



***Facultad
de
Ciencias***

**PROPAGACIÓN DE PULSOS A TRAVÉS DE
MEDIOS DENSOS MULTICAPA
(PROPAGATION OF PULSES THROUGH
MULTILAYER DENSITY MEDIA)**

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al**

GRADO EN FÍSICA

Autor: Guillermo Díaz San Martín

Director: José Maria Saiz Vega

Co-Director: Rodrigo Alcaraz de la Osa

Junio – 2018

Propagación de pulsos a través de medios densos multicapa

Alumno: Guillermo Díaz San Martín

Documento: Trabajo de Fin de Grado

Grado: Física

Curso: 4º

Año académico: 2017/2018

Dirección: José Maria Saiz Vega y Rodrigo Alcaraz de la Osa

Fecha de realización: Junio 2017/Junio 2018

Palabras clave: Kubelka-Munk, Monte Carlo, sustrato, scattering, reflectancia, transmitancia, absorbancia, pulso gaussiano, delta de Dirac, histograma, capas, flujo, luz colimada, luz difusa, fotón balístico, anchura temporal.

Resumen

El presente Trabajo de Fin de Grado se basa en la teoría de Kubelka-Munk para estudiar, en un medio material con características concretas, la reflectancia, transmitancia y absorbancia para un pulso, en este caso de radiación electromagnética, que atraviesa dicho medio. Dado que la teoría de Kubelka-Munk da como resultado matemático una serie de ecuaciones diferenciales, y que resolverlas, aunque está dentro de lo posible sería muy costoso, se va a emplear un método numérico estadístico conocido como el método de Monte Carlo. Para implementar este método numérico se ha hecho uso del software MATLAB, que permite la resolución de una gran cantidad de fenómenos estadísticos en un breve periodo de tiempo.

Las características principales que tiene que cumplir el sistema para poder desarrollarse mediante esta técnica son la bidireccionalidad de flujos y la posibilidad de dividir el sistema en intervalos o capas. Esto quiere decir que, aunque este TFG esté dirigido a representar un sistema físico muy concreto, se puede emplear para cualquier otro sistema físico que cumpla las condiciones que se acaban de establecer.

También resulta importante mencionar que las unidades con las que se ha desarrollado este trabajo tanto teóricamente como en los resultados, son unidades arbitrarias de tiempo y de energía, que luego pueden ser fácilmente aplicables y convertibles a multitud de

sistemas concretos, como se hace en algunos de los resultados aquí expuestos, lo que otorga un amplio abanico de posibilidades.

Por último, merece la pena destacar que se ha logrado crear un sistema de cuatro flujos, capaz de distinguir entre fotones balísticos y difusos, capaz de generar los histogramas con los tiempos de vuelo de los fotones y capaz de contabilizar el número de fotones reflejados, transmitidos o absorbidos por unidad de tiempo en función de las características del medio y del sustrato, todo ello de manera coherente con los fundamentos teóricos en los que se ha basado.

English version

Key words: Kubelka-Munk, Monte Carlo, substrate, scattering, reflectance, transmittance, absorbance, Gaussian pulse, Dirac delta, histogram, layers, flow, collimated light, diffuse light, ballistic photon, temporal width.

Abstract

The present End of Degree Project is based on the Kubelka-Munk theory to study, in a material medium with concrete characteristics, the reflectance, transmittance and absorbance for a pulse, in this case electromagnetic radiation, that passes through said medium. Like the theory of Kubelka-Munk gives as a mathematical result differential equations, and that solving them as possible would be very expensive, we will use a numerical statistical method known as the Monte Carlo method. To implement this numerical method, MATLAB software has been used, which allows the resolution of a large number of statistical phenomena in a short period of time.

The main characteristics that the system must fulfill in order to be developed by this technique are the bidirectionality of flows and the possibility of dividing the system into intervals or layers. This means that, although this EDP is aimed at representing a very specific physical system, it can be used for any other physical system that meets the conditions that have just been established.

It is also important to mention that the units with which this work has been developed both theoretically and in the results, are arbitrary units of time and energy, which can then be easily applied and converted to a multitude of concrete systems, as is done in some of the results presented here, which gives a wide range of possibilities.

Finally, it is worth noting that it has been possible to create a system of four flows, capable of distinguishing between ballistic and diffuse photons, capable of generating histograms with the times of flight of photons and capable of counting the number of reflected photons, transmitted or absorbed per unit of time depending on the characteristics of the medium and the substrate, all in a manner consistent with the theoretical foundations on which it has been based.

Índice

I.- Introducción	1
II.- Fundamentos Teóricos	5
II.1.- Teoría de Kubelka-Munk	5
II.2.- Ley de Stokes	8
II.3.- Ley de Beer-Lambert	9
III.- Método de Monte Carlo	10
III.1.- Adaptación a Kubelka-Munk	10
III.2.- Pseudocódigo	14
III.3.- Criterios de convergencia	15
III.4.- Simulación de un Pulso	16
IV.- Validación del Método	17
IV.1.- Balance energético	17
IV.2.- Ley de Stokes	18
IV.3.- Ley de Beer-Lambert	19
V.- Resultados	21
V.1.- El Sensor de Fibra Óptica	21
V.1.1.- Ventanas de Trabajo de Fibra Óptica	25
V.2.- Propagación en medio denso	27
V.3.- Medio homogéneo con discontinuidad	34
V.3.1.- Modelo del Ojo Humano	37
VI.- Conclusiones	41
Bibliografía	43

I.- INTRODUCCIÓN / MOTIVACIÓN

La propagación de pulsos de ondas a través de diversos medios materiales ha constituido y constituye en la actualidad una de las técnicas más potentes y fructíferas para el desarrollo científico-técnico en distintas áreas, abarcando desde la medicina y la biología hasta la óptica y la astronomía.

Su análisis se hace imprescindible para comprender fenómenos tales como la difusión de la luz a su paso por la atmósfera, el funcionamiento de la fibra óptica, las ecografías o las actuales técnicas de radioterapia y radiodiagnóstico, entre otras.

Ser capaces de entender y simular la propagación de pulsos de energía a través de medios densos viene siendo objeto de estudio y de desarrollo científico, técnico y tecnológico desde hace muchos años. Se trata de una herramienta que se ha demostrado muy potente debido principalmente a dos factores: primero, el hecho de que su simplificación e idealización se adaptan de manera aceptable con los procesos reales, y segundo, la actual capacidad para simular e interpretar las señales que producen estos sistemas.

Ya a principios del siglo XX, con el descubrimiento de los rayos X, la aplicación de esta técnica permite ver el cuerpo humano como nunca se había visto antes, generando para ello haces de radiación electromagnética, en este caso de electrones de alta energía y longitud de onda corta, que interactúan con los distintos materiales de los que está formado el cuerpo humano, de tal manera que el espectro de salida se podía recoger en una placa que mostraba las formas del interior del cuerpo mediante procesos de absorción, reflexión y transmisión del haz de electrones incidente.

Más tarde, a partir de la década de los años 50, se pudo comprobar como el paso de ultrasonidos a través de tejido vivo permite observar, principalmente mediante la reflexión de las ondas mecánicas en las zonas en las que cambian las propiedades del medio, partes del cuerpo humano de una manera apenas invasiva y actualmente básica en multitud de diagnósticos intracorporales.

En este sentido, la generación de pulsos de luz se ha perfeccionado durante las últimas décadas gracias al uso del láser. Estos pulsos poseen una combinación de propiedades única: resolución temporal, alta potencia instantánea con baja energía promedio, espectro ancho, gran tasa de repetición y alta coherencia. Su uso está siendo ampliamente difundido, como es el caso del

empleo de pulsos de luz ultracortos al atravesar un medio, simulando un chorro de líquido como el generado por un inyector de combustible automotriz comercial de cara a la industria automovilística [1], estudios en el área de la batimetría (profundidades marinas) para mejorar la detección de objetos subacuáticos [2], estudios muy importantes y punteros en la simulación y aplicación de pulsos de luz a través de tejido biológico con grandes aplicaciones en la medicina y la biología [3], reconstrucciones de imágenes en 3D mediante pulsos de luz reflejada [6], análisis sobre comunicaciones y todo tipo de envío de información mediante fibra óptica, caracterización de materiales empleados en la industria como textiles, maderas o plásticos, y, en general, el estudio de la propagación de pulsos en medios densos en los cuales a través del espectro de reflexión se puede determinar muchas de sus propiedades.

Todo ello hace que resulte importante avanzar en el conocimiento de sus propiedades y características como paso previo a implementar estos avances en las técnicas futuras, desarrollando los modelos ya existentes y generando otros nuevos. Este trabajo se ubica bajo estos preceptos y su intención es la de estudiar y desarrollar un modelo que lleva vigente desde la década de los años 30, conocido con el nombre de Kubelka-Munk, de forma que podamos aplicarlo al caso de la propagación de pulsos en un medio. La forma de aplicar ese modelo para todas las situaciones en las que no podamos utilizar soluciones analíticas será otra técnica también conocida, el Método de Monte-Carlo. Este considera todos los sistemas físicos como una superposición de capas que cada elemento de luz ha de atravesar, y la interacción de la luz con la materia es implementada en forma de probabilidad, que es característica del medio, del tipo de evento –absorción, scattering- y del espesor dado a la capa, o discretización.

La teoría de Kubelka-Munk se puede describir como un modelo simplificado de propagación de luz en un medio difusor y absorbente, que consta de dos flujos, en la misma dirección y sentidos opuestos, que atraviesan un medio. En el caso más sencillo se trata de un sistema plano y homogéneo, que se puede entender como constituido por capas idénticas, y que es capaz de transmitir, difundir o absorber luz, de acuerdo a unas propiedades intrínsecas del material que lo constituya. Esta simplificación hace que este modelo no sea realista en todos los casos, por varios motivos. En primer lugar, porque los medios no siempre serán homogéneos. En segundo lugar, porque la idea bidireccional no es adecuada para sistemas de dimensiones transversales limitadas en los que haya flujos laterales importantes. Pero, además, en un sistema que intente acercarse a la realidad debe establecerse la condición de que sean cuatro los flujos que atraviesan el medio, de tal manera que se diferencia, en ambos sentidos, entre el haz colimado, formado por aquellas unidades que no han sufrido difusión en su interacción con el medio, y

un haz difuso, formado por aquellas unidades que sí han sido difundidas en su interacción con el medio. No obstante, en primera aproximación y con intenciones académicas, se trata de un método muy desarrollado y con el que se han obtenido resultados muy interesantes desde sus inicios. Además, en este trabajo, a partir de una base de un modelo de dos flujos, se ha implementado una modificación que reduce esta limitación del modelo hasta el punto de que es capaz de reproducir los resultados de un modelo de cuatro flujos.

Las ecuaciones que se obtienen a través de Kubelka-Munk tienen en ocasiones soluciones analíticas mediante ecuaciones diferenciales, mientras que en otras ocasiones no tienen solución analítica. Este hecho es muy importante a la hora de justificar el uso de una herramienta estadística, Monte Carlo, la cual va a ser verificada comparando sus resultados con los resultados analíticos, y posteriormente será empleada para resolver los casos en los cuales las ecuaciones carezcan de solución analítica.

Se ha desarrollado un programa informático que simula el sistema y su interacción con cada elemento de energía (ya sea electromagnética o de otro tipo), exponiéndose en detalle su funcionamiento, a partir de su pseudocódigo. También se comparan los resultados que proporcionan las expresiones teóricas con los obtenidos a través del mencionado programa, comprobando el ajuste de resultados entre ambos, y se realizan ciertas verificaciones del modelo, para comprobar su consistencia con leyes físicas bien conocidas, como la Ley de Beer-Lambert o la relación de Stokes.

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es el desarrollo de una herramienta y un modelo adecuados para el análisis de pulsos, tanto electromagnéticos como mecánicos, que atraviesan medios, homogéneos o inhomogéneos, discretizados en capas, y comprobar los espectros de reflexión y transmisión en función de las características tanto del medio como del pulso incidente.

El presente Trabajo de Fin de Grado se compone, además de esta introducción, de los siguientes capítulos:

Un capítulo de fundamentos que introduce la principal teoría existente relacionada con el tema y que va a constituir un importante pilar del trabajo: la teoría de Kubelka-Munk, la cual se expone y detalla, resaltando la aplicabilidad de su principal resultado. A su vez se introducen las verificaciones que se realizarán posteriormente para comprobar la validez del modelo, principalmente la Ley de Beer-Lambert y la relación de Stokes.

A continuación, se describe la simulación de Monte Carlo, explicando el método con detalle, las discretizaciones que se emplean y el uso de probabilidades.

Se realiza también en este apartado una descripción del software y el pseudocódigo que se ha programado para realizar dicha simulación, que reproduce y amplía el método de Kubelka-Munk, así como la modelización del pulso. Se ha desarrollado un programa informático que simula el sistema y su interacción con cada elemento de energía (ya sea electromagnética o de otro tipo), exponiéndose en detalle su funcionamiento, a partir de su pseudocódigo. También se comparan los resultados que proporcionan las expresiones teóricas con los obtenidos a través del mencionado programa, comprobando el ajuste de resultados entre ambos, y se realizan ciertas verificaciones del modelo, para comprobar su consistencia con leyes físicas bien conocidas, como la Ley de Beer-Lambert o la relación de Stokes.

El capítulo 4 está dedicado a la verificación del modelo numérico utilizado: se comprueba la conservación de energía (número de fotones o paquetes de energía inicial y final), así como la Ley de Beer-Lambert (atenuación exponencial) y la relación de Stokes (consistencia de los flujos).

El siguiente capítulo se basa en los resultados obtenidos y se muestran según la respuesta-impulso del sistema en histogramas que reflejan distintas magnitudes y clasificaciones. Se analizan para distintos pulsos las respuestas de un medio poco difusor, otro medio difusor y otro medio heterogéneo, a través del número de fotones transmitidos, reflejados, difundidos y/o absorbidos en cada capa, así como los tiempos de cada uno de ellos. Estos tres casos se relacionan con casos de modelos físicos realistas que son explicados en este apartado.

Finalmente, se analizan los resultados y se obtienen las conclusiones pertinentes en el último capítulo.

II.- FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Cuando la luz viaja a través de un medio difusor, toda la radiación incidente no se propaga libremente, sino que una parte es difundida (scattered light) y/o absorbida. Como resultado de ello, una parte de la luz que incide sobre un medio puede emerger por la superficie de entrada, fracción que se conoce como *reflectancia*. Esta fracción, dependiente de la longitud de onda, es denominada “reflectancia espectral” y denotada como $R(\lambda)$.

El estudio cuantitativo y cualitativo de esos efectos es lo que constituye el marco teórico de este Trabajo de Fin de Grado.

El desarrollo de un modelo que estudie estos efectos viene de largo, y en este trabajo se va a emplear un método muy utilizado por la industria desde mediados del siglo XX, y que se basa en razonamientos simplistas de la realidad. No obstante, se van a utilizar derivaciones revisadas de dicho método a fin de obtener mejores resultados y dotar de una mayor solidez los resultados.

El método de Kubelka-Munk fue desarrollado por Paul Kubelka y Franz Munk y publicado por primera vez en el año 1931, en un artículo titulado *An article on optics of paint layers* (*Un artículo sobre la óptica de las capas de pintura*), y en el cual desarrollan un modelo simplificado de la propagación de la luz a través de un medio material discretizado en un número finito de capas, empleando para ello ecuaciones diferenciales.

