ECN 4050 Macroéconomie honor

Cours 3: modèle néoclassique statique; équilibre et efficacité

Guillaume Sublet

Université de Montréal

Cours 2 : Récapitulation

En quoi consiste la première étape de notre méthodologie ?

- Quand est-il préférable d'étudier les données en logarithme ?

- Quel est notre objectif lorsqu'on filtre les données ?

- Quels sont les avantages du filtre de Hodrick-Prescott par rapport à la tendance linéaire ?

Étape 2 : formulation d'un modèle macroéconomique

Analyse théorique des cycles conjoncturels réels

Deux approches :

- néo-classique : dans quelle mesure un modèle d'équilibre compétitif sans frictions reproduit les fluctuations des cycles conjoncturels.
- néo-Keynesienne : quelle politique économique adopter pour remédier aux différentes sources d'inefficacités des marchés présentes dans les modèles néo-Keynesiens

Fondements de la théorie néoclassique utiles pour les deux approches. On commence avec la théorie néoclassique

Plan du cours 3

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

- Économie avec production d'un seul bien
- Économie statique : 1 période seulement
- Tous les consommateurs sont identiques (« agent repésentatif »)
- Toutes les firmes sont identiques (« agent repésentatif »)
- Hypothèse simplificatrice d'agents représentatifs

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Description du modèle :

a) contexte de décision des consommateurs (préferences, contraintes budgétaires, information)

b) contexte de décision des firmes (technologie de production, structure des marchés, information)

c) notion d'équilibre : façon dont les firmes et consommateurs interagissent

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

a) Consommateurs

- N consommateurs identiques
- préférences pour consommation et loisirs : $u(c, \ell)$
- propriétés de fonction d'utilité
  - u strictement croissante $u_1, u_2 > 0$ (non satiété)
  - u strictement concave $u_{11}, u_{22} < 0$ (moyenne préférée aux extrêmes) et $u_{12} > 0$ (taux marginal de subsititution croissant en c/ℓ)
  - c, ℓ sont des biens normaux (demande augmente avec revenu)
  - u est différentiable deux fois, et satisfait les conditions d'Inada $\lim_{c \to 0} u_1(c, \ell) = +\infty$, $\lim_{\ell \to 0} u_2(c, \ell) = +\infty$ for $\ell, c > 0$

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

b) Firmes

- M firmes identiques (entrée libre donc M est une variable endogène)
- technologie : $y = z\ f(k, n)$ où y désigne la production, z la productivité totale des facteurs, k le capital, et n le travail
- propriétés de fonction de production
  - f strictement croissante $f_1, f_2 > 0$
  - f strictement concave $f_{11}, f_{22} < 0$ et $f_{12} > 0$ facteurs de production sont complémentaires
  - f a des rendements d'échelle constants, c'est à dire, homogène de degré 1 :
  $$f(ak, an) = af(k, n)$$
  - f est différentiable deux fois, et satisfait les conditions d'Inada $\lim_{k\to 0} f_1(c, n) = +\infty$, $\lim_{n\to 0} f_2(k, n) = +\infty$, $\lim_{k\to\infty} f_1(c, n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} f_2(k, n) = 0$ for $k, n > 0$, $f(k, 0) = f(0, n) = 0$ pour tout $k, n > 0$

Institutions

- Consommateurs sont propriétaires des facteurs de production capital et travail
- Consommateurs sont propriétaires des firmes (chaque consommateur possède une fraction M/N firmes)
- Chaque consommateur à une dotation initiale de k_0/N unités de capital
- Trois marchés :
  - service du capital
  - service du travail
  - bien final
- Marchés concurrentiels : les agents sont preneurs de prix (ils considèrent les prix comme indépendants de leurs choix)
- w est le salaire réel, r est le loyer réel du capital
- Prix du bien final normalisé à 1 (indétermination nominale, ce qu'on discutera plus tard – exercice 7 de la Série 1)
- Marchés sont à l'équilibre : offre = demande

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Problème de chaque firme

$$\max_{k,n} \; z \; f(k,n) - r \; k - w \; n$$

Le choix de capital et de demande de travail satisfait les Conditions de Premier Ordre (CPO) :

$$z \; f_1(k,n) = r$$
$$z \; f_2(k,n) = w$$

Les profits :

$$\pi = z \; f(k,n) - r \; k - w \; n$$

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Exercice en classe : technologie Cobb-Douglas

Étant donné w et r, résoudre le problème d'une firme avec fonction de production $f(k,n) = k^{\alpha}\ n^{1-\alpha}$.

