ECN 4050 Macroéconomie honor

Cours 6: modèle néoclassique de croissance et calibration (troisième étape de la méthodologie)

Guillaume Sublet

Université de Montréal

Modèle néoclassique de croissance

- Extension du modèle dynamique du cours 5 : ajout d'*investissement dans capital physique qui sert comme facteur de production*
- Choix dynamique, y compris pour le planificateur.
- En général solution analytique pas disponible. Recours aux méthodes numériques.

Modèle néoclassique de croissance

Environnement

- Préférences du consommateur :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ u(c_t)$$

Loisir ne procure pas d'utilité (simplification)
Exercice en classe *Quelle est l'offre de travail ?*

Modèle néoclassique de croissance

Environnement

- Préférences du consommateur :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \; u(c_t)$$

  Loisir ne procure pas d'utilité (simplification)
  Exercice en classe *Quelle est l'offre de travail ? Solution :* offre de travail inélastique $\ell_t = 0$.

- Fonction de production

$$y_t = f(k_t, n_t)$$

- Loi de dynamique du capital :

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + \text{investissement}_t$$

  où $0 \leq \delta \leq 1$ désigne le taux de dépréciation

- Contrainte de ressources :

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t = y_t$$

Problème du consommateur inchangé sauf :

- changement d'indice sur la choix d'épargne sans auncune conséquence. C'est juste pour adopter une notation en ligne avec le reste du matériel pédagogique.
- l'épargne du consommateur n'est pas en dette publique mais est investie dans du capital dont le taux de rendement réel est r_t.

$$\max_{(c_t \geq 0,\ a_{t+1})_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sous les contraintes :

$$c_t + a_{t+1} = w_t + (1 + r_t)\ a_t \quad \text{pour} \quad t = 0, 1, \ldots$$

$(a_t)_{t=0}^{\infty}$ est un séquence bornée

Exercice en classe : *Calculer les CPO inter-temporelles. Le consommateur fait-il un choix intra-temporel ?*

Exercice en classe : *Calculer les CPO inter-temporelles. Le consommateur fait-il un choix intra-temporel ?*

Solution :

CPO (condition Euler) inter-temporelle

$$u'(c_t) = (1 + r_{t+1})\ \beta\ u'(c_{t+1})$$

Remarque facultative :
La solution du problème dynamique du consommateur est une suite récurrente d'ordre 2 en épargne a_t

$$u'(w_t + (1 + r_t)\ a_t - a_{t+1}) = (1 + r_{t+1})\ \beta\ u'(w_{t+1} + (1 + r_{t+1})\ a_{t+1} - a_{t+2})$$

Deux conditions de limite : a_0 donné et $a_{T+1} = 0$ si horizon fini ou condition de transversalité si horizon infini.

$$\max_{k_t, n_t} \; z_t \; f(k_t, n_t) - \mu_t \; k_t - w_t \; n_t$$

Le choix de capital et de demande de travail satisfait les Conditions de Premier Ordre (CPO) :

$$z_t \; f_1(k_t, n_t) = \mu_t$$
$$z_t \; f_2(k_t, n_t) = w_t$$

Remarques :

- μ_t désigne le loyer du capital qui est égal au produit marginal du capital
- $r_t = \mu_t - \delta$: le taux d'intérêt réel du capital est le loyer du capital net de la dépréciation

Modèle néoclassique

Exercice en classe : technologie Cobb-Douglas

Étant donné w_t et μ_t, résoudre le problème d'une firme avec fonction de production $f(k, n) = z\ k^{\alpha}\ n^{1-\alpha}$.

Solution : CPO :

$$\begin{cases} z\ \alpha \left(\frac{n_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} & = \mu_t \\ z\ (1-\alpha) \left(\frac{k_t}{n_t}\right)^{\alpha} & = w_t \end{cases}$$

Calculer

1. *la part du revenu du capital* $\frac{\mu_t k_t}{y_t}$
2. *la part du revenu du travail* $\frac{w_t n_t}{y_t}$

Remarque : dans les données, la part du revenu du travail est environ 2/3 mais elle a baissé récemment. Lecture facultative : Karabarbounis L. and B. Neiman (2014) 'The Global Decline of the Labor Share' *QJE*

Définir l'équilibre compétitif pour le modèle néoclassique de croissance.

