu, ou encore en effectuant la symétrie $i \mapsto 2n+1-i$. En notant h_2 la permutation des entiers $1, 2, \dots, 2n$ associée à ce mélange, on a précisément la relation $h_2(i) = h_1(2n+1-i)$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$. Donc

$$h_2(i) = \begin{cases} 2n+1-2i & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ 2i-2n & \text{si } n+1 \leq i \leq 2n, \end{cases}$$

et

$$h_2^{-1}(j) = \begin{cases} \frac{j}{2} + n & \text{si } j \text{ est pair,} \\ n - \frac{j-1}{2} & \text{si } j \text{ est impair.} \end{cases}$$

La permutation h_2 relative à la numérotation $0, 1, 2, \dots, 2n-1$ s'écrit :

$$h_2(i) = \begin{cases} 2n-2-2i & \text{si } 0 \leq i \leq n-1, \\ 2i-2n+1 & \text{si } n \leq i \leq 2n-1. \end{cases}$$

II.2 Deuxième modèle

Une autre version du mélange de Monge consiste à couper le jeu de cartes initialement numérotées $1, 2, \dots, 2n$ en deux paquets de cartes numérotées $1, 2, \dots, n$ et $n+1, n+2, \dots, 2n$, à retourner le deuxième paquet qui devient ordonné selon $2n, 2n-1, \dots, n+2, n+1$, puis à mélanger le premier paquet et le deuxième ainsi retourné *via* un in-shuffle ou un out-shuffle. Les magiciens parlent de mélanges « à l'espagnole » : on dispose les deux paquets sous forme d'éventail, on retourne le deuxième éventail et on intercale parfaitement les deux éventails.

II.2.1 In-shuffle de Monge

On intercale les deux paquets de cartes numérotées $1, 2, \dots, n$ et $2n, 2n-1, \dots, n+2, n+1$ en commençant par le deuxième (cas d'un in-shuffle, figure 3). Cela donne la succession de cartes n°s $2n, 1, 2n-1, 2, \dots, n+2, n-1, n+1, n$.

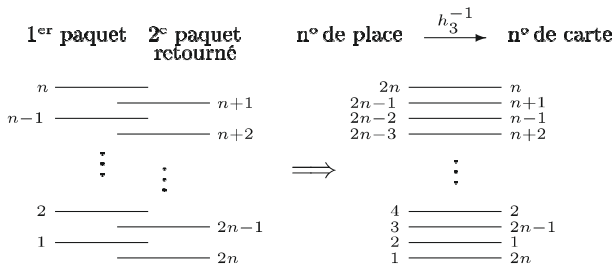


Figure 3. Permutation h_3^{-1} .

Cette séquence est représentée par les permutations h_3 et h_3^{-1} des entiers $1, 2, \dots, 2n$ suivantes :

$$h_3(i) = \begin{cases} 2i & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ 4n+1-2i & \text{si } n+1 \leq i \leq 2n, \end{cases}$$

et

$$h_3^{-1}(j) = \begin{cases} \frac{j}{2} & \text{si } j \text{ est pair,} \\ 2n - \frac{j-1}{2} & \text{si } j \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a en particulier la congruence importante

$$h_3(i) \equiv \pm 2i \pmod{(4n+1)}.$$

La permutation analogue des entiers $0, 1, 2, \dots, 2n-1$ est alors la suivante :

$$h_3(i) = \begin{cases} 2i+1 & \text{si } 0 \leq i \leq n-1, \\ 4n-2-2i & \text{si } n \leq i \leq 2n-1. \end{cases}$$

Ce mélange est relié à celui décrit dans II.1.1 selon la relation $2n+1-h_3(2n+1-i) = h_1(i)$ valable pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, soit encore en notant s la symétrie $i \mapsto 2n+1-i$,

$$h_3 = s \circ h_1 \circ s = s \circ h_1 \circ s^{-1}.$$

Les permutations h_1 et h_3 sont donc conjuguées dans le groupe des permutations (S_{2n}, \circ) .

