ECN 4050 Macroéconomie honor

Cours 7: résolution locale et globale du modèle néoclassique de croissance

Guillaume Sublet

Université de Montréal

Rappels sur le cours 6

- Nous avons formulé le modèle néoclassique de croissance : modèle dynamique avec capital

- On a trouver une solution analytique pour l'équilibre du modèle *à l'état stationnaire*

  Cette solution se résume au niveau de capital à l'état stationnaire : la règle d'or modifié du capital.

  Exercice : Vérifier que vous pouvez retrouver les autres variables d'équilibre à l'état stationnaire grâce au niveau de capital.

- Qu'en est-il de la transition vers l'état stationnaire (soit suite à un choc ou depuis un point de départ autre que l'état stationnaire) ?

  Ce cours 7 va nous permettre de calculer la *dynamique* du modèle néoclassique de croissance (sentier d'évolution vers l'état stationnaire)

Plan du cours 7

Résolution du modèle néoclassique de croissance

- Méthode 1 : solution locale autour de l'état stationnaire

  outils : log-linéarisation et réponses impulsionelles

- Méthode 2 : solution globale

  outils : « conjecture et vérification »

La solution du problème du planificateur est caractérisée par la suite récurrente d'ordre 2 suivante (voir Exercice 8) :

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta u'(c_{t+1}) \left(\alpha\ z k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) && \text{(Euler inter-temporelle)} \\ c_t &= z\ k_t^{\alpha} - k_{t+1} + (1-\delta)k_t && \text{(Ressource à t)} \\ c_{t+1} &= z\ k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1} && \text{(Ressource à t+1)} \end{aligned}$$

- La solution de cette suite récurrente est un sentier pour le capital $(k_t)_{t=0}^{\infty}$.
- À partir de la solution $(k_t)_{t=0}^{\infty}$, la contrainte de ressource donne $(c_t)_{t=0}^{\infty}$ et la fonction de production donne $(y_t)_{t=0}^{\infty}$
- La suite récurrente est non-linéaire donc difficile à résoudre.

Modèle néoclassique de croissance

Résolution

Pour résoudre le système il y a deux approches :

1. solution locale : deux étapes
   1.1 approximation linéaire (Taylor de premier ordre) de la suite récurrente proche de l'état stationnaire
   1.2 résoudre pour la dynamique locale du modèle (méthode des coefficients indéterminés)
   - avantage : marche à tous les coups
   - désavantages : solution locale, approximation de premier ordre pas suffisante pour étudier le bien-être

2. solution globale : deviner une solution et vérifier que c'est la bonne (« guess and verify »), donc deux étapes :
   2.1 formuler une conjecture
   2.2 vérifier que le « guess » résout les conditions d'équilibre
   - avantage : solution globale
   - désavantage : deviner la solution est loin d'être simple

Parenthèse mathématique sur l'approximation de Taylor :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots$$

On veut une suite récurrente linéaire donc on utilise une approximation de premier ordre autour de a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

Pour x proche de a, les termes d'ordre supérieurs $(x-a)^2$, $(x-a)^3, \dots$ sont petits ce qui justifie l'approximation.

Solution locale : approximation de Taylor de premier ordre pour

- les contraintes de ressources
- les equations d'Euler inter-temporelles
- autour de l'état sationnaire

Linéarisation de la contrainte de ressource autour de l'état stationnaire k_{es}

$$c_t = z\ k_t^\alpha - k_{t+1} + (1-\delta)k_t$$

terme par terme :

$$\begin{aligned} z\ k_t^\alpha \approx & z k_{es}^\alpha + z\alpha k_{es}^{\alpha-1}\ (k_t - k_{es}) \\ = & z k_{es}^\alpha + z\alpha k_{es}^{\alpha-1}\ \frac{(k_t - k_{es})}{k_{es}}\ k_{es} \\ = & z k_{es}^\alpha + z\alpha k_{es}^{\alpha-1}\ \hat{k}_t\ k_{es} \end{aligned}$$

où $\hat{k}_t$ désigne l'écart de l'état stationnaire en pourcentage

terme par terme :

$$
\begin{aligned}
-k_{t+1} &\approx -\, k_{es} - 1\,(k_{t+1} - k_{es}) \\
&= -\, k_{es} - \ \frac{(k_{t+1} - k_{es})}{k_{es}}\ k_{es} \\
&= -\, k_{es} - \ \hat{k}_{t+1}\ k_{es}
\end{aligned}
$$