Comenzando con su desarrollo, las simplificaciones que asume el modelo original son:

- Luz difusa y no colimada que se propaga en dos sentidos opuestos
- Medio homogéneo e isótropo
- No hay reflexión especular ni límites laterales

No obstante, en el modelo presente únicamente se supone que:

- Medio, o medios en contacto óptico, homogéneo e isótropo
- No hay límites laterales

Según el modelo, se denomina i al flujo de luz que se propaga en el sentido de incidencia y j al flujo que se propaga en sentido opuesto, ambos en unidades de potencia/superficie.

Se supone un haz de luz difuso que incide en la superficie de un material que se encuentra en contacto óptico con otro distinto. El haz incide con intensidad I y se desplaza en el interior del

material como $i_g(x)$ y $j_g(x)$, siendo i el flujo de luz que se propaga en el sentido de incidencia y j el flujo que se propaga en sentido opuesto, ambos en unidades de potencia/superficie, tal como se muestra en la *Figura 1.1*. Cabe destacar que para que el modelo sea válido, el material debe mantenerse en contacto óptico con un sustrato cuyos coeficientes de absorbancia A_g , transmitancia T_g y reflectancia R_g sean conocidos¹, con el objetivo principal de ocultar cualquier material que haya por debajo. Las ecuaciones fundamentales del método Kubelka-Munk son:

$$-di(x) = -(S + K) \cdot i(x) \cdot dx + S \cdot j(x) \cdot dx \quad (1)$$

$$dj(x) = -(S + K) \cdot j(x) \cdot dx + S \cdot i(x) \cdot dx \quad (2)$$

donde K y S son los coeficientes de absorción y scattering hacia atrás respectivamente, con unidades de la inversa de la longitud, dependientes de la longitud de onda de la luz incidente, es decir $K=K(\lambda)$ y $S=S(\lambda)$.

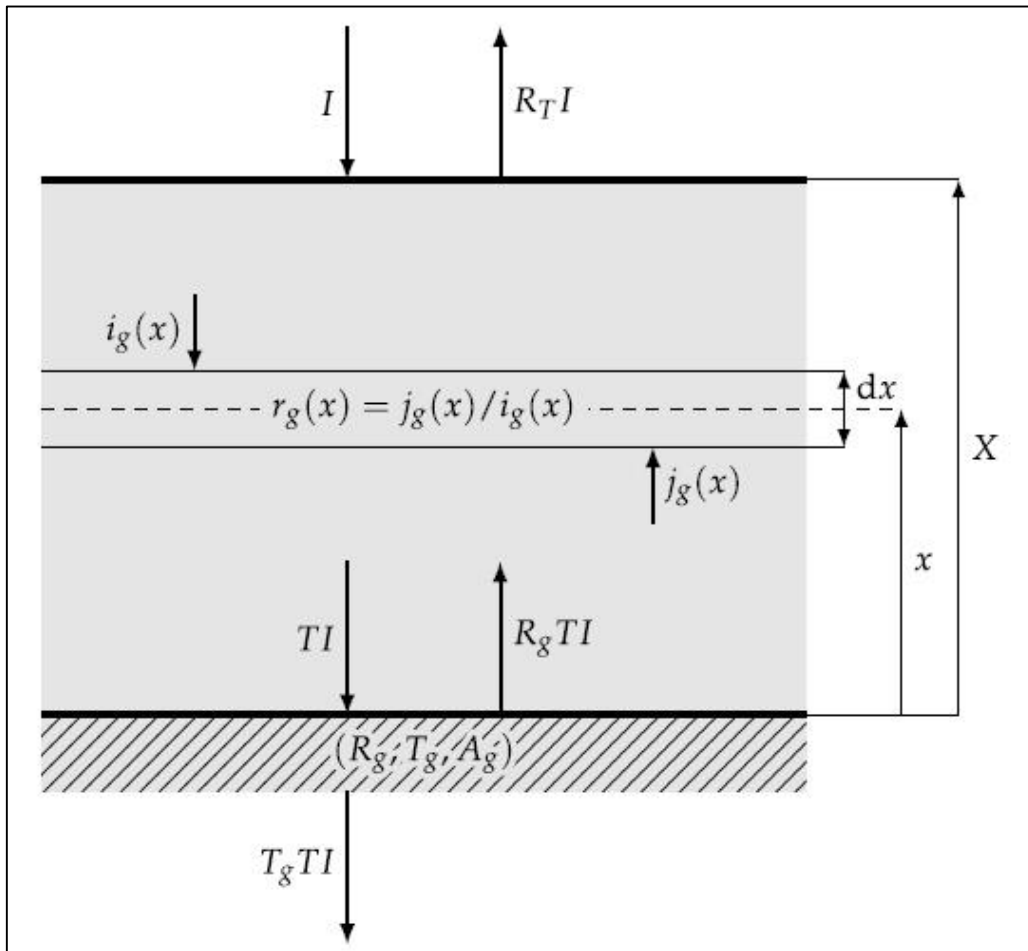


Figura 1.1- Ilustración del modelo teórico de Kubelka-Munk. Se trata de una muestra plano-paralela de grosor X situada en contacto óptico con un sustrato arbitrario, de reflectancia R_g , transmitancia T_g y absorbancia A_g

¹ Todos los subíndices g significan que el material está en contacto óptico con otro distinto.

conocidos, y en la que se produce transmisión y scattering del haz de luz que entra con intensidad I. (Imagen tomada de “Vol. 33, No. 10 / October 2016 / Journal of the Optical Society of America A”)

Se debe tener en cuenta que en este caso la dirección de propagación es la del eje x. También, para simplificar, se puede tomar $a = 1 + K/S$ para obtener:

$$-\frac{di(x)}{Sdx} = -ai(x) + j(x) \quad (3)$$

$$\frac{dj(x)}{Sdx} = -aj(x) + i(x) \quad (4)$$

Y que se pueden a su vez combinar empleando el cociente $r(x) = j(x)/i(x)$:

$$\frac{dr(x)}{Sdx} = r(x)^2 - 2ar(x) + 1 \quad (5)$$

Integrando la Ec.(5) y haciendo que $r(0) = R_g$:

$$R_T = \frac{(1 - aR_g) \sinh bSX + bR_g \cosh bSX}{(a - R_g) \sinh bSX + b \cosh bSX} \quad (6)$$

Donde $b = \sqrt{a^2 - 1}$. Se trata de una de las aportaciones más importantes de esta teoría, pues es capaz de cuantificar la reflectancia total R_T , que es la fracción de luz reflejada por la muestra.

La expresión para obtener la transmitancia total T_T , viene dada de la forma

$$T_T = \frac{bT_g}{(a - R_g) \sinh bSX + b \cosh bSX}$$

La expresión para obtener la absorbancia total A_T , viene dada de la forma

$$A_T = \frac{(a - 1)(1 + R_g) \sinh bSX + b[(1 - R_g) \cosh bSX - T_g]}{(a - R_g) \sinh bSX + b \cosh bSX}$$

También es posible deducir la ecuación para la reflectancia cuando el grosor de la muestra es infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R_T = R_\infty = a - b = 1 + \frac{K}{S} - \sqrt{\left(\frac{K}{S}\right)^2 + 2\left(\frac{K}{S}\right)} \quad (7)$$

Y con esta ecuación se puede conocer el valor del cociente K/S a través de la llamada función de Kubelka-Munk:

$$\frac{K}{S} = \frac{(1 - R_{\infty})^2}{2R_{\infty}} \quad (8)$$

Ley de Stokes

Considérese una lámina homogénea y aislada sobre la cual se hace incidir un flujo de radiación de intensidad I . Tal y como se muestra en la *Figura 1.1*, y se ha desarrollado anteriormente, esta radiación incidente al entrar en contacto con la muestra va a sufrir los efectos de la reflexión y la transmisión, con lo que se van a obtener dos flujos, el reflejado, de valor IR_0 , y el transmitido, de valor IT , siendo R_0 y T los coeficientes de reflectancia y transmitancia del material de la lámina respectivamente [3].

Una vez establecida esta configuración, se hace incidir otro flujo de radiación con intensidad J , esta vez entrando a la muestra a través de la cara opuesta y por tanto también en sentido opuesto al flujo de intensidad I , lo que vuelve a generar dos flujos, en este caso el reflejado, de valor JR_0 , y el transmitido, de valor JT .

Ahora bien, si la lámina se encuentra en contacto óptico con un sustrato, su reflectancia en contacto con la lámina R_g cobra importancia y aparece el flujo causado por la presencia del sustrato J_g de tal forma que

$$J_g = (I \cdot T + J_g \cdot R_0) \cdot R_g \quad (9)$$

La reflectancia de la lámina vendrá dada por la expresión

$$R = (I \cdot R_0 + J_g \cdot T) / I \quad (10)$$

Sustituyendo el valor de J_g en la Ec.(10) se obtiene la ecuación de Stokes:

$$R = R_0 + \frac{T^2 \cdot R_g}{(I - R_g \cdot R_0)} \quad (11)$$

Ley de Beer-Lambert

Se trata de una ley empírica cuya función esencial es la de relacionar la intensidad de la radiación que incide en un medio con la que sale, considerando en el interior del material únicamente efectos de absorción. En este caso se aplica a cada capa dx , de tal manera que la intensidad, entendida como el número de fotones o paquetes de energía, absorbida por cada capa debe ser proporcional a la intensidad que incide en esa capa, lo que indica que en las primeras capas va a haber mayor absorción y por tanto matemáticamente se genera una exponencial decreciente.

III.- MÉTODO DE MONTE CARLO

El método Monte Carlo es un método numérico que permite resolver problemas físicos y matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias. Lo vamos a considerar aquí desde un punto de vista didáctico para resolver un problema del que conocemos tanto su solución analítica como numérica. El método Monte Carlo fue bautizado así por su clara analogía con los juegos de ruleta de los casinos, el más célebre de los cuales es el de Montecarlo.

La importancia actual del método Monte Carlo se basa en la existencia de problemas que tienen difícil solución por métodos exclusivamente analíticos, pero que dependen de factores aleatorios o se pueden asociar a un modelo de probabilística artificial (resolución de integrales de muchas variables, minimización de funciones, etc.). Gracias al avance en diseño de los ordenadores, cálculos Monte Carlo que en otro tiempo hubieran sido inconcebibles, hoy en día se presentan como asequibles para la resolución de ciertos problemas. En estos métodos el error $\sim 1/\sqrt{N}$, donde N es el número de pruebas y, por tanto, ganar una cifra decimal en la precisión implica aumentar N en 100 veces. La base es la generación de números aleatorios de los que nos serviremos para calcular probabilidades. Conseguir un buen generador de estos números, así como un conjunto estadístico adecuado sobre el que trabajar, son las primeras dificultades con las que nos vamos a encontrar a la hora de utilizar este método. En el caso que presentamos hemos hecho uso de la función *rand* para la generación de números aleatorios entre 0 y 1.

Su aplicación a día de hoy se puede observar en multitud de áreas y disciplinas como pueden ser finanzas [7] [8], planificación de proyectos de Ingeniería Civil [9], validación del trazado de rayos en Óptica Geométrica [6], simulaciones en el ámbito de la física nuclear y la dosimetría [10] y un elevado número de trabajos más que la sitúan como una de las técnicas más prolíficas y desarrolladas de la actualidad.

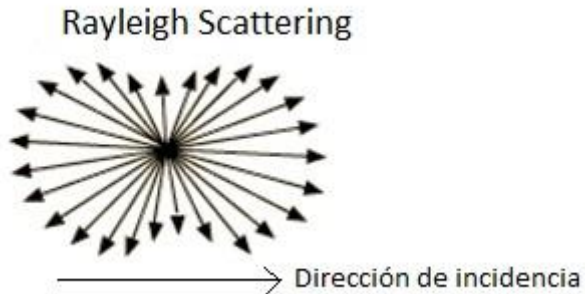
En este caso, se propone un modelo multicapa, sobre el cual incide cierta radiación, de una longitud de onda determinada, que se representa de forma esquemática en la *Figura 2.2*.

Este modelo está constituido por un número N de capas de igual espesor. Se supone que las capas son lo suficientemente grandes transversalmente como para que no existan pérdidas por los bordes y que su composición es uniforme. En resumen, cada capa tiene capacidad para absorber, difundir o simplemente transmitir la radiación.

Estas capas, planas y de espesor reducido, se encuentran colocadas paralelamente entre sí, de forma homogénea. La última de las capas se sitúa en contacto óptico con un sustrato, de distinta composición, cuyos valores de reflectancia, transmitancia y absorbancia son conocidos.

Los paquetes de onda que inciden sobre la muestra llevan asociada cierta longitud de onda o cierto rango de ellas. Al incidir, estos paquetes de onda continúan en el sentido de incidencia a menos que sean absorbidos o desviados hacia atrás. En este modelo se tienen en cuenta scattering o difusiones tanto hacia delante como hacia detrás. Cabe aclarar que el scattering es la difusión o el esparcimiento de los paquetes de onda por partículas cuyo tamaño es mucho menor que la longitud de onda de la radiación incidente. Esto quiere decir que los fotones cambian su dirección a una que tomamos como aleatoria, la cual puede hacer que el fotón continúe saltando de capa en capa en la dirección de incidencia o bien que cambie su sentido, pero en promedio no lo hace en líneas rectas, hecho que también se ha tenido en cuenta en este modelo. Se supone que todo el scattering mantiene la longitud de onda inicial según el modelo de dispersión de Rayleigh, despreciando los efectos de la dispersión Raman [11] y la dispersión de Mie [12]. Por otra parte, la radiación incidente se considera colimada y de intensidad I .

Figura 2.1- Esquema de un scattering como los propuestos en el modelo de este trabajo.



En este modelo, se va a considerar el movimiento individual de cada fotón, llevando a cabo un estudio del comportamiento total, empleando el método de Monte Carlo. Este análisis estadístico permitirá alcanzar unos resultados muy próximos a los analíticos.

Existen cinco comportamientos posibles por parte de estos fotones, que forman un haz incidente colimado, al llegar a una capa:

- Transmisión a la siguiente capa sin interacción

El fotón, o paquete de energía, considerado pasa a través de la capa a la que llega y mantiene su trayectoria hacia la siguiente en una línea recta, sin interactuar con la materia de dicha capa.

- Reflexión especular

Es un cambio de sentido sin difusión. El fotón invierte su sentido regresando hacia la capa anterior siguiendo la misma trayectoria rectilínea.

- Scattering hacia atrás

El fotón es difundido invirtiendo el sentido de su movimiento y volviendo hacia la capa anterior.

- Scattering hacia adelante

El fotón es difundido en la dirección de propagación.

- Absorción y fin de su movimiento

La capa absorbe la radiación, deteniendo el flujo de energía.

Aclaraciones:

- 1) Los fotones incidentes forman un haz colimado y monocromático, y tardan una unidad de tiempo en viajar entre capas adyacentes. Cuando un fotón es difundido su trayectoria deja de ser una línea recta, lo cual incrementa el tiempo que tarda en viajar entre capas. Se establece que estos fotones recorren dos unidades de tiempo en viajar entre capas, en lugar de una, como promedio.
- 2) Cuando un fotón es difundido permanece en ese estado de difusión permanentemente.

Las proporciones de flujo reflejado, transmitido y absorbido, respecto al incidente, determinarán, respectivamente la reflectancia R , transmitancia T y absorbanza A del sistema, magnitudes adimensionales y referidas a una única longitud de onda.