II.2.2 Out-shuffle de Monge

On intercale à présent les deux paquets de cartes numérotées $1, 2, \dots, n$ et $2n, 2n-1, \dots, n+2, n+1$ en commençant par le premier (cas d'un out-shuffle, figure 4). Cela conduit à la séquence de cartes n°s $1, 2n, 2, 2n-1, \dots, n-1, n+2, n, n+1$.

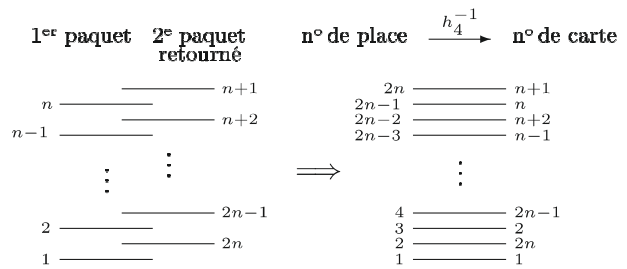


Figure 4. Permutation h_4^{-1} .

D'où les permutations des entiers $1, 2, \dots, 2n$ suivantes :

$$h_4(i) = \begin{cases} 2i-1 & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ 4n+2-2i & \text{si } n+1 \leq i \leq 2n, \end{cases}$$

et

$$h_4^{-1}(j) = \begin{cases} \frac{j+1}{2} & \text{si } j \text{ est impair,} \\ 2n+1 - \frac{j}{2} & \text{si } j \text{ est pair.} \end{cases}$$

On a $h_4(1) = 1$, ce qui signifie que la carte n° 1 reste immobile dans cette manipulation. La permutation des entiers $0, 1, 2, \dots, 2n-1$ associée est la suivante :

$$h_4(i) = \begin{cases} 2i & \text{si } 0 \leq i \leq n-1, \\ 4n-1-2i & \text{si } n \leq i \leq 2n-1. \end{cases}$$

On a en particulier la congruence remarquable

$$h_4(i) \equiv \pm 2i \pmod{(4n-1)}.$$

À l'instar du mélange de la section II.2.1, ce mélange est relié à celui décrit dans II.1.2 selon

$$h_4 = s \circ h_2 \circ s^{-1}.$$

Les permutations h_2 et h_4 sont donc conjuguées.

Pour résumer et avoir une vision concise des divers mélanges considérés, nous avons défini les permutations h_1, h_2, h_3, h_4 ainsi que leurs réciproques et leurs translatées h_1, h_2, h_3, h_4 .

III Une formulation de la solution du problème

Les mélanges répétés correspondent mathématiquement aux itérations successives des permutations décrites précédemment. Travaillons avec une quelconque des permutations introduites que nous noterons h . L'issue des k premiers mélanges associés à h est représentée par la permutation

$$h^k = \underbrace{h \circ \dots \circ h}_{k \text{ fois}}.$$

Plus précisément, la quantité $h^k(i)$ désigne la position occupée au bout de k mélanges par la carte portant initialement le numéro i . Ainsi l'intégralité de l'expérience (supposée illimitée...) est modélisée par l'ensemble des itérations successives de h suivant : $\{\text{id}, h, h^2, h^3, \dots\} = \{h^k, k \in \mathbb{N}\}$.

Introduisons la période r de h : c'est le plus petit $r \geq 1$ tel que $h^r = \text{id}$. Au bout de r mélanges de Monge et pas moins, on retombe nécessairement sur l'ordre initial des cartes. Cette discussion montre que l'évolution de la carte n° i ($i \in \{1, \dots, 2n\}$) est décrite par l'orbite de i sous l'action de h :

$$\begin{aligned} O(i) &= \{h^k(i), k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{i, h(i), h^2(i), \dots, h^{r-1}(i)\}. \end{aligned}$$

Une méthode de calcul de cette période est proposée dans les théorèmes 1 et 2 ci-dessous ; on peut la trouver par exemple dans le livre [1].