Solution : CPO :

$$\begin{cases} z\ \alpha \left(\frac{n}{k}\right)^{1-\alpha} & = r \\ z\ (1-\alpha)\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} & = w \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{n}{k} = \frac{r}{w}\ \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Exercice : Caracterisez les profits de cette firme

Solution :

$$\pi = zk^{\alpha} n^{1-\alpha} - rk - wn$$

après substitution des CPO à la place des prix, on obtient :

$$\pi = zk^{\alpha} n^{1-\alpha} - z\ \alpha \left(\frac{n}{k}\right)^{1-\alpha}\ k - z\ (1-\alpha)\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}\ n = 0\ .$$

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Rendements d'échelle constants et profits

Proposition : Les profits d'une firme qui optimise et dont la technologie a des rendements d'échelle constants sont nuls.

Preuve : (facultatif) Vu que la fonction de production a des rendements d'échelle constants,

$$f(k,n) = k\ f_1(k,n) + n\ f_2(k,n)$$
$$z\ f(k,n) = k\ z\ f_1(k,n) + n\ z\ f_2(k,n)$$

et, vu que la firme optimise : $z\ f(k,n) = k\ r + n\ w$.
Il s'ensuit que les profits sont nuls : les revenus réels du capital et du travail sont égaux à la production. □

Cette proposition généralise ce qu'on a trouvé pour la fonction Cobb-Douglas à toutes les fonctions ayant des rendements d'échelle constants.

Proposition : Lorsque la technologie a des rendements d'échelle constants, le nombre de firmes M est indéterminé.

Preuve : (facultatif) On montre que pour des prix w, r donnés, il y a une équivalence entre M firmes qui produisent y_i en utilisant (k_i, n_i) et 1 firme agrégée qui produit My en utilisant $(M\ k_i, M\ n_i)$. Supposons qu'il y ait M firmes. Chaque firme produit y_i unités en utilisant k_i et n_i unités de capital et de travail.

$$y_i = z\ f(k_i, n_i)$$

Donc, on a :

$$My_i = Mzf(k_i, n_i) = zf(Mk_i, Mn_i)$$

où la dernière égalité utilise le fait que la firme a des rendements d'échelles constants. On vient de montrer que M firmes produisent y_i en utilisant (k_i, n_i) si et seulement si 1 firme produit My en utilisant $(M\ k_i, M\ n_i)$.

...

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Rendements d'échelle constants et indétermination du nombre de firmes

Proposition : Lorsque la technologie a des rendements d'échelle constants, le nombre de firmes M est indéterminé.

Preuve (suite) : (facultatif) On vient de montrer que M firmes produisent y_i en utilisant (k_i, n_i) si et seulement si 1 firme produit My_i en utilisant $(M\ k_i, M\ n_i)$. De plus on montre que ces M firmes optimisent si et seulement si la firme agrégée optimise aussi.
Chacune des M firmes optimise si et seulement si les CPO sont satisfaites : $r = zf_1(k_i, n_i)$ and $w = zf_2(k_i, n_i)$.
On peut montrer que pour une fonction f qui a des rendements d'échelle constants, $zf_1(k_i, n_i) = zf_1(Mk_i, Mn_i)$ et $zf_2(k_i, n_i) = zf_2(Mk_i, Mn_i)$. On a donc :

$$r = zf_1(k_i, n_i) = zf_1(Mk_i, Mn_i)$$
$$w = zf_2(k_i, n_i) = zf_2(Mk_i, Mn_i)$$

et la firme agrégée optimise donc aussi. □

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Exercice en classe : illustration de la proposition sur l'indétermination du nombres de firmes avec rendements d'échelle constants