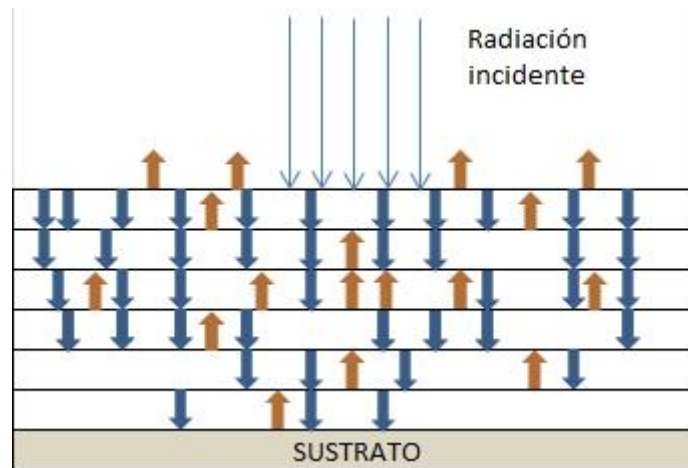
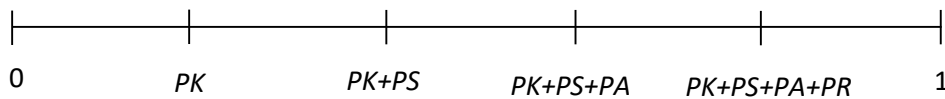


Figura 2.2- Esquema del modelo que se simula con el código que emplea el Método de MonteCarlo

El código que permite desarrollar el modelo ha sido escrito en el software de programación MATLAB, que permite obtener los valores de la reflectancia R , transmitancia T y absorbancia A , así como otros que resultan de interés como el tiempo que el fotón se encuentra dentro del material hasta que es absorbido, reflejado o transmitido, *tiempo*, el número de saltos entre capas de cada fotón, *saltos_intercapa* o el número de fotones que han pasado por cada capa, *ocupación*.

El algoritmo desarrollado se reproduce con su pseudo-código en el *Algoritmo 2.1*.

Inputs: N , NT ;
Outputs: R , T , A , *ocupación*, *saltos_intercapa*, *tiempo*;



PK : Probabilidad de absorción
 PS : Probabilidad de scattering hacia atrás
 PA : Probabilidad de scattering hacia delante
 PR : Probabilidad de reflexión especular

Cada fotón comienza el programa moviéndose hacia la derecha

ρ : Número aleatorio $\in (0,1)$

scat: N° de difusiones que ha sufrido el fotón

```
while moviendose
    if  $\rho < PK$ 
        foton absorbido
        STOP
    else if  $\rho < (PK+PS)$ 
        if moviendose a la derecha
            if primera capa
```

```

        foton reflejado
        sumar una unidad de scat
        STOP
    else
        cambiar direccion
        retroceder una capa
        sumar dos unidades de tiempo
        sumar una unidad de scat
    else
        cambiar direccion
        avanzar una capa
        sumar dos unidades de tiempo
        sumar una unidad de scat
else if  $\rho < (PK+PS+PA)$ 
    if moviendose a la derecha
        if primera capa
            foton reflejado
            sumar una unidad de scat
            STOP
        else
            cambiar direccion
            retroceder una capa
            sumar dos unidades de tiempo
            sumar una unidad de scat
    else
        cambiar direccion
        avanzar una capa
        sumar dos unidades de tiempo
        sumar una unidad de scat

else if  $\rho < (PK+PS+PA+PR)$ 
    if moviendose a la derecha
        if ultima capa
            fotón transmitido
            STOP
        else
            avanzar una capa
            sumar dos undiades de tiempo
            sumar una unidad de scat
else
    if moviendose a la derecha
        if ultima capa
            foton transmitido
            STOP
        else
            avanzar una capa
            sumar una unidad de tiempo
    else
        if primera capa
            foton reflejado
            STOP
        else
            retroceder una capa
            sumar una unidad de tiempo

```

Algoritmo 2.1- Algoritmo o pseudocódigo empleado para desarrollar el método de Monte Carlo

A la hora de teorizar este método se debe tener en cuenta que se está suponiendo que cada capa consta de una probabilidad de absorción PK , una probabilidad de scattering hacia atrás PS , una

probabilidad de scattering hacia adelante PA , y una probabilidad de reflexión especular PR , de tal manera que $PK \cdot N = K \cdot X$, $PS \cdot N = S \cdot X$, $PA \cdot N = Y \cdot X$ y $PR \cdot N = R \cdot X$. Cabe destacar que, en este modelo, la precisión con la que se obtengan los resultados va a depender principalmente del número de capas/intervalos en los que se divida el material. Como ya se ha comentado, cuantas más capas mayor precisión, no obstante, se debe fijar un criterio para determinar que bajo un determinado número de capas la precisión es adecuada. No es difícil darse cuenta de que el número de capas total, N , puede describirse por

$$N = \frac{K + S + A + R}{PK + PS + PA + PR} X \quad (12)$$

En este caso, dado que el scattering hacia delante a estos efectos es lo mismo que el fotón sea transmitido, y que lo mismo ocurre con la reflexión especular y el scattering hacia atrás, la ec. (12) la podemos expresar como

$$N = \frac{K + S}{PK + PS} X \quad (13)$$

Como se puede comprobar en la *Figura 2.3*, la diferencia entre la reflectancia teórica, R_T , dada por la ec. (6), y la obtenida por el método de Monte Carlo, R_{MC} , tiende a cero a partir de 100 capas, llegando a estabilizarse a partir de las 1000 capas. También hace que se establezca que la precisión mínima se alcanza con $PK+PS \leq 0.01$.

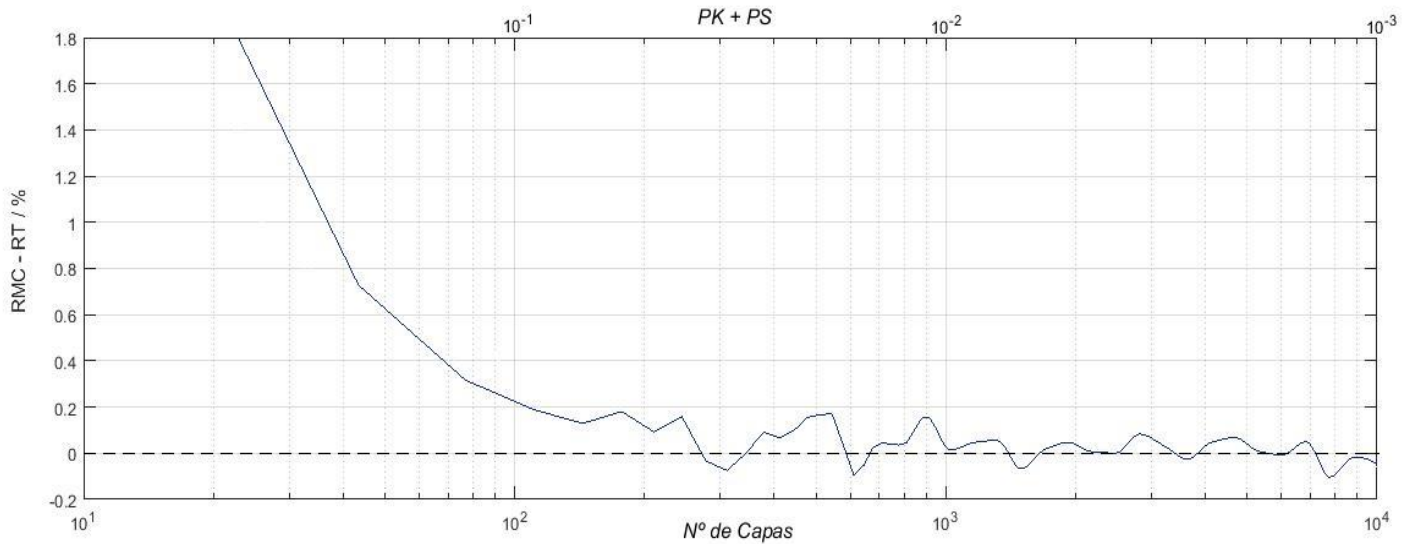


Figura 2.3.- Diferencia, en porcentaje, entre los valores teóricos, R_T , y los obtenidos por el método de Monte Carlo, R_{MC} , para la reflectancia total de un sistema transparente con $S \cdot X=1$ y $K/S=9$, con una incidencia de $N_T=100.000$ fotones. El eje inferior es el número de capas del sistema y el superior la suma $PK+PS$.

Simulación de un pulso

Los pulsos en sistemas de señales suelen ser desarrollados a través de la convolución de la señal de entrada y una señal respuesta del medio, lo cual da lugar a una señal de salida. Matemáticamente su desarrollo viene dado por la Transformada de Fourier. No obstante, en este caso la modelización del pulso no va a requerir de este desarrollo, sino que, dado que el interés está en la amplitud, la anchura y el tiempo que los fotones viajan por el medio, se van a desarrollar pulsos atendiendo a histogramas que tengan esta información.

Según esto, el pulso es elaborado en base al tiempo de entrada de los fotones en el sistema y van a ser fundamentalmente de dos tipos. En primer lugar, se va a emplear un impulso, entendido como un pulso de la máxima amplitud y la mínima duración, caracterizado a través de una delta de Dirac, de tal manera que toda la energía entra en el sistema en el mismo instante y una vez dentro del sistema se va moldeando esa forma conforme los parámetros de reflexión, absorción y transmisión del medio. En segundo lugar, la forma del pulso va a quedar establecida por los distintos tiempos de entrada de los fotones, y dichos tiempos van a seguir distribuciones determinadas, en concreto una distribución gaussiana. Para ilustrar mejor la idea se puede ver en la *Figura 2.4* el histograma de un pulso de entrada gaussiano. El eje x es tiempo y el eje y el número de fotones que incide en el sistema. La suma de las barras hace un total de 100.000 fotones, y se puede observar como en la media entra la mayoría de ellos, unos 4.000, y cuanto más se aleja el tiempo de su valor medio el número de fotones que entra al sistema va disminuyendo.

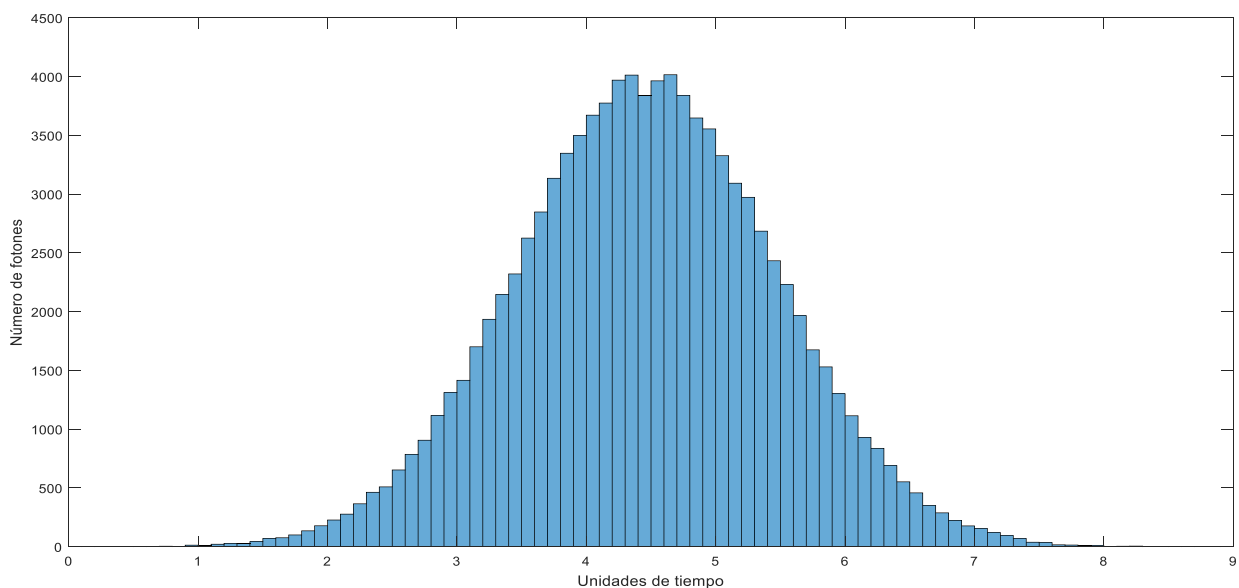


Figura 2.4.- Ejemplo de pulso gaussiano como los que se van a emplear en este trabajo.

IV.- VALIDACIÓN DEL MÉTODO

Para comprobar la validez de las herramientas con las que se va a desarrollar este trabajo, se van a realizar varias pruebas con el fin de determinar que no existen errores que falseen los resultados que puedan ser obtenidos.

Para ello se establece el cumplimiento de las siguientes leyes y fundamentos:

Balance energético

La primera validación consiste en comprobar que la suma total de fotones absorbidos A , reflejados R y transmitidos T es igual al total de fotones que inciden en la muestra NT .

Para ello se asignan valores a las probabilidades de absorción PK , scattering hacia atrás PS , scattering hacia delante PA y reflexión especular PR de cada capa. Dado que se ha supuesto un medio homogéneo e isotrópico las probabilidades de cada capa son las mismas. También se ha de asignar un número de fotones incidentes y el número de capas de la muestra. El programa, cuyo pseudocódigo se muestra anteriormente en *el Algoritmo 2.1*, devuelve los valores buscados R , T y A , tal como se puede ver en la *Tabla 3.1*.

PK	PS	PA	PR	R	T	A	R+T+A
0	0	0	0	0	1	0	1
0.01	0	0	0	0	0.0062	0.9938	1
0	0.01	0	0	0.8420	0.1580	0	1
0	0	0.01	0	0	1	0	1
0.003	0.003	0.003	0.001	0.2652	0.0678	0.6670	1
0.001	0.003	0.003	0.002	0.4261	0.2079	0.3660	1
0.005	0.005	0	0	0.2667	0.0127	0.7206	1
0	0.003	0.006	0.001	0.6038	0.3962	0	1
0.005	0	0.005	0	0	0.0817	0.9183	1
0.007	0.002	0.001	0	0.1150	0.0114	0.8736	1
0.002	0.001	0.004	0.001	0.2576	0.1646	0.5778	1
0.002	0.002	0.002	0	0.2529	0.1647	0.5824	1
0	0.002	0	0.003	0.7230	0.2770	0	1
0.004	0.002	0.001	0.002	0.2608	0.0273	0.7119	1

Tabla 3.1- Relación, en tanto por uno, entre las probabilidades de absorción PK , scattering hacia atrás PS , scattering hacia delante PA y reflexión sin difusión PR , y los coeficientes de reflectancia R , transmitancia T y absorbancia A de la muestra. La relación se da bajo la premisa de que $PK+PS+PA+PR \leq 0.01$. El número de fotones incidentes es de $N_T = 10^5$ fotones y el número de capas es $N=500$ capas.

Relación de Stokes

Para comprobar el cumplimiento de dicha ley se simula el sistema mediante el código diseñado que emplea el método de Monte Carlo. En primer lugar sin sustrato para obtener R_0 , y una vez obtenido R_0 y T se procede a ejecutar el programa para distintos valores de R_g , comparando los resultados que proporciona el programa con los proporcionados por la Ec.(11).