III.1 Application aux mélanges de Monge

Théorème 1. La période commune de h_1 et de h_3 est le plus petit entier $u \geq 1$ vérifiant l'une des deux congruences $2^u \equiv 1 \pmod{(4n+1)}$ ou $2^u \equiv -1 \pmod{(4n+1)}$.

Explication du théorème. Ou bien il existe une puissance de 2 congrue à -1 modulo $(4n+1)$ et l'on choisit pour u la plus petite. Dans ce cas, $2u$ est l'ordre de

2 modulo $(4n+1)$: $2^{2u} \equiv 1 \pmod{(4n+1)}$. Ou bien il n'existe aucune puissance de 2 congrue à -1 modulo $(4n+1)$ et l'on choisit alors pour u l'ordre de 2 modulo $(4n+1)$.

Démonstration. Rappelons tout d'abord que h_1 et h_3 sont conjuguées : $h_3 = s \circ h_1 \circ s^{-1}$. Cette propriété s'étend à toutes les itérées : $h_3^k = s \circ h_1^k \circ s^{-1}$. Ainsi l'équation $h_1^k = \text{id}$ est équivalente à l'équation $h_3^k = \text{id}$, prouvant que h_1 et h_3 ont même période. Rappelons la relation

$$h_3(i) \equiv \pm 2i \pmod{(4n+1)}.$$

On a

$$h_3^k(i) \equiv \pm 2^k i \pmod{(4n+1)},$$

le signe \pm dépendant de i et k est déterminé sans ambiguïté par la contrainte $1 \leq h_3^k(i) \leq 2n$. Plus précisément, si $2^k i$ admet un représentant modulo $(4n+1)$ compris entre 1 et $2n$, alors $h_3^k(i)$ coïncide avec ce représentant et on choisit le signe $+$ dans la congruence : $h_3^k(i) \equiv +2^k i \pmod{(4n+1)}$. Sinon, $2^k i$ admet un représentant entre $2n+1$ et $4n$ (0 ne peut pas être un représentant car 2^k et $(4n+1)$ sont premiers entre eux et $1 \leq i \leq 2n$). Dans ce cas, $-2^k i$ admet un représentant entre 1 et $2n$ et l'on choisit le signe $-$: $h_3^k(i) \equiv -2^k i \pmod{(4n+1)}$.

Pour avoir en particulier $h_3^k(1) = 1$, on doit choisir k tel que $2^k \equiv \pm 1 \pmod{(4n+1)}$. Considérons donc le plus petit entier $u \geq 1$ tel que $2^u \equiv 1 \pmod{(4n+1)}$ ou $2^u \equiv -1 \pmod{(4n+1)}$.

On a ensuite pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, $h_3^u(i) \equiv \pm i \pmod{(4n+1)}$, le signe \pm dépendant de i et u . En fait, le représentant de $-i \pmod{(4n+1)}$ compris entre 1 et $4n+1$ est $4n+1-i$. Mais ce représentant est supérieur à $2n$ et la condition $1 \leq h_3^u(i) \leq 2n$ n'est remplie que dans le cas où $h_3^u(i) = i$. Ainsi $h_3^u = \text{id}$ et u est la période de h_3 . \square

Exemple (cas d'un jeu de 52 cartes). L'étude de ce mélange de Monge s'effectue modulo $4n+1 = 105$. On trouve les orbites suivantes :

$$O(1) = \{1, 2, 4, 8, 13, 16, 23, 26, 32, 41, 46, 52\},$$

$$O(3) = \{3, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 33, 36, 39, 48, 51\},$$

$$O(5) = \{5, 10, 20, 25, 40, 50\},$$

$$O(7) = \{7, 14, 28, 49\},$$

$$O(11) = \{11, 17, 19, 22, 29, 31, 34, 37, 38, 43, 44, 47\},$$

$$O(15) = \{15, 30, 45\},$$

$$O(21) = \{21, 42\},$$

$$O(35) = \{35\}.$$

Ce mélange a pour période 12.