Définir l'équilibre compétitif pour le modèle néoclassique de croissance.

Étant donné une dotation initiale a_0,

Modèle néoclassique de croissance

Exercice : définition d'équilibre compétitif

Définir l'équilibre compétitif pour le modèle néoclassique de croissance.

Étant donné une dotation initiale a_0, un équilibre compétitif est une allocation $(c_t, \ell_t, a_{t+1})_{t=0}^{\infty}, (k_t, n_t)_{t=0}^{\infty}$ et un système de prix $(w_t, r_t)_{t=0}^{\infty}$ tels que :

- $(c_t, \ell_t, a_{t+1})_{t=0}^{\infty}$ résout problème du consommateur étant donnés les prix $(w_t, r_t)_{t=0}^{\infty}$
- $(k_t, n_t)_{t=0}^{\infty}$ résout problème des firmes étant donné prix $(w_t, r_t)_{t=0}^{\infty}$
- Marchés sont à l'équilibre à chaque $t = 0, \dots$
    - travail : $n_t = 1 - \ell_t = 1$
    - actifs financiers : $a_t = k_t$
    - biens : $c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = z_t\ k_t^{\alpha}\ n_t^{1-\alpha}$

Montrer que les conditions d'équilibre sur le marche des biens sont redondantes dans la définition de l'équilibre compétitif.

Modèle néoclassique de croissance

(Facultatif) caractérisation de l'équilibre

- On a vu que solution du problème du consommateur est caractérisée par :

$$u'(w_t + (1+r_t)\ a_t - a_{t+1}) = \\ (1+r_{t+1})\ \beta u'(w_{t+1} + (1+r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2})$$

  avec deux conditions de limite : a_0 donné et $a_{T+1} = 0$ si horizon fini ou condition de transversalité si horizon infini.
- Solution du problème de la firme est caractérisée par les CPO :

$$z\ \alpha \left(\frac{n_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} = \mu_t$$

$$z\ (1-\alpha) \left(\frac{k_t}{n_t}\right)^{\alpha} = w_t$$

- Marchés sont à l'équilibre à chaque $t = 0, \ldots$:
  $n_t = 1$ et $a_t = k_t$

(suite)

- On substitut les CPO de la firme et les conditions de marchés à l'èquilibre dans la suite récurrente d'ordre 2 :

$$u'(z\ (1-\alpha)k_t^{\alpha} + (1 + z\ \alpha k_t^{-1+\alpha} - \delta)\ k_t - k_{t+1}) =$$
$$(1 + z\ \alpha k_{t+1}^{-1+\alpha} - \delta)\ \beta\ u'(z\ (1-\alpha)\,(k_{t+1})^{\alpha} +$$
$$(1 + z\ \alpha k_{t+1}^{-1+\alpha} - \delta)\ k_{t+1} - k_{t+2})$$

- C'est une suite récurrente d'ordre 2 avec 2 conditions de limite : $a_0 = k_0$ et la condition de transversalité. Ce système caracérise l'évolution du stock de capital dans un équilibre compétitif.

Le planificateur choisit l'allocation des ressources qui maximise le bien-être des consommateurs sous les contraintes de ressources :

$$\max_{0 \leq c_t,\ 0 \leq k_{t+1},\ 0 \leq n_t \leq 1} \ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ u(c_t)$$

sous les contraintes :

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = z \ k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$$

$$k_0 \text{ donné}$$

On peut résoudre pour n_t avant même de formuler un Lagrangien : la solution doit nécessairement avoir n_t aussi grand que possible car le bien-être ne dépend pas directement de n_t et plus n_t est grand plus la production est grande. On conclut : $n_t = 1$.