Exercice en classe : *Linéariser le terme c_t et $(1-\delta)k_t$ en pourcentage de déviation de l'état stationnaire c_{es}, k_{es} :*

$$c_t \approx$$

terme par terme :

$$
\begin{aligned}
-k_{t+1} &\approx - k_{es} - 1\ (k_{t+1} - k_{es}) \\
&= - k_{es} - \ \frac{(k_{t+1} - k_{es})}{k_{es}}\ k_{es} \\
&= - k_{es} - \ \hat{k}_{t+1}\ k_{es}
\end{aligned}
$$

Exercice en classe : *Linéariser le terme c_t et $(1-\delta)k_t$ en pourcentage de déviation de l'état stationnaire c_{es}, k_{es} :*

$$c_t \approx c_{es} + \hat{c}_t\ c_{es}$$

terme par terme :

$$\begin{aligned} -k_{t+1} &\approx -\,k_{es} - 1\,(k_{t+1} - k_{es}) \\ &= -\,k_{es} - \,\frac{(k_{t+1} - k_{es})}{k_{es}}\,k_{es} \\ &= -\,k_{es} - \,\hat{k}_{t+1}\,k_{es} \end{aligned}$$

Exercice en classe : *Linéariser le terme c_t et $(1-\delta)k_t$ en pourcentage de déviation de l'état stationnaire c_{es}, k_{es} :*

$$c_t \approx c_{es} + \hat{c}_t\, c_{es}$$

$$(1-\delta)k_t \approx$$

terme par terme :

$$\begin{aligned} -k_{t+1} &\approx -\,k_{es} - 1\,(k_{t+1} - k_{es}) \\ &= -\,k_{es} - \ \frac{(k_{t+1} - k_{es})}{k_{es}}\ k_{es} \\ &= -\,k_{es} - \ \hat{k}_{t+1}\ k_{es} \end{aligned}$$

Exercice en classe : *Linéariser le terme* c_t *et* $(1-\delta)k_t$ *en pourcentage de déviation de l'état stationnaire* c_{es}, k_{es} *:*

$$c_t \approx c_{es} + \hat{c}_t\ c_{es}$$

$$(1-\delta)k_t \approx (1-\delta)k_{es} + (1-\delta)k_{es}\hat{k}_t$$

Modèle néoclassique de croissance

Résolution locale : linéarisation de la contrainte de ressource

Linéarisation de la contrainte de ressource autour de l'état stationnaire k_{es}

$$c_t = z\ k_t^{\alpha} - k_{t+1} + (1-\delta)k_t$$

après substitution des termes linéarisés :

$$\underbrace{c_{es} + \hat{c}_t\ c_{es}}_{\approx c_t} = \underbrace{zk_{es}^{\alpha} + z\alpha k_{es}^{\alpha-1}\ \hat{k}_t\ k_{es}}_{\approx z\ k_t^{\alpha} - k_{t+1}} \underbrace{- k_{es} - \hat{k}_{t+1}\ k_{es}}_{\approx -k_{t+1}} + \underbrace{(1-\delta)k_{es} + (1-\delta)k_{es}\hat{k}_t}_{\approx(1-\delta)k_t}$$

La contrainte de ressource est satisfaite à l'état stationnaire

$$c_{es} = z\ k_{es}^{\alpha} - k_{es} + (1-\delta)k_{es}$$

ce qui permet de simplifier la **contrainte de ressource à t linéarisée** :

$$\hat{c}_t\ c_{es} = z\alpha k_{es}^{\alpha}\ \hat{k}_t - \hat{k}_{t+1}\ k_{es} + (1-\delta)k_{es}\hat{k}_t$$

Exercice en classe : *Linéariser la contrainte de ressource à t+1*

$$c_{t+1} = z\ k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1}$$

Exercice en classe : *Linéariser la contrainte de ressource à t+1*

$$c_{t+1} = z\ k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1}$$

C'est la même que pour t sauf que l'indice de temps est $t+1$.

contrainte de ressource à $t+1$ linéarisée

$$\hat{c}_{t+1}\ c_{es} = \alpha k_{es}^{\alpha}\ \hat{k}_{t+1} - \hat{k}_{t+2}\ k_{es} + (1-\delta)k_{es}\hat{k}_{t+1}\ .$$

Il ne nous reste plus qu'à linéariser l'équation d'Euler inter-temporelle.