Exemple (cas d'un jeu de 54 cartes). L'étude de ce mélange de Monge s'effectue modulo $4n+1 = 109$. On trouve les trois orbites suivantes :

$$\begin{aligned} O(1) &= \{1, 2, 4, 8, 16, 17, 19, 23, 27, \\ &\quad 32, 33, 34, 38, 41, 43, 45, 46, 54\}, \\ O(3) &= \{3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 20, \\ &\quad 24, 26, 28, 29, 40, 48, 51, 52, 53\}, \\ O(9) &= \{9, 11, 15, 18, 21, 22, 25, 30, 31, \\ &\quad 35, 36, 37, 39, 42, 44, 47, 49, 50\}. \end{aligned}$$

Ce mélange a pour période 18.

De manière similaire, la congruence précédemment signalée

$$h_4(i) \equiv \pm 2i \pmod{(4n-1)}$$

fournit la période de h_4 .

Théorème 2. La période commune de h_2 et de h_4 est le plus petit entier $v \geq 1$ vérifiant l'une des deux congruences $2^v \equiv 1 \pmod{(4n-1)}$ ou $2^v \equiv -1 \pmod{(4n-1)}$.

Exemple (cas d'un jeu de 52 cartes). L'étude de ce mélange de Monge s'effectue modulo $4n-1 = 103$. On trouve les deux orbites $\mathfrak{O}(0) = \{0\}$ et $\mathfrak{O}(1) = \{1, 2, 3, \dots, 51\}$. La période de ce mélange est 51.

Exemple (cas d'un jeu de 54 cartes). L'étude de ce mélange de Monge s'effectue modulo $4n-1 = 107$. On trouve les deux orbites $\mathfrak{O}(0) = \{0\}$ et $\mathfrak{O}(1) = \{1, 2, 3, \dots, 53\}$. La période de ce mélange est 53.

Corollaire 3. La période d'un mélange de Monge de 2^p cartes ($p \geq 1$) est $p+1$.

Démonstration. Pour $n = 2^{p-1}$, on a $4n+1 = 2^{p+1} + 1$. Donc $2^{p+1} \equiv -1 \pmod{(4n+1)}$ et $2^{p+1} \equiv 1 \pmod{(4n-1)}$. D'après les théorèmes 1 et 2, $p+1$ est une période de h_1, h_2, h_3 et h_4 . D'autre part, dans les deux cas, l'orbite de 1 est l'ensemble $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^p\}$ de cardinal $p+1$. Cela prouve le corollaire. \square

Exemple (cas d'un jeu de 32 cartes). L'étude du mélange de Monge associé à h_3 s'effectue modulo $4n+1 = 65$. On trouve les orbites suivantes :

$$\begin{aligned} O(1) &= \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}, \\ O(3) &= \{3, 6, 12, 17, 24, 31\}, \\ O(5) &= \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}, \\ O(7) &= \{7, 9, 14, 18, 28, 29\}, \\ O(11) &= \{11, 19, 21, 22, 23, 27\}, \\ O(13) &= \{13, 26\}. \end{aligned}$$

L'étude du mélange de Monge associé à h_4 s'effectue modulo $4n-1 = 63$. On trouve les orbites suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}(0) &= \{0\}, \\ \mathfrak{O}(1) &= \{1, 2, 4, 8, 16, 31\}, \\ \mathfrak{O}(3) &= \{3, 6, 12, 15, 24, 30\}, \\ \mathfrak{O}(5) &= \{5, 10, 17, 20, 23, 29\}, \\ \mathfrak{O}(7) &= \{7, 14, 28\}, \\ \mathfrak{O}(9) &= \{9, 18, 27\}, \\ \mathfrak{O}(11) &= \{11, 13, 19, 22, 25, 26\}, \\ \mathfrak{O}(21) &= \{21\}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, la période est 6 et coïncide bien avec $p+1$ (ici $n = 2^{p-1}$ avec $p = 5$).

