

Modificaciones al programa académico de Álgebra Lineal en Ingeniería

Rodrigo Carvajal

Escuela de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Índice general

| | |
|---|-----|
| Resumen | III |
| 1 Introducción | 1 |
| 2 Cambios sugeridos | 2 |
| 2.1 Cambios en el plan de estudios | 2 |
| 2.1.1 Plan actual | 2 |
| 2.1.2 Plan sugerido | 4 |
| 3 Integración de herramientas computacionales: Geogebra | 6 |

Resumen

Este reporte presenta un conjunto detallado de modificaciones sugeridas al programa académico de la asignatura **MAT1004 Álgebra Lineal**, ofrecido a los estudiantes de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, a partir de una revisión detallada del programa de la asignatura, de la literatura obligatoria de la asignatura, de la literatura ampliamente utilizada en diversas universidades del mundo y de los resultados de los paralelos con menor tasa de aprobación en los primeros semestres.

Los objetivos de esta revisión son:

1. Modernizar la estructura de la asignatura.
2. Alinear los resultados de aprendizaje con aplicaciones de Ingeniería.
3. Mejorar las competencias asociadas a la utilización de herramientas computacionales.
4. Mejorar las competencias asociadas al pensamiento lógico y al razonamiento sistemático en Ingeniería.
5. Responder a las necesidades de la Facultad, de las Escuelas y a la acreditación ABET.

1 Introducción

En Ingeniería, las Matemáticas son una herramienta fundamental para el desarrollo de las mismas. De hecho, una de las definiciones comunes de Ingeniería es el de “Matemática aplicada”. Sin embargo, en la actualidad, no hay un desarrollo adecuado de la comprensión conceptual de las matemáticas ni pensamiento lógico y estructurado por parte de una gran parte de nuestros estudiantes al momento de ingresar a la Universidad. Por ejemplo, en los paralelos de MAT1001 con estudiantes de la Escuela de Ingeniería Eléctrica, el porcentaje promedio de aprobación promedio de todos esos paralelos fue de un 46 % el año 2023 (con aprobación máxima y mínima de 57 % y 38 % respectivamente), 46.6 % el año 2024 (con aprobación máxima y mínima de 54 % y 38 % respectivamente) y 49.4 % el año 2025 (con aprobación máxima y mínima de 67 % y 36 % respectivamente). Este comportamiento es permanente en el tiempo para muchos de estos estudiantes, llegando a cursos superiores con grandes falencias, vacíos conceptuales y de conocimiento y baja competencia. En los paralelos de MAT1004 con estudiantes de la Escuela de Ingeniería Eléctrica, el porcentaje de aprobación promedio de todos esos paralelos fue de un 63.7 % el año 2023 (con aprobación máxima y mínima de 100 % y 20 % respectivamente), 57.7 % el año 2024 (con aprobación máxima y mínima de 89.5 % y 25 % respectivamente) y 50.1 % el año 2025 (con aprobación máxima y mínima de 87.8 % y 0 % respectivamente).

Por otra parte, existe una preocupación generalizada en la enseñanza de Matemáticas para Ingeniería desde el punto de vista del quehacer en el aula y de cómo “enganchar” con los estudiantes los contenidos y sus aplicaciones. Una de las ideas comunes de los últimos 15 años es la de incorporar herramientas de simulación [1–4], principalmente Geogebra [5], como una alternativa ó suplemento de la forma tradicional de enseñanza de Álgebra Lineal [3] y Matemática en general en diversos niveles [2].