Modèle néoclassique de croissance

Résolution locale : linéarisation de l'équation d'Euler inter-temporelle

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) \left(\alpha \ zk_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) \quad \text{(Euler inter-temporelle)}$$

Terme par terme :

-
$$\begin{aligned} u'(c_t) &\approx u'(c_{es}) + u''(c_{es})(c_t - c_{es}) \\ &= u'(c_{es}) + u''(c_{es})\frac{(c_t - c_{es})}{c_{es}}c_{es} \\ &= u'(c_{es}) + u''(c_{es})\hat{c}_t c_{es} \end{aligned}$$

- Exercice en classe : linéariser par approximation de Taylor de premier ordre autour de l'état stationnaire $(1-\delta)\beta u'(c_{t+1})$:

Modèle néoclassique de croissance

Résolution locale : linéarisation de l'équation d'Euler inter-temporelle

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) \left(\alpha \ z k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) \quad \text{(Euler inter-temporelle)}$$

Terme par terme :

- $$\begin{aligned} u'(c_t) &\approx u'(c_{es}) + u''(c_{es})(c_t - c_{es}) \\ &= u'(c_{es}) + u''(c_{es})\frac{(c_t - c_{es})}{c_{es}} c_{es} \\ &= u'(c_{es}) + u''(c_{es})\hat{c}_t c_{es} \end{aligned}$$
- Exercice en classe : linéariser par approximation de Taylor de premier ordre autour de l'état stationnaire $(1-\delta)\beta u'(c_{t+1})$:

$$(1-\delta)\beta u'(c_{t+1}) \approx (1-\delta)\ \beta\ \left(u'(c_{es}) + u''(c_{es})\hat{c}_{t+1} c_{es}\right)$$

Modèle néoclassique de croissance

Résolution locale : linéarisation de l'équation d'Euler inter-temporelle

Terme par terme (suite) :

$$
\begin{aligned}
u'(c_{t+1})k_{t+1}^{\alpha-1} \approx\ & u'(c_{es})\ k_{es}^{\alpha-1} \\
& + u''(c_{es})k_{es}^{\alpha-1}\ (c_{t+1}-c_{es}) \\
& + u'(c_{es})(\alpha-1)k_{es}^{\alpha-2}\ (k_{t+1}-k_{es}) \\
\\
\approx\ & u'(c_{es})\ k_{es}^{\alpha-1} \\
& + u''(c_{es})k_{es}^{\alpha-1}\ \frac{(c_{t+1}-c_{es})}{c_{es}}c_{es} \\
& + u'(c_{es})(\alpha-1)k_{es}^{\alpha-2}\ \frac{(k_{t+1}-k_{es})}{k_{es}}k_{es} \\
\\
\approx\ & u'(c_{es})\ k_{es}^{\alpha-1} \\
& + u''(c_{es})k_{es}^{\alpha-1}\ \hat{c}_{t+1}c_{es} \\
& + u'(c_{es})(\alpha-1)k_{es}^{\alpha-2}\ \hat{k}_{t+1}k_{es}
\end{aligned}
$$

Modèle néoclassique de croissance

Résolution locale : linéarisation de l'équation d'Euler inter-temporelle

$$\underbrace{u'(c_{es}) + u''(c_{es})\hat{c}_t c_{es}}_{\approx u'(c_t)} \approx \underbrace{(1-\delta)\ \beta\ \left(u'(c_{es}) + u''(c_{es})\hat{c}_{t+1} c_{es}\right)}_{\approx (1-\delta)\beta u'(c_{t+\mathbf{1}})}$$

$$+ \beta\alpha z \underbrace{\left(u'(c_{es})\ k_{es}^{\alpha-1} + u''(c_{es}) k_{es}^{\alpha-1}\ \hat{c}_{t+1} c_{es} + u'(c_{es})(\alpha-1) k_{es}^{\alpha-2}\ \hat{k}_{t+1} k_{es}\right)}_{\approx u'(c_{t+\mathbf{1}}) k_{t+\mathbf{1}}^{\alpha-\mathbf{1}}}$$

Quelques termes s'annulent vu que la condition d'Euler intertemporelle est satisfaite à l'état stationnaire.