Supposez que $f(k,n) = k^{\alpha}\ n^{1-\alpha}$*, avec* $0 < \alpha < 1$ *(et* $z = 1$*).*

1. *Montrer que* f *a des rendements d'échelle constants*

2. *Trouver la formule pour* $f_1(k_i, n_i)$

3. *Montrer que* $r = f_1(k_i, n_i)$ *si et seulement si* $r = f_1(Mk_i, Mn_i)$ *pour n'importe quel* $M > 0$*.*

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Rendements d'échelle constants et indétermination du nombre de firmes, suite

En présence de rendements d'échelle constants et de firmes preneuses de prix, on vient de montrer l'équivalence entre M firmes produisant chacune y unités à partir de k, n unités de facteurs de production et 1 firme produisant My unités à partir de Mk, Mn unités de facteurs de production.

Par souci de simplicité, on normalise le nombre de firmes à $M = 1$.

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Récapitulation du côté « offre »du modèle

- Problème de chaque firme est de maximiser ses profits : (k, n) résout le problème de la firme étant donné les prix (w, r) si et seulement si les Conditions de Premier Ordre sont satisfaites :
  - salaire = Produit Marginal du Travail

$$w = z\ f_2(k, n)$$

  - loyer du capital = Produit Marginal du Capital

$$r = z\ f_1(k, n)$$

- Deux résultats pour firmes à rendements d'échelle constants :
  1. profits purs sont nuls (c'est utile car ça simplifie la contrainte budgétaire des ménages)
  2. le nombre de firmes M est indéterminé (c'est utile car ça nous permet de normaliser le nombre de firmes à 1 sans aucune perte sur la portée de l'analyse)

Modèle néoclassique : version statique

Problème de chaque consommateur

$$\max_{c,\ell,k_s} u(c,\ell)$$

sous les contraintes :

$$c \leq w(1-\ell) + r\ k_s + \pi \frac{M}{N}$$

$$0 \leq k_s \leq \frac{k_0}{N}$$

$$0 \leq \ell \leq 1$$

$$c \geq 0$$

ou π désigne les profits des firmes, k_0 désigne le stock de capital initial, M désigne le nombre de firmes et w, et r désignent le salaire horaire et le loyer du capital.

Début de résolution du problème du consommateur :

- Les profits sont nuls si la firme optimise et les rendements d'échelle sont constants : $\pi = 0$
- On peut normaliser $M = 1$ (indétermination du nombre de firmes)
- Les conditions d'Inada garantissent que toute solution satisfait : $c > 0$, $\ell > 0$
- Si $r > 0$, alors $k_s = \frac{k_0}{N}$ vu que le capital ne raporte rien si il n'est pas loué mais rapporte $r > 0$ si il est loué.
- La contrainte budgétaire est satisfaite avec égalité
- Supposons que $\ell \leq 1$ est satisfaite

Modèle néoclassique : version statique

Problème de chaque consommateur

Nous avons partiellement résolu le probème du consommateur, il nous reste :

$$\max_{c,\ell} \; u(c,\ell)$$

sous la contrainte :

$$c = w(1-\ell) + r\,\frac{k_0}{N}$$

Modèle néoclassique : version statique

Problème de chaque consommateur

Optimisation sous contrainte du consommateur :

- Lagrangien avec multiplicateur de Lagrange μ

$$\mathcal{L} = u(c, l) + \mu \left[w(1-\ell) + r\ \frac{k_0}{N} - c \right]$$

- CPO (nécessaires et suffisantes)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = u_1(c, \ell) - \mu = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} = u_2(c, \ell) - \mu\ w = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = w(1-\ell) + r\ \frac{k_0}{N} - c = 0$$

Caractérisation du choix du consommateur :
Étant donné les prix (w, r), le choix de consommation et loisir (c, ℓ) résout le problème du consommateur si et seulement si :

$$\underbrace{\frac{u_2(c,\ell)}{u_1(c,\ell)}}_{TMS_{c,\ell}} = w$$

$$w(1-\ell) + r\ \frac{k_0}{N} = c$$

Le choix du consommateur égalise le taux marginal de substitution au prix relatif w/p, mais on a déjà normalisé $p = 1$.