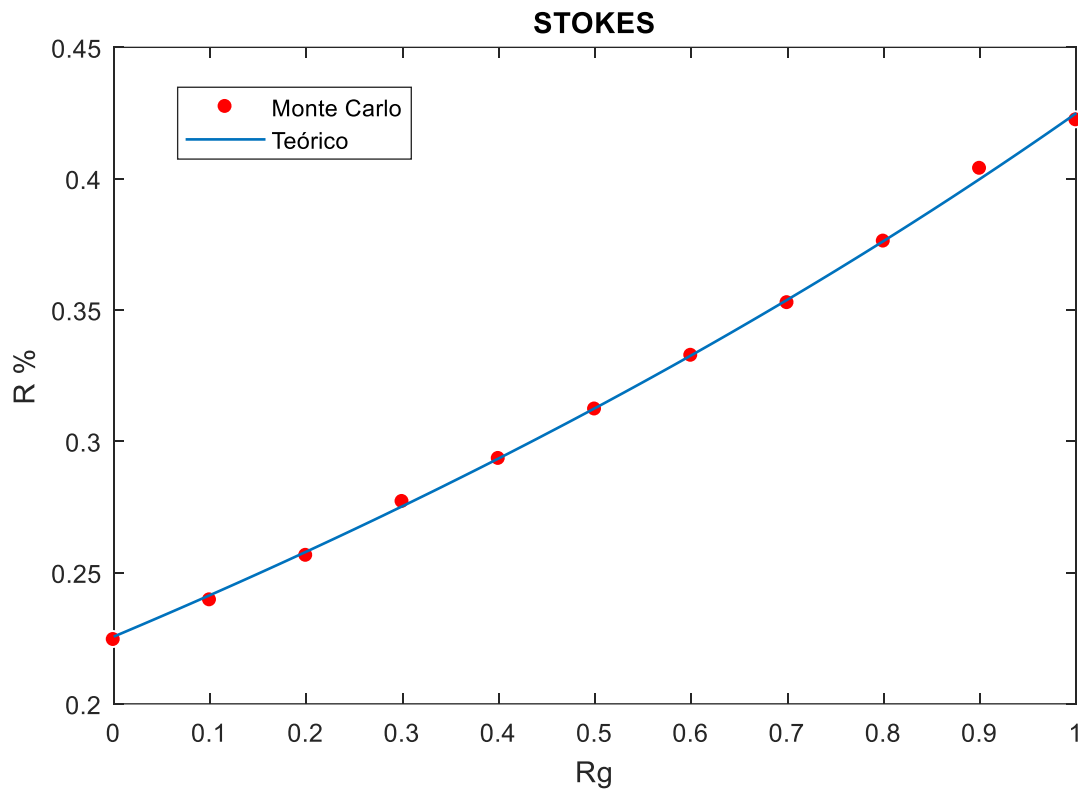


Figura 3.1.- Representación gráfica de la Ecuación de Stokes, en azul, y los resultados del método de Monte-Carlo, en rojo, para una muestra de $N = 100$ capas, cada una de ellas con $PK=0.005$ y $PS=0.005$, en la que inciden $N_T = 10^5$ fotones y que se encuentra en contacto óptico con un sustrato de reflectancia R_g .

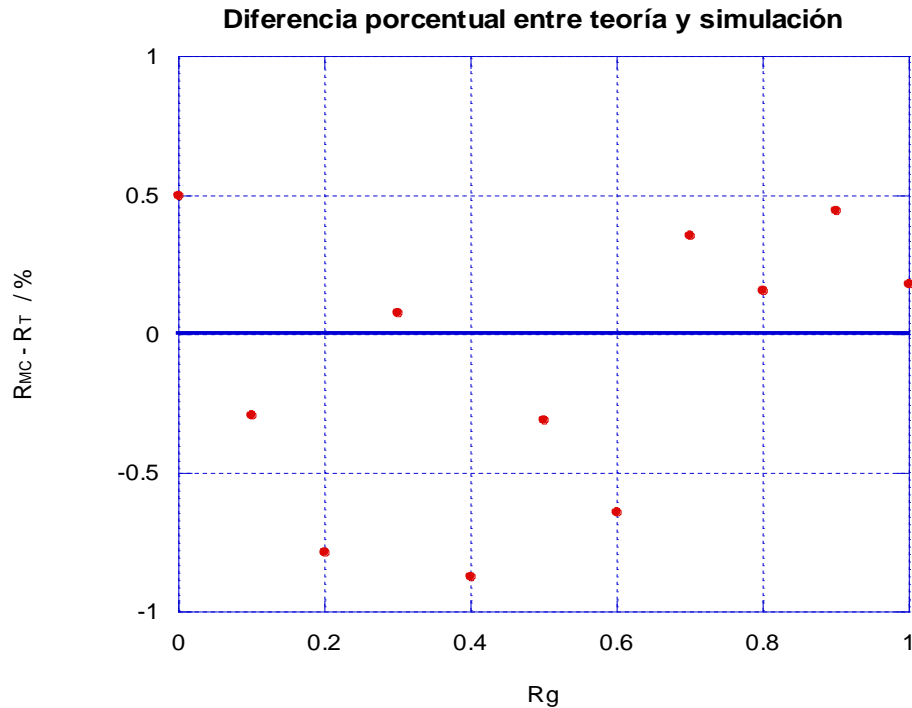


Figura 3.2.- Representación gráfica de la diferencia porcentual entre los valores obtenidos con la Ecuación de Stokes y los obtenidos mediante el método de Monte-Carlo para una muestra de $N = 100$ capas, cada una de ellas con $PK=0.005$ y $PS=0.005$, en la que inciden $N_T = 10^5$ fotones y que se encuentra en contacto óptico con un sustrato de reflectancia R_g . La discrepancia es menor al 1% para todos los valores del sustrato.

Ley de Beer-Lambert

La comprobación de esta ley se va a realizar para una muestra discretizada en $N=500$ capas y en la cual inciden $N_T = 10.000$ fotones. Ya que solamente se suponen efectos de absorción, las probabilidades de scattering de las capas, PA y PS , van a ser nulas, mientras que la probabilidad de absorción de cada capa se va a establecer en $PK=0.009$. La ecuación que describe la curva es

$$N_f = N_T \cdot e^{-PK \cdot N} \quad (12)$$

donde N_f es el número final de fotones en cada capa.

En cuanto a su implantación en el método numérico, en el *Algoritmo 2.1* se establece el parámetro *ocupación*, el cual representa el número de fotones que han pasado por cada capa y que se trata precisamente del parámetro que se quiere evaluar y comparar con la Ec.(12).

Dicha comparativa se representa en la *Figura 3.3*, en la cual se aprecia la calidad del código a la hora de cumplir con esta ley. Los valores devueltos para absorbancia, reflectancia y transmitancia son, respectivamente, $A=99.32\%$, $R=0$, $T=0.68\%$.

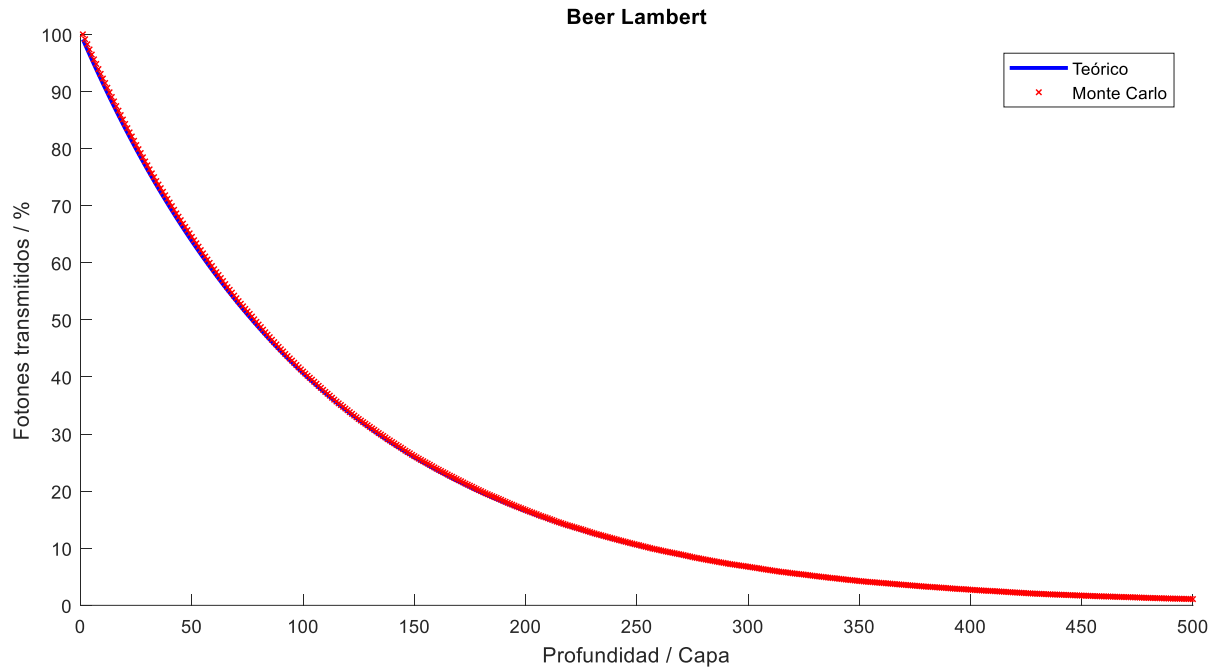


Figura 3.3.- Representación gráfica de la ley de Beer-Lambert, en azul, y los resultados del método de Monte-Carlo, en rojo, para una muestra de $N = 500$ capas, cada una de ellas con $PK=0.005$ y $PS=0.005$, en la que inciden $N_T = 100000$ fotones y que se encuentra en contacto óptico con un sustrato de reflectancia R_g .

V.- RESULTADOS

En este apartado se van a desarrollar los resultados obtenidos del planteamiento anterior. Es importante entender que el modelo matemático aquí desarrollado se podría emplear en otros campos y es capaz de abarcar un espectro amplio de modelos físicos distintos de los que son objeto de este trabajo, ya que, aunque aquí se va a hacer referencia a magnitudes físicas de energía, el modelo es válido para describir el comportamiento de cualquier sistema en el que el flujo de una magnitud pueda ser considerado bidireccional, que sea divisible en intervalos o capas, y en el que incida un número determinado de elementos de la magnitud en cuestión (propagación de sonido, flujos de calor, flujos de personas...).

Como ejemplo de aplicación se van a presentar los modelos físicos de unos sistemas que se consideran de referencia, que son:

- Un medio transparente, de poca absorción y bajo *scattering*, con reflectancia del sustrato variable, tipificando un caso de sensores de fibra o también ecógrafos.
- Un sistema sin sustrato, de baja absorción y elevado *scattering*, con distintos espesores, en lo que puede considerarse un modelo de medio denso o de niebla.
- Un medio homogéneo en cuyo interior existe una discontinuidad.

Para ello se emplean perfiles entrantes en la muestra con forma de delta de Dirac, para conocer la respuesta-impulso de este sistema, y de gaussiana, para simular perfiles más realistas físicamente.

1.- El sensor de Fibra Óptica

Se trata de simular el comportamiento de un medio poco absorbente y con poco *scattering* en el cual se transmite un porcentaje muy elevado de la luz incidente sin interaccionar con nada hasta llegar al final del recorrido donde se encuentra el sustrato. Este modelo es interesante de desarrollar para comprobar de qué manera afecta al perfil de la luz reflejada las variaciones en el factor de reflexión del sustrato R_g . A modo de ejemplo se puede imaginar un cable de fibra óptica que en uno de sus extremos está en contacto óptico con otro material (lo que hemos llamado sustrato), el cual es sensible y sufre variaciones en sus propiedades en función de la temperatura o de la presión. En este caso se puede establecer una relación entre el cambio de propiedades del sustrato y la temperatura o la presión, y esta variabilidad se puede medir a

través de la forma que tienen los histogramas de la luz que el sustrato refleja en una u otra situación. Aunque a este modelo se le haya asignado el nombre de “sensor de fibra óptica” es evidente que tiene la misma aplicación y desarrollo en cualquier sistema que busque obtener información a partir de un “eco” y que se caracterice bajo los mismos parámetros.

Cabe aclarar que, aunque el sistema de fibra óptica sea principalmente longitudinal, y por tanto no cumple la condición de ser ilimitado en sus coordenadas transversales, al tratarse de un sistema en el que la luz está guiada y confinada, se pueden despreciar las pérdidas en los laterales y tomarse netamente como un sistema bidireccional.

Se supone una fibra óptica de 1 metro de distancia, dividida en $N=1000$ intervalos², que tiene probabilidades de absorción y de difusión, $PK \cdot N = PS \cdot N = 0.02$, y que está en contacto óptico con otro material, el sensor. El índice de reflexión del sensor R_g es variable y se ha supuesto que de los fotones reflejados el 90% son reflexiones especulares y el 10% son reflexiones por difusión. Incide un haz de luz colimada compuesta por $N_T=10^5$ fotones con forma aproximada de delta de Dirac (pulso instantáneo) para conocer la respuesta-impulso.

Cabe mencionar que en un sistema físico real como el descrito, al no ser la luz difusa luz que pueda ser guiada, ese 10% de luz difusa que representa el segundo y más pequeño pico de la *Figura 4.1.1* contribuiría más bien a pérdidas y sería, en consecuencia, mucho menor.

Por otra parte, si en lugar de un impulso con forma de delta de Dirac, se introduce en el sistema un haz de luz con forma de pulso gaussiano con una anchura $\sigma=250$ unidades de tiempo, se obtiene lo que se ha representado en la *Figura 4.1.3*.

Para complementar estos resultados se realiza una comparativa de los perfiles reflejados, según las tres principales ventanas de la fibra óptica de vidrio. En la *Figura 4.1.2* se aprecian estas ventanas, que se corresponden con posiciones del espectro electromagnético para las cuales la atenuación de la señal a lo largo de la fibra es mínima.

² La elección de este número de capas N se hace atendiendo a los criterios de la sección III

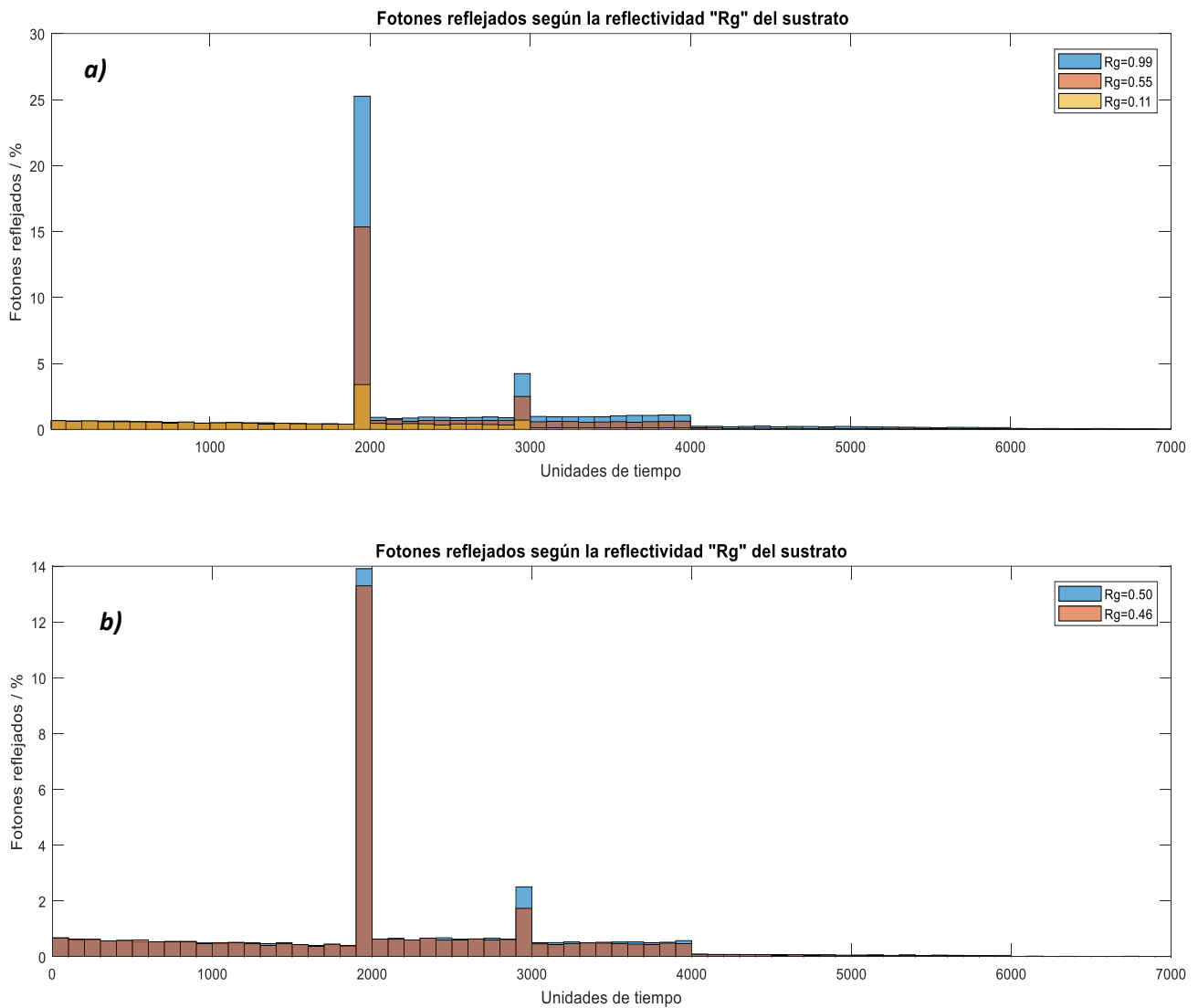


Figura 4.1.1.- Histograma de Reflectividad de un medio poco absorbente (2%) y poco difusor (2%), para distintos valores de reflexión del sustrato R_g en unidades arbitrarias, con un haz incidente en forma de delta de Dirac. Se ha supuesto que el 10% de los fotones reflejados por el sustrato lo han sido por difusión. **a)** Valores de reflexión del sustrato alto (99%), medio (55%) y bajo (10%). **b)** Valores de reflexión del sustrato cercanos (50 y 46 %) para apreciar cómo afectan las diferencias pequeñas.