Quelques terms s'annulent vu que la condition d'Euler intertemporelle est satisfaite à l'état stationnaire :

$$u'(c_{es}) = (1-\delta)\ \beta\ u'(c_{es}) + \beta\alpha z\ u'(c_{es})\ k_{es}^{\alpha-1}$$

On obtient l'**équation d'Euler intertemporelle linéarisée**

$$\begin{aligned} u''(c_{es})\hat{c}_t c_{es} &\approx (1-\delta)\ \beta\ u''(c_{es})\hat{c}_{t+1} c_{es} \\ &\quad + \beta\alpha z\big(u''(c_{es})k_{es}^{\alpha-1}\ \hat{c}_{t+1} c_{es} + u'(c_{es})(\alpha-1)k_{es}^{\alpha-2}\ \hat{k}_{t+1} k_{es}\big) \end{aligned}$$

Modèle néoclassique de croissance

Résolution locale : système linéarisé

L'équilibre du modèle néoclassique résout ce système non-lineaire :

$$\begin{aligned}
u'(c_t) &= \beta u'(c_{t+1}) \left(\alpha\ z k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) && \text{(Euler inter-temporelle)}\\
c_t &= z\ k_t^{\alpha} - k_{t+1} + (1-\delta) k_t && \text{(Ressource à t)}\\
c_{t+1} &= z\ k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2} + (1-\delta) k_{t+1} && \text{(Ressource à t+1)}
\end{aligned}$$

qui, une fois linéarisé, devient :

$$\begin{aligned}
& u''(c_{es})\hat{c}_t c_{es} \approx (1-\delta)\ \beta\ u''(c_{es})\hat{c}_{t+1} c_{es}\\
& \qquad + \beta\alpha z \left(u''(c_{es}) k_{es}^{\alpha-1}\ \hat{c}_{t+1} c_{es} + u'(c_{es})(\alpha-1) k_{es}^{\alpha-2}\ \hat{k}_{t+1} k_{es}\right)\\
& \hfill \text{(Euler inter-temporelle linéarisée)}\\
& \hat{c}_t\ c_{es} \approx \alpha k_{es}^{\alpha}\ \hat{k}_t - \hat{k}_{t+1}\ k_{es} + (1-\delta) k_{es} \hat{k}_t\\
& \hfill \text{(Ressource à t linéarisée)}\\
& \hat{c}_{t+1}\ c_{es} \approx \alpha k_{es}^{\alpha}\ \hat{k}_{t+1} - \hat{k}_{t+2}\ k_{es} + (1-\delta) k_{es} \hat{k}_{t+1}\\
& \hfill \text{(Ressource à t+1 linéarisée)}
\end{aligned}$$

Pour résoudre le système linéarisé :

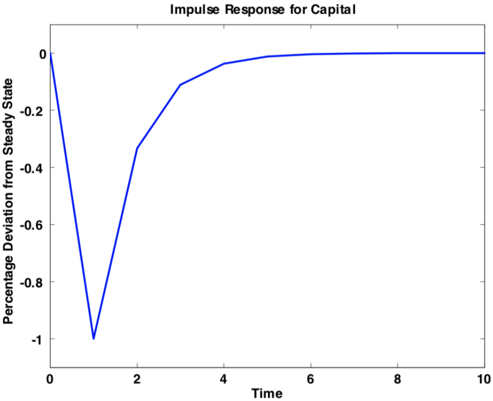
1. substituer les contraintes de ressources dans l'équation inter-temporelle pour obtenir une suite récurrente *linéaire* d'ordre 2 en $\hat{k}_t, \hat{k}_{t+1}, \hat{k}_{t+2}$.
2. Méthode des coefficients indéterminées :
   - Solution du système linéaire est de la forme : $\hat{k}_{t+1} = s\ \hat{k}_t$ donc $\hat{k}_{t+2} = s^2\ \hat{k}_t$ où s reste à déterminer
   - Substitution dans l'équation inter-temporelle linéaire ce qui donne une équation quadratique en s
   - Résoudre l'équation quadratique et garder la racine positive s_{sol}

Solution locale autour de l'état stationnaire :

$$\hat{k}_t = s_{sol}^t\ \hat{k}_0$$

Quel est l'effet d'une destruction de 1% du stock de capital ?

Réponse impulsionnelle : si l'économie était à l'état stationnaire avant la destruction de 1% du capital :
$\hat{k}_1 = -1\%$, $\hat{k}_2 = -s_{sol}\ 1\%$, $\hat{k}_{t+1} = -s_{sol}^t\ 1\%$



Modèle néoclassique de croissance

Résolution locale : résumé

- La solution du modèle néoclassique de croissance est une suite récurrente nonlinéaire d'ordre 2
- Approximation de Taylor d'ordre 1 autour de l'état stationnaire permet de **linéariser** le système
- Pour des petites déviations (solution locale) de l'état stationnaire, le système évolue ainsi : $\hat{k}_{t+1} = s_{sol}\hat{k}_t$.
- Trouver s_{sol} par la **méthode des coefficients indéterminés**. (Pour plus de détails : Krueger (2007) chapitre 6).
- Représentation graphique du retour à l'état stationnaire après un choc : **réponse imupulsionnelle**

Modèle néoclassique de croissance

Résolution globale : « guess and verify »

La solution du modèle néoclassique de croissance est une suite récurrente nonlinéaire d'ordre 2

Résolution globale : solution

- n'est pas une approximation
- valable même loin de l'état stationnaire

Conjecture et vérifier (« guess and verify »)

1. deviner la solution
2. vérifier que la solution devinée résout les conditions d'équilibre

En général il est très difficile de formuler une conjecture sauf pour des cas spéciaux tel que $u(c) = \ln(c)$ et dépréciation totale du capital $\delta = 1$.

