

ECN 4050 Macroéconomie honor

Cours 6: modèle néoclassique de croissance et calibration (troisième étape de la méthodologie)

Guillaume Sublet

Université de Montréal

Modèle néoclassique de croissance

- ▶ Extension du modèle dynamique du cours 5 : ajout d'*investissement dans capital physique qui sert comme facteur de production*
- ▶ Choix dynamique, y compris pour le planificateur.
- ▶ En général solution analytique pas disponible. Recours aux méthodes numériques.

Modèle néoclassique de croissance

Environnement

- Préférences du consommateur :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Loisir ne procure pas d'utilité (simplification)

Exercice en classe *Quelle est l'offre de travail ?*

Modèle néoclassique de croissance

Environnement

- Préférences du consommateur :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Loisir ne procure pas d'utilité (simplification)

Exercice en classe *Quelle est l'offre de travail ? Solution : offre de travail inélastique $\ell_t = 0$.*

- Fonction de production

$$y_t = f(k_t, n_t)$$

- Loi de dynamique du capital :

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + \text{investissement}_t$$

où $0 \leq \delta \leq 1$ désigne le taux de dépréciation

- Contrainte de ressources :

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = y_t$$

Modèle néoclassique de croissance

Problème du consommateur

Problème du consommateur inchangé sauf :

- ▶ changement d'index sur la choix d'épargne sans aucune conséquence. C'est juste pour adopter une notation en ligne avec le reste du matériel pédagogique.
- ▶ l'épargne du consommateur n'est pas en dette publique mais est investie dans du capital dont le taux de rendement réel est r_t .

$$\max_{(c_t \geq 0, a_{t+1})_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sous les contraintes :

$$c_t + a_{t+1} = w_t + (1 + r_t) a_t \quad \text{pour } t = 0, 1, \dots$$

$(a_t)_{t=0}^{\infty}$ est un séquence bornée

Modèle néoclassique de croissance

Problème du consommateur

Exercice en classe : *Calculer les CPO inter-temporelles. Le consommateur fait-il un choix intra-temporel ?*

Solution :

CPO (condition Euler) inter-temporelle

$$u'(c_t) = (1 + r_{t+1}) \beta u'(c_{t+1})$$

Remarque facultative :

La solution du problème dynamique du consommateur est une suite récurrente d'ordre 2 en épargne a_t

$$u'(w_t + (1 + r_t) a_t - a_{t+1}) = (1 + r_{t+1}) \beta u'(w_{t+1} + (1 + r_{t+1}) a_{t+1} - a_{t+2})$$

Deux conditions de limite : a_0 donné et $a_{T+1} = 0$ si horizon fini ou condition de transversalité si horizon infini.

Modèle néoclassique de croissance

Problème de la firme

$$\max_{k_t, n_t} z_t f(k_t, n_t) - \mu_t k_t - w_t n_t$$

Le choix de capital et de demande de travail satisfait les Conditions de Premier Ordre (CPO) :

$$z_t f_1(k_t, n_t) = \mu_t$$

$$z_t f_2(k_t, n_t) = w_t$$

Remarques :

- ▶ μ_t désigne le loyer du capital qui est égal au produit marginal du capital
- ▶ $r_t = \mu_t - \delta$: le taux d'intérêt réel du capital est le loyer du capital net de la dépréciation

Modèle néoclassique

Exercice en classe : technologie Cobb-Douglas

Étant donné w_t et μ_t , résoudre le problème d'une firme avec fonction de production $f(k, n) = z k^\alpha n^{1-\alpha}$.

Solution : CPO :

$$\begin{cases} z^\alpha \left(\frac{n_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} &= \mu_t \\ z (1-\alpha) \left(\frac{k_t}{n_t}\right)^\alpha &= w_t \end{cases}$$

Calculer

1. la part du revenu du capital $\frac{\mu_t k_t}{y_t}$
2. la part du revenu du travail $\frac{w_t n_t}{y_t}$

Remarque : dans les données, la part du revenu du travail est environ 2/3 mais elle a baissé récemment. Lecture facultative : Karabarbounis L. and B. Neiman (2014) 'The Global Decline of the Labor Share' *QJE*

Modèle néoclassique de croissance

Exercice : définition d'équilibre compétitif

Définir l'équilibre compétitif pour le modèle néoclassique de croissance.