En la *Figura 4.1.1* se utilizan en el eje x "Unidades de tiempo". Se trata de unidades convertibles de forma inmediata a segundos, conocido el valor del índice de refracción del material. Por ejemplo, en el supuesto establecido de una longitud $L = 1$ metro y $N = 1000$ intervalos, si $n = 1.5$, entonces $\Delta t = \frac{L/N}{c/n} = 5$ ps. Lo mismo se aplica al resto de figuras que tengan dichas unidades.

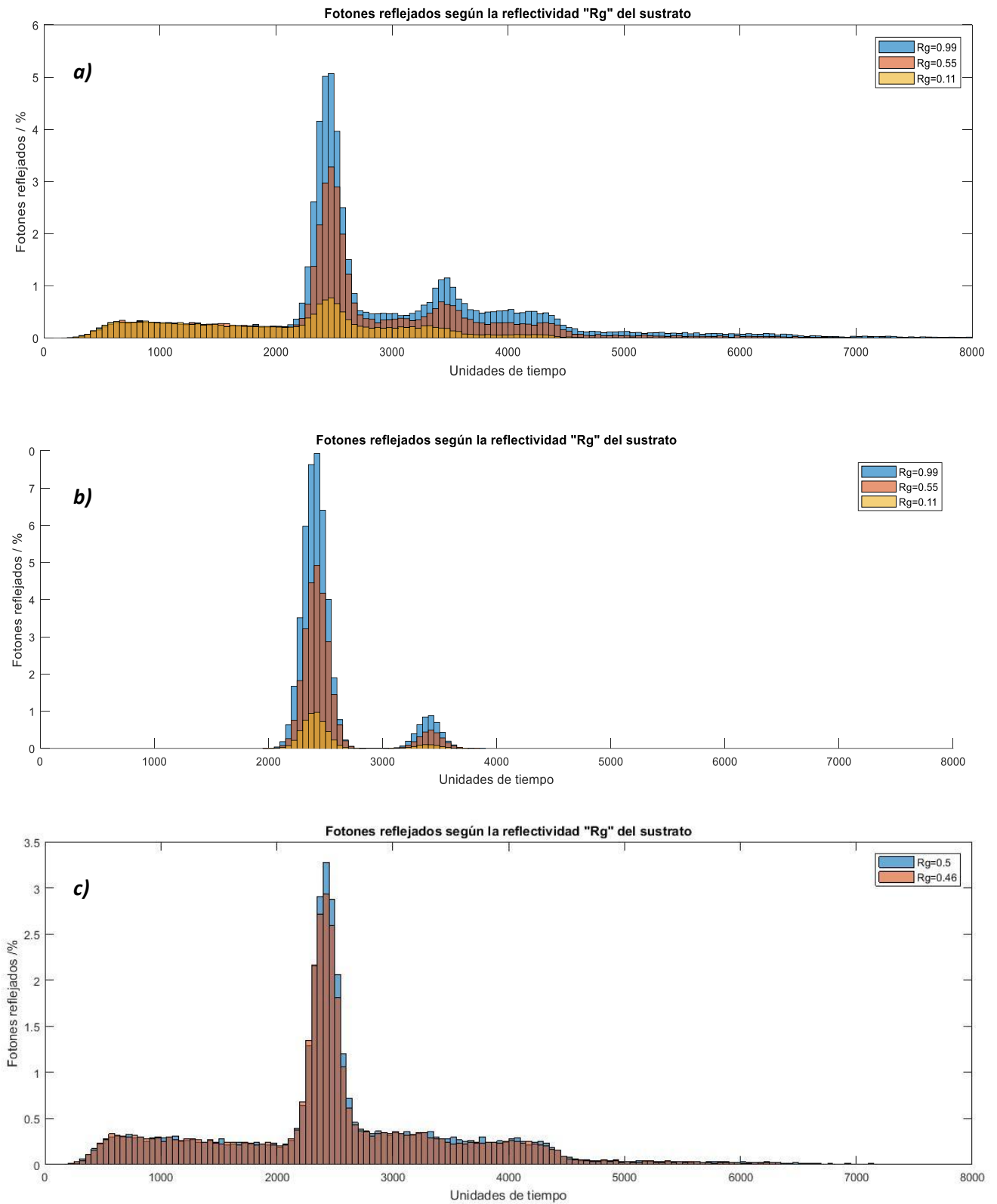


Figura 4.1.3.- Histograma de Reflectividad de un medio poco absorbente (2%) y poco difusor (2%), para distintos valores de reflexión del sustrato R_g en unidades arbitrarias, con un haz incidente en forma pulso gaussiano con anchura $\sigma=250$ unidades de tiempo. Se ha supuesto que el 10% de los fotones reflejados por el sustrato lo han sido por difusión. **a)** Valores de reflexión, del sustrato, alto (99%), medio (55%) y bajo (10%). **b)** Igual que A para un medio ideal sin absorción ni difusión. **c)** Valores de reflexión del sustrato cercanos (50 y 46 %) para apreciar cómo afectan las diferencias pequeñas.

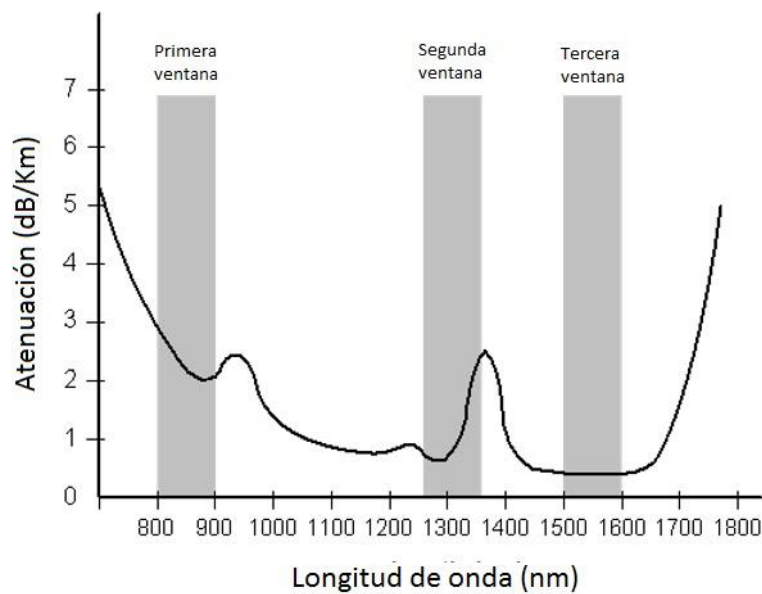


Figura 4.1.2.- Ventanas de trabajo de la fibra óptica de vidrio. (PROMAX, *Historia de la fibra óptica (III): Transmisión*, (2014), <https://blogdepromax.wordpress.com/2014/02/28/historia-de-la-fibra-optica-iii-transmision>)

En la *Tabla 4.1.1* se muestra la información más relevante para estas ventanas de trabajo, respecto a la velocidad y pérdidas de la señal a través de su paso por la fibra. Se puede observar rápidamente que la ventana con una longitud de onda mayor tiene menores pérdidas y además mayor velocidad de propagación, lo que queda representado en las *Figuras 4.1.4*.

Longitud onda (nm)	Índice refracción	Tiempo que tarda la luz en recorrer 1 metro (ns)	Atenuación (dB/Km)	Porcentaje pérdidas (Km ⁻¹)
850	1,5098	5,0326	2,3	0,42
1310	1,5036	5,0120	0,5	0,11
1550	1,5007	5,0023	0,25	0,056

Tabla 4.1.1.- Tabla que muestra información sobre las propiedades de la señal electromagnética durante su paso por la fibra de vidrio para las tres principales ventanas de trabajo.

Los índices de refracción se refieren a un vidrio típico BK7 [13] y la atenuación ha sido obtenida para una fibra óptica monomodo convencional [14].

Se va a suponer ahora un caso para una fibra óptica de 1 km de longitud, dividida en $N=1000$ capas. En este caso las pérdidas de información se van a suponer debidas a la absorción, y tendrán los valores que se muestran en la *Tabla 4.1.1*. El sustrato tiene una probabilidad de reflexión especular alta y de *scattering* hacia atrás menor ($PR=0.5$ y $PS=0.05$). Incide un haz de luz colimada y monocromática que sigue la distribución temporal de un pulso gaussiano con anchura $\sigma = 825$ ns. Los resultados obtenidos para cada ventana de trabajo se muestran en la *Figura 4.1.4*.

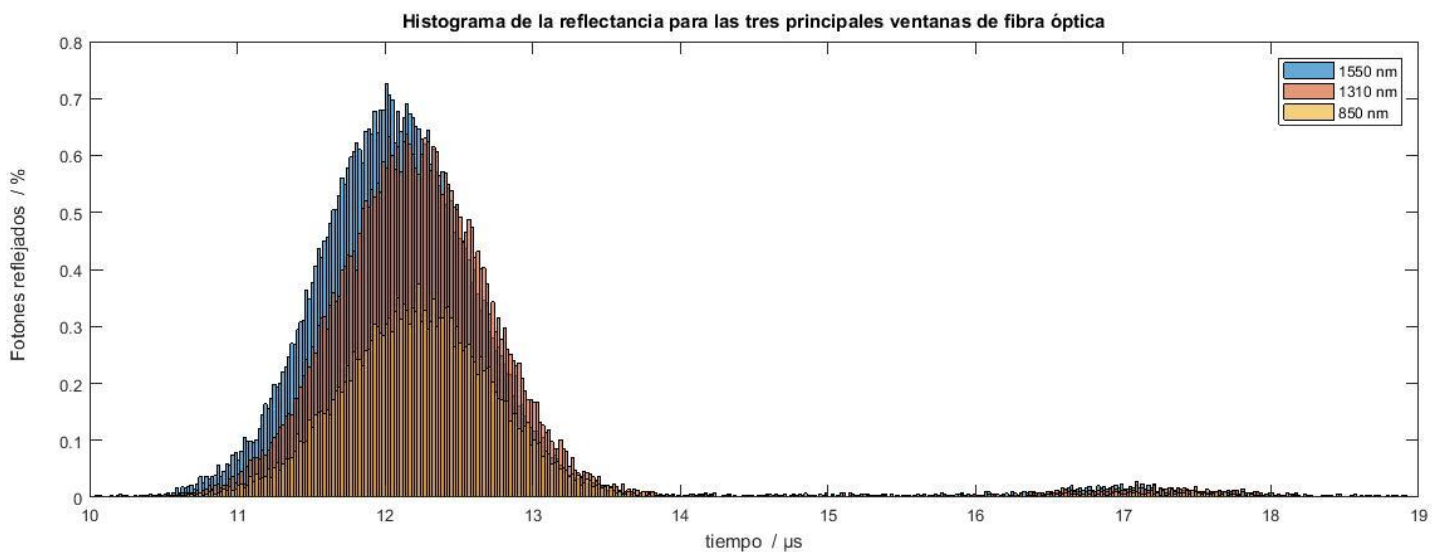


Figura 4.1.4.- Se representan los histogramas de la reflectancia temporal de las tres primeras ventanas de trabajo de fibra óptica, según la información que se muestra en la *Tabla 4.1.1*. La reflectancia del sustrato es del 50%.

Los resultados obtenidos son, para la primera ventana, que corresponde con una longitud de onda de 850 nm (amarillo), la reflectancia es del 23,7%. Para la segunda ventana, que corresponde con una longitud de onda de 1310 nm (rojo), la reflectancia es del 44,2%. Para la tercera ventana, que corresponde con una longitud de onda de 1550 nm (azul), la reflectancia es del 49,2%.

Se aprecia perfectamente el corrimiento temporal de las distintas ventanas de fibra, transportándose a mayor velocidad la de mayor longitud de onda, que a su vez es capaz de retener casi el doble de información que la de longitud de onda más baja.

2.- Propagación en medio denso

Este modelo representa un medio homogéneo con alta probabilidad de *scattering*, es decir muy difusor, de poca absorción y que carece de sustrato.

Se supone un medio dividido en N intervalos, con valores $PS \cdot N = 0.004$, $PK \cdot N = 0.00002$ y $PR = 0$ (no existe reflexión especular ya que no hay cambio de medio), en el que inciden $N_T = 10^5$ fotones en un pulso instantáneo con forma aproximada de delta de Dirac. Para este medio, el histograma de fotones reflejados en función del tiempo se muestra en la *Figura 4.2.1*. En dicha figura las “unidades de tiempo” quedan definidas si se asignan dimensiones físicas e índice de refracción al medio.

