

ESCUELA DE
INGENIERÍA ELÉCTRICA



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO

Ejercicios MAT1004

Álgebra Lineal con Contextos de Ingeniería

GUILLERMO CID AMPUERO · RODRIGO CARVAJAL

Correo:

Guillermo Cid Ampuero – guillermo.cid@pucv.cl
Rodrigo Carvajal – rodrigo.carvajal@pucv.cl

GitHub:

github.com/guille-robotics/Algebra-Lineal-Interactivo

Escuela de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Esta guía presenta ejercicios de álgebra lineal contextualizados en problemas reales de ingeniería, diseñada para profesores que buscan conectar la teoría matemática con aplicaciones prácticas.

1. Demostración Inicial : Mario Bros

1.1. Aplicación en Informática/Electrónica: Rotación de Imágenes y Álgebra Lineal (Caso Mario Bros)

Contexto de Ingeniería

En Ingeniería Informática y Electrónica, el **procesamiento digital de imágenes** es una herramienta esencial en aplicaciones como visión artificial, robótica móvil, inspección industrial y sistemas de reconocimiento de patrones.

Una operación básica pero muy importante es la **rotación de una imagen**. Matemáticamente, rotar un punto del plano se define como una **transformación lineal** representada por la matriz de rotación:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Desde el punto de vista de Álgebra Lineal, esta matriz actúa sobre un vector posición (x, y) y genera un nuevo punto (x', y') :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

¿Dónde aparece el problema en imágenes reales?

Una imagen digital no es un objeto continuo, sino una **malla discreta de píxeles**. Cada píxel existe únicamente en coordenadas enteras. Por lo tanto, al aplicar una rotación:

- la transformación entrega coordenadas **reales** (decimales),
- pero la imagen solo puede guardar valores en posiciones **enteras**.

Esto obliga a aproximar (por ejemplo usando **round()**), y esa aproximación puede producir distorsiones visuales.

Ejemplo visual con Mario Bros:

Si la rotación se implementa de forma ingenua, la imagen rotada puede verse “dañada”:

- se pierden detalles pequeños como los **botones**,
- el **bigote** se deforma,
- aparecen huecos o discontinuidades en bordes.

Esto no es un error de la matriz de rotación (que es correcta), sino una consecuencia de aplicar una transformación continua sobre una estructura discreta (píxeles).

Solución usada en ingeniería: rotación por *shear decomposition*

Para evitar estas pérdidas, se utiliza una estrategia computacionalmente eficiente: representar la rotación como la composición de tres transformaciones tipo **shear** (cizallamiento).

En el código, cada píxel se expresa en coordenadas relativas al centro de la imagen y luego se transforma mediante:

$$\text{Shear}_1 : \quad x_1 = \text{round} \left(x - y \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$\text{Shear}_2 : \quad y_2 = \text{round} (y + x_1 \sin(\theta))$$

$$\text{Shear}_3 : \quad x_3 = \text{round} \left(x_1 - y_2 \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

Esta implementación permite una rotación más estable, preservando mejor los detalles visuales del personaje, como se observa en la Figura 1.

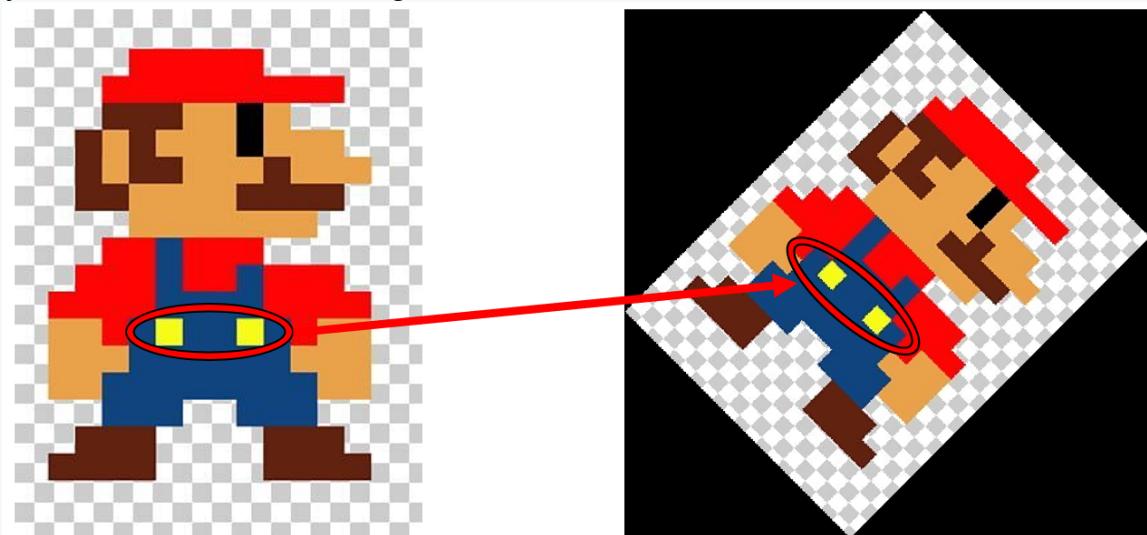


Figura 1: Comparación visual de la rotación aplicada a una imagen tipo *pixel-art*. A la izquierda se muestra la imagen original de Mario Bros y, a la derecha, el resultado tras rotarla 45°. El círculo destaca los botones del traje, utilizados como referencia de calidad: al aplicar una rotación correctamente implementada (centrado + transformación por *shear* y redondeo controlado), se preservan los detalles discretos sin deformaciones visibles, evitando pérdidas de información en elementos pequeños.

Conexión directa con Álgebra Lineal

Este ejemplo permite mostrar que en ingeniería una transformación lineal no es solo una fórmula, sino una herramienta práctica que debe adaptarse al mundo real:

- La matriz de rotación es el modelo matemático.
- La imagen discreta es una representación numérica del mundo.
- El redondeo/interpolación es el puente entre el modelo continuo y el sistema digital.

Así, la rotación de imágenes se convierte en un caso real donde Álgebra Lineal se conecta con la implementación computacional y la eficiencia en hardware.

2. Unidad 1. Geometría Vectorial

2.1. 1. Mecánica: Análisis de Fuerzas en un Soporte de Pared

Contexto de Ingeniería

En ingeniería estructural, es fundamental analizar cómo las fuerzas actúan sobre los componentes de una estructura para garantizar su estabilidad y seguridad. Un problema típico consiste en estudiar un **soporte mecánico rígido** (una pieza metálica atornillada a una pared) del cual cuelga un cable sometido a **tensión** (una fuerza que "tira" del cable).

El cable ejerce una fuerza sobre el soporte, y esta fuerza no necesariamente actúa de manera perpendicular u horizontal; generalmente tiene una orientación espacial arbitraria en el espacio tridimensional. Para el análisis estructural, es crítico **descomponer** esta fuerza en dos componentes:

- **Componente normal a la pared (\vec{F}_n)**: Es la parte de la fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie de la pared. Esta componente tiende a empujar (o jalar) el soporte directamente hacia afuera (o hacia adentro) de la pared, generando un esfuerzo de compresión o tracción sobre los anclajes (pernos, tornillos).
- **Componente tangencial a la pared (\vec{F}_t)**: Es la parte de la fuerza que actúa paralela a la superficie de la pared. Esta componente intenta hacer que el soporte se "deslice" sobre la pared (hacia abajo o lateralmente), generando esfuerzos cortantes sobre los pernos de anclaje.

Esta descomposición es esencial porque cada tipo de esfuerzo (normal vs tangencial) requiere consideraciones diferentes en el diseño: los tornillos pueden ser muy resistentes a la compresión pero fallar bajo corte, o viceversa.

Planteamiento del Problema

Un soporte mecánico rígido montado en una pared soporta un cable bajo tensión, como se muestra en la Fig. 2.

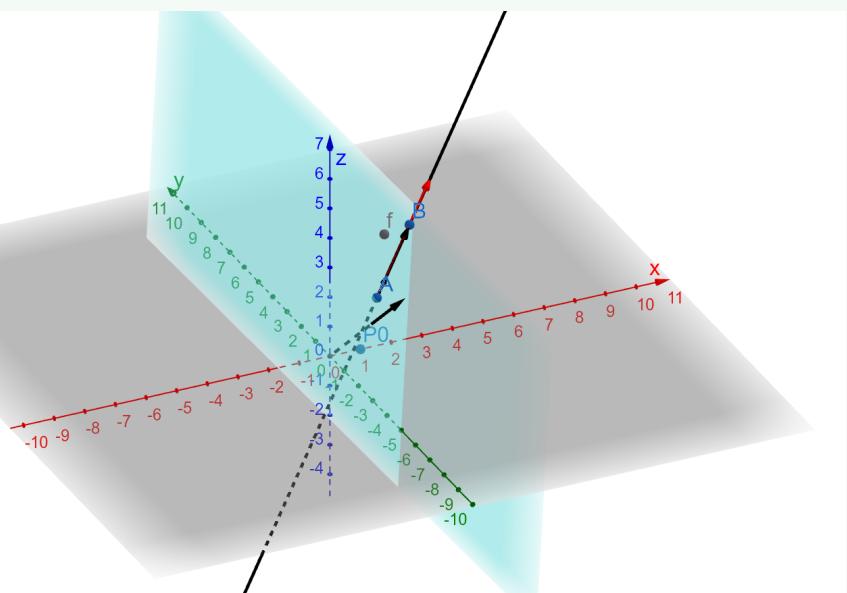


Figura 2: Representación gráfica en GeoGebra del problema de Geometría Vectorial en Mecánica. Los datos del problema son:

- El vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es **normal** (perpendicular) a la pared.
- La pared es un plano que pasa por el punto $P_0 = (1, 0, 0)$.
- El cable está anclado en el punto $A = (2, 1, 0)$ del soporte.
- El cable pasa por el punto $B = (4, 3, 2)$ en el espacio.
- La **tensión** (magnitud de la fuerza) en el cable es $|\vec{F}| = 5 \text{ N}$ (Newtons).

Se solicita determinar:

- El vector unitario en la dirección de la fuerza que ejerce el cable.
- El ángulo que se forma entre el cable y la pared.
- La componente normal a la pared de la fuerza que ejerce el cable.
- La componente de la fuerza que es tangente a la pared.

Solución

- a) **Vector unitario en la dirección de la fuerza**

Planteamiento: La dirección del cable viene dada por

$$\vec{d} = B - A = (4, 3, 2) - (2, 1, 0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{d} = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}.$$

Resultado:

$$\|\vec{d}\| = 2\sqrt{3}, \quad \hat{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Interpretación: La tensión actúa desde A hacia B , con componentes iguales en x, y, z .

- b) **Ángulo entre el cable y la pared**

Planteamiento: El ángulo con la pared se obtiene a partir del ángulo con la normal \vec{n} :

$$\cos(\theta) = \frac{\hat{d} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}, \quad \phi = 90^\circ - \theta.$$

Resultado:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{n}\| = 3, \quad \hat{d} \cdot \vec{n} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\theta \approx 54,74^\circ, \quad \phi \approx 35,26^\circ.$$

Interpretación: El cable forma $\approx 35^\circ$ con la pared (no es perpendicular, tiene una componente paralela relevante).

- c) **Componente normal de la fuerza**

Planteamiento: La fuerza total es

$$\vec{F} = |\vec{F}| \hat{d} = 5 \hat{d}.$$

La componente normal se obtiene proyectando sobre la normal unitaria

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}, \quad \vec{F}_n = (\vec{F} \cdot \hat{n})\hat{n}.$$

Resultado:

$$\vec{F} = \frac{5}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{n} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{F} \cdot \hat{n} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

$$\vec{F}_n = \frac{5}{\sqrt{3}} \hat{n} = \frac{5}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,93 \\ -0,96 \\ 1,93 \end{bmatrix} \text{ N.}$$

$$|\vec{F}_n| = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2,89 \text{ N.}$$

Interpretación: Esta es la parte de la tensión que **tira/empuxa perpendicularmente a la pared** (carga normal sobre anclajes).

d) Componente tangencial de la fuerza

Planteamiento: La componente tangencial es la parte restante:

$$\vec{F}_t = \vec{F} - \vec{F}_n.$$

Resultado:

$$\vec{F}_t \approx \begin{bmatrix} 0,96 \\ 3,85 \\ 0,96 \end{bmatrix} \text{ N}, \quad |\vec{F}_t| = \sqrt{|\vec{F}|^2 - |\vec{F}_n|^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{50}{3}} \approx 4,08 \text{ N.}$$

Interpretación: Esta componente actúa **paralela a la pared**, generando tendencia a deslizamiento y esfuerzo cortante en los pernos.

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- **Tensión en Cables:** La tensión es una fuerza interna que se desarrolla en cables, cuerdas o cadenas cuando son estirados. Propiedades importantes:
 - En un cable ideal (sin masa y perfectamente flexible), la tensión tiene magnitud constante a lo largo del cable.
 - La dirección de la fuerza de tensión siempre es **tangente al cable**, siguiendo su geometría.
 - La tensión siempre "tira"(tracción), nunca "puja"(compresión), porque los cables no tienen rigidez a la compresión.
 - En este problema, la tensión tiene magnitud 5 N y dirección desde *A* hacia *B*.
- **Componente Normal de una Fuerza (\vec{F}_n):** Es la parte de la fuerza que actúa **perpendicularmente a una superficie de interés** (en este caso, la pared). Efectos estructurales:
 - Genera **esfuerzos axiales** (de tracción o compresión) sobre los elementos de anclaje.
 - En este problema, $|\vec{F}_n| \approx 2,89$ N actúa jalando el soporte hacia afuera de la pared.
 - Los tornillos o pernos de anclaje deben diseñarse para resistir este esfuerzo de tracción.

- Si la componente normal fuera muy grande, podría arrancar los pernos o despegar el soporte de la pared.
- **Componente Tangencial (de Corte) de una Fuerza (\vec{F}_t):** Es la parte de la fuerza que actúa paralela a la superficie. Efectos estructurales:
 - Genera **esfuerzos cortantes** (también llamados de cizalle o corte) sobre los pernos de anclaje.
 - Intenta hacer que el soporte se "deslice" sobre la pared (hacia abajo, lateralmente, o en una combinación de ambas direcciones).
 - En este problema, $|\vec{F}_t| \approx 4,08$ N actúa paralela a la pared.
 - Los pernos pueden fallar por **corte** si esta componente es demasiado grande, literalmente cortándose.^{en} la interfaz entre el soporte y la pared.
- **Vector Normal a una Superficie:** Un vector \vec{n} es normal a una superficie si es perpendicular a cualquier vector contenido en esa superficie. Propiedades y usos:
 - Define la "orientación" de la superficie en el espacio.
 - En el contexto de una pared plana, \vec{n} apunta "hacia afuera" (o "hacia adentro") perpendicular a la pared.
 - Permite distinguir entre fuerzas que empujan/jalan perpendicularmente vs. fuerzas que actúan tangencialmente.
 - Es fundamental en la ecuación del plano: $\vec{n} \cdot (\vec{P} - \vec{P}_0) = 0$.
- **Análisis de Fuerzas en Estática:** La **estática** es la rama de la mecánica que estudia sistemas en equilibrio (sin aceleración). Principios aplicados en este problema:
 - **Descomposición de fuerzas:** Toda fuerza puede descomponerse en componentes según direcciones de interés (normal y tangencial en este caso).
 - **Superposición:** Los efectos de las componentes normal y tangencial pueden estudiarse independientemente.
 - **Diseño estructural:** Cada componente de fuerza requiere un tipo de análisis y diseño diferente para garantizar que la estructura no falle.
- **Sistemas de Anclaje:** Los pernos, tornillos y adhesivos que fijan un soporte a una pared pueden fallar de diferentes maneras:
 - **Falla por tracción:** Causada por la componente normal cuando jala hacia afuera. El perno se arranca o el material de la pared se desmorona.
 - **Falla por corte:** Causada por la componente tangencial. El perno se corta.^o el soporte se desliza.
 - El diseño debe considerar ambas componentes simultáneamente, típicamente usando un criterio de **interacción** (por ejemplo, una elipse de falla en el espacio fuerza normal vs. tangencial).
- **Interpretación del Ángulo cable-pared:** El ángulo $\phi \approx 35^\circ$ entre el cable y la pared tiene implicaciones prácticas:
 - Un ángulo pequeño (cable casi paralelo a la pared) implica mayor componente tangencial → riesgo de corte.
 - Un ángulo cercano a 90° (cable casi perpendicular) implica mayor componente normal → riesgo de tracción.

- En este caso, con $\phi = 35^\circ$, la componente tangencial domina ($|\vec{F}_t| > |\vec{F}_n|$), lo cual es típico cuando el cable cuelga con cierta inclinación.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- Vectores en \mathbb{R}^3 (Unidad 1.1)
- Norma de un Vector (Unidad 1.2)
- Vector Unitario (Unidad 1.2)
- Producto Escalar (Producto Punto) (Unidad 1.2)
- Proyección Ortogonal (Unidad 1.2 y 1.6)
- Descomposición Ortogonal (Unidad 1.6)
- Ecuación del Plano (Unidad 1.5.3)

2.2. 2. Robótica: Análisis del Espacio de Trabajo de un Brazo Robótico

Contexto de Ingeniería

En robótica industrial, un **brazo robótico** es un sistema mecánico articulado compuesto por varios segmentos rígidos (llamados **eslabones** o **links**) conectados por articulaciones (rotacionales o prismáticas) que permiten el movimiento. Cada eslabón puede representarse matemáticamente como un vector en el espacio tridimensional que indica su posición y dirección.