Modèle néoclassique de croissance

Exercice : définition d'équilibre compétitif

Définir l'équilibre compétitif pour le modèle néoclassique de croissance.

Étant donné une dotation initiale a_0 ,

Modèle néoclassique de croissance

Exercice : définition d'équilibre compétitif

Définir l'équilibre compétitif pour le modèle néoclassique de croissance.

Étant donné une dotation initiale a_0 , un équilibre compétitif est une allocation $(c_t, \ell_t, a_{t+1})_{t=0}^{\infty}, (k_t, n_t)_{t=0}^{\infty}$ et un système de prix $(w_t, r_t)_{t=0}^{\infty}$ tels que :

- ▶ $(c_t, \ell_t, a_{t+1})_{t=0}^{\infty}$ résout problème du consommateur étant donnés les prix $(w_t, r_t)_{t=0}^{\infty}$
- ▶ $(k_t, n_t)_{t=0}^{\infty}$ résout problème des firmes étant donné prix $(w_t, r_t)_{t=0}^{\infty}$
- ▶ Marchés sont à l'équilibre à chaque $t = 0, \dots$
 - ▶ travail : $n_t = 1$
 - ▶ actifs financiers : $a_t = k_t$
 - ▶ biens : $c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$

Modèle néoclassique de croissance

Exercice en class : Loi de Walras

Montrer que les conditions d'équilibre sur le marché des biens sont redondantes dans la définition de l'équilibre compétitif.

Modèle néoclassique de croissance

(Facultatif) caractérisation de l'équilibre

- ▶ On a vu que solution du problème du consommateur est caractérisée par :

$$u'(w_t + (1 + r_t) a_t - a_{t+1}) = \\ (1 + r_{t+1}) \beta u'(w_{t+1} + (1 + r_{t+1}) a_{t+1} - a_{t+2})$$

avec deux conditions de limite : a_0 donné et $a_{T+1} = 0$ si horizon fini ou condition de transversalité si horizon infini.

- ▶ Solution du problème de la firme est caractérisée par les CPO :

$$z \alpha \left(\frac{n_t}{k_t} \right)^{1-\alpha} = \mu_t \\ z (1 - \alpha) \left(\frac{k_t}{n_t} \right)^{\alpha} = w_t$$

- ▶ Marchés sont à l'équilibre à chaque $t = 0, \dots$:
 $n_t = 1$ et $a_t = k_t$

Modèle néoclassique de croissance

(Facultatif) caractérisation de l'équilibre

(suite)

- ▶ On substitue les CPO de la firme et les conditions de marchés à l'équilibre dans la suite récurrente d'ordre 2 :

$$u'(z(1-\alpha)k_t^\alpha + (1+z\alpha k_t^{-1+\alpha} - \delta)k_t - k_{t+1}) = \\ (1+z\alpha k_t^{-1+\alpha} - \delta)\beta u'(w_{t+1} + (1+z\alpha k_{t+1}^{-1+\alpha} - \delta)k_{t+1} - k_{t+2})$$

- ▶ C'est une suite récurrente d'ordre 2 avec 2 conditions de limite : $a_0 = k_0$ et la condition de transversalité. Ce système caractérise l'évolution du stock de capital dans un équilibre compétitif.

Modèle néoclassique de croissance

Problème du planificateur

Le planificateur choisit l'allocation des ressources qui maximise le bien-être des consommateurs sous les contraintes de ressources :

$$\max_{0 \leq c_t, 0 \leq k_{t+1}, 0 \leq n_t \leq 1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sous les contraintes :

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = z k_t^\alpha n_t^{1-\alpha}$$

k_0 donné

On peut résoudre pour n_t avant même de formuler un Lagrangien : la solution doit nécessairement avoir n_t aussi grand que possible car le bien-être ne dépend pas directement de n_t et plus n_t est grand plus la production est grande. On conclut : $n_t = 1$.