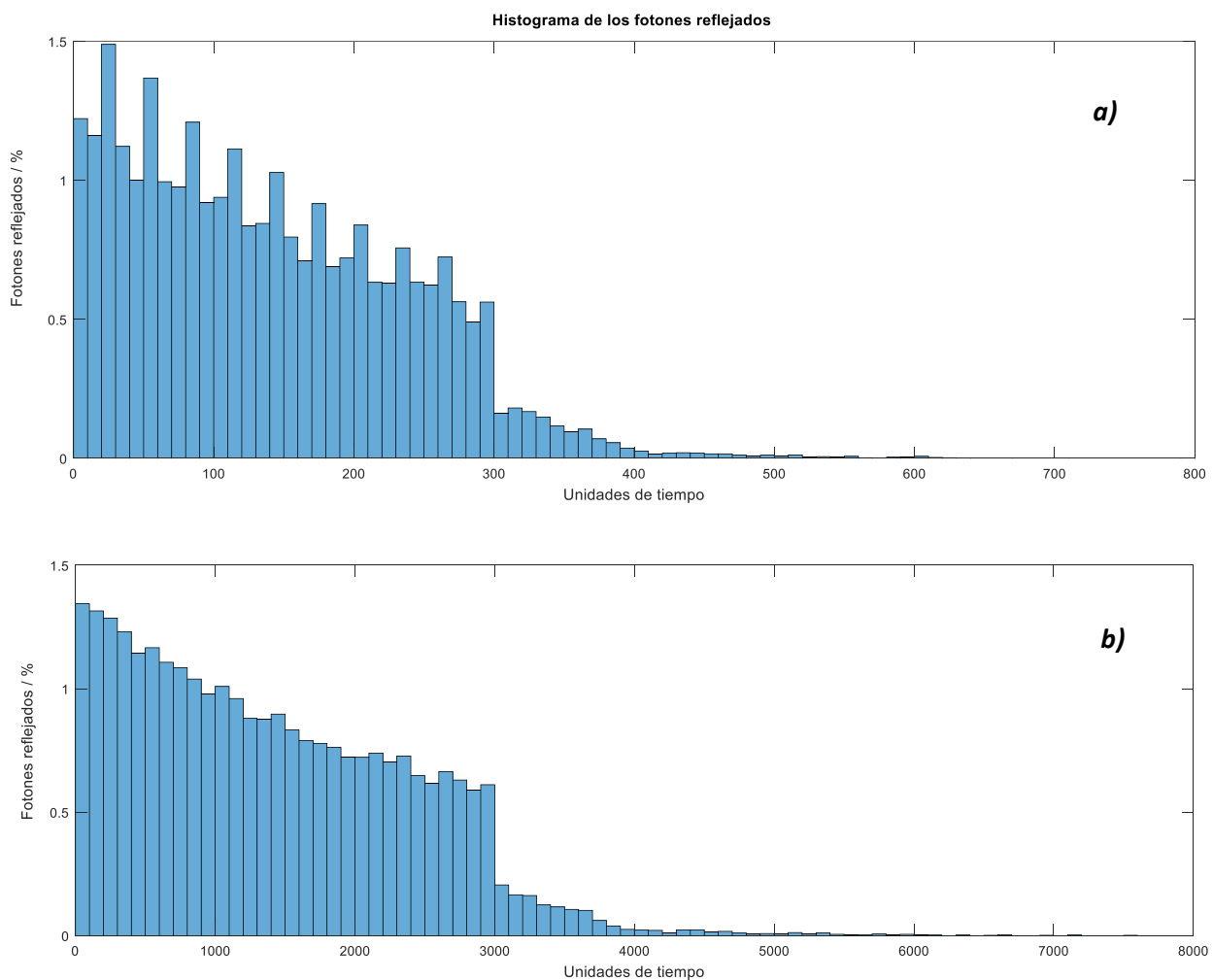


Figura 4.2.1.- Histograma temporal de los fotones reflejados para un medio con valores $PS \cdot N = 0.004$, $PK \cdot N = 0.00002$ y $PR = 0$, sin sustrato, en el que inciden $N_T = 10^5$ fotones en un pulso con forma de delta de Dirac. **a)** $N = 100$ capas. **b)** $N = 1000$ capas.

La *Figura 4.2.1* llama la atención, principalmente, por dos motivos. El primero son los picos que aparecen cada tres intervalos (30 unidades de tiempo) en el apartado **a)**, muestra de que hay una periodicidad para los máximos en los que hay un mayor número de fotones reflejados, y,

en segundo lugar, llama también la atención una bajada brusca de fotones reflejados a partir de $3N$ unidades de tiempo, que rompe con el decaimiento exponencial. Con el fin de detallar estos fenómenos se pueden observar las *Figuras 4.2.2* y *4.2.3*.

En la *Figura 4.2.2* se encuentra la explicación a dichos patrones. En ella aparecen únicamente los fotones que han sufrido una única difusión y que han sido reflejados. En primer lugar, se aprecia que siguen un decaimiento exponencial siguiendo la ley de Beer-Lambert, lo cual se corresponde con los fundamentos teóricos. En cuanto a la periodicidad de las reflexiones, se ve claramente que estas ocurren en paquetes de fotones cada tres segundos, y que no hay fotones con una única difusión que no cumplan dicho comportamiento. La explicación se encuentra en

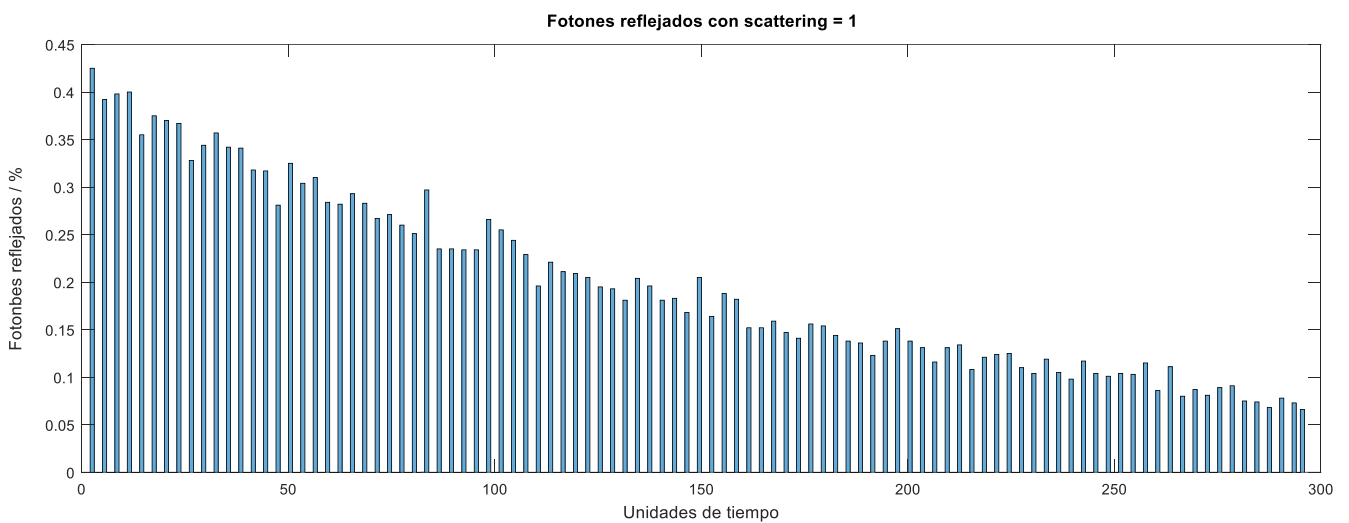


Figura 4.2.2.- Histograma temporal de los fotones reflejados con *scattering* =1, es decir, han sufrido una única difusión hacia atrás, para un medio dividido en $N=100$ intervalos, con valores $PS \cdot N = 0.004$, $PK \cdot N = 0.00002$ y $PR=0$, en el que inciden $NT=10^5$ fotones colimados y monocromáticos siguiendo una distribución de delta de Dirac.

la forma en que asignamos los intervalos de tiempo para cada “salto” en este modelo. Ya se ha explicado que se supone que un fotón colimado tarda una unidad de tiempo en saltar de una capa a la siguiente, mientras que un fotón difuso tarda el doble como promedio, es decir, dos unidades de tiempo. Como puede observarse en la *Figura 4.2.3* la diferencia de tiempos entre fotones difundidos en capas contiguas es, por tanto, de tres unidades.

El hecho de que, tal y como muestra la *Figura 4.2.2*, el último fotón difundido tarde 300 unidades de tiempo en ser reflejado, corresponde con las 100 unidades de tiempo que tarda en llegar a la última capa y las 200 que tarda en volver tras ser difundido hacia atrás en dicha capa.

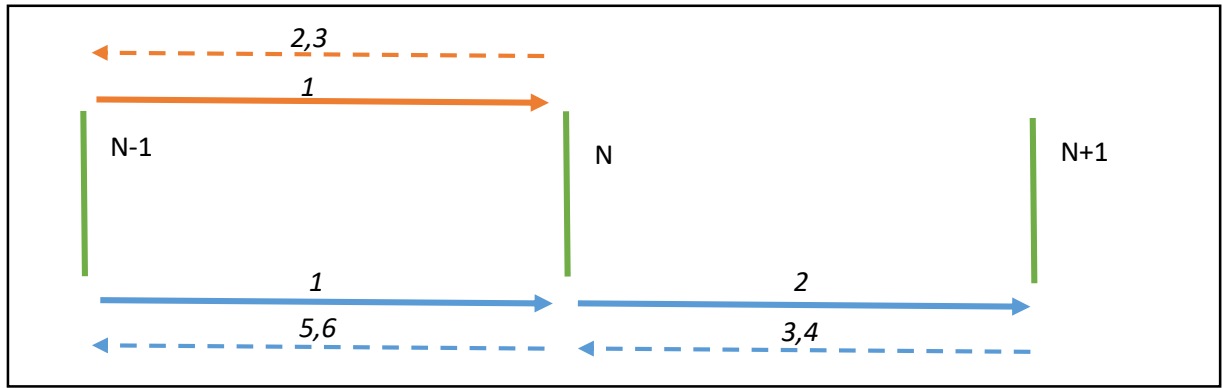


Figura 4.2.3.- Representación gráfica de la diferencia de tiempos entre fotones que se difunden en dos capas contiguas. Se observa que la diferencia entre fotones que se difunden en la capa N (naranja) y N+1 (azul) es de 3 unidades de tiempo. Las flechas con línea continua simbolizan los fotones colimados, mientras que las flechas con línea discontinua simbolizan fotones difundidos. Los números que aparecen sobre las flechas son las unidades de tiempo que han transcurrido desde que el fotón pasa por la capa N-1.

Para tener una visión más global de la reflectancia de este medio se puede acudir a lo mostrado en las Figuras 4.2.4, 4.2.5 y 4.2.6, en las cuales se detallan los histogramas temporales de la reflectancia de este sistema en función del número de difusiones que han sufrido los fotones.

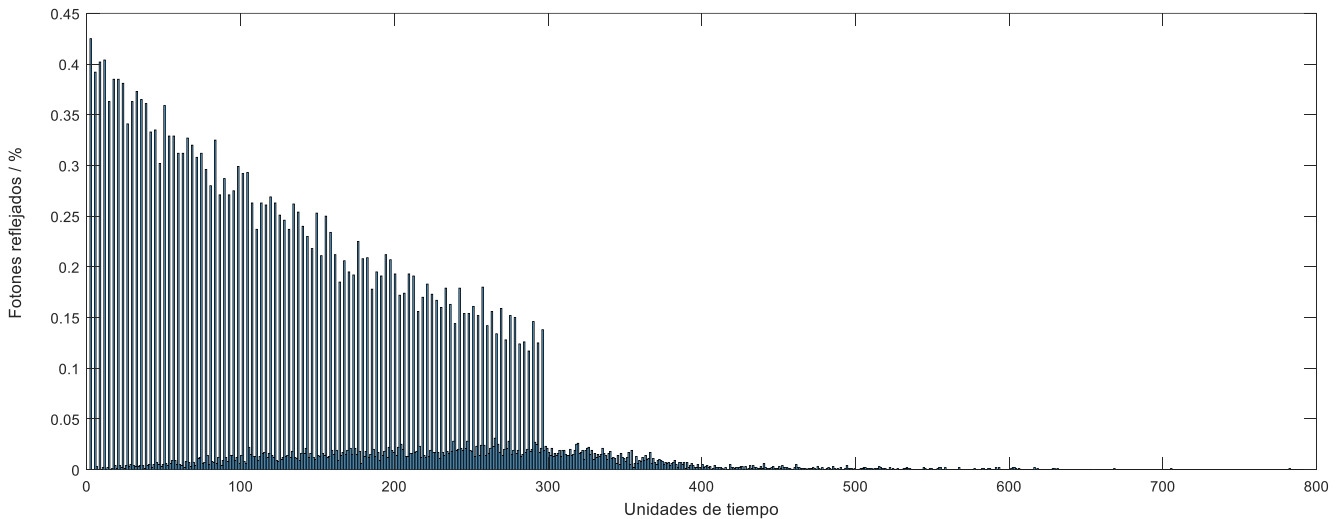


Figura 4.2.4.- Histograma temporal de la reflectancia para un medio dividido en $N=100$ intervalos, con valores $PS \cdot N = 0.004$, $PK \cdot N = 0.00002$ y $PR=0$, en el que inciden $NT=10^5$ fotones colimados y monocromáticos siguiendo una distribución de delta de Dirac. Se aprecia claramente como las distribuciones de los fotones reflejados una única vez (decaimiento exponencial) y el resto son distintas.

Tal y como se aprecia en la Figura 4.2.5, muchos de los fotones que han sido difundidos dos veces siguen el mismo esquema que los que han sido difundidos una vez, en cuanto a la periodicidad en los intervalos de regreso. Estos fotones son aquellos que han sido difundidos dos veces pero sólo han cambiado su sentido en la primera de las difusiones, y que por tanto no han variado su comportamiento desde su primera difusión. Los que no siguen esta pauta de comportamiento son aquellos que han sufrido un cambio de sentido en cada difusión.

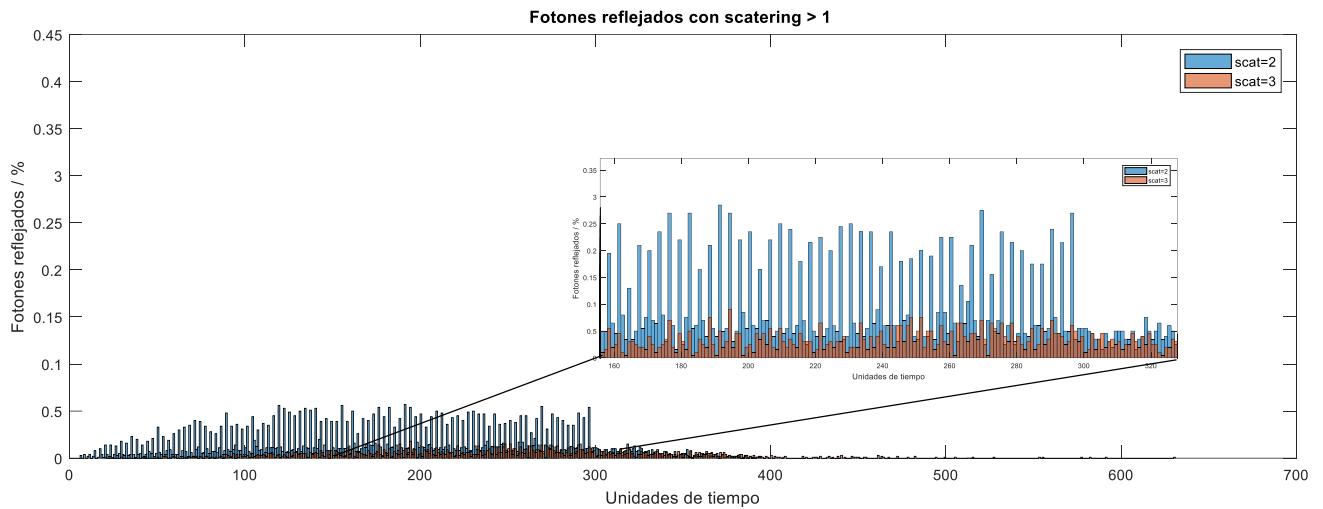


Figura 4.2.5.- Histograma temporal de la reflectancia de los fotones reflejados con dos y tres difusiones, en azul y rojo respectivamente, para un medio dividido en $N=100$ intervalos, con valores $PS \cdot N=0.004$, $PK=0.00002$ y $PR=0$, en el que inciden $NT=10^5$ fotones colimados y monocromáticos siguiendo una distribución de delta de Dirac.