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Exercice en classe : préférence isoélastique

Étant donné w et r, résoudre le problème d'un consommateur dont la fonction d'utilité est $u(c,\ell) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} + \ell$ si $\gamma > 0$ et $\gamma \neq 1$. Supposer aussi que $k_0 = 0$.

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Exercice en classe : préférence isoélastique

Étant donné w et r, résoudre le problème d'un consommateur dont la fonction d'utilité est $u(c,\ell) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} + \ell$ si $\gamma > 0$ et $\gamma \neq 1$. Supposer aussi que $k_0 = 0$.

Solution : CPO :

$$\begin{cases} c^{\gamma} & = w \\ w\ (1-\ell) + r\ \frac{k_0}{N} & = c \end{cases}$$

Avec $k_0 = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} c & = w^{\frac{1}{\gamma}} \\ (1-\ell) & = w^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{cases}$$

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Étant donné w et r, résoudre le problème d'un consommateur dont la fonction d'utilité est $u(c,\ell) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} + \ell$ si $\gamma > 0$ et $\gamma \neq 1$. Supposer aussi que $k_0 = 0$.

Solution : CPO :

$$\begin{cases} c^{\gamma} &= w \\ w\,(1-\ell) + r\,\frac{k_0}{N} &= c \end{cases}$$

Avec $k_0 = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} c &= w^{\frac{1}{\gamma}} \\ (1-\ell) &= w^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{cases}$$

Quel est l'effet du salaire sur l'offre de travail ?

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Exercice en classe : préférence isoélastique

Étant donné w et r, résoudre le problème d'un consommateur dont la fonction d'utilité est $u(c,\ell) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} + \ell$ si $\gamma > 0$ et $\gamma \neq 1$. Supposer aussi que $k_0 = 0$.

Solution : CPO :

$$\begin{cases} c^{\gamma} & = w \\ w\ (1-\ell) + r\ \frac{k_0}{N} & = c \end{cases}$$

Avec $k_0 = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} c & = w^{\frac{1}{\gamma}} \\ (1-\ell) & = w^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{cases}$$

Quel est l'effet du salaire sur l'offre de travail ?

Solution : Il y a l'effet de revenu (respectivement de substitution) qui pousse le consommateur à moins (respectivement plus) travailler. L'effet net de ces deux forces dépend de γ. Pour $\gamma > 1$, l'offre de travail dépend négativement du salaire : l'effet de revenu domine. Pour $\gamma < 1$, c'est l'inverse.

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Jusqu'à présent on a :

- décrit l'environnement économique
- décrit le problème d'une firme étant donné les prix (problème micro-économique)
- (en passant, on a dériver quelques propriétés de la solution du problème si les rendements d'échelles sont constants : profits nuls et indtermination du nombre de firmes)
- charactérisé la solution du problème de la firme (CPO)
- décrit le problème d'un consommateur étant donné les prix (problème micro-économique)
- charactérisé la solution du problème du consommateur (CPO)

On est maintenant prêt à mettre tout ces problèmes microéconomiques ensemble en définissant l'équilibre de marchés concurrentiels. On bâtit notre modèle macroéconomique sur des fondements microéconomiques (cela nous donne un modèle structurel).