Uno de los conceptos fundamentales en el diseño y control de robots es el **espacio de trabajo** (o *workspace* en inglés), que es el conjunto de todas las posiciones que el extremo del brazo robótico (llamado **efector final** o *end-effector*) puede alcanzar. Este espacio está limitado por:

- Las longitudes de los eslabones (vectores).
- Los rangos de movimiento de las articulaciones.
- Las restricciones mecánicas del sistema.

Para una configuración instantánea del robot (es decir, en un momento específico con las articulaciones en posiciones determinadas), los dos primeros eslabones definen un **plano de trabajo**, que es el plano geométrico que contiene ambos vectores. Conocer la orientación de este plano es crucial para:

- **Evitar colisiones:** Asegurar que el robot no choque con obstáculos en el entorno.
- **Planificación de trayectorias:** Determinar rutas óptimas para el movimiento del efecto final.
- **Colocación de sensores:** Los sensores (cámaras, láseres, etc.) deben orientarse perpendicularmente al plano de trabajo para obtener mediciones precisas.

El **producto vectorial** (también llamado **producto cruz**) es la herramienta matemática fundamental para determinar la orientación de este plano, ya que produce un vector perpendicular a ambos eslabones.

Planteamiento del Problema

Un brazo robótico industrial tiene dos segmentos representados por los vectores \vec{L}_1 y \vec{L}_2 , como se observa en la Figura 3. En un instante determinado:

- El primer segmento se ubica según el vector $\vec{L}_1 = (2, 1, 3)$ (metros).
- El segundo segmento se extiende desde el final de L_1 siguiendo el vector $\vec{L}_2 = (1, -2, 1)$ (metros).

El equipo de control necesita definir el “plano de trabajo” del brazo para evitar colisiones y optimizar el posicionamiento de sensores. Se solicita:

- a) Determinar un vector normal al plano formado por los dos segmentos del brazo robótico.
- b) Calcular el área del paralelogramo que definiría el alcance máximo de estos dos segmentos en ese plano.
- c) Si se requiere que un sensor apunte perpendicularmente a ambos segmentos, determinar el vector unitario en esa dirección.

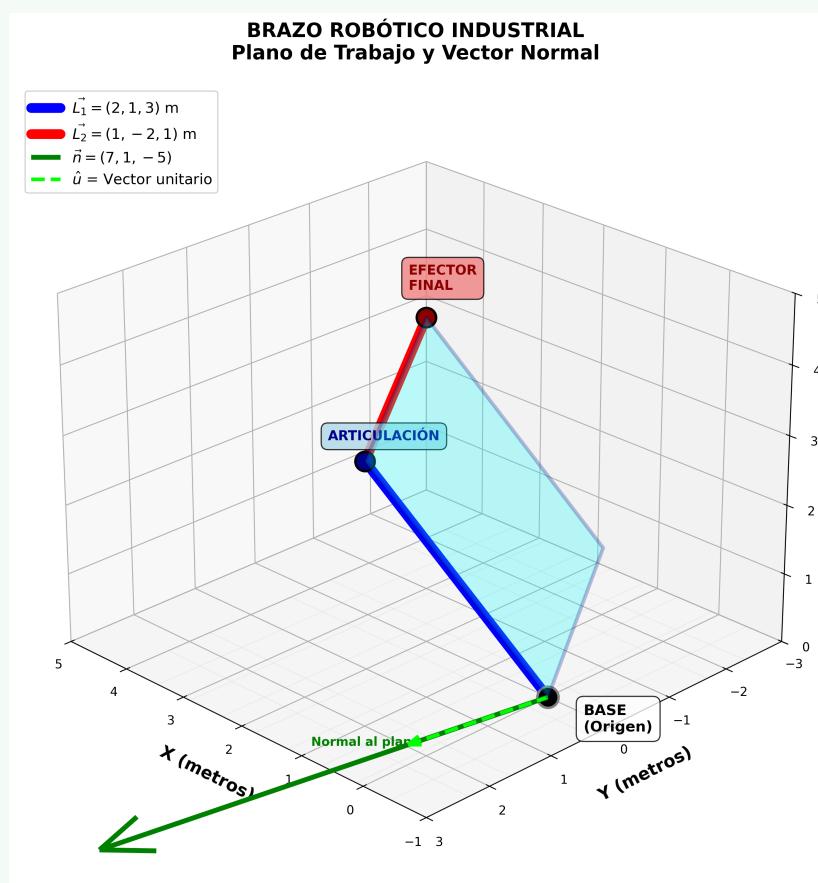


Figura 3: Representación gráfica de un brazo robótico con dos segmentos definiendo un plano de trabajo.

Solución

a) Vector normal al plano de trabajo

Planteamiento: El plano generado por los segmentos \vec{L}_1 y \vec{L}_2 tiene como vector normal:

$$\vec{n} = \vec{L}_1 \times \vec{L}_2.$$

Resultado:

$$\vec{L}_1 = (2, 1, 3), \quad \vec{L}_2 = (1, -2, 1) \Rightarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Interpretación: \vec{n} define la orientación perpendicular al plano de movimiento instantáneo del brazo.

b) Área del paralelogramo en el plano

Planteamiento: El área del paralelogramo definido por \vec{L}_1 y \vec{L}_2 es:

$$A = \|\vec{L}_1 \times \vec{L}_2\| = \|\vec{n}\|.$$

Resultado:

$$A = \|\vec{n}\| = \sqrt{7^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8,66 \text{ m}^2.$$

Interpretación: Representa el **alcance planar instantáneo** asociado a esta configuración del brazo.

c) **Vector unitario perpendicular para orientar el sensor**

Planteamiento: La dirección unitaria perpendicular al plano es:

$$\hat{u} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}.$$

Resultado:

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{75}} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,808 \\ 0,115 \\ -0,577 \end{bmatrix}.$$

Interpretación: Esta es la orientación recomendada para un sensor que debe apuntar **perpendicularmente** al plano de trabajo del brazo.

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- **Cinemática de Robots:** Es la rama de la robótica que estudia el movimiento de los robots sin considerar las fuerzas que lo causan. Se divide en:

- **Cinemática Directa (Forward Kinematics):** Dado el estado de las articulaciones (ángulos o desplazamientos), determinar la posición y orientación del efecto final. El álgebra vectorial (suma de vectores) permite calcular la posición final como suma de los vectores eslabón.
- **Cinemática Inversa (Inverse Kinematics):** Dada una posición deseada del efecto final, determinar los ángulos de las articulaciones necesarios. Es un problema más complejo que puede tener múltiples soluciones o ninguna.

- **Espacio de Trabajo (Workspace):** Es el conjunto de todas las posiciones que el efecto final de un robot puede alcanzar. Se clasifica en:

- **Workspace alcanzable (Reachable Workspace):** Todas las posiciones que el efecto puede alcanzar con al menos una orientación.
- **Workspace diestro (Dextrous Workspace):** Posiciones que pueden alcanzarse con todas las orientaciones posibles.
- **Workspace restringido:** Limitado por obstáculos, límites de articulaciones, y singularidades.

El área del paralelogramo calculada en este problema representa una medida del workspace instantáneo en la configuración dada.

- **Plano de Trabajo:** En una configuración específica del robot, el plano definido por dos eslabones consecutivos determina:

- La región espacial inmediata donde el efecto puede moverse con pequeños ajustes articulares.
- La orientación que deben tener los sensores para máxima precisión.
- Las direcciones en las que el robot puede ejercer fuerzas máximas o mínimas.

- **Ejes de Articulación y Rotación:** En robots con articulaciones rotacionales, el eje de rotación de cada articulación es matemáticamente un vector unitario perpendicular al plano de giro. El producto vectorial permite:

- Determinar estos ejes a partir de la geometría del robot.
- Calcular velocidades angulares y aceleraciones.

- Analizar la cinemática diferencial (relación entre velocidades articulares y velocidad del efecto).
- **Colocación de Sensores:** Los robots industriales están equipados con diversos sensores (cámaras, sensores láser, tátiles, etc.). Para máxima eficacia:
 - Los sensores de visión deben orientarse perpendiculares al plano de trabajo para minimizar distorsión perspectiva.
 - Los sensores de distancia láser funcionan óptimamente cuando el haz es perpendicular a la superficie medida.
 - Los sensores de fuerza/torque requieren conocer la dirección normal para descomponer fuerzas.

El vector unitario calculado proporciona exactamente esta dirección óptima de orientación.

- **Prevención de Colisiones:** En entornos industriales, es crítico que el robot no colisione con:
 - Otros robots o maquinaria en el área de trabajo.
 - Trabajadores humanos (seguridad industrial).
 - Las piezas que está manipulando.

El vector normal al plano de trabajo permite:

- Definir “zonas de exclusión” perpendiculares al movimiento del robot.
- Calcular distancias mínimas a obstáculos.
- Implementar algoritmos de detección de colisiones en tiempo real.

- **Manipulabilidad y Singularidades:** Cuando dos eslabones se vuelven paralelos ($\vec{L}_1 \parallel \vec{L}_2$), el producto vectorial se anula ($\vec{L}_1 \times \vec{L}_2 = \vec{0}$) y el robot entra en una **singularidad cinemática**. En estas configuraciones:

- El robot pierde grados de libertad instantáneamente.
- El área del paralelogramo se reduce a cero.
- El control del robot se vuelve inestable o imposible.

El análisis del producto vectorial permite detectar y evitar estas singularidades durante la planificación de trayectorias.

- **Planificación de Trayectorias:** Para mover el efecto final de una posición a otra, el sistema de control debe:

- Generar una trayectoria suave en el espacio de configuraciones.
- Verificar que la trayectoria esté completamente dentro del workspace.
- Asegurar que no se crucen singularidades.
- Optimizar criterios como tiempo, energía, o suavidad del movimiento.

El conocimiento del plano de trabajo en cada configuración facilita esta planificación.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- **Vectores en \mathbb{R}^3 (Unidad 1.1)**
- **Norma de un Vector (Unidad 1.2)**
- **Vector Unitario (Unidad 1.2)**
- **Producto Vectorial (Producto Cruz) (Unidad 1.4)**

- Área de un Paralelogramo (Unidad 1.4)
- Producto Escalar y Verificación de Ortogonalidad (Unidad 1.2)
- Determinantes y Producto Vectorial (Unidad 2.2)

2.3. 3. Informática: Cálculo de Normales en Mallas Triangulares para Renderizado 3D

Contexto de Ingeniería

En computación gráfica 3D (videojuegos, animación, simulación, visualización científica, CAD), los objetos tridimensionales se representan mediante **mallas poligonales** (*polygon meshes*), que son colecciones de polígonos (generalmente triángulos) que aproximan la superficie del objeto. Los triángulos son la primitiva geométrica preferida porque:

- Son los polígonos más simples (cualquier polígono puede descomponerse en triángulos).
- Siempre son planares (tres puntos definen un único plano).
- Facilitan el procesamiento eficiente en GPUs (unidades de procesamiento gráfico).
- Permiten interpolación lineal de propiedades (colores, texturas, normales).

El problema fundamental de la iluminación:

Para renderizar (dibujar) estos objetos de manera realista, es esencial simular cómo la luz interacciona con cada superficie. La cantidad de luz que una superficie refleja hacia la cámara depende críticamente de:

1. **La orientación de la superficie** respecto a las fuentes de luz.
2. **La orientación de la superficie** respecto a la cámara (observador).

Esta orientación se describe matemáticamente mediante el **vector normal** a la superficie, que es un vector perpendicular que apunta “hacia afuera” del objeto. El vector normal es fundamental para:

- **Modelos de iluminación** (Lambertiano, Phong, PBR): La intensidad de luz reflejada se calcula usando productos escalares entre el vector normal y el vector hacia la fuente de luz.
- **Sombreado** (*shading*): Determinar el color de cada pixel en la pantalla.
- **Back-face culling**: Técnica de optimización que descarta triángulos cuya normal apunta en dirección opuesta a la cámara (no son visibles), reduciendo la carga computacional hasta en un 50 %.

Planteamiento del Problema

En aplicaciones de ingeniería informática, las superficies de los objetos se representan mediante triángulos en el espacio tridimensional. Para simular correctamente la iluminación sobre una superficie, es necesario conocer su **orientación** (vector normal) y su **tamaño** (área).

Considere una superficie triangular definida por los vértices:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (4, 2, 1), \quad C = (2, -3, 3),$$

expresados en un sistema de coordenadas tridimensional (típicamente, metros o unidades arbitrarias del mundo virtual).

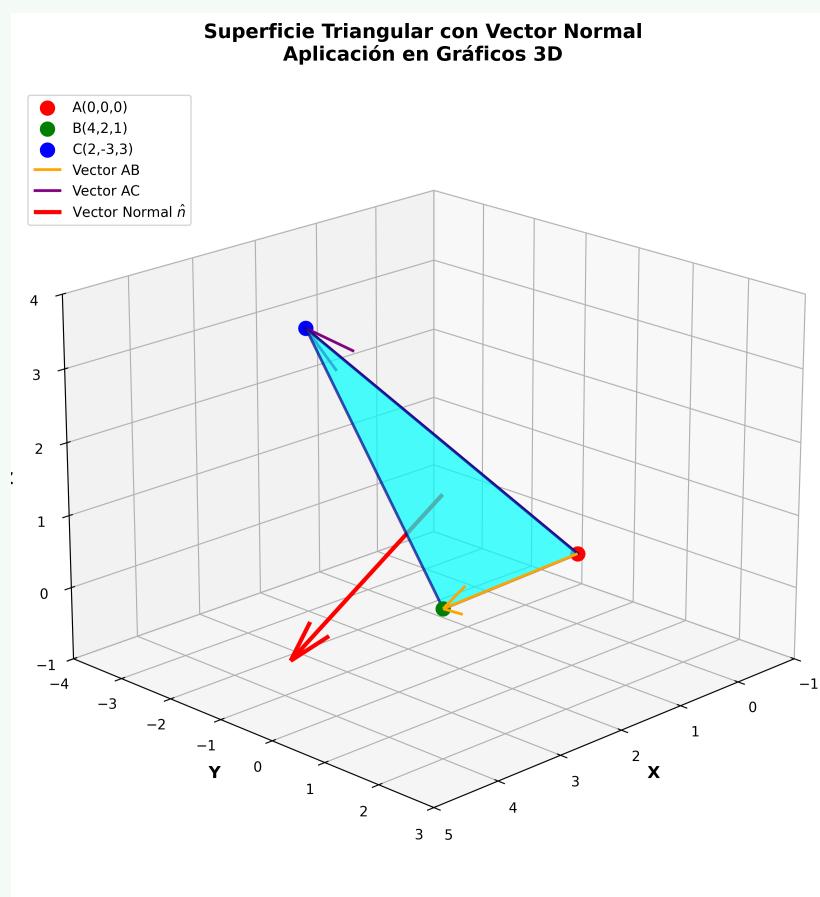


Figura 4: Representación gráfica de una superficie triangular y su vector normal perpendicular a la superficie.

Se solicita:

- Determinar un vector normal al plano que contiene la superficie triangular.
- Calcular el área de la superficie triangular.
- Obtener el vector normal unitario asociado a la superficie (requerido para cálculos de iluminación).

Solución

a) Vector normal al plano del triángulo

Planteamiento: Construir dos vectores del plano y aplicar producto cruz:

$$\vec{AB} = B - A, \quad \vec{AC} = C - A, \quad \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}.$$

Resultado:

$$A = (0, 0, 0), B = (4, 2, 1), C = (2, -3, 3) \Rightarrow \vec{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Interpretación: \vec{n} define la orientación de la cara (normal del triángulo) para cálculos geométricos y de renderizado.

b) **Área de la superficie triangular**

Planteamiento: El área del triángulo es la mitad del paralelogramo:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{n}\|.$$

Resultado:

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{9^2 + (-10)^2 + (-16)^2} = \sqrt{437} \Rightarrow A_{\triangle} = \frac{\sqrt{437}}{2} \approx 10,45 \text{ u}^2.$$

Interpretación: El área se usa para métricas de malla (tamaño de cara) y efectos físicos/visuales (peso en iluminación, simulación, etc.).

c) **Vector normal unitario**

Planteamiento: Normalizar la normal:

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}.$$

Resultado:

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{437}} \begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ -16 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,431 \\ -0,479 \\ -0,766 \end{bmatrix}.$$

Interpretación: \hat{n} es la normal usada directamente en iluminación (Lambert/Phong) y en pruebas de visibilidad (p.ej., back-face culling).

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- **Mallas Poligonales y Modelado 3D:** Los objetos 3D (personajes, edificios, terrenos) se representan mediante **mallas triangulares** (*triangle meshes*):

- Una malla consiste en una lista de vértices (puntos en \mathbb{R}^3) y una lista de triángulos (tripletas de índices de vértices).
- Cada triángulo define una faceta plana de la superficie del objeto.
- Objetos curvos se aproximan mediante muchos triángulos pequeños.
- Formatos estándar: OBJ, STL, GLTF, FBX.

Ventajas de usar triángulos:

- Los triángulos siempre son planares (tres puntos no colineales definen un único plano).
- Cualquier polígono puede triangularse (descomponerse en triángulos).
- Las GPUs están optimizadas para procesar triángulos eficientemente.