Avec $n_t = 1$ on obtient :

$$\max_{0 \leq c_t,\ 0 \leq k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ u(c_t)$$

sous les contraintes :

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = z \ k_t^{\alpha}$$

k_0 donné

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ u(c_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (z \ k_t^{\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)$$

CPO sont

$$\beta^t \; u'(c_t) - \lambda_t = 0$$
$$-\lambda_t + \lambda_{t+1}(z\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)) = 0$$

On obtient l'équation d'Euler inter-temporelle :

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(z\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

L'économie étudiée est le modèle néoclassique de croissance avec horizon infini et choix d'épargne en capital, comme celle étudiée en classe.

a) Dériver les conditions d'Euler inter-temporelles. *Indice : dériver les CPO d'un consommateur représentatif puis les combiner.*

b) Obtenir une suite récurrente d'ordre 2 en k_t, k_{t+1}, k_{t+2}.

c) Comparer cette suite récurrente à celle obtenue pour la caractérisation de l'équilibre compétitif dans le cours 6. Est-ce la même ?

d) Quel est le taux d'intérêt réel à l'équilibre ? *Indice : comparer les conditions d'Euler inter-temporelles du problème du planificateur à celles du consommateur.*

Modèle néoclassique de croissance

État stationnaire

À l'état stationnaire ($c_{t+1} = c_t = c^{stat}$, $k_{t+1} = k_t = k^{stat}$), l'équation d'Euler inter-temporelle est :

$$u'(c^{stat}) = \beta u'(c^{stat})(z\alpha(k^{stat})^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

où k^{stat} désigne le capital à l'état stationnaire de l'équilibre.

Règle d'or modifiée du capital :

$$k^{stat} = \left(\frac{z\ \alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{z\ \alpha}{\rho + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Exercice en classe : *On a vu que $1-\alpha$ est la part du travail dans la production d'une firme avec technologie Cobb-Douglas. D'après notre modèle, quel est l'effet sur la règle d'or modifiée du capital. Quel est l'effet de l'impatience des consommateurs sur la règle d'or modifiée du capital ?*

Modèle néoclassique de croissance

État stationnaire

L'état stationnaire k^{stat} de la règle d'or modifiée du capital maximise-t-il le niveau de consommation à l'état stationnaire ?

- La contrainte de ressource est $c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = zk_t^\alpha$
- à l'état stationnaire :

$$c = zk^\alpha - \delta k$$

- le niveau de capital qui maximise la consommation à l'état stationnaire résout :

$$\max_k \; zk^\alpha - \delta k$$

La CPO donne la **règle d'or du capital**

$$k^{or} = \left(\frac{z\ \alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Modèle néoclassique de croissance

État stationnaire

Le niveau de capital stationnaire à l'équilibre compétitif (qui est efficient) est plus petit que le niveau de capital qui maximise la consommation à l'état stationnaire :

$$k^{stat} = \left(\frac{z\ \alpha}{\rho + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < \left(\frac{z\ \alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^{or}$$

Pour un niveau de capital initial donné, il faut accumuler le capital pour arriver à l'état stationnaire. Cette accumulation se fait au détriment de la consommation. Vu que le consommateur valorise plus la consommation aujourd'hui que future ($\rho > 0$), on a $k^{stat} < k^{or}$

Leçon sur la différence entre règle d'or et règle d'or modifiée : pour évaluer le bien-être, il faut prendre en compte la période de transition.

Modèle néoclassique de croissance

Résumé

- ajout d'*investissement dans capital physique qui sert comme facteur de production* : contrainte de ressource

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = y_t$$

- Equation d'Euler inter-temporelle

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(z\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta))$$

- Avec production Cobb-Douglas :
  - part du capital $= \alpha$
  - part du revenu $= 1-\alpha$
- État stationnaire
  - règle d'or modifiée $\left(\frac{z\ \alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (équilibre efficient)
  - règle d'or $\left(\frac{z\ \alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (maximise consommation pas le bien-être)
  - la période de transition compte ; il ne suffit pas d'étudier l'état stationnaire.

Modèle néoclassique de croissance

Étape 3 de notre méthodologie : Calibration

On va calibrer (étalonner) le modèle néoclassique de croissance : c'est à dire choisir les paramètres du modèle de façon à ce que le modèle reproduise, dans les grandes lignes, certaines valeurs observées dans les données (appelées cibles de calibration).