III.2 Quelques valeurs numériques

Nous donnons ci-dessous les périodes des mélanges de Monge associés à h_1 et h_2 (baptisés dans le tableau « in-Monge » et « out-Monge ») pour des jeux de $2n$ cartes avec $2n \leq 64$.

| $2n$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
|-----------|---|---|---|---|----|----|----|----|
| in-Monge | 2 | 3 | 6 | 4 | 6 | 10 | 14 | 5 |
| out-Monge | 1 | 3 | 5 | 4 | 9 | 11 | 9 | 5 |

| $2n$ | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| in-Monge | 18 | 10 | 12 | 21 | 26 | 9 | 30 | 6 |
| out-Monge | 12 | 12 | 7 | 23 | 8 | 20 | 29 | 6 |

| $2n$ | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| in-Monge | 22 | 9 | 30 | 27 | 8 | 11 | 10 | 24 |
| out-Monge | 33 | 35 | 20 | 39 | 41 | 28 | 12 | 36 |

| $2n$ | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| in-Monge | 50 | 12 | 18 | 14 | 12 | 55 | 50 | 7 |
| out-Monge | 15 | 51 | 53 | 36 | 44 | 24 | 20 | 7 |

IV Cas d'un jeu de 2^p cartes

Dans toute cette section, nous nous plaçons dans le cas où $n = 2^{p-1}$. Nous calculons explicitement les itérations successives des permutations h_1 et h_2 . L'astuce de calcul consiste à travailler avec les écritures binaires des numéros de cartes.

IV.1 Version associée à h_1

Nous travaillons ici avec la permutation h_1 des entiers $0, 1, \dots, 2n-1$. Introduisons l'écriture binaire

d'un $i \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$:

$$i = \overline{i_{p-1} \dots i_0} = \sum_{k=0}^{p-1} i_k 2^k$$

où les i_0, i_1, \dots, i_{p-1} sont des bits 0 ou 1. Dans ces conditions, l'image de i par la permutation h_1 se calcule comme suit. Si $i \leq n-1$, alors $i_{p-1} = 0$ et

$$\begin{aligned} h_1(i) &= 2n-1-2i = \overline{\overbrace{1-1}^p} - \overline{i_{p-2} \dots i_0 0} \\ &= \overline{(1-i_{p-2}) \dots (1-i_0) 1}. \end{aligned}$$

De même, si $i \geq n$, alors $i_{p-1} = 1$ et

$$h_1(i) = 2i-2n = \overline{i_{p-2} \dots i_0 0}.$$

On peut finalement écrire $h_1(i)$ sous la forme

$$h_1(i) = \begin{cases} \overline{(1-i_{p-2}) \dots (1-i_0)(1-i_{p-1})} & \text{si } i_{p-1} = 0, \\ \overline{i_{p-2} \dots i_0(1-i_{p-1})} & \text{si } i_{p-1} = 1. \end{cases}$$

L'expression de $h_1(i)$ ci-dessus dépendant de la parité de i_{p-1} , nous sommes amenés à décomposer l'écriture binaire de i en blocs de 0 et de 1 consécutifs. Notons m ($m \geq 1$) le nombre de blocs apparaissant dans i et l_1, l_2, \dots, l_m leurs longueurs respectives en allant de la gauche vers la droite ($l_1, \dots, l_m \geq 1$ et $l_1 + \dots + l_m = p$). Pour $m = 1$, on a les deux possibilités $i = \overline{0-0}$ et $i = \overline{1-1}$. Pour $m \geq 2$, on a les quatre possibilités génériques :

$$\begin{aligned} i &= \overline{\underbrace{0-0}_{l_1} \underbrace{1-1}_{l_2} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m}}, \\ i &= \overline{\underbrace{0-0}_{l_1} \underbrace{1-1}_{l_2} \dots \underbrace{0-0}_{l_{m-1}} \underbrace{1-1}_{l_m}}, \\ i &= \overline{\underbrace{1-1}_{l_1} \underbrace{0-0}_{l_2} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m}}, \\ i &= \overline{\underbrace{1-1}_{l_1} \underbrace{0-0}_{l_2} \dots \underbrace{0-0}_{l_{m-1}} \underbrace{1-1}_{l_m}}. \end{aligned}$$