- **Modelos de Iluminación:** La simulación de cómo la luz interactúa con superficies es fundamental para el realismo visual. Los modelos principales son:

1. **Iluminación Difusa (Lambert):**

$$I_{diffuse} = I_{light} \cdot k_d \cdot \max(0, \hat{n} \cdot \hat{L})$$

donde:

- I_{light} es la intensidad de la fuente de luz
- k_d es el coeficiente de reflexión difusa del material (0-1)
- \hat{n} es el vector normal unitario a la superficie
- \hat{L} es el vector unitario desde la superficie hacia la fuente de luz

El término $\hat{n} \cdot \hat{L}$ implementa la **ley del coseno de Lambert**: la intensidad de luz reflejada es proporcional al coseno del ángulo entre la normal y la dirección de la luz. Una superficie perpendicular a la luz recibe máxima iluminación; una superficie paralela no recibe luz directa.

2. Componente Especular (Phong):

$$I_{specular} = I_{light} \cdot k_s \cdot \max(0, \hat{R} \cdot \hat{V})^\alpha$$

donde:

- \hat{R} es el vector de luz reflejado: $\hat{R} = 2(\hat{n} \cdot \hat{L})\hat{n} - \hat{L}$
- \hat{V} es el vector desde la superficie hacia la cámara
- α es el exponente de brillo (10-100 para plástico, >100 para metal)

Este modelo produce reflejos brillantes característicos de superficies brillantes.

3. Physically Based Rendering (PBR): Los motores modernos (Unreal Engine, Unity) usan modelos más sofisticados basados en física que simulan interacciones luz-materia más realistas, pero todos siguen requiriendo el vector normal como entrada fundamental.

■ Técnicas de Sombreado (Shading):

Determinan cómo se interpolan colores y normales entre vértices:

- **Flat Shading:** Cada triángulo completo tiene un color uniforme calculado con su normal de cara. Es rápido pero produce apariencia facetada.
- **Gouraud Shading:** Los colores se calculan en los vértices (usando normales de vértice promediadas) y se interpolan linealmente sobre el triángulo. Suaviza la apariencia pero puede perder reflejos especulares.
- **Phong Shading:** Las normales se interpolan sobre el triángulo y la iluminación se calcula por pixel. Produce los resultados más realistas pero es más costoso computacionalmente.

■ Back-Face Culling (Descarte de Caras Traseras):

Es una técnica de optimización crítica que mejora el rendimiento hasta en un 50 %:

Concepto: En objetos opacos cerrados, aproximadamente la mitad de los triángulos tienen sus normales apuntando en dirección opuesta a la cámara. Estos triángulos son invisibles (están “de espaldas”) y no necesitan renderizarse.

Algoritmo:

1. Calcular el vector desde el triángulo hacia la cámara: \hat{V}
2. Calcular el producto escalar: $d = \hat{n} \cdot \hat{V}$
3. Si $d < 0$: La normal apunta en dirección opuesta a la cámara → descartar triángulo
4. Si $d \geq 0$: El triángulo es potencialmente visible → procesarlo

Ventajas:

- Reduce a la mitad el número de triángulos a procesar (menos operaciones de sombreado).
- Reduce el uso de memoria (menos datos en el pipeline gráfico).
- Permite tasas de cuadros más altas (mayor fluidez en videojuegos).

Consideraciones: Solo funciona con objetos cerrados y opacos. No se puede usar con objetos transparentes, de doble cara, o con geometría no-manifold.

- **Normal Mapping y Bump Mapping:** Técnicas avanzadas para simular detalles finos sin aumentar la geometría:
 - En lugar de usar la normal geométrica del triángulo, se almacenan normales perturbadas en una textura (mapa de normales).
 - Cada pixel del triángulo consulta el mapa de normales para obtener una normal modificada.
 - Esto simula detalles como ladrillos, arrugas en piel, o abolladuras en metal sin necesidad de millones de triángulos.
- **Optimización de Mallas y Level of Detail (LOD):** El área de los triángulos es importante para optimización:
 - **Simplificación de mallas:** Algoritmos como Quadric Error Metrics colapsan triángulos pequeños para reducir la complejidad manteniendo la forma general.
 - **LOD (Level of Detail):** Objetos lejanos se representan con mallas de menor resolución (menos triángulos). El sistema decide qué LOD usar basándose en la distancia y el área proyectada en pantalla.
 - Triángulos con áreas menores a un umbral (por ejemplo, menores a un pixel) pueden descartarse sin pérdida visual perceptible.
- **Simulación Física y Colisiones:** El vector normal también es fundamental en física de videojuegos:
 - **Detección de colisiones:** Se calcula si un objeto intersecta un triángulo proyectando el punto sobre el plano del triángulo (usando la normal).
 - **Respuesta a colisiones:** Cuando un objeto choca con una superficie, la fuerza de respuesta actúa en la dirección de la normal.
 - **Fuerzas aerodinámicas:** La resistencia del aire sobre superficies depende del ángulo entre la normal y el vector de velocidad.
- **Pipeline Gráfico Moderno:** El cálculo de normales ocurre en varias etapas del pipeline de rendering:
 1. **CPU (preprocesamiento):** Cálculo de normales de cara y promediado de normales de vértice.
 2. **Vertex Shader (GPU):** Transformación de normales al espacio de vista/mundo usando matrices.
 3. **Interpolación:** Hardware gráfico interpola normales de vértice sobre la superficie del triángulo.
 4. **Fragment/Pixel Shader (GPU):** Uso de normales (posiblemente perturbadas por normal mapping) para calcular iluminación por pixel.
- **Aplicaciones en Realidad Virtual y Aumentada:** El cálculo correcto de normales es crítico para:
 - **Renderizado estereoscópico:** Cada ojo requiere una vista ligeramente diferente, lo que hace el back-face culling más complejo.
 - **Occlusion y spatial mapping:** Reconstrucción 3D del entorno real usando cámaras y sensores de profundidad.
 - **Light estimation:** Estimación de iluminación del mundo real para integrar objetos virtuales consistentemente.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- Vectores en \mathbb{R}^3 (Unidad 1.1)
- Operaciones con Vectores (Unidad 1.1)
- Norma de un Vector (Unidad 1.2)
- Vector Unitario (Unidad 1.2)
- Producto Vectorial (Producto Cruz) (Unidad 1.4)
- Área de un Triángulo mediante Producto Vectorial (Unidad 1.4)
- Producto Escalar y Verificación de Ortogonalidad (Unidad 1.2)
- Determinantes (Unidad 2.2)

3. Unidad 2. Matrices

3.1. 4. Mecánica: Análisis de Estructuras mediante el Método de Nodos

Contexto de Ingeniería

En ingeniería estructural y mecánica, las **cerchas** (o **armaduras**, del inglés *trusses*) son estructuras reticuladas compuestas por elementos rectos (barras) conectados en puntos llamados **nodos** o **juntas**. Estas estructuras son fundamentales en:

- **Puentes:** Estructuras de celosía que salvan grandes distancias (puentes de acero, pasarelas peatonales).
- **Techos:** Soportes de cubiertas en edificios industriales, gimnasios, aeropuertos.
- **Torres:** Torres de transmisión eléctrica, torres de comunicaciones, grúas.
- **Soportes estructurales:** Estructuras temporales, andamios, torres de perforación.

Hipótesis simplificadoras del modelo de cerchas:

Para analizar cerchas matemáticamente, se asumen las siguientes idealizaciones:

1. **Conexiones articuladas (pines):** Los nodos se modelan como articulaciones perfectas que no transmiten momentos (solo fuerzas).
2. **Cargas aplicadas en los nodos:** Las fuerzas externas (pesos, cargas) actúan únicamente en los puntos de conexión, no a lo largo de las barras.
3. **Elementos de dos fuerzas:** Cada barra experimenta únicamente fuerzas axiales (a lo largo de su eje), sin flexión ni torsión.
4. **Peso de las barras despreciable:** El peso propio de los elementos se ignora o se distribuye en los nodos.

Bajo estas hipótesis, cada barra trabaja en uno de dos estados de carga axial:

- **Tracción (o tensión):** La barra se estira (es “jalada” desde ambos extremos). Resultado positivo en el análisis.
- **Compresión:** La barra se comprime (es “empujada” desde ambos extremos). Resultado negativo en el análisis.

El Método de Nodos (Method of Joints):

Es un procedimiento sistemático para determinar las fuerzas internas en todas las barras de una cercha. El método se basa en el principio de que **si toda la estructura está en equilibrio, entonces cada nodo individual también debe estar en equilibrio**.

Procedimiento general:

1. **Analizar la estructura completa:** Determinar las reacciones en los apoyos usando ecuaciones de equilibrio global.
2. **Seleccionar un nodo:** Comenzar con un nodo donde haya al menos dos fuerzas desconocidas.
3. **Diagrama de cuerpo libre (DCL):** Dibujar el nodo aislado con todas las fuerzas que actúan sobre él (externas y de las barras).
4. **Convención de signos:** Asumir que todas las fuerzas desconocidas están en **tracción** (jalando del nodo). Si el resultado es positivo, la suposición es correcta; si es negativo, la barra está en compresión.

5. **Ecuaciones de equilibrio:** Aplicar $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ al nodo.
6. **Resolver el sistema:** Determinar las fuerzas desconocidas (típicamente mediante álgebra lineal).
7. **Repetir:** Proceder al siguiente nodo usando los valores calculados como datos conocidos.

Este proceso convierte el problema de ingeniería estructural en una sucesión de **sistemas de ecuaciones lineales 2×2** (en 2D) o 3×3 (en 3D), que son exactamente el tipo de problemas que resuelve el álgebra de matrices.

Planteamiento del Problema

Un soporte estructural en un taller mecánico sostiene una carga vertical de 1000 N, como se observa en la Figura 5. El sistema está compuesto por dos barras unidas en un nodo central:

- **Barra 1:** Forma un ángulo de 30° con la horizontal (hacia la izquierda), conectada entre el apoyo izquierdo y el nodo central.
- **Barra 2:** Forma un ángulo de 60° con la horizontal (hacia la derecha), conectada entre el nodo central y el apoyo derecho.

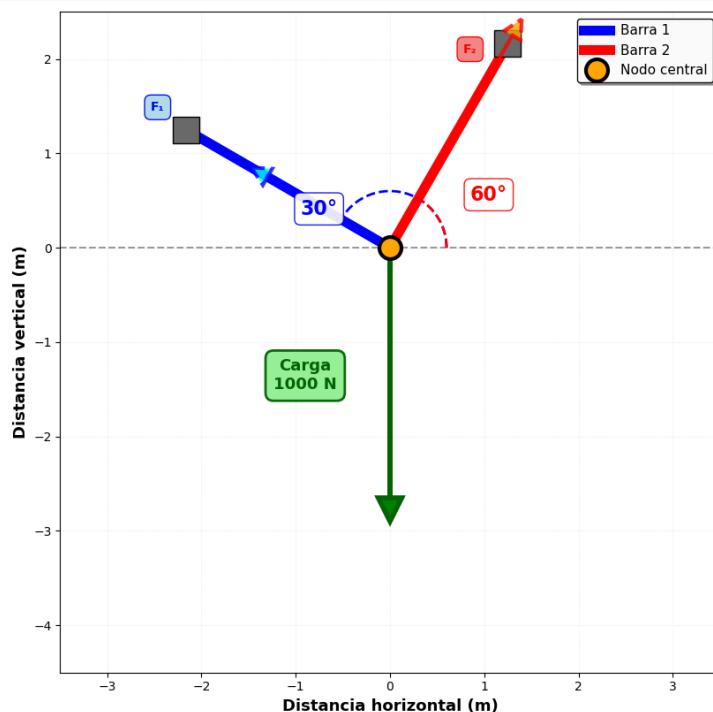


Figura 5: Soporte estructural de taller mecánico con dos barras anguladas y carga vertical de 1000 N aplicada en el nodo central.

Se requiere determinar las fuerzas internas F_1 y F_2 en las barras para realizar el análisis de fatiga del material (determinar si las barras resistirán la carga sin fracturarse o deformarse permanentemente).

Solución

Planteamiento (equilibrio en el nodo): Asumiendo F_1 y F_2 en tracción, se aplica equilibrio estático en el nodo central:

$$\sum F_x = 0 : -F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 : F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ = 1000$$

Sustituyendo valores trigonométricos:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2 = 0, \quad \frac{1}{2}F_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}F_2 = 1000$$

Resultado:

$$F_2 = \sqrt{3}F_1, \quad F_1 = 500 \text{ N}, \quad F_2 = 500\sqrt{3} \approx 866 \text{ N.}$$

Interpretación: Ambas fuerzas resultan positivas \Rightarrow ambas barras trabajan en **tracción**. La barra 2 soporta mayor esfuerzo axial debido a su mayor inclinación (60°), aportando más componente vertical para equilibrar los 1000 N.

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- **Estática y Equilibrio:** La **estática** es la rama de la mecánica que estudia cuerpos en equilibrio (sin aceleración). La **Primera Ley de Newton** establece que un cuerpo en reposo permanece en reposo si la suma de fuerzas es cero:

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

En 2D, esto se descompone en dos ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = 0 \quad (\text{equilibrio horizontal})$$

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{equilibrio vertical})$$

Adicionalmente, para cuerpos rígidos (no solo partículas), se requiere equilibrio rotacional:

$$\sum M = 0 \quad (\text{suma de momentos en cualquier punto})$$

Sin embargo, en el análisis de nodos, asumimos articulaciones perfectas (no transmiten momento), por lo que solo necesitamos las dos ecuaciones de fuerzas.

- **Método de Nodos (Method of Joints):** Es uno de los dos métodos principales para analizar cerchas (el otro es el **método de secciones**).

Fundamento: Si toda la estructura está en equilibrio, cada parte de ella (incluido cada nodo individual) también está en equilibrio. Por lo tanto, podemos aislar cada nodo y aplicar ecuaciones de equilibrio localmente.

Procedimiento sistemático:

1. **Reacciones globales:** Analizar toda la cercha como cuerpo rígido para determinar reacciones en los apoyos ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$).
2. **Selección de nodo inicial:** Comenzar con un nodo donde haya máximo dos fuerzas desconocidas (para tener un sistema 2×2 resoluble).
3. **DCL del nodo:** Dibujar el nodo aislado mostrando todas las fuerzas (externas conocidas + fuerzas en barras desconocidas).

4. **Convención de tracción:** Asumir que todas las barras están en tracción (jalando del nodo). Si el resultado es negativo, corregir a compresión.
5. **Equilibrio del nodo:** Escribir y resolver $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.
6. **Iterar:** Avanzar al siguiente nodo usando los valores calculados.

Ejemplo del proceso en nuestro problema:

- No hay reacciones globales que calcular (las dos barras se conectan a apoyos fijos y solo hay un nodo libre).
 - El nodo central tiene solo dos fuerzas desconocidas (F_1 y F_2) más una conocida (1000 N), perfecto para iniciar.
 - Asumimos ambas barras en tracción.
 - Escribimos equilibrio: $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.
 - Resolvemos el sistema 2×2 con Cramer.
 - Ambos resultados positivos → ambas barras efectivamente en tracción.
- **Tracción vs Compresión:** Son los dos tipos de **carga axial** (a lo largo del eje de la barra) en elementos estructurales:

Tracción (Tensión):

- La barra se estira (alarga) bajo la carga.
- Los extremos jalan de los nodos.
- Esfuerzo normal positivo: $\sigma = F/A > 0$
- Los materiales generalmente resisten bien la tracción (acero, cables, cuerdas).
- Falla típica: Fractura en la sección más débil o en conexiones.

Compresión:

- La barra se acorta bajo la carga.
- Los extremos empujan los nodos.
- Esfuerzo normal negativo: $\sigma = F/A < 0$
- Preocupación adicional: **Pandeo** (buckling) en elementos esbeltos.
- Falla típica: Pandeo (doblamiento lateral súbito) o aplastamiento del material.

Fórmula de Euler para pandeo:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

donde E = módulo de Young, I = momento de inercia, L = longitud, K = factor de extremos (1 para articulado-articulado).

Si $F_{compresión} > F_{cr}$, la barra pandeará incluso si el esfuerzo axial está por debajo de la resistencia del material.

- **Análisis de Cerchas (Truss Analysis):** Las cerchas son estructuras reticuladas compuestas por barras rectas conectadas en nodos. Son ubicuas en ingeniería por sus ventajas:

Ventajas de las cerchas:

- **Eficiencia estructural:** Alta relación resistencia/peso (ideal para puentes y techos de gran luz).
- **Simplicidad de análisis:** Con las hipótesis de articulaciones perfectas y cargas en nodos, el análisis se reduce a álgebra lineal.
- **Modularidad:** Pueden ensamblarse en campo con elementos prefabricados.

- **Economía:** Minimizan el uso de material al trabajar cada barra en carga axial pura (sin flexión costosa en términos de material).

Tipos de cerchas:

- **Cerchas planas:** Todos los elementos en un plano (puentes, techos simples).
- **Cerchas espaciales:** Elementos en 3D (torres, cúpulas, estructuras espaciales).