Modèle néoclassique de croissance

Problème du planificateur

Avec $n_t = 1$ on obtient :

$$\max_{0 \leq c_t, 0 \leq k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sous les contraintes :

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = z k_t^{\alpha}$$

k_0 donné

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (z k_t^{\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t)$$

Modèle néoclassique de croissance

Problème du planificateur

CPO sont

$$\begin{aligned}\beta^t u'(c_t) - \lambda_t &= 0 \\ -\lambda_t + \lambda_{t+1}(z\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)) &= 0\end{aligned}$$

On obtient l'équation d'Euler inter-temporelle :

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(z\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

Modèle néoclassique de croissance

Exercice 8 : allocation d'équilibre via allocation efficiente (Théorème du Bien-Être)

L'économie étudiée est le modèle néoclassique de croissance avec horizon infini et choix d'épargne en capital, comme celle étudiée en classe.

- a) Dériver les conditions d'Euler inter-temporelles. *Indice : dériver les CPO d'un consommateur représentatif puis les combiner.*
- b) Obtenir une suite récurrente d'ordre 2 en k_t, k_{t+1}, k_{t+2} .
- c) Comparer cette suite récurrente à celle obtenue pour la caractérisation de l'équilibre compétitif dans le cours 5. Est-ce la même ?
- d) Quel est le taux d'intérêt réel à l'équilibre ? *Indice : comparer les conditions d'Euler inter-temporelles du problème du planificateur à celles du consommateur.*

Modèle néoclassique de croissance

État stationnaire

À l'état stationnaire, l'équation d'Euler inter-temporelle est :

$$u'(c) = \beta u'(c)(z\alpha(k^{stat})^{\alpha-1} + (1 - \delta))$$

où k^{stat} désigne le capital à l'état stationnaire de l'équilibre.

Règle d'or modifiée du capital :

$$k^{stat} = \left(\frac{z\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{z\alpha}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Exercice en classe : *On a vu que $1 - \alpha$ est la part du travail dans la production d'une firme avec technologie Cobb-Douglas. D'après notre modèle, quel est l'effet sur la règle d'or modifiée du capital. Quel est l'effet de l'impatience des consommateurs sur la règle d'or modifiée du capital ?*

Modèle néoclassique de croissance

État stationnaire

L'état stationnaire k^{stat} de la règle d'or modifiée du capital maximise-t-il le niveau de consommation à l'état stationnaire ?

- ▶ La contrainte de ressource est $c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = zk_t^\alpha$
- ▶ à l'état stationnaire :

$$c = zk^\alpha - \delta k$$

- ▶ le niveau de capital qui maximise la consommation à l'état stationnaire résout :

$$\max_k zk^\alpha - \delta k$$

La CPO donne la **règle d'or du capital**

$$k^{or} = \left(\frac{z}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Modèle néoclassique de croissance

État stationnaire

Le niveau de capital stationnaire à l'équilibre compétitif (qui est efficient) est plus petit que le niveau de capital qui maximise la consommation à l'état stationnaire :

$$k^{stat} = \left(\frac{z \alpha}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \left(\frac{z \alpha}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^{or}$$

Pour un niveau de capital initial donné, il faut accumuler le capital pour arriver à l'état stationnaire. Cette accumulation se fait au détriment de la consommation. Vu que le consommateur valorise plus la consommation aujourd'hui que future ($\rho > 0$), on a $k^{stat} < k^{or}$

Leçon sur la différence entre règle d'or et règle d'or modifiée : pour évaluer le bien-être, il faut prendre en compte la période de transition.

Modèle néoclassique de croissance

Résumé

- ▶ ajout d'*investissement dans capital physique qui sert comme facteur de production* : contrainte de ressource

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = y_t$$

- ▶ Equation d'Euler inter-temporelle

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(z\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1 - \delta))$$

- ▶ Avec production Cobb-Douglas :

- ▶ part du capital = α
- ▶ part du revenu = $1 - \alpha$

- ▶ État stationnaire

- ▶ règle d'or modifiée $\left(\frac{z\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (équilibre efficient)
- ▶ règle d'or $\left(\frac{z\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (maximise consommation pas le bien-être)
- ▶ la période de transition compte ; il ne suffit pas d'étudier l'état stationnaire.

Modèle néoclassique de croissance

Étape 3 de notre méthodologie : Calibration

On va calibrer (étalonner) le modèle néoclassique de croissance : c'est à dire choisir les paramètres du modèle de façon à ce que le modèle reproduise, dans les grandes lignes, certaines valeurs observées dans les données (appelées cibles de calibration).

Quelles cibles de calibration ?