Modèle néoclassique de croissance avec $u(c) = \ln(c)$ et $\delta = 1$

Conjecture et vérifier (« guess and verify »)

1. formuler une conjecture : « guess » $k_{t+1} = s_g \; k_t^\alpha$ où s_g reste à déterminer
2. vérifier que la solution devinée résout les conditions d'équilibre :

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) \left(\alpha \; z k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) \qquad \text{(Euler inter-temporelle)}$$

$$c_t = z \; k_t^\alpha - k_{t+1} + (1-\delta) k_t \qquad \text{(Ressource à t)}$$

$$c_{t+1} = z \; k_{t+1}^\alpha - k_{t+2} + (1-\delta) k_{t+1} \qquad \text{(Ressource à t+1)}$$

devient :

$$\frac{1}{c_t} = \beta \frac{1}{c_{t+1}} \; \alpha \; z k_{t+1}^{\alpha-1} \qquad \text{(Euler inter-temporelle)}$$

$$c_t = z \; k_t^\alpha - k_{t+1} \qquad \text{(Ressource à t)}$$

$$c_{t+1} = z \; k_{t+1}^\alpha - k_{t+2} \qquad \text{(Ressource à t+1)}$$

2. vérifier que la solution devinée résout les conditions d'équilibre (suite) : après substitution des contraintes de ressources dans l'équation d'Euler

$$\frac{1}{z\ k_t^{\alpha} - k_{t+1}} = \beta \frac{1}{z\ k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}}\ \alpha\ z k_{t+1}^{\alpha-1}$$

Substituons notre « guess » :

$$\frac{1}{z\ k_t^{\alpha} - s_g\ k_t^{\alpha}} = \beta \frac{1}{z\ k_{t+1}^{\alpha} - s_g\ k_{t+1}^{\alpha}}\ \alpha\ z k_{t+1}^{\alpha-1}$$

$$\frac{1}{(z - s_g)\ k_t^{\alpha}} = \beta \frac{1}{(z - s_g)\ k_{t+1}^{\alpha}}\ \alpha\ z k_{t+1}^{\alpha-1}$$

$$\frac{1}{k_t^{\alpha}} = \beta\alpha\ z k_{t+1}^{-1}$$

$$k_{t+1} = \beta\ \alpha\ z\ k_t^{\alpha}$$

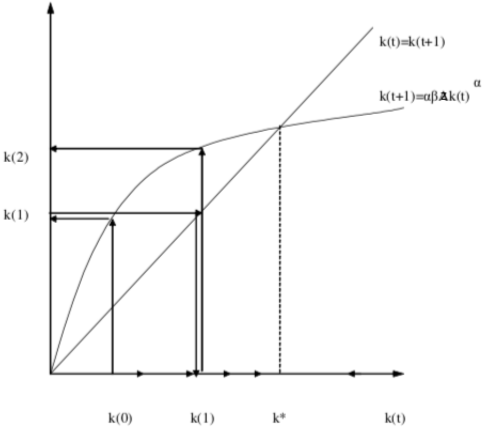
Ce qui valide notre « guess » qui est bien de la forme $k_{t+1} = s_g\ k_t^{\alpha}$ où $s_g = \beta\ \alpha\ z$.

Modèle néoclassique de croissance

Résolution globale : « guess and verify »

Quelle est l'évolution du capital au sein du modèle néoclassique de croissance ?

Si $u = \ln$ et $\delta = 1$, alors :



- La solution du modèle néoclassique de croissance est une suite récurrente nonlinéaire d'ordre 2.

- Pour le cas spécial $u = \ln$ et $\delta = 1$, la suite $k_{t+1} = s_g k_t$ résout la suite récurrente nonlinéaire d'ordre 2 si $s_g = \beta\ \alpha\ z$.

- Représentation graphique de l'évolution du capital (convergence vers l'état stationnaire) quelque soit le point de départ, même si ce n'est pas l'état stationnaire.