Clasificación según grado de determinación:

Para una cercha plana con m barras, j nodos, y r reacciones de apoyo:

$$m + r = 2j \rightarrow \text{Estáticamente determinada}$$

- Si $m + r < 2j$: Estructura **inestable** (mecanismo).
- Si $m + r = 2j$: Estructura **estáticamente determinada** (como nuestro ejemplo).
- Si $m + r > 2j$: Estructura **hiperestática** (redundante), requiere análisis de deformaciones.

En nuestro problema: $m = 2$ barras, $j = 1$ nodo libre (+ 2 apoyos fijos), $r = 0$ reacciones horizontales libres $\rightarrow m = 2 = 2j$ (determinada).

- **Diagrama de Cuerpo Libre (Free Body Diagram, FBD):** Es una herramienta fundamental en mecánica que consiste en:

1. Aislar (mental o gráficamente) el cuerpo o parte del sistema de interés.
2. Dibujar el cuerpo mostrando solo las fuerzas externas que actúan sobre él.
3. Omitir fuerzas internas (que se cancelan según la Tercera Ley de Newton).
4. Establecer un sistema de coordenadas.
5. Aplicar ecuaciones de equilibrio o dinámica.

En el método de nodos, dibujamos un DCL para cada nodo, mostrando:

- Fuerzas en las barras conectadas (asumidas en tracción).
- Cargas externas aplicadas directamente al nodo.
- (No incluimos reacciones de otras partes de la estructura; esas son internas al nodo)

- **Selección de Materiales y Análisis de Fatiga:** Una vez calculadas las fuerzas F_1 y F_2 , el ingeniero debe:

1. Calcular esfuerzos:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

donde A es el área de la sección transversal. El esfuerzo debe estar por debajo de la **resistencia a la fluencia** σ_y (con factor de seguridad).

2. **Verificar pandeo (si hay compresión):** Usar la fórmula de Euler o códigos de diseño (AISC, Eurocódigo).

3. **Análisis de fatiga:** Si las cargas son cíclicas (puente vehicular, grúa móvil), usar diagramas S-N (esfuerzo vs número de ciclos) para estimar vida útil.

4. Seleccionar material:

- **Acero estructural:** Excelente en tracción y compresión, soldable, económico (A36, A572).
- **Aluminio:** Ligero, resistente a corrosión, pero módulo menor (más deformación).
- **Madera:** Usada en estructuras temporales o tradicionales, buena en compresión paralela a la fibra.
- **Materiales compuestos:** Fibra de carbono/vidrio en aplicaciones de alta performance.

- **Método de Secciones (Method of Sections):** Alternativa al método de nodos para calcular fuerzas en barras específicas sin resolver toda la estructura:

1. Cortar la cercha con una línea imaginaria que atraviese máximo 3 barras (incluyendo la barra de interés).
2. Analizar una de las dos partes resultantes como cuerpo rígido.
3. Aplicar equilibrio global: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$ (3 ecuaciones, máximo 3 incógnitas).

Ventaja: Permite calcular directamente una fuerza específica sin resolver nodo por nodo.

- **Métodos Matriciales Avanzados en Análisis Estructural:** Para estructuras grandes (cientos de barras), se usan métodos computacionales basados en matrices:

Método de Rigidez (Stiffness Method/FEM):

$$Kd = F$$

donde K es la matriz de rigidez global, d es el vector de desplazamientos nodales, y F es el vector de fuerzas externas.

Este es el fundamento del **Método de Elementos Finitos (FEM)**, usado en software como ANSYS, SAP2000, ETABS.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- **Álgebra de Matrices (Unidad 2.1)**
- **Determinantes (Unidad 2.2.2)**
- **Regla de Cramer (Unidad 2.3)**
- **Sistemas de Ecuaciones Lineales (Unidad 2.3)**
- **Operaciones Elementales de Fila (Unidad 2.2.1)**
- **Inversa de Matrices (Unidad 2.2)**

3.2. 5. Electrónica: Análisis de Circuitos Resistivos mediante Leyes de Kirchhoff

Contexto de Ingeniería

En ingeniería eléctrica y electrónica, el análisis de circuitos es fundamental para diseñar, comprender y optimizar sistemas eléctricos. Los **circuitos resistivos de corriente continua (DC)** son la base del análisis de circuitos más complejos con componentes activos (transistores, amplificadores operacionales) y elementos reactivos (capacitores, inductores).

Conceptos fundamentales:

- **Voltaje (V):** Diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos. Es el "puje" que impulsa a los electrones a moverse. Se mide en Voltios (V). Análogamente, es como la presión en un sistema hidráulico.
- **Corriente (I):** Flujo de carga eléctrica a través de un conductor. Se mide en Amperios (A). Un amperio equivale a un coulomb de carga pasando por un punto en un segundo: $I = \frac{dQ}{dt}$. Es análogo al caudal de agua en una tubería.
- **Resistencia (R):** Oposición que presenta un material al flujo de corriente. Se mide en Ohmios (Ω). Los materiales resistentes convierten energía eléctrica en calor (efecto Joule). Es análoga a la fricción en una tubería.

Ley de Ohm: Es la relación fundamental entre voltaje, corriente y resistencia:

$$V = I \cdot R \quad \text{o equivalentemente} \quad I = \frac{V}{R}, \quad R = \frac{V}{I}$$

Esta ley establece que el voltaje a través de un resistor es directamente proporcional a la corriente que lo atraviesa.

Leyes de Kirchhoff:

Son dos principios fundamentales que se derivan de las leyes de conservación de la física (conservación de carga y energía):

1. Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK o KCL - Kirchhoff's Current Law):

$$\sum I_{\text{entrantes}} = \sum I_{\text{salientes}} \quad \text{o equivalentemente} \quad \sum I = 0$$

Enunciado: En cualquier nodo (punto de conexión de dos o más elementos), la suma algebraica de las corrientes debe ser cero. Es decir, toda la carga que entra debe salir (no se acumula ni desaparece).

Fundamento físico: Principio de conservación de la carga eléctrica. En condiciones estacionarias, no puede haber acumulación de carga en un nodo.

Aplicación: Si tres corrientes convergen en un nodo con I_1 entrando, I_2 saliendo, e I_3 saliendo:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \rightarrow \quad I_1 = I_2 + I_3$$

2. Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK o KVL - Kirchhoff's Voltage Law):

$$\sum V_{\text{malla}} = 0$$

Enunciado: En cualquier lazo cerrado (malla) de un circuito, la suma algebraica de todos los voltajes debe ser cero. Es decir, la energía ganada por las cargas en las fuentes es igual a la energía perdida en los resistores.

Fundamento físico: Principio de conservación de la energía. El campo eléctrico es conservativo, por lo que el trabajo realizado al mover una carga alrededor de un camino cerrado es cero.

Convención de signos:

- Al recorrer una malla en cierta dirección (horaria o antihoraria):
- **Fuentes de voltaje:** Sumar con signo positivo si se atraviesa del terminal negativo al positivo (ganancia de energía); negativo en caso contrario.
- **Resistores:** Restar el voltaje (caída de voltaje) si la corriente va en la dirección del recorrido; sumar si va en sentido opuesto.

Métodos de Análisis de Circuitos:

Existen varios métodos sistemáticos para analizar circuitos complejos:

1. **Método de Corrientes de Malla (Mesh Current Method):** Se asigna una corriente ficticia a cada malla y se aplica LVK a cada una. Resulta en un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son las corrientes de malla.
2. **Método de Voltajes de Nodo (Node Voltage Method):** Se asigna un voltaje a cada nodo respecto a tierra y se aplica LCK a cada nodo. Las incógnitas son los voltajes nodales.
3. **Método Mixto (usado en este problema):** Combina LCK en ciertos nodos con LVK en ciertas mallas para obtener un sistema de ecuaciones completo.

Todos estos métodos convierten el problema físico de analizar un circuito en un problema matemático de **resolver un sistema de ecuaciones lineales**, que es exactamente lo que estudia el álgebra lineal.

Planteamiento del Problema

En el laboratorio de electrónica, se requiere analizar el comportamiento de la red de corriente continua mostrada en la Figura 6. El sistema consta de:

- Una fuente de voltaje ideal de 30 V (representa una batería o fuente de poder).
- Tres resistencias: $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$.
- Un nodo central (nodo a) donde se dividen las corrientes.

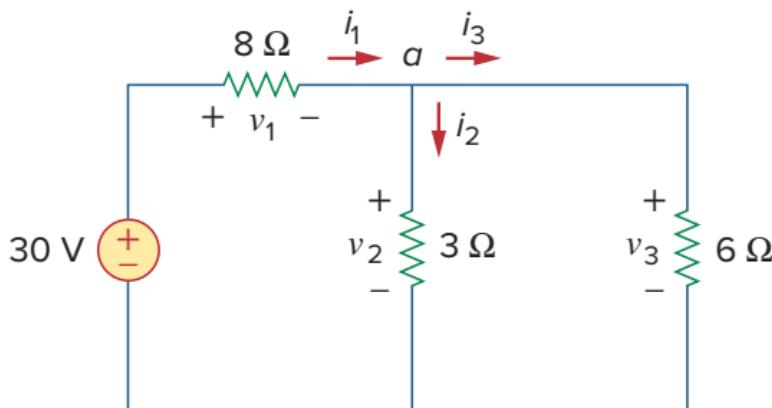


Figura 6: Circuito resistivo con fuente de 30V. La corriente i_1 entra al nodo a , donde se divide en i_2 e i_3 que fluyen hacia tierra a través de R_2 y R_3 respectivamente.

Variables del circuito:

- i_1 : Corriente que sale de la fuente y pasa por R_1 (corriente total suministrada).
- i_2 : Corriente que pasa por R_2 (rama superior derecha).

- i_3 : Corriente que pasa por R_3 (rama inferior derecha).

Se solicita:

- Establecer el sistema de ecuaciones lineales (SEL) aplicando LCK en el nodo a y LVK en las mallas.
- Resolver el sistema detalladamente mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.
- Determinar los voltajes v_1 , v_2 y v_3 en cada resistencia usando la Ley de Ohm.

Solución

- Sistema de ecuaciones (LCK + LVK)**

Planteamiento:

$$\text{LCK en } a : i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$\text{LVK malla (fuente} - R_1 - R_2 \text{)} : 30 - 8i_1 - 3i_2 = 0 \Rightarrow 8i_1 + 3i_2 = 30$$

$$\text{LVK malla (} R_2 - R_3 \text{)} : 3i_2 - 6i_3 = 0$$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Interpretación: Un SEL modela el circuito a partir de conservación de carga (nodos) y energía (mallas).

- Solución del sistema**

Resultado:

$$i_1 = 3 \text{ A}, \quad i_2 = 2 \text{ A}, \quad i_3 = 1 \text{ A.}$$

Interpretación: La corriente total se divide en las ramas ($i_1 = i_2 + i_3$) según resistencias.

- Voltajes en las resistencias (Ley de Ohm)**

Planteamiento: $v_k = i_k R_k$.

Resultado:

$$v_1 = 8(3) = 24 \text{ V}, \quad v_2 = 3(2) = 6 \text{ V}, \quad v_3 = 6(1) = 6 \text{ V.}$$

Interpretación: R_2 y R_3 quedan con el mismo voltaje ($v_2 = v_3$) porque están en paralelo respecto al nodo a y tierra.

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- Voltaje (Diferencia de Potencial):** Es el trabajo por unidad de carga eléctrica ejercido por el campo eléctrico para mover una carga entre dos puntos. Se mide en Voltios (V):

$$V = \frac{W}{Q} \quad \text{donde } W = \text{trabajo (J)}, Q = \text{carga (C)}$$

Analogía hidráulica: El voltaje es como la presión en un sistema de tuberías. A mayor presión (voltaje), mayor flujo (corriente) puede generarse.

Tipos:

- **Voltaje de fuente:** Energía suministrada por baterías, generadores, fuentes de poder.

- **Caída de voltaje:** Energía disipada en resistencias, convertida en calor.
- **Corriente (Intensidad):** Es la tasa de flujo de carga eléctrica. Se mide en Amperios (A):

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{o para DC: } I = \frac{Q}{t}$$

1 Amperio = 1 Coulomb/segundo = $6,242 \times 10^{18}$ electrones/segundo

Tipos:

- **Corriente Directa (DC):** Flujo constante en una dirección (baterías, fuentes DC).
- **Corriente Alterna (AC):** Flujo que cambia dirección periódicamente (red eléctrica doméstica: 50/60 Hz).

Dirección convencional: Por convención histórica, la corriente fluye del terminal positivo al negativo (opuesto al flujo real de electrones).

- **Resistencia y Resistores:** La resistencia cuantifica la oposición al flujo de corriente. Se mide en Ohmios (Ω).

Ley de Ohm:

$$V = I \cdot R \quad \leftrightarrow \quad I = \frac{V}{R} \quad \leftrightarrow \quad R = \frac{V}{I}$$

Potencia disipada en un resistor:

$$P = V \cdot I = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (\text{Efecto Joule})$$

La energía eléctrica se convierte en calor. Esto es útil en calefactores, pero indeseable en circuitos electrónicos (pérdidas).

Resistores en serie y paralelo:

- **Serie:** $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ (se suman directamente)
- **Paralelo:** $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$

En nuestro circuito, R_2 y R_3 están en paralelo:

$$R_{\text{eq}}(R_2 \parallel R_3) = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega$$

- **Leyes de Kirchhoff - Fundamentos Físicos:**

Ley de Corrientes (LCK): Basada en el **principio de conservación de la carga**. La carga eléctrica no se crea ni se destruye, solo se mueve. Por lo tanto, en condiciones estacionarias (DC), no puede haber acumulación de carga en ningún punto del circuito.

Formulación matemática:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (\text{suma algebraica en un nodo})$$

Signo positivo para corrientes que entran, negativo para las que salen.

Ley de Voltajes (LVK): Basada en el **principio de conservación de la energía** y en que el campo eléctrico es **conservativo** (el trabajo realizado al mover una carga alrededor de un camino cerrado es cero).

Formulación matemática:

$$\sum_{k=1}^m V_k = 0 \quad (\text{suma algebraica en una malla cerrada})$$

■ **Métodos Sistémicos de Análisis:**

1. Método de Corrientes de Malla:

- Se asigna una corriente ficticia a cada malla independiente.
- Se aplica LVK a cada malla.
- Resulta en un sistema donde las incógnitas son las corrientes de malla.
- Ventaja: Reduce el número de ecuaciones (número de mallas < número de ramas).

2. Método de Voltajes de Nodo:

- Se asigna un voltaje a cada nodo respecto a un nodo de referencia (tierra).
- Se aplica LCK a cada nodo (excepto tierra).
- Las incógnitas son los voltajes nodales.
- Ventaja: Útil cuando hay muchas fuentes de corriente.

3. Método Mixto (usado en este problema):

- Combina LCK y LVK según convenga.
- Flexible, se adapta a la estructura del circuito.

■ **Divisores de Corriente y Voltaje:**

En nuestro circuito, R_2 y R_3 forman un **divisor de corriente**. La corriente i_1 que llega al nodo a se divide en i_2 e i_3 de forma inversamente proporcional a las resistencias:

$$i_2 = i_1 \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3 \cdot \frac{6}{3+6} = 2 \text{ A}$$

$$i_3 = i_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 3 \cdot \frac{3}{3+6} = 1 \text{ A}$$

Esto confirma nuestros resultados analíticamente.

■ **Análisis de Potencia:**

La potencia es la tasa de transferencia de energía. En circuitos:

$$P = V \cdot I \quad (\text{definición general})$$

Para resistores:

$$P_R = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (\text{siempre positiva, disipación})$$

Para fuentes:

- $P > 0$: La fuente suministra energía al circuito
- $P < 0$: La fuente absorbe energía (como una batería recargándose)

Conservación de potencia: $\sum P_{\text{fuentes}} = \sum P_{\text{cargas}}$

En nuestro circuito: $90 \text{ W} = 72 + 12 + 6 \text{ W}$

■ **Aplicaciones Prácticas:**

- **Diseño de fuentes de poder:** Determinar corrientes para dimensionar componentes y transformadores.
- **Sistemas de iluminación:** Calcular corrientes en redes de LEDs o lámparas.
- **Circuitos de sensores:** Analizar divisores de voltaje para acondicionar señales.
- **Protección de circuitos:** Dimensionar fusibles y cables según corrientes máximas.
- **Análisis térmico:** Calcular disipación de calor en resistencias de potencia.

■ Software de Simulación:

En la práctica profesional, circuitos complejos se analizan con software especializado:

- **SPICE** (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis): Estándar de la industria.
- **LTspice, PSpice, Multisim**: Versiones comerciales y gratuitas.
- Estos programas resuelven internamente sistemas de ecuaciones lineales gigantes (miles de variables) usando métodos numéricos avanzados (LU, QR, iterativos).

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- **Sistemas de Ecuaciones Lineales (Unidad 2.3)**
- **Operaciones Elementales de Fila (Unidad 2.2.1)**
- **Método de Gauss-Jordan (Unidad 2.3)**
- **Determinantes (Unidad 2.2.2)**
- **Matriz Aumentada (Unidad 2.3)**
- **Inversa de Matrices (Unidad 2.2)**
- **Conexión con Regla de Cramer (Unidad 2.3)**

3.3. 6. Transporte: Análisis de Flujo Vehicular en Redes Urbanas

Contexto de Ingeniería

El análisis de flujo de tráfico vehicular es fundamental para la **planificación urbana**, la gestión de infraestructura vial y la optimización del transporte público. En ingeniería de transporte, se utilizan modelos matemáticos para entender cómo se distribuye el tráfico en una red de calles, identificar cuellos de botella, predecir congestiones y diseñar intervenciones efectivas.