- ▶ notre but est d'utiliser le modèle pour l'étude des cycles conjoncturels
- ▶ cibles de calibration sont les statistiques sur le long termes *et non les cycles*
- ▶ on vérifie que le modèle arrive à reproduire des statistiques relatives aux cycles conjoncturels observées dans les données *sans même que ces statistiques ne soient ciblées*. C'est un test de validation du modèle.

Modèle néoclassique de croissance

Calibration

Fonction d'utilité standard en macro : $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

Liste des paramètres à choisir :

- ▶ Technologiques
 - ▶ α part du revenu du capital dans le PIB
 - ▶ δ taux de dépréciation
 - ▶ z niveau de technologie
- ▶ Préférences
 - ▶ ρ taux d'escompte ($\beta \equiv \frac{1}{1+\rho}$)
 - ▶ γ élasticité de substitution

Nos données sont trimestrielles donc on choisit qu'une période correspond à trois mois.

Modèle néoclassique de croissance

Calibration α

Avec la production Cobb-Douglas :

- ▶ α est la part du revenu du capital dans le PIB
- ▶ $1 - \alpha$ est la part du revenu du travail dans le PIB

Exercice en classe : $f(k, n) = k^\alpha n^{1-\alpha}$, utiliser les CPO du problème de la firme afin de remplacer r dans $r k$.

Deux difficultés pour mesurer α :

1. un entrepreneur fournit du capital et du travail à sa firme mais ne se paye pas nécessairement un salaire
2. loyer imputer pour ceux qui habitent une maison qu'ils possèdent.

Dans les données $\alpha \approx \frac{1}{3}$

Modèle néoclassique de croissance

Calibration δ

À l'état stationnaire, l'investissement compense pour la dépréciation du capital :

$$\text{investissement} = \delta k_{es}$$

On a donc :

$$\delta = \frac{\frac{\text{investissement}}{y}}{\frac{k}{y}}$$

Aux états unis :

► $\frac{\text{investissement}}{y} \approx 25\%$

► $\frac{k}{y_{\text{annuel}}} \approx 2.6$ avec des données annuelles.

Le PIB est un flux donc le PIB trimestriel est 1/4 du PIB annuel. Le capital est un stock donc la fréquence d'observations n'influence pas sa mesure.

$$\frac{k}{y_{\text{trimestriel}}} = \frac{k}{\frac{1}{4}y_{\text{annuel}}} \approx 4 * 2.6 \text{ en données trimestrielles}$$

On en déduit : $\delta \approx \frac{0.25}{4*2.6}$.

Modèle néoclassique de croissance

Calibration z

Le niveau de technologie peut être normalisé à 1. Pourquoi ?

Modèle néoclassique de croissance

Calibration ρ

On a vu qu'à l'état stationnaire : $\rho = r$.

Difficultés pour mesurer r : il y a plusieurs taux d'intérêts réels.
Est-ce le taux d'intérêt réel sur la dette public (environ 1%) ou sur le rendement du capital (environ 7%) ?

Il est courant de choisir $r \approx 4\%$ par année soit environ 1% par trimestre.

On en déduit : $r = \rho \approx 0.01$

Modèle néoclassique de croissance

Calibration γ

Pour l'élasticité de substitution, il est courant de commencer avec 1 et de varier les valeurs pour voir si les résultats sont robustes au choix de γ .

Modèle néoclassique de croissance

Résumé : calibration

Liste des paramètres à choisir :

► Technologiques

► $\alpha \approx \frac{1}{3}$ part du revenu du travail $\approx 2/3$

► $\delta \approx 2.42$ taux de dépréciation $\frac{\text{investissement}}{\frac{y}{\frac{k}{y}}}$

► $z \equiv 1$ niveau de technologie normalisé

► Préférences

► $\rho \approx 1\%$ taux d'escompte à l'état stationnaire ($\rho = r$)

► $\gamma = 1$ élasticité de substitution

Remarque facultative : on aurait dû modéliser

► croissance de la population $N_{t+1} \approx (1 + 0.27\%)N_t$ (taux annuel 1.1%)

► croissance du PIB par habitant $Y_{t+1} \approx (1 + 0.55\%)Y_t$ (taux annuel 2.2%)

On aurait trouver : $\delta = 1.6\%$ et $\rho = 0.2\%$. (pour plus de détails, voir Krueger (2007) chapitre 7 et 8.)