Quelles cibles de calibration ?

- notre but est d'utiliser le modèle pour l'étude des cycles conjoncturels
- cibles de calibration sont les statistiques sur le long termes *et non les cycles*
- on vérifie que le modèle arrive à reproduire des statisiques relatives aux cycles conjoncturels observées dans les données *sans même que ces statistiques ne soient ciblées*. C'est un test de validation du modèle.

Fonction d'utilité standard en macro : $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

Liste des paramètres à choisir :

- Technologiques
  - α part du revenu du capital dans le PIB
  - δ taux de dépréciation
  - z niveau de technologie
- Préférences
  - ρ taux d'escompte ($\beta \equiv \frac{1}{1+\rho}$)
  - γ élasticité de substitution

Nos données sont trimestrielles donc on choisit qu'une période correspond à trois mois.

Modèle néoclassique de croissance

Calibration α

Avec la production Cobb-Douglas :

- α est la part du revenu du capital dans le PIB
- $1 - \alpha$ est la part du revenu du travail dans le PIB

Exercice en classe : $f(k, n) = k^{\alpha} n^{1-\alpha}$, utiliser les CPO du problème de la firme afin de remplacer r dans $r\ k$.

Deux difficultés pour mesurer α :

1. un entrepreneur fournit du capital et du travail à sa firme mais ne se paye pas nécessairement un salaire
2. loyer imputer pour ceux qui habitent une maison qu'ils possèdent.

Dans les données $\alpha \approx \frac{1}{3}$

Modèle néoclassique de croissance

Calibration δ

À l'état stationnaire, l'investissement compense pour la dépréciation du capital :

$$investissement = \delta \ k_{es}$$

On a donc :

$$\delta = \frac{\frac{investissement}{y}}{\frac{k}{y}}$$

Aux états unis :

- $\frac{investissement}{y} \approx \ 25\%$
- $\frac{k}{y^{annuel}} \approx 2.6$ avec des données annuelles.
  Le PIB est un flux donc le PIB trimestriel est 1/4 du PIB annuel. Le capital est un stock donc la fréquence d'observations n'influence pas sa mesure.
  $\frac{k}{y^{trimestriel}} = \frac{k}{\frac{1}{4}y^{annuel}} \approx 4 * 2.6$ en données trimestrielles

On en déduit : $\delta \approx \frac{0.25}{4*2.6}$.

Le niveau de technologie peut être normalisé à 1. Pourquoi ?

On a vu qu'à l'état stationnaire : $\rho = r$.

Difficultés pour mesurer r : il y a plusieurs taux d'intérêts réels. Est-ce le taux d'intérêt réel sur la dette public (environ 1%) ou sur le rendement du capital (environ 7%) ?

Il est courant de choisir $r \approx 4\%$ par année soit envrion 1% par trimestre.

On en déduit : $r = \rho \approx 0.01$

Pour l'élasticité de substitution, il est courant de commencer avec 1 et de varier les valeurs pour voir si les résultats sont robustes au choix de γ.

Modèle néoclassique de croissance

Résumé : calibration

Liste des paramètres à choisir :

- Technologiques
  - $\alpha \approx \frac{1}{3}$ part du revenu du travail $\approx 2/3$
  - $\delta \approx 2.42\%$ taux de dépréciation $\frac{\frac{investissement}{y}}{\frac{k}{y}}$
  - $z \equiv 1$ niveau de technologie normalisé
- Préférences
  - $\rho \approx 1\%$ taux d'escompte à l'état stationnaire ($\rho = r$)
  - $\gamma = 1$ élasticité de substitution

Remarque facultative : on aurait dû modéliser

- croissance de la population $N_{t+1} \approx (1 + 0.27\%)N_t$ (taux annuel 1.1%)
- croissance du PIB par habitant $Y_{t+1} \approx (1 + 0.55\%)Y_t$ (taux annuel 2.2%)

On aurait trouver : $\delta = 1.6\%$ et $\rho = 0.2\%$. (pour plus de détails, voir Krueger (2007) chapitre 7 et 8.)