Nous considérons par exemple le cas d'un nombre i se décomposant sous la forme

$$i = \overline{\underbrace{1-1}_{l_1} \underbrace{0-0}_{l_2} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m}}.$$

Les itérations successives de h_1 sur i donnent

$$\begin{aligned} h_1(i) &= \overline{\underbrace{1-1}_{l_1-1} \underbrace{0-0}_{l_2} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m+1}} \\ h_1^2(i) &= \overline{\underbrace{1-1}_{l_1-2} \underbrace{0-0}_{l_2} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m+2}} \\ &\vdots \\ h_1^{l_1-1}(i) &= \overline{\underbrace{10-01}_{l_2} \underbrace{-1-1}_{l_3} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m+l_1-1}} \\ h_1^{l_1}(i) &= \overline{\underbrace{0-0}_{l_2} \underbrace{1-1}_{l_3} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m+l_1}} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} h_1^{l_1+1}(i) &= \overline{\underbrace{1-1}_{l_2-1} \underbrace{0-0}_{l_3} \dots \underbrace{0-0}_{l_{m-1}} \underbrace{1-1}_{l_m+l_1+1}} \\ &\vdots \\ h_1^{l_1+l_2-1}(i) &= \overline{\underbrace{10-01}_{l_3} \underbrace{-1-1}_{l_4} \dots \underbrace{0-0}_{l_{m-1}} \underbrace{1-1}_{l_m+l_1+1} \underbrace{0-0}_{l_2-2}} \\ h_1^{l_1+l_2}(i) &= \overline{\underbrace{0-0}_{l_3} \underbrace{1-1}_{l_4} \dots \underbrace{0-0}_{l_{m-1}} \underbrace{1-1}_{l_m+l_1+1} \underbrace{0-0}_{l_2-1}} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} h_1^{l_1+l_2+1}(i) &= \overline{\underbrace{1-1}_{l_3-1} \underbrace{0-0}_{l_4} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m+l_1+1} \underbrace{1-1}_{l_2}} \\ &\vdots \\ h_1^{l_1+l_2+l_3}(i) &= \overline{\underbrace{0-0}_{l_4} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m+l_1+1} \underbrace{1-1}_{l_2} \underbrace{10-0}_{l_3-1}}. \end{aligned}$$

On continue ainsi de suite pour arriver à

$$\begin{aligned} h_1^{l_1+\dots+l_{m-1}}(i) &= \overline{\underbrace{0-0}_{l_m+l_1-1} \underbrace{1-1}_{l_2} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-2}} \underbrace{0-0}_{l_{m-1}-1}} \\ h_1^{l_1+\dots+l_{m-1}+1}(i) &= \overline{\underbrace{1-1}_{l_m+l_1} \underbrace{0-0}_{l_2} \dots \underbrace{0-0}_{l_{m-2}} \underbrace{1-1}_{l_{m-1}}} \\ &\vdots \\ h_1^{l_1+\dots+l_m}(i) &= \overline{\underbrace{1-1}_{l_1+1} \underbrace{0-0}_{l_2} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m-1}} \\ h_1^{l_1+\dots+l_m+1}(i) &= \overline{\underbrace{1-1}_{l_1} \underbrace{0-0}_{l_2m-1} \dots \underbrace{1-1}_{l_{m-1}} \underbrace{0-0}_{l_m}}. \end{aligned}$$

Finalement, le résultat de la dernière étape s'écrit exactement

$$h_1^{p+1}(i) = i.$$

Les calculs menés ci-dessus s'étendent aisément aux autres formes possibles de décompositions binaires par blocs de i , quitte à faire $l_1 = 0$ et/ou $l_m = 0$.