Existe además un consenso en la necesidad de motivar a los estudiantes a través de estrategias de enseñanza que los lleve al pensamiento crítico a través del razonamiento matemático, lógico y estructurado [2, 6]. En general se recomiendan estrategias que involucren la participación de los estudiantes en clases, donde el foco está puesto en [4, 6–8]:

- intercambiar ideas con estudiantes a través de la interacción individual o con pequeños grupos para motivar la participación,
- estructurar matemáticamente la conversación con los estudiantes para ayudarlos a pensar de forma precisa y verbalizar sus pesamientos
- trabajar con registros públicos del pensamiento matemático de los estudiantes (hacer disponibles las ideas de los estudiantes),

- trabajar con ideas seleccionadas y “secuenciadas” para lograr un aprendizaje cooperativo,
- orquestar la discusión matemática.

Además, se sugiere que las actividades anteriores sean asistidas a partir de la incorporación de algún software y del uso de herramientas de Tecnologías de la Información y la Comunicación como herramientas de transmisión del conocimiento adquirido durante la asignatura.

Respecto a la didáctica y a la presentación de los contenidos, se sugiere también un enfoque aplicado a las especialidades de Ingeniería, ya que se han detectado diferencias entre los métodos tradicionales de enseñanza de Matemática y de Ingeniería [3]. Es por todo lo anterior que es necesaria una preparación adecuada de los profesores para desarrollar problemas aplicados e incorporar nuevas estrategias [8].

2 Cambios sugeridos

En esta sección se presentan algunos cambios sugeridos en pos de aumentar/mejorar la comprensión de los conceptos fundamentales de Álgebra Lineal, su aplicación a problemas de Ingeniería y, por ende, las tasas de aprobación y la motivación a aprender.

2.1. Cambios en el plan de estudios

En la actualidad la asignatura MAT1004 se dicta en diferentes años de diferentes mallas. Por ejemplo, en las carreras de la Escuela de Ingeniería Eléctrica y de la Escuela de Ingeniería Informática, Álgebra Lineal se dicta en el segundo semestre de la malla, mientras que en la malla de Ingeniería Civil Mecánica la asignatura se cursa en el tercer semestre y en Ingeniería Civil Industrial en el cuarto semestre. Debido a ésta diferencia en conocimientos y madurez de los estudiantes, sumado a los bajos porcentajes de aprobación presentados anteriormente, es que se presenta un cambio en el programa de la asignatura. Este cambio refleja necesidades y no genera modificaciones en los resultados de aprendizaje, sino que sólo en el orden en que se estudian los capítulos de la asignatura.

2.1.1. Plan actual

El plan actual de la asignatura sigue la estructura de textos comúnmente utilizados en el mundo, como [9–11], y es como sigue:

1. Matrices

- 1.1. Álgebra de Matrices
- 1.2. Inversión de matrices
 - 1.2.1. Operaciones Elementales Filas
 - 1.2.2. Determinante
- 1.3. Sistemas de Ecuaciones Lineales
 - 1.3.1. Resolución de SEL cuadrados con determinante de Matriz Asociada no nulo
- 2. Geometría Vectorial
 - 2.1. Vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3
 - 2.2. Producto Punto, Norma, ángulo entre vectores
 - 2.3. Distancia entre vectores
 - 2.4. Producto vectorial
 - 2.5. Rectas y planos en el espacio
 - 2.5.1. Rectas en \mathbb{R}^2 y sus representaciones
 - 2.5.2. Ecuaciones de una recta en \mathbb{R}^3 y sus representaciones
 - 2.5.3. Planos en \mathbb{R}^3
 - 2.5.4. Intersecciones de dos planos
 - 2.5.5. Intersecciones de plano-recta
 - 2.5.6. Distancias
 - 2.6. Proyecciones de vectores sobre una línea
 - 2.6.1. Aplicaciones del vector proyección
- 3. Espacios vectoriales
 - 3.1. Definición de espacio vectorial y ejemplos
 - 3.2. Subespacios vectoriales
 - 3.3. Combinaciones lineales. Subespacio generado
 - 3.4. Dependencia e independencia lineal
 - 3.5. Bases. Matriz cambio de base
 - 3.6. Dimensión de un espacio vectorial y propiedades
 - 3.6.1. Coordenadas
 - 3.7. Suma directa de espacios vectoriales
 - 3.7.1. Intersección de espacios vectoriales
 - 3.7.2. Suma de espacios vectoriales
 - 3.7.3. Suma Directa