Principios Fundamentales del Flujo de Tráfico:

1. Conservación de Flujo (Ley de Kirchhoff para Tráfico):

En condiciones de estado estacionario (sin acumulación de vehículos), la cantidad de vehículos que entra a una intersección debe ser igual a la cantidad que sale:

$$\sum \text{Flujos de entrada} = \sum \text{Flujos de salida}$$

Este principio es análogo a:

- **Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)** en circuitos eléctricos (conservación de carga)
- **Ecuación de continuidad** en mecánica de fluidos (conservación de masa)

Formulación matemática: Para cada nodo (intersección) i :

$$\sum_{j \in \text{entradas}} q_j = \sum_{k \in \text{salidas}} q_k$$

donde q representa el flujo volumétrico (vehículos por hora, veh/h).

2. Modelado de Redes de Transporte:

Las redes viales se modelan como **grafos dirigidos**:

- **Nodos (vértices):** Representan intersecciones, rotondas, cruces.
- **Aristas (arcos):** Representan calles, avenidas, enlaces viales.
- **Dirección:** Indica el sentido del tráfico (unidireccional o bidireccional).
- **Peso:** Puede representar capacidad vial, longitud, tiempo de viaje, o flujo.

Planteamiento del Problema

La Dirección de Tránsito de la Municipalidad de Viña del Mar estudia el comportamiento del tráfico vehicular en un cuadrante urbano que conecta el sector de **7 Norte con Avenida Libertad**. Este sector está compuesto por cuatro intersecciones principales, identificadas como **A, B, C y D**, unidas por calles de un solo sentido, como se observa en la Figura 7.

Debido a futuras obras viales (repavimentación, instalación de semáforos inteligentes, construcción de ciclovías), se requiere analizar si es posible **redistribuir el tráfico o cerrar temporalmente algunos tramos** sin provocar congestión o colapso en la red.

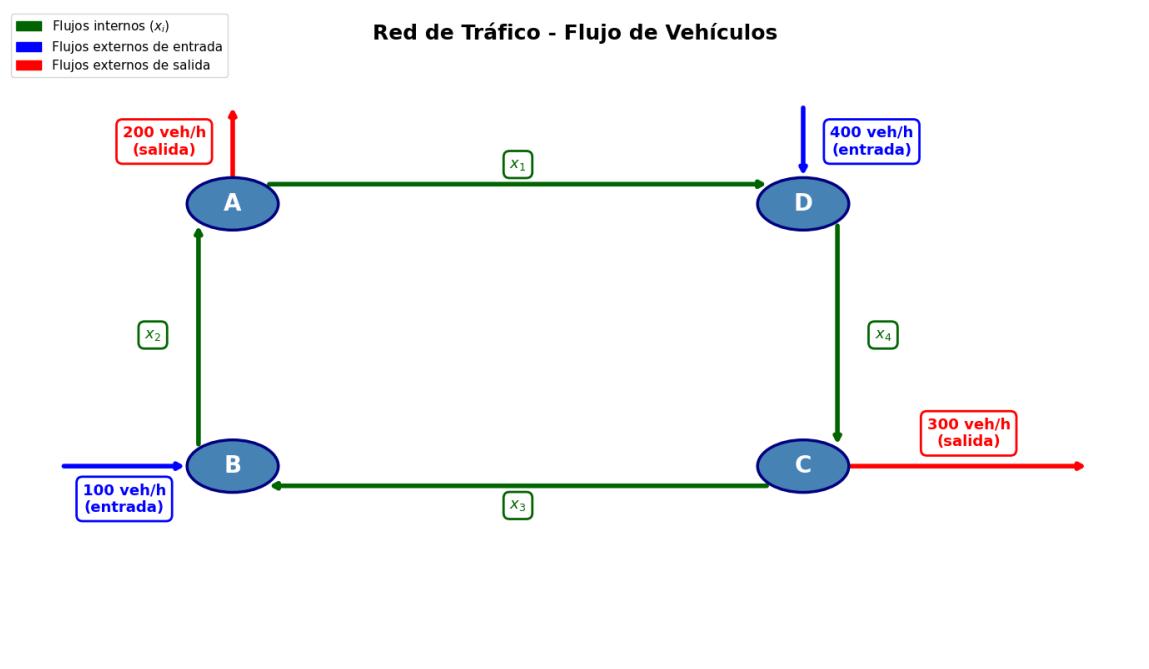


Figura 7: Red de flujo vehicular en el sector 7 Norte con Avenida Libertad, Viña del Mar. Los nodos A, B, C y D representan intersecciones. Las flechas indican flujos externos (entradas/salidas) y flujos internos x_1, x_2, x_3, x_4 [veh/h].

Variables del problema:

Se definen las siguientes variables como los flujos vehiculares (vehículos por hora, veh/h) que circulan por los **tramos internos** de la red:

- x_1 : Flujo desde la intersección A hacia la intersección D.
- x_2 : Flujo desde la intersección B hacia la intersección A.
- x_3 : Flujo desde la intersección C hacia la intersección B.
- x_4 : Flujo desde la intersección D hacia la intersección C.

Datos de flujos externos (medidos con sensores durante la hora punta):

- **Intersección A:** Entrada: x_2 (desde B). Salidas: x_1 (hacia D) + 200 veh/h (hacia el centro de la ciudad).
- **Intersección B:** Entradas: 100 veh/h (desde calle lateral) + x_3 (desde C). Salida: x_2 (hacia A).
- **Intersección C:** Entrada: x_4 (desde D). Salidas: x_3 (hacia B) + 300 veh/h (hacia zona residencial).
- **Intersección D:** Entradas: 400 veh/h (desde avenida principal) + x_1 (desde A). Salida: x_4 (hacia C).

Objetivos del estudio:

- Plantear las ecuaciones de balance de flujo para cada intersección y expresarlas en forma matricial $Ax = b$.
- Analizar la consistencia del sistema utilizando el concepto de **rango de la matriz** y explicar el significado de que existan **infinitas soluciones**.
- Determinar el **valor mínimo** del flujo x_4 que garantice que ningún tramo de la red tenga flujo negativo (condición de factibilidad física).

Solución

a) Ecuaciones de balance y forma matricial

Planteamiento (entradas = salidas):

$$A: x_2 = x_1 + 200 \Rightarrow x_1 - x_2 = -200$$

$$B: x_3 + 100 = x_2 \Rightarrow x_2 - x_3 = 100$$

$$C: x_4 = x_3 + 300 \Rightarrow x_3 - x_4 = -300$$

$$D: x_1 + 400 = x_4 \Rightarrow -x_1 + x_4 = 400$$

Forma matricial $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 100 \\ -300 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

Interpretación: Es un SEL de conservación de flujo (modelo de red / matriz de incidencia).

b) Consistencia, rango e infinitas soluciones

Resultado clave: La última ecuación es combinación lineal de las otras (dependencia), por lo que:

$$(A) = ([A|b]) = 3 < 4.$$

Interpretación: El sistema es consistente pero no tiene solución única; existe **1 grado de libertad** (una variable libre), lo que representa **flexibilidad** para redistribuir flujos internos manteniendo los balances.

c) Solución paramétrica y mínimo x_4 factible

Planteamiento: Tomando $x_4 = t$ como parámetro libre y sustituyendo hacia atrás:

$$x_3 = t - 300, \quad x_2 = t - 200, \quad x_1 = t - 400, \quad x_4 = t.$$

Resultado:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t - 400 \\ t - 200 \\ t - 300 \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Factibilidad física ($x_i \geq 0$):

$$t - 400 \geq 0 \Rightarrow t \geq 400 \quad (\text{condición dominante}).$$

Mínimo:

$$\boxed{x_{4,\min} = 400 \text{ veh/h}} \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 200, 100, 400).$$

Interpretación: Con $x_4 = 400$ el tramo x_1 queda en el límite (flujo cero). Valores menores exigirían flujo negativo en x_1 , lo cual no es físicamente posible en una vía de sentido único.

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- **Conservación de Flujo:** Principio fundamental análogo a la conservación de masa en fluidos o carga en circuitos. En estado estacionario:

$$\sum_{\text{entradas}} q = \sum_{\text{salidas}} q$$

- **Teoría de Grafos:** Las redes viales se modelan como grafos dirigidos $G = (V, E)$ donde V son nodos (intersecciones) y E son aristas (calles).

Matriz de incidencia nodo-arco: Codifica la topología de la red. En redes cerradas con ciclos, las filas son linealmente dependientes, explicando por qué $\text{rango}(A) < n$.

- **Planificación Urbana:** El análisis permite:

- Evaluar cierres de calles
- Diseñar desvíos temporales
- Redistributions de tráfico sin congestión
- Optimizar según demanda variable

- **Software de Simulación:** En la práctica se usan:

- **VISSIM, AIMSUN:** Simulación microscópica
- **SUMO:** Simulación open-source
- **TransCAD, EMME:** Modelado regional
- **Synchro:** Optimización de semáforos

- **Extensiones:**

- Restricciones de capacidad: $x_i \leq C_i$ (programación lineal)
- Problema de flujo máximo (Ford-Fulkerson)
- Asignación en equilibrio (no lineal)
- Modelos dinámicos con dependencia temporal

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- **Sistemas de Ecuaciones Lineales (Unidad 2.3)**
- **Rango de una Matriz (Unidad 2.2.1)**
- **Teorema de Rouché-Frobenius (Unidad 2.3)**
- **Variables Libres y Básicas (Unidad 2.3)**
- **Solución Paramétrica (Unidad 2.3)**
- **Eliminación Gaussiana (Unidad 2.2.1)**
- **Determinante (Unidad 2.2.2)**

4. Unidad 3. Espacios Vectoriales

4.1. 7. Mecánica: Análisis de Esfuerzos Principales en Álabes de Turbina

Contexto de Ingeniería

Durante la operación de una turbina de gas (usada en aviación, generación eléctrica, o propulsión naval), los álabes (aspas de la turbina) experimentan **cargas centrífugas severas** debido a la alta velocidad de rotación (hasta 10,000-20,000 RPM en turbinas de aviación). Estas cargas generan **estados de esfuerzo complejos** que combinan:

- **Esfuerzos normales** ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$): Tensión o compresión perpendicular a un plano.
- **Esfuerzos cortantes** ($\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$): Fuerzas tangenciales que tienden a deslizar capas del material.

Para prevenir **fallas catastróficas** por fatiga, fractura o fluencia, es imperativo identificar los **esfuerzos principales** ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Estos representan:

- Los valores máximos de tensión normal en un punto.
- Ocurren precisamente en los planos donde el esfuerzo de corte es **nulo** ($\tau = 0$).
- Son las magnitudes críticas que se comparan con los límites de resistencia del material.

Tensor de Esfuerzos:

El estado de esfuerzos en un punto se describe mediante un **tensor de segundo orden** (matriz simétrica 3×3 en 3D, o 2×2 en estado plano):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

donde:

- **Elementos diagonales** ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$): Esfuerzos normales en las direcciones x, y, z.
- **Elementos fuera de la diagonal** (τ_{ij}): Esfuerzos cortantes. Por simetría: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Importancia de los Esfuerzos Principales:

1. **Criterios de falla:** Los materiales fallan cuando los esfuerzos principales exceden límites críticos:
 - **Criterio de Tresca:** $\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_y$ (materiales dúctiles)
 - **Criterio de von Mises:** $\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_y$
 - **Criterio de Mohr-Coulomb:** Para materiales frágiles (cerámicos, concreto)
2. **Análisis de fatiga:** Las cargas cíclicas en los esfuerzos principales determinan la vida útil del componente.
3. **Diseño óptimo:** Orientar fibras en materiales compuestos o alinear granos en forja según direcciones principales.

Conexión con Álgebra Lineal:

La transición del estado de carga medido (en un sistema de coordenadas arbitrario) hacia los esfuerzos principales (en un sistema de coordenadas óptimo) se realiza mediante la **diagonalización del tensor de esfuerzos**:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$$

donde:

- \mathbf{D} = Matriz diagonal con los esfuerzos principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) = **Valores propios**
- \mathbf{P} = Matriz de vectores propios (direcciones principales)

Planteamiento del Problema

En un punto crítico de la raíz del álabe (zona de máxima concentración de esfuerzos, donde el álabe se une al disco de la turbina), se ha medido experimentalmente (mediante galgas extensométricas o fotoelasticidad) el tensor de esfuerzo T respecto a un sistema de coordenadas estándar (en MPa):

$$T = \begin{bmatrix} 80 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix}$$

donde:

- $T_{11} = 80$ MPa: Esfuerzo normal en dirección x (axial)
- $T_{22} = 50$ MPa: Esfuerzo normal en dirección y (tangencial)
- $T_{12} = T_{21} = 20$ MPa: Esfuerzo cortante (por simetría del tensor)

Nota: Asumimos estado plano de esfuerzos ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$), válido para componentes delgados o cuando una dirección es libre de carga.

Se solicita al estudiante:

- a) Determinar las magnitudes de los **esfuerzos principales** calculando los valores propios (λ_1, λ_2) de la matriz T .
- b) Encontrar los **vectores propios** asociados para definir la dirección de los ejes principales de deformación.
- c) Escribir la **matriz diagonal** D y explicar por qué los componentes fuera de la diagonal principal son cero en este nuevo sistema de coordenadas.

Solución

- a) **Esfuerzos principales (valores propios)**

Planteamiento: Resolver la ecuación característica:

$$\det(T - \lambda I) = 0, \quad T = \begin{bmatrix} 80 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix}.$$

Resultado:

$$\det \begin{bmatrix} 80 - \lambda & 20 \\ 20 & 50 - \lambda \end{bmatrix} = (80 - \lambda)(50 - \lambda) - 400 = \lambda^2 - 130\lambda + 3600 = 0,$$

$$\lambda_1 = 90 \text{ MPa}, \quad \lambda_2 = 40 \text{ MPa}.$$

Interpretación: λ_1, λ_2 son los **esfuerzos normales máximos y mínimos** (en los planos donde $\tau = 0$).

b) **Vectores propios (direcciones principales)**

Planteamiento: Para cada λ_i , resolver $(T - \lambda_i I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

Resultado:

$$\lambda_1 = 90 : (T - 90I)\mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow \mathbf{v}_1 \propto \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 40 : (T - 40I)\mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow \mathbf{v}_2 \propto \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(Versiones normalizadas: $\hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.)

Interpretación: Estas direcciones son los **ejes principales** del estado de esfuerzo; al ser T simétrica, los vectores propios son ortogonales.

c) **Matriz diagonal y significado físico**

Planteamiento: Diagonalización por cambio de base a ejes principales:

$$T = PDP^{-1} \quad (\text{con } P = [\hat{\mathbf{v}}_1 \ \hat{\mathbf{v}}_2]).$$

Resultado:

$$D = \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Interpretación: En el sistema alineado con los ejes principales, los términos fuera de la diagonal son cero porque **no hay esfuerzo cortante** en esos planos ($\tau' = 0$); el tensor queda descrito solo por esfuerzos normales puros.

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- **Tensor de Esfuerzo (Stress Tensor):**

El **tensor de esfuerzos de Cauchy** describe completamente el estado de carga interna en un punto material:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Interpretación: σ_{ij} es la componente j de la fuerza por unidad de área actuando sobre una superficie cuya normal es paralela al eje i.

Simetría: Por equilibrio de momentos, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (tensor simétrico con 6 componentes independientes en 3D).

Estado plano de esfuerzos: En componentes delgados (chapas, membranas), se asume $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, reduciendo a un tensor 2×2 .

- **Esfuerzos Principales (Principal Stresses):**

Son los valores máximos de esfuerzo normal que ocurren en planos especiales (planos principales) donde el esfuerzo cortante es nulo.

Convención de signos:

- $\sigma > 0$: Tracción (el material se estira)
- $\sigma < 0$: Compresión (el material se comprime)

Ordenamiento: Convencionalmente: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Casos especiales:

- **Tracción uniaxial:** $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$
- **Compresión uniaxial:** $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$
- **Corte puro:** $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$
- **Hidrostático:** $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ (presión)

■ **Direcciones Principales:**

Los vectores propios definen las **direcciones principales**, que son perpendiculares entre sí y forman un sistema de coordenadas natural para el estado de esfuerzos.

Importancia en diseño:

- En materiales compuestos, alinear fibras con direcciones principales maximiza la eficiencia estructural.
- En forja, orientar el flujo de grano según direcciones principales mejora resistencia.
- En fractografía, las grietas tienden a propagarse perpendicular a σ_1 .

■ **Criterios de Falla:**

1. **Criterio de Tresca (Máximo esfuerzo cortante):**

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_y}{2}$$

Predice que el material falla cuando el esfuerzo cortante máximo alcanza un valor crítico. Apropiado para materiales dúctiles (aceros).

2. **Criterio de von Mises (Energía de distorsión):**

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_y$$

Más preciso que Tresca, ampliamente usado en análisis de elementos finitos (FEA).

3. **Criterio de Rankine (Máximo esfuerzo normal):**

$$|\sigma_1| \leq \sigma_{\text{ult}}$$

Para materiales frágiles (vidrio, cerámica, concreto).