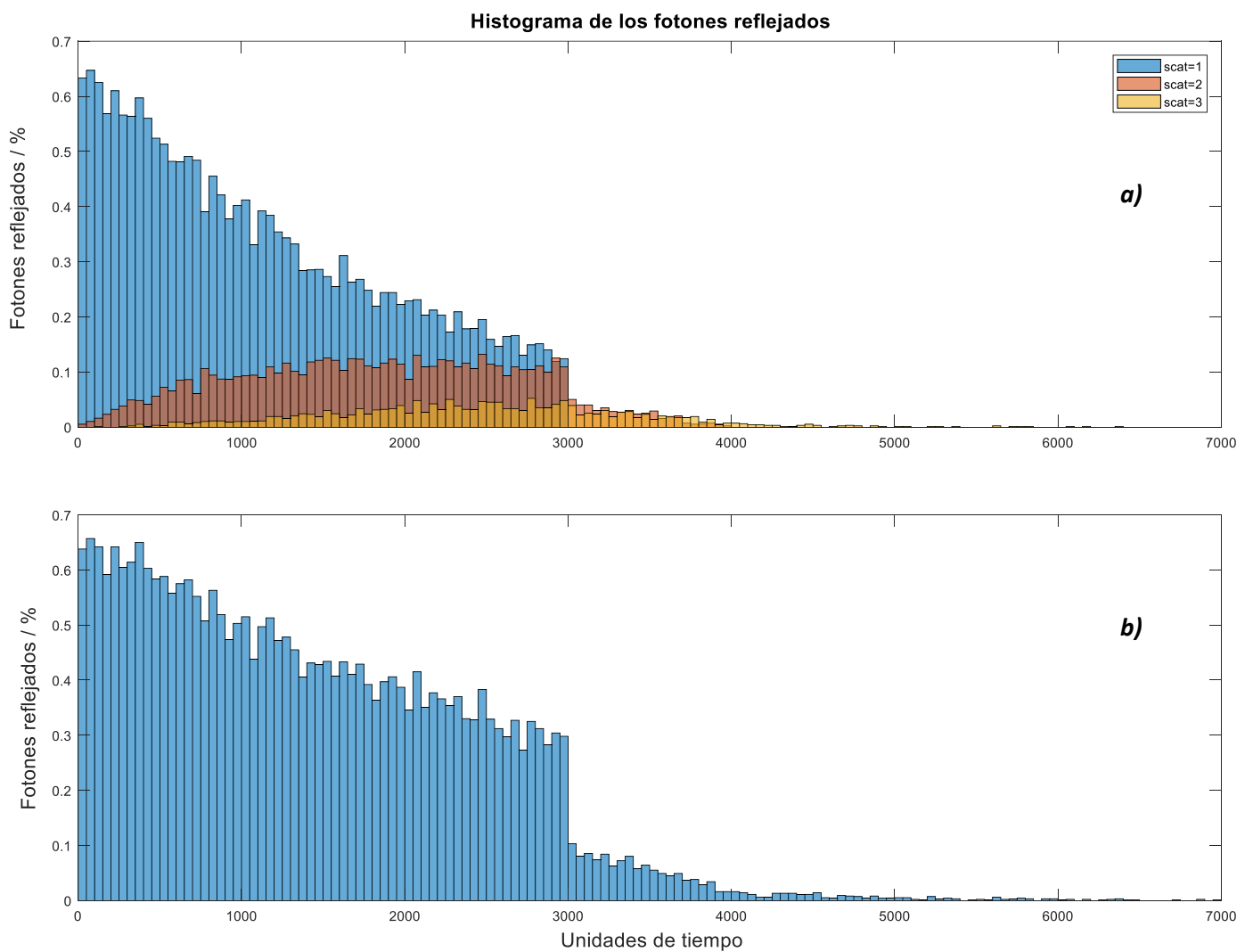


Figura 4.2.6.- Histograma temporal de la reflectancia según el número de difusiones sufridas por los fotones, para un medio con valores $PS \cdot N = 0.004$, $PK \cdot N = 0.00002$ y $PR = 0$, dividido en $N = 1000$ intervalos, en el que inciden $NT = 10^5$ fotones colimados y monocromáticos siguiendo una distribución de delta de Dirac. **a)** Según nº difusiones sufridas por cada fotón. **b)** Total.

Posteriormente, se introduce en el sistema un haz de luz monocromática y colimada que sigue una distribución gaussiana, es decir un pulso gaussiano, que tiene una anchura $\sigma = 0.8N$ unidades de tiempo. El histograma temporal de su reflectancia se muestra en la *Figura 4.2.7* en función del número de difusiones de los fotones.

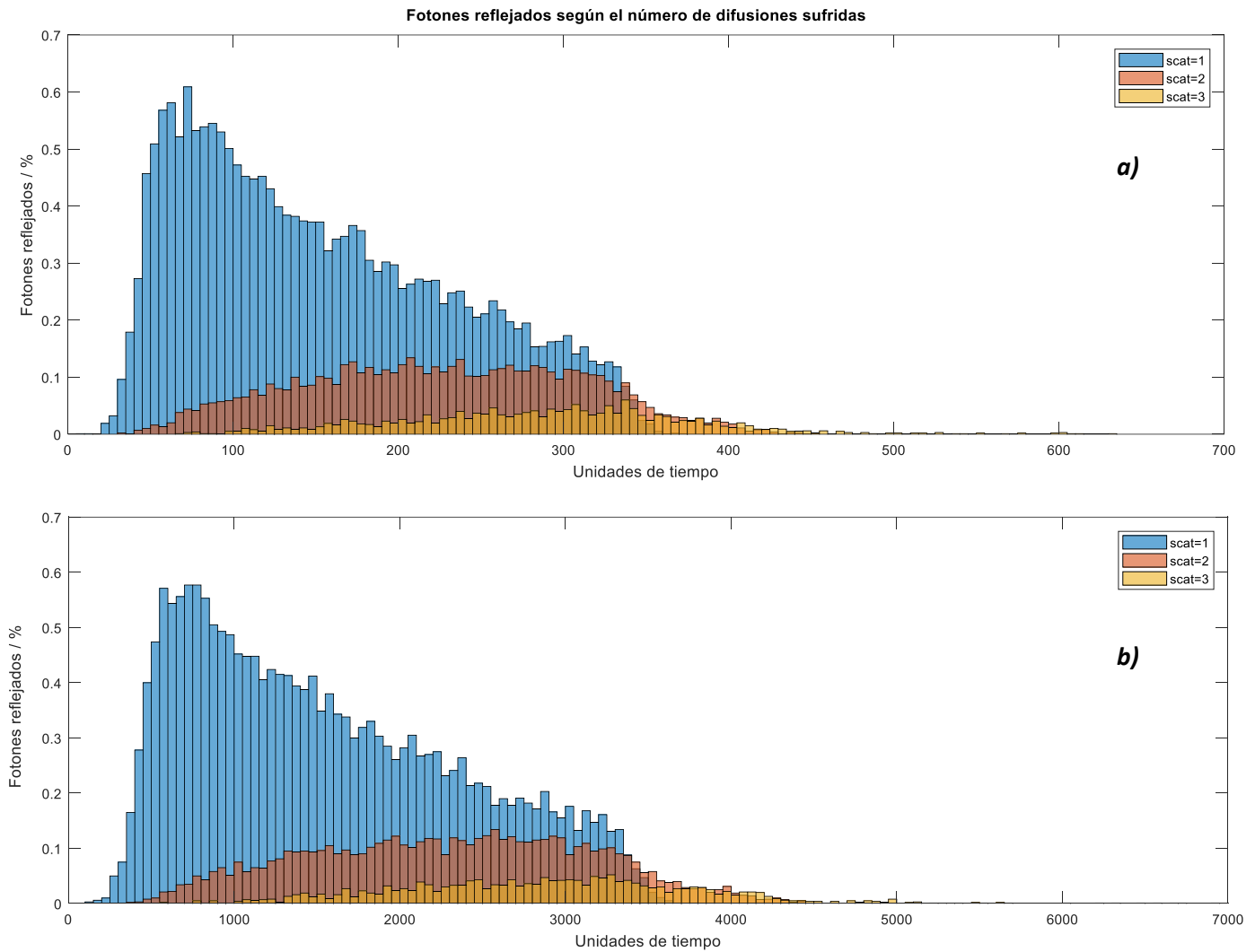


Figura 4.2.7.- Histograma temporal de la reflectancia según el número de difusiones sufridas por los fotones para un medio con valores $PS \cdot N = 0.004$, $PK = 0.00002$ y $PR = 0$, en el que inciden $NT = 10^5$ fotones colimados y monocromáticos siguiendo una distribución gaussiana con una anchura $\sigma = 0.8N$ unidades de tiempo. **a)** $N = 100$ capas. **b)** $N = 1000$ capas.

En un medio de estas características resulta muy interesante la forma del pulso que ha sido transmitido, ver cuántos fotones de los transmitidos son balísticos y cuántos han sufrido varias difusiones. Las *Figuras 4.2.8* y *4.2.9* muestran el histograma de dichos fotones transmitidos para este mismo medio.

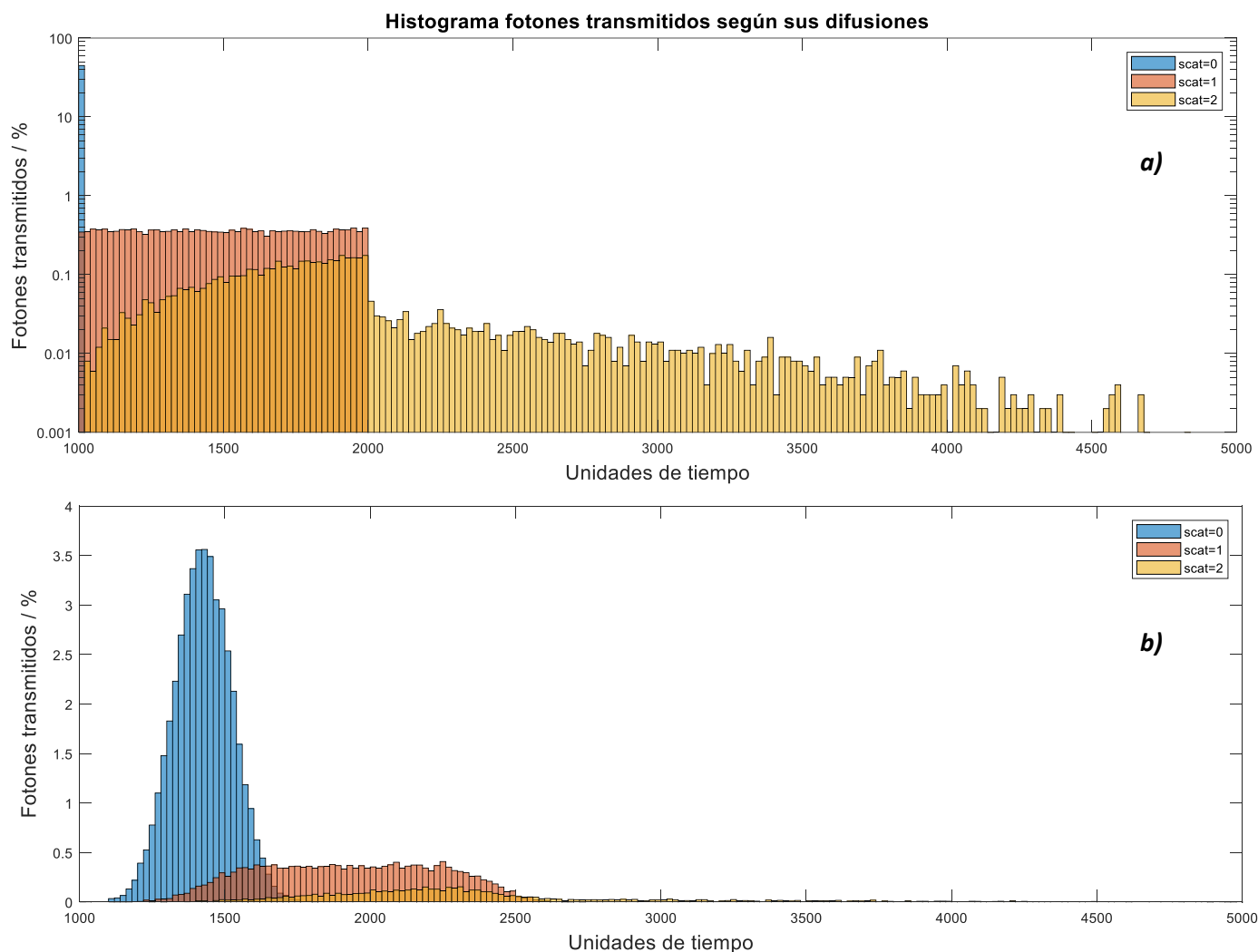


Figura 4.2.8.- Histograma temporal de la transmitancia según el número de difusiones sufridas por los fotones para un medio con valores $PS \cdot N = 0.004$, $PK = 0.00002$ y $PR = 0$, en el que inciden $NT = 10^5$ fotones colimados y dividido en $N = 1000$ capas **a)** Pulso entrante con forma aproximada de delta de Dirac, en escala logarítmica. **b)** Pulso entrante siguiendo una distribución gaussiana con una anchura $\sigma = 0.8N$ unidades de tiempo.

Los valores de los resultados obtenidos sobre el comportamiento del sistema pueden comprobarse en la *Tabla 4.2.1*

N	R	Fotones reflejados con $scattering = 1$	Fotones reflejados con $scattering > 1$	T	Fotones transmitidos difusos	A
1000	27,9	19,4	8,5	70	25,9	0,2

Tabla 4.2.1.- Valores de la reflectancia, R , transmitancia, T , y absorbancia, A , junto con información de la difusión de los fotones, para para un medio con valores $PS = 0.4\%$, $PK = 0.002\%$ y $PR = 0$, en el que inciden $NT = 10^5$ fotones colimados y monocromáticos siguiendo una distribución con forma de delta de Dirac.