IV.2 Version associée à h_2

En ce qui concerne la permutation h_2 des entiers $0, 1, \dots, 2n-1$, on a pour $i = i_{p-1} \dots i_0$,

$$h_2(i) = \begin{cases} \overline{(1-i_{p-2}) \dots (1-i_0) i_{p-1}} & \text{si } i_{p-1} = 0, \\ \overline{i_{p-2} \dots i_0 i_{p-1}} & \text{si } i_{p-1} = 1. \end{cases}$$

Considérons de nouveau l'exemple où

$$i = \underbrace{1-10-0}_{l_1} \dots \underbrace{1-10-0}_{l_{m-1}} \underbrace{0}_{l_m}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} h_2(i) &= \overline{\underbrace{1-10-0}_{l_1-1} \dots \underbrace{1-10-0}_{l_{m-1}} \underbrace{01}_{l_m}} \\ &\vdots \\ h_2^{l_1}(i) &= \overline{\underbrace{0-01-1}_{l_2} \dots \underbrace{1-10-0}_{l_{m-1}} \underbrace{01-1}_{l_m} \underbrace{1}_{l_1}} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} h_2^{l_1+1}(i) &= \overline{\underbrace{1-10-0}_{l_2-1} \dots \underbrace{1-10-0}_{l_m} \underbrace{0}_{l_1+1}} \\ &\vdots \\ h_2^{l_1+l_2}(i) &= \overline{\underbrace{0-01-1}_{l_3} \dots \underbrace{1-10-0}_{l_m} \underbrace{01-1}_{l_1+1} \underbrace{1}_{l_2-1}} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} h_2^{l_1+l_2+1}(i) &= \overline{\underbrace{1-10-0}_{l_3-1} \dots \underbrace{0-01-1}_{l_m} \underbrace{10-0}_{l_1+1} \underbrace{0}_{l_2}} \\ &\vdots \\ h_2^{l_1+l_2+l_3}(i) &= \overline{\underbrace{0-0}_{l_4} \dots \underbrace{0-01-1}_{l_m} \underbrace{10-0}_{l_1+1} \underbrace{01-1}_{l_2} \underbrace{1}_{l_3-1}}. \end{aligned}$$

On continue ainsi de suite pour arriver à

$$\begin{aligned} h_2^{l_1+\dots+l_{m-1}}(i) &= \overline{\underbrace{0-01-1}_{l_m} \underbrace{0-0}_{l_1+1} \underbrace{0}_{l_2} \dots \underbrace{0-01-1}_{l_{m-2}} \underbrace{1}_{l_{m-1}-1}} \\ h_2^{l_1+\dots+l_{m-1}+1}(i) &= \overline{\underbrace{1-10-0}_{l_{m-1}} \underbrace{0-01-1}_{l_1+1} \underbrace{1}_{l_2} \dots \underbrace{1-10-0}_{l_{m-2}} \underbrace{0}_{l_{m-1}}} \\ &\vdots \\ h_2^{l_1+\dots+l_m}(i) &= \overline{\underbrace{0-01-1}_{l_1+1} \dots \underbrace{0-01-1}_{l_{m-1}} \underbrace{1}_{l_m}} \\ h_2^{l_1+\dots+l_m+1}(i) &= \overline{\underbrace{1-10-0}_{l_1} \dots \underbrace{1-10-0}_{l_{m-1}} \underbrace{0}_{l_m}}. \end{aligned}$$

Finalement, la dernière étape donne exactement

$$h_2^{p+1}(i) = i.$$

En conclusion à ces séries de calculs, nous avons retrouvé le fait que le nombre $p+1$ était bien une période de h_1 et h_2 .

Remerciements. J'adresse mes remerciements à un de mes élèves, Matthieu Bacconnier (INSA de Lyon, 51^e promotion), pour son aide relative aux calculs numériques présentés dans la section III.2. D'autres remerciements s'adressent à Roger Mansuy et un référé anonyme pour leurs nombreuses suggestions qui m'ont permis d'améliorer la présentation de cet article.

Références

- [1] J.-H. Conway et R.-K. Guy, *The book of numbers*, Springer-Verlag, 1996.
- [2] A. Lachal, « Mélanges parfaits de cartes (I) – In-shuffles et out-shuffles », *Quadrature* **76** (2010) 13–25.
- [3] Shuffle, Wolfram Mathworld, <http://mathworld.wolfram.com/MongesShuffle.html>.
- [4] Shuffling, Wikipedia, the free encyclopedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/Shuffling>.