■ **Círculo de Mohr:**

Representación gráfica del estado de esfuerzos en 2D. Permite visualizar:

- Esfuerzos normales y cortantes en cualquier plano
- Esfuerzos principales (puntos de intersección con el eje horizontal)
- Esfuerzo cortante máximo (radio del círculo)
- Ángulo de rotación a ejes principales

Parámetros del círculo:

- Centro: $C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$
- Radio: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
- Esfuerzos principales: $\sigma_{1,2} = C \pm R$

■ **Fatiga de Materiales:**

En componentes sometidos a cargas cíclicas (como álabes de turbina), la **amplitud de esfuerzos principales** determina la vida útil:

$$\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$$

Curva S-N (Wöhler): Relaciona la amplitud de esfuerzos con el número de ciclos hasta la falla.

Límite de fatiga: Para aceros, existe un umbral de esfuerzo por debajo del cual el material tiene vida infinita.

■ **Análisis por Elementos Finitos (FEA):**

En simulaciones FEA (ANSYS, Abaqus, COMSOL), el software:

1. Calcula el tensor de esfuerzos en cada elemento.
2. Encuentra valores y vectores propios (esfuerzos y direcciones principales).
3. Aplica criterios de falla (von Mises, Tresca) para identificar zonas críticas.
4. Visualiza campos vectoriales de direcciones principales.

■ **Aplicaciones Industriales:**

- **Aeronáutica:** Diseño de álabes de turbinas, alas, fuselaje.
- **Automotriz:** Análisis de ejes, cigüeñales, suspensiones.
- **Civil:** Estructuras de concreto, puentes, edificios.
- **Biomecánica:** Implantes ortopédicos, prótesis.
- **Petróleo:** Análisis de integridad de tuberías, recipientes a presión.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- **Valores Propios (Eigenvalues) - Unidad 3.8**
- **Vectores Propios (Eigenvectors) - Unidad 3.8**
- **Diagonalización - Unidad 3.9**
- **Matrices Simétricas - Teorema Espectral**
- **Cambio de Base - Unidad 3.5**

4.2. 8. Electrónica: Modos Normales en Circuitos LC Acoplados Capacitivamente

Contexto de Ingeniería

En sistemas de comunicaciones y filtros electrónicos, es común acoplar circuitos osciladores mediante un **condensador de acople** para transferir energía entre etapas o filtrar frecuencias específicas. Este tipo de acoplamiento capacitivo es ampliamente utilizado en amplificadores de radiofrecuencia y osciladores sincronizados.

El análisis de este sistema revela **modos normales de oscilación**, cuyas frecuencias determinan el ancho de banda y la respuesta del filtro. Las herramientas de álgebra lineal (valores y vectores propios, diagonalización) permiten predecir el comportamiento del circuito y optimizar su diseño

Planteamiento del Problema

Considere dos circuitos LC idénticos acoplados mediante un condensador C_3 , como se muestra en la Figura 8 siguiente. En el instante inicial, el condensador C_1 tiene carga q_0 , mientras que C_2 y C_3 están descargados. Las corrientes iniciales son nulas.

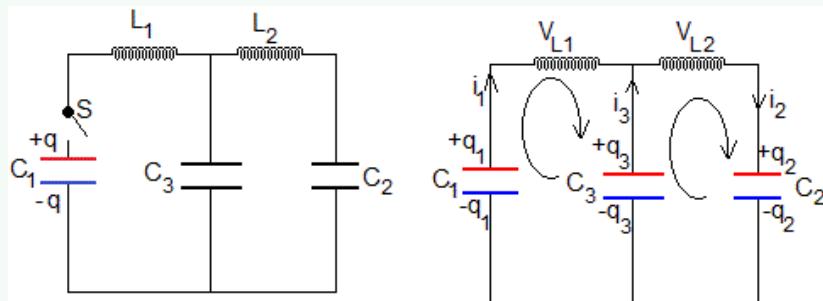


Figura 8: Dos circuitos LC idénticos acoplados capacitivamente mediante C_3 .

Sean $q_1(t)$ y $q_2(t)$ las cargas en los condensadores C_1 y C_2 respectivamente. Aplicando las leyes de Kirchhoff, el sistema se describe mediante:

$$\begin{cases} \frac{d^2q_1}{dt^2} + a q_1 + c q_2 = 0 \\ \frac{d^2q_2}{dt^2} + a q_2 + c q_1 = 0 \end{cases}$$

Donde los parámetros del sistema son:

- $a = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_3} \right)$: frecuencia natural modificada por el acoplamiento
- $c = \frac{1}{LC_3}$: coeficiente de acoplamiento capacitivo

Datos numéricos: $L = 1 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $C_3 = 100 \mu\text{F}$, $q_0 = 1 \text{ mC}$.

Se solicita:

- Escribir el sistema en forma matricial $\ddot{\mathbf{q}} + A\mathbf{q} = 0$.
- Calcular los valores propios de la matriz A y determinar las frecuencias angulares de los modos normales.
- Encontrar los vectores propios y explicar su significado físico en términos de las oscilaciones de carga.

- d) Explicar cómo la diagonalización permite desacoplar el análisis del circuito y resolver el sistema.

Solución

a) Forma matricial

Planteamiento: Definir $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$. Entonces:

$$\ddot{\mathbf{q}} + A\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Parámetros (con datos):

$$a = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{1}{10^{-3}} (10^5 + 10^4) = 1,1 \times 10^8,$$

$$c = \frac{1}{LC_3} = \frac{1}{(10^{-3})(100 \times 10^{-6})} = 10^7.$$

b) Valores propios y frecuencias (modos normales)

Planteamiento:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (a - \lambda)^2 - c^2 = 0.$$

Resultado:

$$\boxed{\lambda_1 = a - c, \quad \lambda_2 = a + c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_1 = \sqrt{a - c}, \quad \omega_2 = \sqrt{a + c}}.$$

Numérico:

$$\lambda_1 = 1,0 \times 10^8 \Rightarrow \boxed{\omega_1 = 1,0 \times 10^4 \text{ rad/s}}, \quad \lambda_2 = 1,2 \times 10^8 \Rightarrow \boxed{\omega_2 \approx 1,095 \times 10^4 \text{ rad/s}}.$$

Interpretación: el acoplamiento separa la frecuencia natural en dos frecuencias cercanas ($\omega_2 > \omega_1$).

c) Vectores propios y significado físico

Resultado:

$$\boxed{\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\lambda_1 = a - c, \text{ modo antisimétrico})}$$

$$\boxed{\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\lambda_2 = a + c, \text{ modo simétrico})}$$

Interpretación:

- Modo \vec{v}_2 (en fase): q_1 y q_2 oscilan iguales \Rightarrow comportamiento “conjunto”.
- Modo \vec{v}_1 (oposición de fase): $q_1 = -q_2 \Rightarrow$ mayor intercambio entre osciladores (aparece el acoplamiento).

d) Diagonalización y desacoplamiento

Planteamiento: Con $P = [\vec{v}_1 \vec{v}_2]$,

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} a - c & 0 \\ 0 & a + c \end{bmatrix}.$$

Definiendo coordenadas normales $\mathbf{q} = P\boldsymbol{\eta}$:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + D\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1 + (a - c)\eta_1 = 0 \\ \ddot{\eta}_2 + (a + c)\eta_2 = 0 \end{cases}$$

Interpretación: la diagonalización separa el sistema acoplado en **dos osciladores independientes** (modos normales) y la respuesta total es la superposición de ambos.

Conceptos de Ingeniería Aplicados

En esta sección se conectan las herramientas de Álgebra Lineal con la interpretación física básica del circuito. Se introducen sólo las nociones mínimas de electrónica necesarias para entender el ejemplo.

- **Capacitor (condensador) y carga eléctrica:** Un *capacitor* es un dispositivo formado, en su versión más simple, por dos placas conductoras separadas por un material aislante. Cuando se aplica una diferencia de potencial (un voltaje) entre las placas, una de ellas acumula *carga positiva* y la otra la misma cantidad de *carga negativa*. La cantidad de carga almacenada se denota normalmente por q y se relaciona con el voltaje V mediante $q = CV$, donde C es la *capacitancia*. Un valor de C grande significa que el dispositivo puede almacenar más carga para el mismo voltaje. En nuestro modelo, las funciones $q_1(t)$ y $q_2(t)$ representan cómo varía en el tiempo la carga almacenada en los capacitores C_1 y C_2 de cada circuito.
- **Inductor (bobina) y corriente:** Un *inductor* es una bobina de alambre que almacena energía en forma de campo magnético cuando circula una corriente eléctrica a través de ella. Su parámetro característico es la *inductancia* L . De manera muy simplificada, si la corriente cambia en el tiempo, el inductor se opone a ese cambio generando una tensión inducida. En este ejercicio no se entra en el detalle de las ecuaciones del inductor; su efecto ya está incorporado en los parámetros a y c que aparecen en las ecuaciones diferenciales del sistema.
- **Circuito LC y oscilaciones:** Un *circuito LC* es la conexión en serie de un inductor L y un capacitor C . Si inicialmente el capacitor está cargado y se conecta con la bobina, la energía va oscilando entre:
 - energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor (proporcional a q^2),
 - energía almacenada en el campo magnético del inductor (proporcional a la corriente al cuadrado).

El resultado es una oscilación periódica muy similar al movimiento armónico simple en mecánica. La frecuencia de esa oscilación depende de L y C . En el ejercicio se consideran *dos* circuitos LC idénticos que pueden intercambiar energía entre sí.

- **Condensador de acople C_3 :** Además de los capacitores principales C_1 y C_2 de cada circuito, se introduce un tercer capacitor C_3 que conecta ambos circuitos. Este elemento no sirve para almacenar energía de forma aislada, sino para *permitir que parte de la carga de un circuito influya sobre el otro*. Matemáticamente, el acoplamiento se manifiesta en los términos $c q_2$ en la ecuación de q_1 y $c q_1$ en la ecuación de q_2 . El valor de C_3 controla cuán fuerte es esa interacción:
 - C_3 grande (acoplamiento fuerte) \Rightarrow los circuitos influyen mucho uno en el otro.
 - C_3 pequeño (acoplamiento débil) \Rightarrow los circuitos se comportan casi de forma independiente.
- **Análisis modal:** El comportamiento del sistema completo se puede descomponer en *modos normales*, que son patrones de oscilación especialmente simples. Cada modo corresponde a un

vector propio de la matriz A :

- Modo simétrico (vector propio $[1, 1]^T$): ambos capacitores cargan y descargan en fase, con la misma amplitud.
- Modo antisimétrico (vector propio $[1, -1]^T$): cuando uno gana carga, el otro la pierde, es decir, oscilan en oposición de fase.

Desde el punto de vista matemático, cada modo es una solución de la forma $\mathbf{q}(t) = \mathbf{v} \cos(\omega t + \varphi)$ donde \mathbf{v} es un vector propio y ω la raíz cuadrada del valor propio asociado.

- **Respuesta en frecuencia:** Cada modo tiene su propia frecuencia angular ω_1 y ω_2 . Estas frecuencias indican a qué ritmos naturales tiende a oscilar el sistema cuando se le excita. En aplicaciones de comunicaciones, el hecho de que existan dos frecuencias cercanas permite diseñar filtros que dejan pasar un rango (banda) de frecuencias alrededor de esos valores y atenúan las demás. El ancho de banda del filtro está relacionado con la separación $|\omega_2 - \omega_1|$.
- **Transferencia de energía (pulsaciones):** Cuando el sistema se excita con una combinación de los dos modos, la energía no permanece confinada en un solo circuito, sino que va *migrando* de uno al otro de manera periódica. Este fenómeno se conoce como *pulsaciones*: durante ciertos intervalos casi toda la energía está en el primer circuito, luego pasa progresivamente al segundo, y así sucesivamente. El modo antisimétrico es el que ilustra de forma más clara este intercambio, porque implica corrientes importantes a través del capacitor de acople C_3 .
- **Diseño de filtros y papel del cociente C/C_3 :** Desde el punto de vista de diseño, el ingeniero puede ajustar el valor de C_3 respecto de C (el cociente C/C_3) para controlar:
 - la intensidad del acoplamiento entre circuitos (cuánta energía se transfiere de uno a otro),
 - la separación entre las frecuencias naturales ω_1 y ω_2 ,
 - y, en consecuencia, la forma del diagrama de amplitud en función de la frecuencia (selectividad del filtro).

Un acoplamiento muy débil produce dos frecuencias casi iguales y un intercambio de energía lento; un acoplamiento más fuerte separa las frecuencias y puede resultar en filtros con bandas de paso o de rechazo más anchas.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- **Espacios vectoriales (3.1)**
- **Subespacios generados (3.3)**
- **Bases y cambio de base (3.5)**
- **Valores y vectores propios (3.8)**
- **Diagonalización (3.9)**

4.3. 9. Construcción: Ingeniería Sismo-resistente

Contexto de Ingeniería

En ingeniería sismorresistente, cuando un edificio es sometido a un terremoto, cada piso se desplaza lateralmente. El estado de deformación del edificio completo se puede representar mediante un vector en el que cada componente indica el desplazamiento de cada piso respecto a su posición de reposo.

Un concepto fundamental es que todo edificio tiene **modos naturales de vibración**: patrones característicos de deformación en los cuales todos los pisos oscilan de manera sincronizada con una frecuencia específica. Matemáticamente, estos modos forman una **base del espacio vectorial** de configuraciones posibles. Cualquier estado de deformación real (por complejo que sea) puede expresarse como una **combinación lineal** de estos modos.

Este enfoque, conocido como **Análisis Modal**, es el estándar en la normativa chilena NCh433 para el diseño de estructuras sometidas a solicitudes sísmicas, y permite al ingeniero determinar qué modos contribuyen más a la respuesta del edificio.

Planteamiento del Problema

Un edificio simplificado de dos pisos tiene los siguientes modos naturales de vibración:

- **Modo 1 (Fundamental):** $\vec{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ — Ambos pisos se desplazan en la misma dirección y con igual amplitud (movimiento de traslación en bloque).
- **Modo 2 (Segundo modo):** $\vec{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ — Los pisos se desplazan en direcciones opuestas con igual amplitud (movimiento de tijera o balanceo).

Durante un sismo, los sensores instalados registran el siguiente vector de desplazamientos instantáneos:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

Esto significa que el primer piso (planta baja) se ha desplazado 5 cm respecto a su posición original, mientras que el segundo piso permanece en su posición de reposo en ese instante, como se observa en la Figura 9

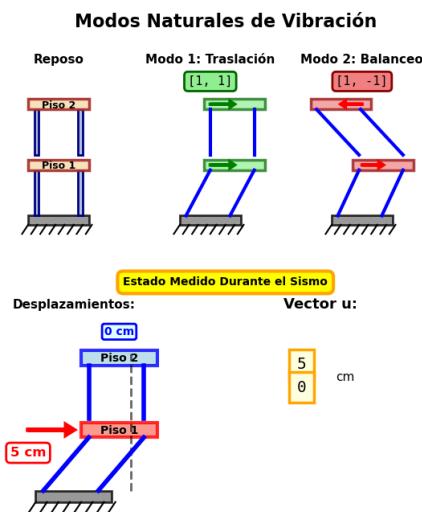


Figura 9: Modos naturales de vibración y el efecto de un sismo.

Se solicita:

- Verificar que el conjunto $B = \{\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2\}$ es linealmente independiente y constituye una base para el espacio de configuraciones \mathbb{R}^2 .
- Expresar el vector de desplazamientos \vec{u} como combinación lineal de los modos: $\vec{u} = q_1 \vec{\phi}_1 + q_2 \vec{\phi}_2$, determinando los coeficientes modales q_1 y q_2 .
- Interpretar físicamente los coeficientes obtenidos: ¿qué nos dicen sobre cuál modo de vibración está más activo en este instante?

Solución

- a) **Base modal (independencia lineal)**

Planteamiento: Formamos la matriz con los modos como columnas,

$$[\phi_1 \ \phi_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resultado:

$$\det([\phi_1 \ \phi_2]) = (1)(-1) - (1)(1) = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow \{\phi_1, \phi_2\}$ es LI. Como son 2 vectores LI en \mathbb{R}^2 , \Rightarrow forman una base de \mathbb{R}^2 .

Interpretación: cualquier desplazamiento $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ se expresa de forma única como combinación de estos modos.

- b) **Coordenadas modales**

Planteamiento:

$$\mathbf{u} = q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2, \quad q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + q_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistema:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 5 \\ q_1 - q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow q_1 = q_2, 2q_1 = 5.$$

Resultado:

$$q_1 = 2,5 \text{ cm}, \quad q_2 = 2,5 \text{ cm}$$

$$\mathbf{u} = 2,5\phi_1 + 2,5\phi_2.$$

c) Interpretación física**Resultado clave:** $q_1 = q_2$.**Interpretación:** en este instante están **igual de activos** el modo 1 (traslación en bloque) y el modo 2 (tijera). La combinación explica el estado medido:

$$u_1 : (2,5 + 2,5) = 5 \text{ cm}, \quad u_2 : (2,5 - 2,5) = 0 \text{ cm}.$$

Es decir, el segundo piso queda en cero por **cancelación modal**, no porque “no exista dinámica”.**Conceptos de Ingeniería Aplicados****■ ¿Qué es un edificio como sistema mecánico?**

Un edificio puede modelarse (en su versión más simple) como una torre de masas rígidas (los pisos) conectadas por elementos elásticos (columnas y muros). Cada masa puede desplazarse horizontalmente respecto al suelo. El número de masas independientes determina los **grados de libertad** del sistema. En nuestro caso, 2 pisos implican 2 grados de libertad, por eso trabajamos en \mathbb{R}^2 .