- 3.8. Valores y vectores propios
- 3.9. Diagonalización de una matriz
- 4. Transformaciones lineales
 - 4.1. Definición de transformación lineal
 - 4.2. Álgebra de transformaciones lineales
 - 4.3. Núcleo e Imagen de una TL
 - 4.4. Isomorfismo de las transformaciones lineales
 - 4.5. Correspondencia entre las matrices y las transformaciones lineales
 - 4.6. Relación entre las matrices asociadas a una transformación lineal respecto de bases diferentes
 - 4.7. Potencia de una transformación lineal y uso de la base que diagonaliza

2.1.2. Plan sugerido

El plan sugerido responde a los conocimientos básicos que poseen algunos estudiantes que cursan, paralelamente, Física Mecánica. La idea detrás de esta estructura está en hacer más intuitivo el avance en el programa, ya sea en términos de conceptos o conocimientos ya adquiridos o en función de resolver o definir formalmente un problema o una necesidad. Esta estructura también está presente en textos ampliamente utilizados en el mundo, como [12–14] y es como sigue:

- 1. Geometría Vectorial
 - 1.1. Vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3
 - 1.2. Producto Punto, Norma, ángulo entre vectores
 - 1.3. Distancia entre vectores
 - 1.4. Producto vectorial
 - 1.5. Rectas y planos en el espacio
 - 1.5.1. Rectas en \mathbb{R}^2 y sus representaciones
 - 1.5.2. Ecuaciones de una recta en \mathbb{R}^3 y sus representaciones
 - 1.5.3. Planos en \mathbb{R}^3
 - 1.5.4. Intersecciones de dos planos
 - 1.5.5. Intersecciones de plano-recta
 - 1.5.6. Distancias
 - 1.6. Proyecciones y aplicaciones
 - 1.6.1. Aplicaciones del vector proyección

2. Matrices

2.1. Álgebra de Matrices

2.2. Inversa de matrices

2.2.1. Operaciones Elementales Filas

2.2.2. Determinante

2.3. Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.3.1. Resolución de SEL cuadrados con determinante de Matriz Asociada no nulo

3. Espacios vectoriales

3.1. Definición de espacio vectorial y ejemplos

3.2. Subespacios vectoriales

3.3. Combinaciones lineales. Subespacio generado

3.4. Dependencia e independencia lineal

3.5. Bases. Matriz cambio de base

3.6. Dimensión de un espacio vectorial y propiedades

3.6.1. Coordenadas

3.7. Suma directa de espacios vectoriales

3.7.1. Intersección de espacios vectoriales

3.7.2. Suma de espacios vectoriales

3.7.3. Suma Directa

3.8. Valores y vectores propios

3.9. Diagonalización de una matriz

4. Transformaciones lineales

4.1. Definición de transformación lineal

4.2. Álgebra de transformaciones lineales

4.3. Núcleo e Imagen de una TL

4.4. Isomorfismo de las transformaciones lineales

4.5. Correspondencia entre las matrices y las transformaciones lineales

4.6. Relación entre las matrices asociadas a una transformación lineal respecto de bases diferentes

4.7. Potencia de una transformación lineal y uso de la base que diagonaliza

3 Integración de herramientas computacionales: Geogebra

GeoGebra es una herramienta computacional dinámica y efectiva en la enseñanza de Matemáticas, especialmente Álgebra Lineal [1, 12].

GeoGebra is un programa gratuito y *open access* que integra herramientas gráficas, de geometría, álgebra, cálculo, álgebra lineal y estadística. Puede ser usado como una aplicación web o como una aplicación instalada en un computador (Windows o Mac) [5].