Definition :
Un *équilibre compétitif* est une allocation pour la firme représentative (y, k, n), des profits π, une allocation pour chacun des N consommateurs (c, ℓ), et un system de prix (w, r) tels que :

- chaque consommateur optimise étant donnés les prix
- la firme représentative optimise étant donnés les prix
- les marchés sont à l'équilibre
  - $N(1 - \ell) = n$
  - $k_0 = k$
  - $y = Nc$

Modèle néoclassique : version statique simplifiée

Équilibre

- Qu'en est-il des profits ?
- Les prix sont ils endogènes ?
- Les consommateurs prennent-ils en compte la production y dans leurs décisions ?

Important :

- Les prix sont pris comme donnés [1] (i.e., exogènes) par chaque consommateur et chaque firme. En effet, la demande de biens d'un seul consommateur, et l'offre de biens d'une seule firme, ont un effet négligeable sur la demande totale.
- Les prix sont des variables endogènes de l'équilibre. En effet ce sont les prix qui garantissent l'équilibre sur les différents marchés en s'assurant que offre est égale à demande.

1. Hayek (1945) "The Use of Knowledge in Society" *AER* souligne que c'est cette économie de l'information (prendre les prix comme étant donnés et les prix résument l'information dont les différents acteurs économiques ont besoin) qui différencie la mise en œuvre d'une répartition des ressources par les marchés compétitifs d'une planification centrale.

Modèle néoclassique : version statique

Caractérisation de l'équilibre

On sait que $\pi = 0$ car les rendements d'échelle sont constants. Il rest donc à résoudre pour (y, k, n, c, ℓ) et (w, r) tels que :

- chaque consommateur optimise étant donnés les prix, c'est à dire, étant donné (w, r, c, ℓ, k) doivent satisfaire :

$$\frac{u_2(c, \ell)}{u_1(c, \ell)} = w \qquad \text{(CPO c 1)}$$

$$w(1-\ell) + r\ \frac{k}{N} = c \qquad \text{(CPO c 2)}$$

- la firme représentative optimise étant donnés les prix, c'est à dire, étant donné (w, r, k, n) doivent satisfaire :

$$z\ f_1(k, n) = r \qquad \text{(CPO f 1)}$$

$$z\ f_2(k, n) = w \qquad \text{(CPO f 2)}$$

- les marchés sont à l'équilibre
  - $N(1-\ell) = n$
  - $k_0 = k$
  - $y = Nc$

Modèle néoclassique : version statique

Caractérisation de l'équilibre (suite)

La caractérisation de la solution du problème des consommateurs et de la firme nous permettent de caractériser l'équilibre. Nous savons déjà que $k = N \cdot k_s = N \cdot \frac{k_0}{N} = k_0$ et que $\pi = 0$. Pour le reste :

Caractérisation de l'équilibre compétitif :
(c, ℓ, n) et un système de prix (w, r) sont les valeurs à l'équilibre compétitif si et seulement si :

$$\frac{u_2(c,\ell)}{u_1(c,\ell)} = w \qquad \text{(CPO c 1)}$$

$$w(1-\ell) + r\ \frac{k_0}{N} = c \qquad \text{(CPO c 2)}$$

$$z\ f_1(k_0, n) = r \qquad \text{(CPO f 1)}$$

$$z\ f_2(k_0, n) = w \qquad \text{(CPO f 2)}$$

$$N(1-\ell) = n \qquad \text{(Équilibre marché du travail)}$$

Modèle néoclassique : version statique

Caractérisation de l'équilibre suite

- L'équilibre sur le marché des biens ($z\ f(k,n) = N\ c$) découle du système d'équations ci-dessus (c'est la Loi de Walras).

- N détermine la taille de l'économie (valeurs des variables aggrégées), mais pas les variables per capita qui dépendent seulement du stock de capital per capita initial soit k_0/N. Hypothèse simplificatrice : $N = 1$.

Modèle néoclassique : version statique

Exercice 2. A.