■ ¿Por qué vibra un edificio?

Cuando un terremoto sacude la base del edificio, las masas (pisos) no se mueven instantáneamente con el suelo porque tienen *inercia* (resistencia a cambiar su estado de movimiento). Al mismo tiempo, las columnas actúan como *resortes*: cuando se deforman, ejercen fuerzas que intentan devolver los pisos a su posición original. Esta interacción entre inercia (masa) y rigidez (elasticidad) genera oscilaciones, de manera análoga a un sistema masa-resorte en física básica.

■ ¿Qué es un modo de vibración?

Un *modo de vibración* es un patrón especial de deformación en el cual todos los puntos del edificio oscilan con la misma frecuencia y en sincronía (aunque con distintas amplitudes y posiblemente desfasados 180°). Es análogo a las ondas estacionarias en una cuerda vibrante: así como una cuerda puede vibrar en su fundamental, segundo armónico, etc., un edificio tiene su modo fundamental, segundo modo, y así sucesivamente.

Matemáticamente, los modos son *vectores propios* del problema de vibraciones libre (ecuación $\mathbf{K}\vec{\phi} = \omega^2 \mathbf{M}\vec{\phi}$, donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez y \mathbf{M} la matriz de masas). Las frecuencias naturales son las raíces cuadradas de los valores propios.

En nuestro ejemplo:

- $\vec{\phi}_1 = [1, 1]^T$ representa el modo en que ambos pisos se mueven juntos como un bloque rígido (modo fundamental, frecuencia más baja).
- $\vec{\phi}_2 = [1, -1]^T$ representa el modo en que los pisos se mueven en direcciones opuestas, generando máxima deformación en las columnas del segundo nivel (segundo modo, frecuencia más alta).

■ **Análisis modal y superposición:**

Durante un sismo real, el movimiento del edificio no es un solo modo puro, sino una *mezcla* de todos sus modos. El principio de superposición (válido porque las ecuaciones del movimiento son lineales para deformaciones pequeñas) establece que:

$$\text{Respuesta total} = \sum_i q_i(t) \vec{\phi}_i$$

donde $q_i(t)$ son las amplitudes modales que varían en el tiempo.

El **análisis modal** consiste en:

1. Identificar los modos (vectores propios) y sus frecuencias (valores propios).
2. Para cada instante de tiempo, descomponer el estado actual en la base modal (como hicimos en el inciso b).
3. Estudiar cómo evoluciona cada coordenada modal de manera independiente (esto simplifica enormemente el problema porque convierte un sistema acoplado en ecuaciones desacopladas).

■ **Relación con terremotos reales:**

Cuando un terremoto sacude un edificio, no todas las frecuencias del movimiento del suelo afectan igual a la estructura. Si el terremoto contiene componentes de frecuencia cercanas a las frecuencias naturales del edificio, se produce *resonancia*: la amplitud de vibración crece mucho, y esos modos se "excitan" más.

Por eso el ingeniero debe:

- Calcular las frecuencias naturales (valores propios).
- Comparar con el espectro de frecuencias esperado del sismo de diseño.
- Identificar qué modos son más peligrosos (factores de participación modal).
- Diseñar la estructura para que resista la combinación de todos los modos relevantes.

■ **Normativa NCh433 y Análisis Modal Espectral:**

La norma chilena de diseño sísmico (NCh433.Of1996, modificada en 2009 y 2012) establece que para edificios regulares de más de 5 pisos se debe realizar un *Análisis Modal Espectral*. Este método consiste en:

1. Resolver el problema de valores/vectores propios para obtener modos y frecuencias.
2. Para cada modo, calcular el *factor de participación modal* (qué tan fácil es excitar ese modo con movimiento horizontal del suelo).
3. Leer del espectro de diseño sísmico la aceleración espectral correspondiente a cada frecuencia natural.
4. Combinar las respuestas modales usando reglas como SRSS (raíz cuadrada de la suma de cuadrados) o CQC (combinación cuadrática completa).

El problema que resolvemos es una versión ultra-simplificada de este proceso, enfocada en ilustrar el paso de descomposición en la base modal (cambio de coordenadas).

■ **Grados de libertad:**

En ingeniería estructural, el número de *grados de libertad* es la cantidad de coordenadas independientes necesarias para especificar completamente la configuración del sistema. Para un edificio modelado como pisos rígidos con desplazamiento lateral:

- 1 piso = 1 grado de libertad = espacio \mathbb{R}^1 (problema unidimensional)
- 2 pisos = 2 grados de libertad = espacio \mathbb{R}^2 (nuestro caso)

- n pisos = n grados de libertad = espacio \mathbb{R}^n

Este número coincide con la dimensión del espacio vectorial y con el número de modos de vibración del sistema. En modelos más refinados (que consideran rotaciones, torsión, flexión de vigas, etc.), el número de grados de libertad puede ser mucho mayor (miles o millones en análisis por elementos finitos), pero el concepto matemático es el mismo.

- **Importancia práctica:**

Este enfoque modal no es solo un ejercicio matemático: es la herramienta estándar en la práctica profesional porque:

- Reduce la complejidad computacional (solo se analizan los primeros 3-5 modos en edificios típicos, no es necesario considerar todos).
- Permite entender intuitivamente el comportamiento: por ejemplo, edificios flexibles tienden a oscilar en su modo fundamental, mientras que edificios rígidos pueden excitar modos superiores.
- Facilita la calibración con mediciones reales: instrumentando un edificio con acelerómetros, se pueden identificar experimentalmente sus frecuencias y modos, y compararlos con el modelo.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- Espacios vectoriales (3.1)
- Subespacios generados (3.3)
- Combinaciones lineales (3.3)
- Independencia lineal (3.4)
- Bases (3.5)
- Coordenadas en una base (3.6.1)
- Dimensión (3.6)

5. Unidad 4. Transformaciones Lineales

5.1. 10. Electrónica: Línea de transmisión de larga distancia

Contexto de Ingeniería

En la ingeniería electrónica y de telecomunicaciones, es común analizar sistemas complejos (como amplificadores, filtros o kilómetros de cable de transmisión) tratándolos como Cajas Negras. El término **Caja Negra** significa que no necesitamos conocer los componentes internos del sistema; solo nos interesa la relación entrada-salida, similar a una función matemática que recibe argumentos y retorna resultados. En lugar de analizar cada resistencia y capacitor interno, modelamos el sistema completo como un **Cuadripolo** o red de dos puertos.

Este enfoque asume que el estado eléctrico a la entrada (Voltaje V_1 , Corriente I_1) se "transforma" linealmente para producir un estado de salida (V_2 , I_2). Matemáticamente, el hardware físico actúa como un operador o **Transformación Lineal** $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Esta abstracción es poderosa porque permite predecir cómo reaccionará el sistema ante cualquier señal de entrada sin necesidad de volver a resolver el circuito físico, aprovechando la propiedad de superposición (linealidad).

Planteamiento del Problema

Una línea de transmisión de larga distancia con pérdidas se modela mediante la transformación lineal $T(\vec{v}_{in}) = \vec{v}_{out}$, donde el vector de estado agrupa el voltaje y la corriente $\vec{v} = [V, I]^T$, como se observa en la Figura 10. La matriz asociada a esta transformación (conocida en ingeniería como Matriz de Parámetros de Transmisión o ABCD) respecto a la base canónica es:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0,8 & -10 \\ -0,05 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Donde los coeficientes representan la atenuación de voltaje (0.8), la impedancia de transferencia (-10 Ω), la admitancia de transferencia (-0.05 S) y la atenuación de corriente (0.8).

Línea de Transmisión como Transformación Lineal

Modelo de Cuadripolo (Red de 2 Puertos)

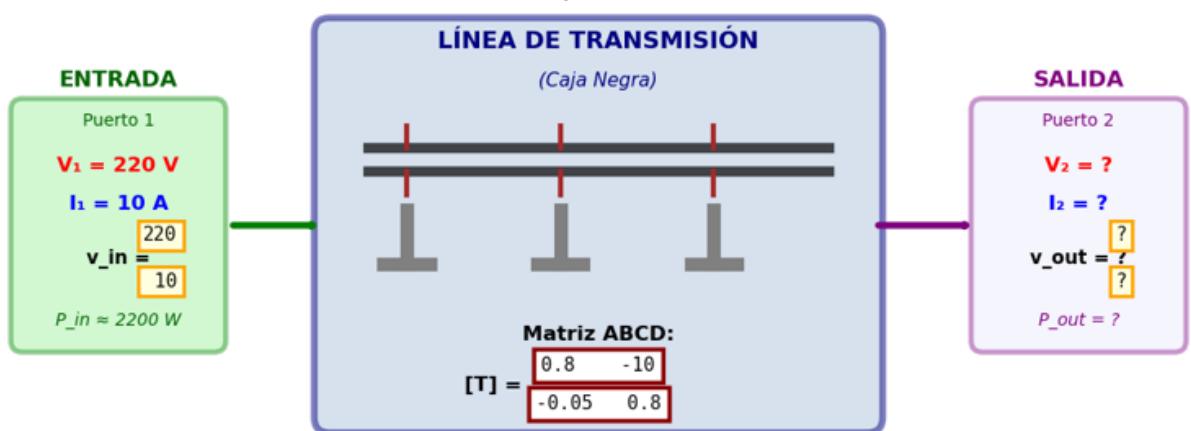


Figura 10: Modelo de cuadripolo (red de 2 puertas).

Se solicita al estudiante:

- a) **Cálculo de la Respuesta:** Si se inyecta al sistema una señal de alta potencia definida por el

vector $\vec{v}_{in} = \begin{bmatrix} 220 \\ 10 \end{bmatrix}$ (220 Volts, 10 Amperes), determine el vector de salida \vec{v}_{out} aplicando la transformación matricial. Interprete los valores obtenidos.

- b) **Análisis de Reversibilidad (Isomorfismo):** Determine si la transformación T es un isomorfismo calculando el determinante de su matriz asociada. En términos físicos, ¿es posible recuperar matemáticamente la señal original de entrada si solo conocemos la señal de salida degradada?
- c) **Análisis de Pérdida de Información (Núcleo):** Calcule el núcleo (Kernel) de la transformación $\ker(T)$. ¿Existe algún escenario teórico donde una señal de entrada con energía (no nula) resulte en una salida de cero absoluto (silencio total)?

Solución

- a) **Cálculo de la respuesta** $\vec{v}_{out} = T(\vec{v}_{in})$

Dado

$$[T] = \begin{bmatrix} 0,8 & -10 \\ -0,05 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{in} = \begin{bmatrix} 220 \\ 10 \end{bmatrix},$$

aplicamos el producto matriz–vector:

$$\vec{v}_{out} = \begin{bmatrix} 0,8 & -10 \\ -0,05 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8(220) - 10(10) \\ -0,05(220) + 0,8(10) \end{bmatrix}.$$

Cálculo numérico:

$$V_{out} = 176 - 100 = \boxed{76 \text{ V}},$$

$$I_{out} = -11 + 8 = \boxed{-3 \text{ A}}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\vec{v}_{out} = \begin{bmatrix} 76 \\ -3 \end{bmatrix}}.$$

Interpretación:

- V baja de 220 V a 76 V \Rightarrow fuerte atenuación/caída asociada a pérdidas y al término de transferencia -10Ω (acopla corriente de entrada en caída de voltaje de salida).
- El signo $(-)$ en I_{out} normalmente se debe a la **convención de signos** en cuadripolos (por ejemplo, I_2 definida entrando al puerto de salida). No implica necesariamente “corriente físicamente invertida”, sino que el resultado quedó opuesto a la referencia escogida.
- Comparación de potencias (solo como referencia rápida):

$$P_{in} \approx 220 \cdot 10 = 2200 \text{ W}, \quad P_{out} \approx 76 \cdot (-3) = -228 \text{ W}.$$

El signo negativo en P_{out} vuelve a depender de la convención (potencia entrando/saliendo del puerto). En magnitud, la potencia útil se reduce fuertemente.

- b) **Reversibilidad (isomorfismo): determinante**

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es isomorfismo si su matriz es invertible, es decir, si $\det([T]) \neq 0$.

$$\det([T]) = (0,8)(0,8) - (-10)(-0,05) = 0,64 - 0,50 = \boxed{0,14}.$$

Como $\det([T]) \neq 0$,

T es un isomorfismo (invertible).

Interpretación física: en el modelo ideal (sin ruido), sí es posible recuperar matemáticamente \vec{v}_{in} desde \vec{v}_{out} usando T^{-1} . En la práctica, la inversión perfecta se limita por ruido, cuantización, errores de medición y no idealidades del modelo.

c) Pérdida de información (núcleo) y “silencio total”

El núcleo es:

$$\ker(T) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : T(\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

Esto equivale a resolver:

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -10 \\ -0,05 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\det([T]) = 0,14 \neq 0$, el sistema homogéneo tiene **única** solución (la trivial):

$$\boxed{\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}.$$

Interpretación física: no existe una entrada no nula $(V, I) \neq (0, 0)$ que produzca salida exactamente cero. Por lo tanto, en este modelo lineal, no hay un “modo” de entrada con energía que se anule por completo: solo entrada nula \Rightarrow salida nula.

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- **Redes de Dos Puertos (Cuadripolos):** Abstracción fundamental en electrónica para simplificar circuitos complejos en una matriz de transferencia 2×2 , donde cada puerto tiene dos variables eléctricas (voltaje y corriente).
- **Parámetros ABCD (Matriz de Transmisión):** Representación matricial que relaciona las variables de entrada (V_1, I_1) con las de salida (V_2, I_2) mediante la ecuación $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$. Es especialmente útil para cascada de sistemas porque las matrices se multiplican directamente.
- **Atenuación:** Reducción de la amplitud de una señal durante su transmisión. Un coeficiente de 0.8 en la diagonal significa que la señal se reduce al 80 % de su valor original (pérdida del 20 %), lo cual es típico en cables de larga distancia debido a la resistencia eléctrica que disipa energía como calor.
- **Reversibilidad de Sistemas:** La capacidad de recuperar matemáticamente los datos originales a partir de datos transmitidos. Es fundamental en la teoría de la información y el diseño de receptores con ecualización. La reversibilidad matemática ($\det \neq 0$) es condición necesaria, pero no suficiente para la reversibilidad física perfecta debido al ruido.
- **Convención de Signos:** En parámetros ABCD, por convención, la corriente I_2 se define como entrante al puerto de salida (mientras que I_1 sale del puerto de entrada). Esto puede generar signos negativos que no representan inversiones físicas, sino elecciones de referencia.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- Transformación Lineal (Unidad 4.1)
- Matriz Asociada (Unidad 4.5)
- Isomorfismo (Unidad 4.4)
- Núcleo e Imagen (Unidad 4.3)
- Determinante

5.2. 11. Mecánica: Mecánica de Medios Continuos

Contexto de Ingeniería

En la Mecánica de Medios Continuos y el diseño de estructuras sismorresistentes, es fundamental comprender cómo se deforman los materiales bajo cargas. Una de las deformaciones más comunes es el **Cizalle Simple** (o cortante), que ocurre cuando fuerzas paralelas actúan en sentidos opuestos sobre las caras de un material, desplazando capas horizontales una respecto de otra sin separarlas. Ejemplos comunes incluyen el viento golpeando lateralmente un edificio, un sismo moviendo la base de una columna, o un perno sometido a fuerzas cortantes en una unión estructural.

Desde el punto de vista matemático, la deformación es una función que mapea la posición original de cada partícula del material (x, y) a una nueva posición deformada (x', y') . Si el material es elástico y la deformación es homogénea (uniforme en todo el cuerpo), este proceso se modela perfectamente como una **Transformación Lineal**. Una propiedad crítica en ingeniería es saber si esta deformación cambia el volumen del material (compresión o dilatación volumétrica) o si solo cambia su forma sin alterar el volumen (distorsión pura). Esto se verifica mediante el determinante de la matriz de deformación, que representa el factor de cambio de área en 2D o de volumen en 3D.

Planteamiento del Problema

Un ingeniero está analizando una placa de acero cuadrada de dimensiones unitarias (ver Figura 11) sometida a una fuerza de corte lateral durante una prueba de resistencia.