Una de las características importantes de Geogebra es la capacidad de representar objetos matemáticos de forma dinámica. Puntos en el espacio, vectores, matrices y funciones pueden ser manipulados en tiempo real, permitiendo visualizar, por ejemplo, el cambio de parámetros y su efecto en expresiones matemáticas y su representación geométrica.

El uso de Geogebra en el curso de Álgebra Lineal puede ser de gran ayuda en la comprensión de conceptos , a partir de:

- la visualización de vectores en dos y tres dimensiones, incluyendo la suma, producto escalar, combinaciones lineales y producto cruz,
- la ilustración de espacios y subespacios vectoriales a través de ejemplos como líneas y planos que cruzan el origen,
- la representación de transformaciones lineales usando matrices, mostrando cómo se transforman vectores base y formas geométricas,
- la exploración de sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación geométrica en términos de la intersección de rectas y planos,
- la demostración gráfica de autovalores y autovectores y
- el análisis de cambio de coordenadas, proyecciones y descomposiciones ortogonales usando el producto punto y vectores unitarios.

El uso de Geogebra no pretende reemplazar el razonamiento analítico formal de las Matemáticas, sino que ser una herramienta que complemente la enseñanza. Para ello, es necesario un curso de capacitación formal para los profesores de la Facultad, de modo de que no sólo puedan usar el software en clases, sino que enseñar su uso a través del desarrollo de ejemplos en clases.

Bibliografía

- [1] B. Jaworski and J. Matthews, “Developing teaching of mathematics to first year engineering students,” *Teaching Mathematics and Its Applications*, vol. 30, no. 4, pp. 178–185, 2011.
- [2] N. Marshall, C. Buteau, D. H. Jarvis, and Z. Lavicza, “Do mathematicians integrate computer algebra systems in university teaching? Comparing a literature review to an international survey study,” *Computers & Education*, vol. 58, no. 1, pp. 423–434, 2012.
- [3] C. M. R. Caridade, A. H. Encinas, J. Martín-Vaquero, and A. Queiruga-Dios, “CAS and real life problems to learn basic concepts in Linear Algebra course,” *Computer Applications in Engineering Education*, vol. 23, no. 4, pp. 567–577, 2016.
- [4] S. Domínguez-García, M. García-Planas, and J. Taberna, “Mathematical modelling in engineering: an alternative way to teach Linear Algebra,” *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 47, no. 7, pp. 1076–1086, 2016.
- [5] “Geogebra,” <https://www.geogebra.org/>, accessed: 19/12/2025.
- [6] H. F. Su, F. A. Ricci, and M. Mnatsakanian, “Mathematical teaching strategies: Pathways to critical thinking and metacognition,” *International Journal of Research in Education and Science*, vol. 2, no. 1, pp. 190–200, 2016.
- [7] E. Thanheiser and K. Melhuish, “Teaching routines and student-centered mathematics instruction: The essential role of conferring to understand student thinking and reasoning,” *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 70, p. 101032, 2023.
- [8] B. Bianchini, G. Loureiro de Lima, and E. Gomes, “Linear algebra in engineering: an analysis of latin american studies,” *ZDM Mathematics Education*, vol. 51, pp. 1097–1110, 09 2019.
- [9] G. Strang, *Linear Algebra and its applications*, 4th ed. Cengage Learning, 2006.
- [10] S. I. Grossman, *Álgebra Lineal*, 6th ed. McGraw Hill, 2008.
- [11] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, 2000.
- [12] S. Stewart, C. Andrews-Larson, and M. Zandieh, “Linear algebra teaching and learning: themes from recent research and evolving research priorities,” *ZDM Mathematics Education*, vol. 51, pp. 1017–1030, 2019.
- [13] D. H. Griffel, *Linear Algebra and its Applications*. Ellis Horwood, 1989, vol. 1.
- [14] S. Friedberg, A. Insel, and L. Spence, *Linear Algebra*. Pearson Education, 2003.