Les consommateurs ont des preferences representées par la fonction d'utilité $u(c, \ell) = \frac{c^{1-\gamma-1}}{1-\gamma} + \ell$ *si* $\gamma > 0$ *et* $\gamma \neq 1$. *La technologie des firmes est Cobb-Douglas* $f(k, n) = k^{\alpha}\ n^{1-\alpha}$ *avec* $0 < \alpha < 1$ *et la productivité totale des facteurs est* $z = 1$. *Caractérisez l'équilibre concurrentiel de cette économie (allocation et prix).*

Indice : résoudre pour les variables endogènes (c, n, ℓ, w, r) en fonction d'éléments exogènes z, k_0, α, γ.

Modèle néoclassique : version statique

Exercice 2. B.

Statique comparative : quel est l'effet d'un choc technologique sur c, n, ℓ, w, r ?

Indices : calculez les dérivées partielles vis-à-vis de z. Vous trouverez que la consommation, les salaires et le loyer du capital augmentent si le niveau de technologie augmente. Pour l'offre de travail, cela dépend. Il vous faut trouver les formules.

Propriété normative du modèle

Rappels

- *Definition :* les marchés sont dit *complets* si chaque bien et service pertinent pour les consommateurs et la technologie des firmes peut être acheté et vendu à un prix unique dans un marché concurrentiel. Cela exclut l'usage de pouvoir de monopole, les externalités, l'absence de marché pour les services d'assurance contre le risque.
- *Premier théorème de l'économie du bien-être :* l'équilibre concurrentiel d'une économie dont les marchés sont complets est efficient.
- *Deuxième théorème de l'économie du bien-être :* Toute allocation efficiente peut être le résultat d'un équilibre concurrentiel dans une économie avec marchés complets (l'allocation initiale des resources dépend de l'allocation efficiente choisie).

- Ces deux théorèmes prouvent l'équivalence entre allocations d'équilibre concurrentiels et allocations efficientes.
- Nous allons utiliser cette équivalence pour calculer l'équilibre concurrentiels de l'économie étudiée. On procède en deux étapes.
- Rappel : l'allocation efficiente est le résultat de l'optimisation du bien-être du consommateur sous la contrainte de ressources.
- Étape 1) calcul de l'allocation efficiente :
  Contrainte de resource impose $k = k_0$ et $n = (1 - \ell)$, donc seulement c, ℓ à déterminer.

$$\max_{c,\ell} \; u(c, \ell)$$

$$\text{sous la contrainte} \quad c = z \; f(k_0, 1 - \ell)$$

Modèle néoclassique : version statique

Allocation efficiente

Le planificateur résout :

$$\max_{\ell} \; u(z\ f(k_0, 1-\ell), \ell)$$

- Les Conditions de Premier Ordre CPO du planificateur sont :

$$\frac{u_2(c,\ell)}{u_1(c,\ell)} = z\ f_2(k_0, 1-\ell)$$
$$c = z\ f(k_0, 1-\ell)$$

- En combinant les equations qui caractérisent un équilibre, on obtient les mêmes conditions (pas surprenant étant donné les théorèmes de l'économie du bien-être).
- Étape 2) calcul des prix à l'équilibre à partir de l'allocation efficiente.

$$w = z\ f_2(k_0, 1-\ell)$$
$$r = z\ f_1(k_0, 1-\ell)$$

Modèle néoclassique : version statique

Exercice 3. A.

Étape 1) Calcul de l'allocation efficiente. Les consommateurs ont des preferences representées par la fonction d'utilité $u(c, \ell) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} + \ell$ *si* $\gamma > 0$ *et* $\gamma \neq 1$*. La technologie des firmes est Cobb-Douglas* $f(k, n) = k^{\alpha}\ n^{1-\alpha}$ *avec* $0 < \alpha < 1$ *et la productivité totale des facteurs est* $z = 1$*. Caractérisez l'allocation efficiente de cette économie.*

Modèle néoclassique : version statique

Exercice 3. B.

Étape 2) Calculer les prix d'équilibre à partir de l'allocation efficiente calculée dans la partie A de l'exercice.

L'allocation d'équilibre et l'allocation efficiente sont elles les mêmes ? Laquelle des deux méthodes est la plus efficace pour calculer l'équilibre ?