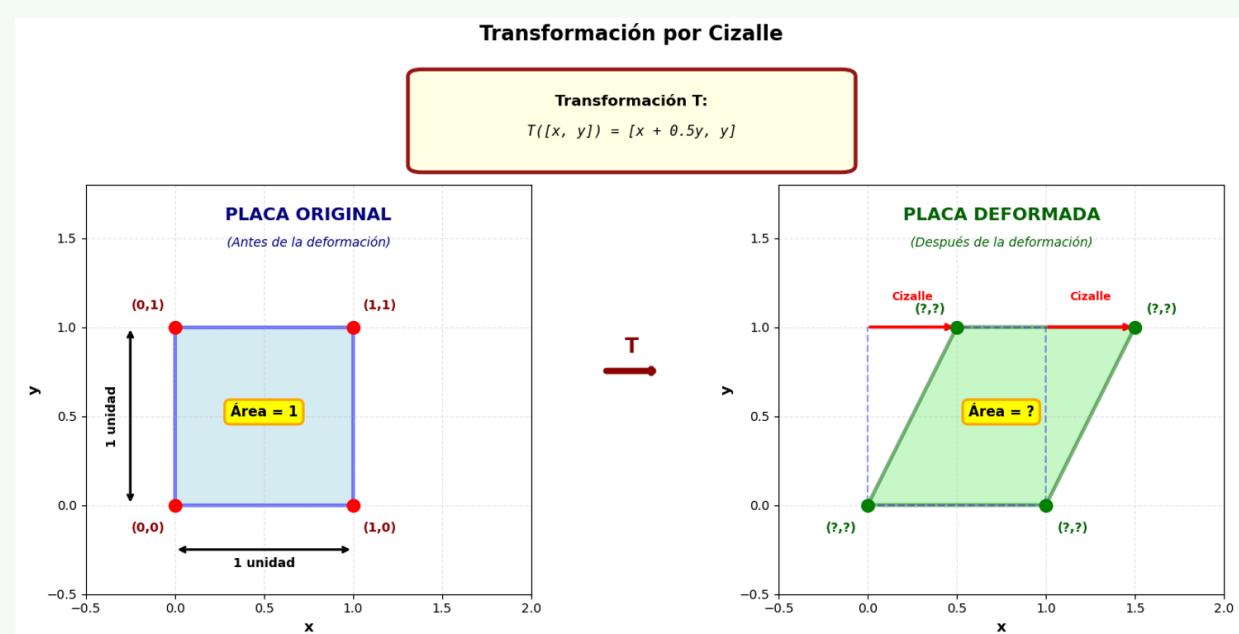


Figura 11: Transformación por cizalle.

La cinemática de la deformación se ha modelado mediante la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por la ecuación:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x + 0.5y \\ y \end{bmatrix}$$

Donde el coeficiente 0,5 representa el factor de distorsión angular (γ) del material, que mide cuánto se inclina el material respecto a su posición original. Se solicita al estudiante:

- a) **Modelado Matricial:** Encuentre la **Matriz de Deformación** $[T]$ asociada a esta transformación respecto a la base canónica. Interprete qué representa cada columna de la matriz observando cómo se transforman los vectores unitarios \hat{i} y \hat{j} .
- b) **Visualización de la Deformación:** Determine las coordenadas finales de los cuatro vértices de la placa (originalmente en $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$) y describa la forma geométrica resultante. ¿Se mantienen las propiedades de paralelismo?
- c) **Análisis de Conservación:** Verifique si el material ha sufrido cambios de volumen (o área en 2D) calculando el determinante de la matriz asociada. En ingeniería, ¿cómo se clasifica una deformación que conserva el volumen?

Solución

- a) **Modelado matricial: matriz de deformación $[T]$**

La transformación está dada por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x + 0,5y \\ y \end{bmatrix}.$$

Para obtener la matriz asociada en la base canónica, evaluamos T sobre los vectores unitarios:

$$\hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Imagen de \hat{i} :

$$T(\hat{i}) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0,5(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Imagen de \hat{j} :

$$T(\hat{j}) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0,5(1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz se construye colocando estas imágenes como columnas:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Interpretación de las columnas:

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1ra columna): el vector unitario horizontal \hat{i} no cambia \Rightarrow el borde inferior del cuadrado permanece horizontal y con la misma longitud.
- $\begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2da columna): el vector unitario vertical \hat{j} se inclina hacia la derecha 0,5 unidades en x por cada 1 unidad en y \Rightarrow aparece el **cizalle** (distorsión angular).

- b) **Vértices deformados y forma geométrica resultante**

Los vértices originales son:

$$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1).$$

Aplicamos $T(x, y) = (x + 0,5y, y)$:

$$P_1(0, 0) \mapsto (0 + 0,5 \cdot 0, 0) = \boxed{(0, 0)},$$

$$P_2(1, 0) \mapsto (1 + 0,5 \cdot 0, 0) = \boxed{(1, 0)},$$

$$P_3(0, 1) \mapsto (0 + 0,5 \cdot 1, 1) = \boxed{(0,5, 1)},$$

$$P_4(1, 1) \mapsto (1 + 0,5 \cdot 1, 1) = \boxed{(1,5, 1)}.$$

Forma resultante: el cuadrado se transforma en el paralelogramo con vértices

$$(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1,5, 1) \rightarrow (0,5, 1) \rightarrow (0, 0).$$

¿Se mantiene el paralelismo? Sí. Toda transformación lineal preserva paralelismo: si dos rectas son paralelas antes, sus imágenes siguen siendo paralelas después.

Ángulo de inclinación (opcional): El borde que antes era vertical (dirección \hat{j}) ahora apunta como $(0,5, 1)$. Su inclinación respecto del eje y es

$$\theta = \arctan(0,5) \approx 26,57^\circ.$$

c) Conservación de área: determinante y clasificación ingenieril

Calculamos:

$$\det([T]) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (1)(1) - (0,5)(0) = \boxed{1}.$$

Interpretación: el determinante es el factor de escala de área. Como $\det([T]) = 1$,

$$A_{\text{final}} = 1 \cdot A_{\text{inicial}},$$

es decir, **no hay cambio de área** (ni compresión ni dilatación), solo cambio de forma.

Clasificación en ingeniería: una deformación con $\det = 1$ se clasifica como

isocórica / isovolumétrica (incompresible en 2D)

y el caso presentado es un **cizalle puro** (distorsión angular sin cambio de área).

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- **Cizalle Simple (Simple Shear):** Tipo de deformación donde las capas del material se desplazan paralelamente entre sí, manteniendo su espesor constante. Es el tipo de esfuerzo que experimentan pernos, remaches, vigas sometidas a corte, y estructuras durante sismos.
- **Deformación por Cortante:** Esfuerzo que actúa tangencialmente a la superficie del material, produciendo distorsión angular. Se cuantifica mediante el ángulo de cizalle γ (en este caso $\gamma = 0,5$ radianes $\approx 28,6^\circ$).
- **Cinemática de la Deformación:** Rama de la mecánica de medios continuos que estudia matemáticamente el movimiento y cambio de forma de las partículas de un cuerpo, sin considerar las fuerzas que lo causan. Se representa mediante el **tensor gradiente de deformación**.
- **Deformaciones Isocóricas (Incompresibles):** Deformaciones que mantienen el volumen (o área en 2D) constante, caracterizadas por $\det([T]) = 1$. Son típicas de:

- Metales en régimen de deformación plástica (flujo plástico)
 - Materiales elastoméricos (gomas, cauchos) a temperatura ambiente
 - Fluidos incompresibles bajo deformación
- **Tensor de Deformación:** En 2D, la matriz $[T]$ es una representación simplificada del tensor gradiente de deformación. En análisis estructural avanzado (3D), se usa el tensor de deformaciones 3×3 para capturar completamente la cinemática.
 - **Ángulo de Cizalle (γ):** Parámetro ingenieril que mide la distorsión angular. En este problema, $\gamma = 0,5$ representa que por cada unidad de altura vertical, el material se desplaza 0,5 unidades horizontalmente. Se relaciona con el esfuerzo cortante mediante el **módulo de cizalladura G** del material: $\tau = G \cdot \gamma$.
 - **Conservación de Paralelismo:** Propiedad geométrica fundamental de las deformaciones homogéneas (lineales): las líneas paralelas antes de la deformación permanecen paralelas después. Esto simplifica enormemente el análisis estructural.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- Transformación Lineal en el Plano (Unidad 4.1)
- Matriz Asociada a una Transformación (Unidad 4.5)
- Cambio de Base (Unidad 4.6)
- Determinante como Factor de Escala (Unidad 2.2.2)
- Propiedades de las Transformaciones Lineales (Unidad 4.1)

5.3. 12. Informática: Computación Gráfica moderna

Contexto de Ingeniería

En la Computación Gráfica moderna (utilizada en videojuegos, CAD y simulación), cada objeto atraviesa una secuencia de operaciones conocida como el **Pipeline Gráfico** o Pipeline de Renderizado. Un modelo 3D comienza definido en sus propias coordenadas locales (“Model Space” o espacio del modelo), donde el objeto está centrado en su propio origen. Para ser dibujado en la pantalla, debe ser transformado secuencialmente a:

- **World Space** (espacio del mundo): Posiciona el objeto en la escena global junto con otros objetos.
- **View Space** (espacio de la cámara): Reorienta todo según la perspectiva de la cámara virtual.
- **Screen Space** (espacio de pantalla): Proyecta finalmente a los píxeles 2D de la pantalla.

Matemáticamente, mover, rotar o escalar un objeto son aplicaciones de **Transformaciones Lineales** representadas por matrices. Sin embargo, un desafío frecuente ocurre cuando la cámara no está alineada con los ejes del mundo (por ejemplo, una cámara isométrica a 45° como en Age of Empires o Diablo II, o una cámara inclinada en un juego de estrategia). En estos casos, los ingenieros deben realizar un **Cambio de Base** para recalcular cómo se ven las transformaciones (como la rotación de un personaje) desde la perspectiva de la cámara. Si esto no se hace correctamente, los controles del jugador se sentirán “invertidos” o erráticos (por ejemplo, presionar “arriba” podría mover al personaje en diagonal).

Planteamiento del Problema

Un desarrollador está programando la lógica de movimiento para una nave espacial en un juego 2D.

- La acción de “Girar a la Izquierda” se define como una rotación de 90° en sentido antihorario.
- El mundo del juego utiliza la base estándar canónica $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ (Ejes X e Y normales).
- Sin embargo, el juego utiliza una **Cámara Isométrica** que observa la escena desde un ángulo diagonal de 45° . El sistema de coordenadas de la cámara está definido por la base $B' = \{\vec{v}_1 = (1, 1), \vec{v}_2 = (-1, 1)\}$, que representa ejes rotados 45° respecto a los originales.

Se solicita al estudiante:

- a) **Definición de la Transformación:** Encuentre la matriz asociada a la rotación R de 90° respecto a la base estándar del mundo $[R]_B$. Verifique su efecto sobre los vectores base.
- b) **Cambio de Base (View Matrix):** Construya la matriz de transición P (que contiene los vectores de la cámara como columnas) y calcule su inversa P^{-1} . Luego, utilice la fórmula de cambio de base $[R]_{B'} = P^{-1}[R]_B P$ para obtener la matriz de rotación vista desde el sistema de referencia de la cámara.
- c) **Interpretación de Invarianza (Matrices Semejantes):** Compare la matriz original $[R]_B$ con la matriz transformada $[R]_{B'}$ y explique, desde un punto de vista geométrico, por qué la operación de rotación de 90° mantiene su estructura algebraica a pesar del cambio de coordenadas. ¿Qué propiedades algebraicas se conservan entre matrices semejantes?

Solución

a) Definición de la transformación: rotación 90° en la base del mundo B

La rotación antihoraria de ángulo θ en \mathbb{R}^2 se representa por:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Para $\theta = 90^\circ = \pi/2$:

$$\cos(90^\circ) = 0, \quad \sin(90^\circ) = 1$$

$$[R]_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificación sobre la base canónica:

$$[R]_B \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{e}_2$$

$$[R]_B \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\vec{e}_1$$

Esto confirma que la operación “girar a la izquierda” rota 90° antihorario.

b) Cambio de base (cámara isométrica): cálculo de P , P^{-1} y $[R]_{B'}$

La base de la cámara es:

$$B' = \{\vec{v}_1 = (1, 1), \vec{v}_2 = (-1, 1)\}.$$

La matriz de transición P (columnas = vectores de B' expresados en B) es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz convierte coordenadas en B' a coordenadas en B : $[\vec{x}]_B = P[\vec{x}]_{B'}$.

Inversa de P :

$$\det(P) = (1)(1) - (-1)(1) = 2 \neq 0$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cambio de base de la matriz de rotación:

$$[R]_{B'} = P^{-1}[R]_B P$$

Paso 1: $[R]_B P$

$$[R]_B P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: $P^{-1}([R]_B P)$

$$[R]_{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$[R]_{B'} = [R]_B$$

c) **Interpretación (matrices semejantes e invariancia)**

En general, cambiar de base NO deja la matriz idéntica: lo que se conserva es la **transformación**, y las matrices quedan **semejantes**:

$$[R]_{B'} = P^{-1}[R]_B P.$$

¿Por qué aquí resultan iguales? Porque la base B' corresponde geométricamente a una **rotación de 45°** (y un **escalamiento**) de la base canónica. En 2D, las rotaciones **conmutan**:

$$R(-45^\circ) R(90^\circ) R(45^\circ) = R(90^\circ),$$

y el escalamiento se cancela entre P y P^{-1} . Por eso, desde la cámara, la operación “girar 90° ” se ve con la misma matriz.

Propiedades que se conservan entre matrices semejantes (siempre):

- **Determinante:** $\det([R]_B) = \det([R]_{B'})$ (aquí vale 1, preserva área).
- **Traza:** $\text{tr}([R]_B) = \text{tr}([R]_{B'})$ (aquí vale 0).
- **Valores propios:** son los mismos (para 90° : $\lambda = \pm i$).
- **Rango e invertibilidad:** se conservan (aquí rango 2, invertible).

Lectura para videojuegos: la acción “girar a la izquierda” es una operación geométrica intrínseca; cambiar la cámara solo cambia *cómo expresas* el vector en coordenadas, no la rotación en sí.

Conceptos de Ingeniería Aplicados

- **Pipeline de Renderizado (Graphics Pipeline):** Proceso computacional secuencial que convierte modelos matemáticos 3D en píxeles en la pantalla. Las etapas principales son: Model Space → World Space → View Space → Clip Space → Screen Space. El cambio de base matemático es el núcleo de las transformaciones Model-to-World y World-to-View.
- **Espacios de Coordenadas (Coordinate Spaces):** Jerarquía de sistemas de referencia utilizada en todos los motores de juegos modernos (Unity, Unreal Engine, Godot) y software CAD (AutoCAD, SolidWorks):
 - **Local/Model Space:** Coordenadas relativas al centro del objeto
 - **World Space:** Sistema global que contiene todos los objetos de la escena
 - **View/Camera Space:** Sistema centrado en la cámara virtual
 - **Clip Space:** Espacio normalizado previo a la proyección
 - **Screen Space:** Coordenadas de píxeles en la pantalla final
- **Cámara Virtual (Virtual Camera):** Abstracción matemática definida por:
 - Una **posición** en el espacio del mundo (punto de vista)
 - Una **base vectorial** (forward, right, up) que determina su orientación
 - Parámetros de proyección (campo de visión, aspecto, planos near/far)

La matriz de vista (View Matrix) $V = P^{-1}$ transforma del espacio del mundo al espacio de la cámara.

- **Proyección Isométrica:** Tipo de proyección paralela (ortográfica) donde la cámara observa la escena con un ángulo típicamente de 45° , creando la ilusión de profundidad sin perspectiva. Es característica de juegos de estrategia en tiempo real (RTS) y RPGs clásicos como Age of

Empires II, Diablo II, StarCraft, y The Sims. Matemáticamente, se implementa mediante:

- Una rotación de 45° alrededor del eje vertical (yaw)
 - Una inclinación de aproximadamente 35.264° (ángulo isométrico exacto: $\arctan(1/\sqrt{2})$)
 - Proyección ortográfica (sin distorsión de perspectiva)
- **View Matrix (Matriz de Vista):** Matriz que transforma coordenadas del espacio del mundo al espacio de la cámara. Se construye como $V = P^{-1}$, donde P contiene los vectores base de la cámara. En la práctica, se calcula eficientemente usando la posición y orientación de la cámara mediante la función “lookAt” en bibliotecas gráficas (OpenGL, DirectX).
- **Transformaciones Compuestas:** En el pipeline gráfico, múltiples transformaciones se combinan multiplicando matrices. Para un vértice \vec{v} , la transformación completa es:

$$\vec{v}_{screen} = P_{proj} \cdot V_{view} \cdot M_{world} \cdot \vec{v}_{local}$$

donde M es la matriz del modelo (Model Matrix), V es la matriz de vista (View Matrix), y P es la matriz de proyección (Projection Matrix). Esta composición se llama **matriz MVP (Model-View-Projection)**.

- **Control de Entrada Relativo a Cámara:** En desarrollo de videojuegos, el cambio de base es crítico para mapear correctamente las entradas del jugador. Si el jugador presiona “arriba”, el movimiento debe ser relativo a la orientación de la cámara, no a los ejes absolutos del mundo. Esto requiere transformar el vector de entrada del espacio de la cámara al espacio del mundo usando la matriz P (la inversa de la View Matrix).
- **Optimización de Matrices en GPU:** Las GPUs modernas están altamente optimizadas para multiplicación de matrices 4×4 (incluyendo traslaciones mediante coordenadas homogéneas). Los shaders reciben la matriz MVP pre-calculada en la CPU y la aplican a millones de vértices en paralelo. Entender el álgebra de cambio de base es esencial para escribir shaders eficientes.

Conceptos de MAT-1004 Aplicados

- **Matriz de Transformación Lineal (Unidad 4.5)**
- **Cambio de Base (Unidad 4.6)**
- **Matrices Semejantes (Unidad 4.6)**
- **Invariantes de Semejanza**
- **Matrices Ortogonales (Unidad 4.2)**
- **Producto Matriz-Vector (Unidad 1.3)**