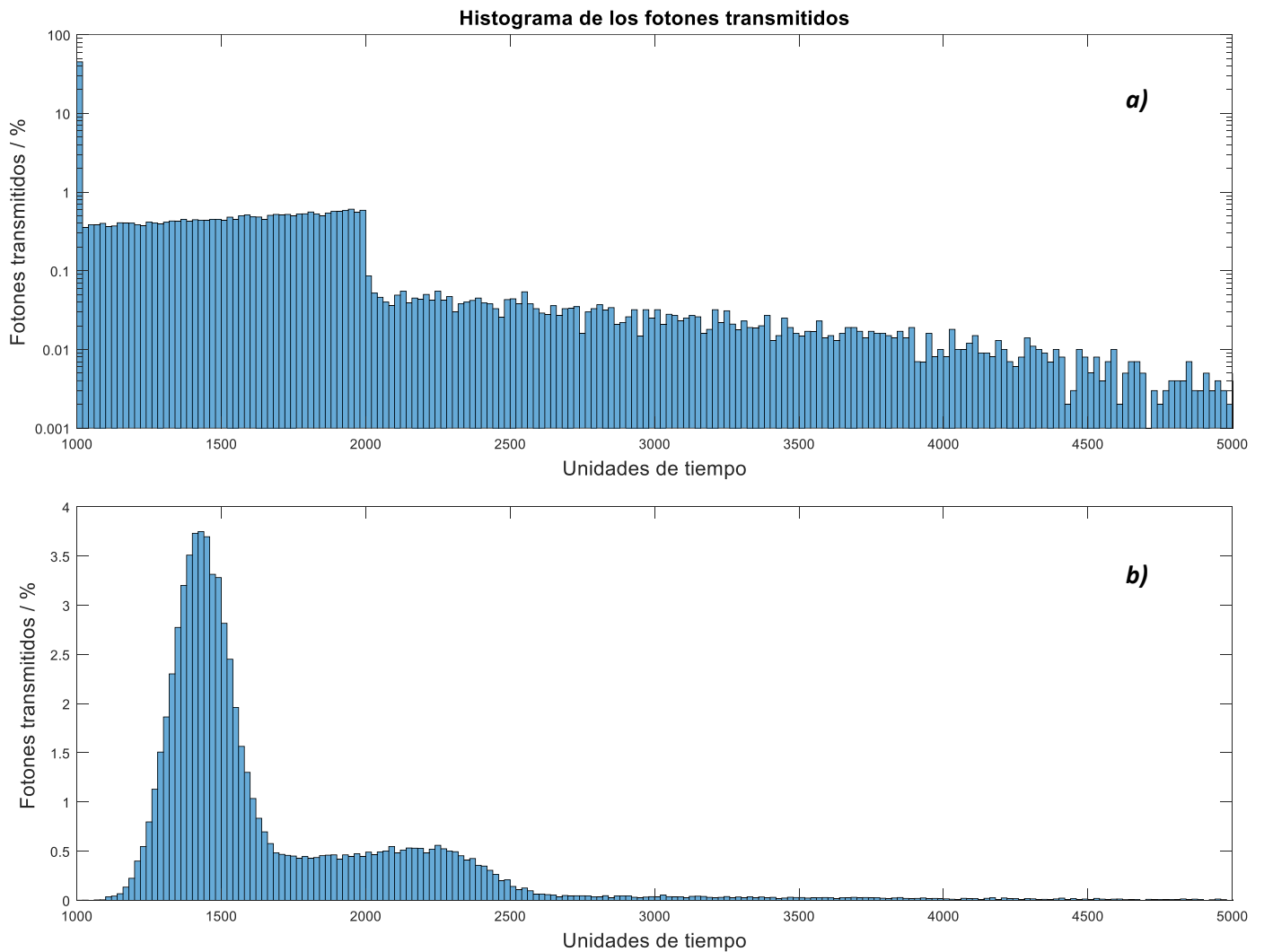


Figura 4.2.9.- Histograma temporal de la transmitancia total para un medio con valores $PS \cdot N = 0.004$, $PK = 0.00002$ y $PR = 0$, en el que inciden $NT = 10^5$ fotones colimados y dividido en $N = 1000$ capas **a)** Pulso entrante con forma aproximada de delta de Dirac, en escala logarítmica. **b)** Pulso entrante siguiendo una distribución gaussiana con una anchura $\sigma = 0.8N$ unidades de tiempo.

En la *Figura 4.2.9* se aprecia claramente la cola de fotones difusos que acompaña al pulso balístico final, que no es otra cosa que la deformación sufrida por el pulso energético en su interacción con las capas que forman el medio. La capacidad para poder discernir perfectamente las singularidades de dichos fotones difusos, como aparece también en la *Figura 4.2.8*, es uno de los puntos a resaltar de esta simulación, pues distinguir entre dichos fotones puede ser muy importante en determinados resultados, y se relaciona con la coherencia del haz de salida que tiene mucho que ver con los tiempos de vuelo de los fotones.

3.- Medio homogéneo con una discontinuidad

En este último caso se va a requerir el empleo del modelo de cuatro flujos, ya que los cambios de índice de refracción implican reflexiones sin difusión, y por tanto, la presencia de un haz colimado en cada sentido. Además, en este caso vamos a desarrollar otro aspecto físico del sistema, y es que, tal y como queda demostrado en varios estudios, los fotones difusos tienen un mayor índice de absorción que los colimados. [17]

En primer lugar, se supone un caso sencillo de un medio formado por aire en cuyo interior se localiza un vidrio. Se trata de un medio dividido en $N=1000$ capas, en el cual el vidrio se sitúa entre la capa 400 y la 600, con probabilidades en las capas según la *Tabla 4.3.1* y *4.3.2*.

Medio	Aire		Vidrio	
Fotones	colimados	difusos	colimados	difusos
$PK \cdot N$	0,002	0,004	0,005	0,007
$PS \cdot N$	0,02	0,04	0,05	0,07
$PA \cdot N$	0,02	0,04	0,05	0,07

Tabla 4.3.1.- Valores de las probabilidades de absorción, PK , y *scattering*, PS y PA , en cada medio y en cada uno de los estados posibles. Resultados en porcentajes.

Cambio medio	Aire - Vidrio		Vidrio - Aire	
Fotones	colimados	difusos	colimados	difusos
PR	0,04	0,42	0,04	1

Tabla 4.3.2.- Valores de las probabilidades de reflexión especular, PR , en cada cambio de medio y en cada uno de los estados posibles. Resultados en porcentajes.

Cabe destacar que en la *Tabla 4.3.2* se observa que los fotones difusos no son capaces de hacer el tránsito desde el vidrio al aire, sino que son reflejados en su totalidad. Esto es debido a que en el planteamiento de la difusión se estima un ángulo de incidencia promedio de 60 grados para los fotones difusos, mientras que el ángulo límite para este cambio de medio es de 56 grados, por lo que existe reflexión total. Es evidente que se puede programar para que esto no ocurra, promediando por ejemplo que pasen la mitad de los fotones difusos o lo que se considere, pero en este caso se va a trabajar con este valor ya que resulta interesante observar este tipo de limitaciones o características derivadas de las simplificaciones realizadas.

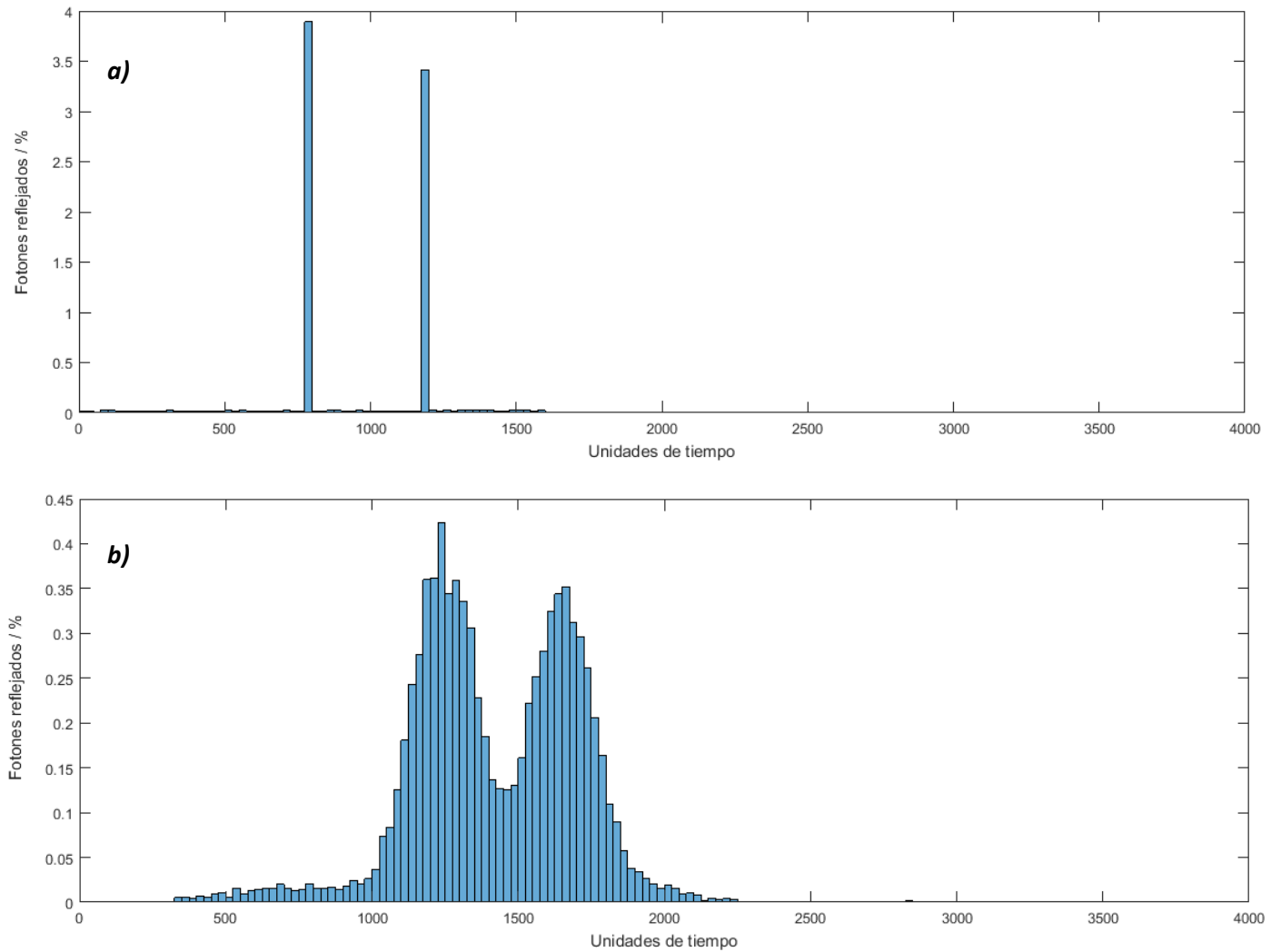


Figura 4.3.1.- Histograma temporal de la reflectancia para un medio homogéneo de aire dividido en $N=1000$ capas, en cuyo interior se encuentra una inhomogeneidad de la capa 400 a la 600, con valores de probabilidades de absorción, PK , *scattering*, PS y PA , y reflexión especular, PR , según la *Tabla 4.3.1* y *4.3.2*. En el medio incide un haz de fotones colimado y monocromático. **a)** Los fotones incidentes lo hacen como un impulso con forma de delta de Dirac, todos en el mismo instante. **b)** Los fotones incidentes siguen una distribución gaussiana con anchura $\sigma=0,8N$ unidades de tiempo.

En la *Figura 4.3.1* y *4.3.2* aparecen los histogramas de la reflectancia y la transmitancia del medio, respectivamente, tanto para un impulso como para un pulso gaussiano. La *Figura 4.3.1* muestra muy claramente, en ambos casos, las zonas de cambio de medio. Principalmente en la *Figura 4.3.1 a*, se aprecia que ambos picos se encuentran en 800 y 1200 unidades de tiempo respectivamente, debido a que la discontinuidad se produce en las capas 400 y 600 y hay que multiplicar por dos para tener en cuenta el viaje de ida y el de vuelta de los fotones, por lo que el resultado se corresponde con lo esperado. En lo que respecta a la *Figura 4.3.1 b*, el corrimiento de los picos respecto al apartado *a* se debe únicamente a que la entrada de los fotones se produce en un intervalo de tiempo mucho mayor, ya que siguen una distribución

gaussiana de anchura $\sigma=0,8N$ unidades de tiempo, pero la distancia que separa los máximos en ambos casos es la misma.

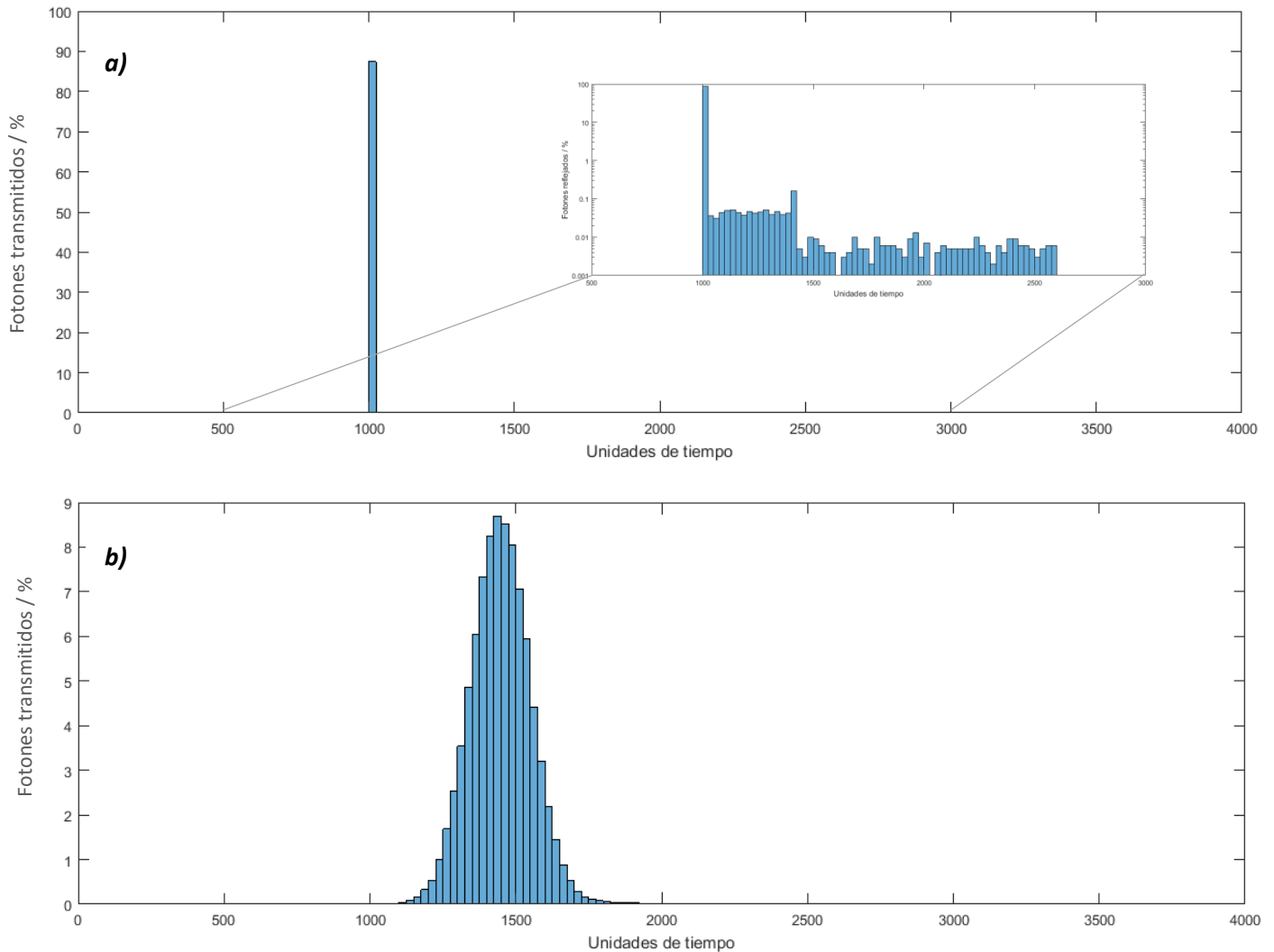


Figura 4.3.2.- Histograma temporal de la transmitancia para un medio homogéneo de aire dividido en $N=1000$ capas, en cuyo interior se encuentra un otro material de la capa 400 a la 600, con valores de probabilidades de absorción, PK , scattering, PS y PA , y reflexión especular, PR , según la Tabla 4.3.1 y 4.3.2. En el medio incide un haz de fotones colimado y monocromático. **a)** Los fotones incidentes lo hacen como un impulso con forma de delta de Dirac, todos en el mismo instante. Se representa una parte en escala logarítmica para una mejor apreciación. **b)** Los fotones incidentes siguen una distribución gaussiana con anchura $\sigma=0,8N$ unidades de tiempo.

En la Figura 4.3.2 a, se observa el principal pico de transmitancia en 1000 u.t. Al tratarse de un pico tan abrupto, es lógico que la transmisión de un pulso gaussiano presente la forma del mismo (Figura 4.3.2 b).

A continuación, y como segundo ejemplo, se va a comprobar el funcionamiento del modelo numérico sobre un modelo físico de ojo humano. Para ello se emplea un modelo de ojo de 4

dioptrios, cuyos parámetros principales, que se muestran en la *Figura 4.3.3*. Los índices y probabilidades de absorción y reflectancia que se han considerado están contenidos en las *Tablas 4.3.3 y 4.3.4*, y han sido obtenidos a partir de los Factores de Fresnel para dichos índices.

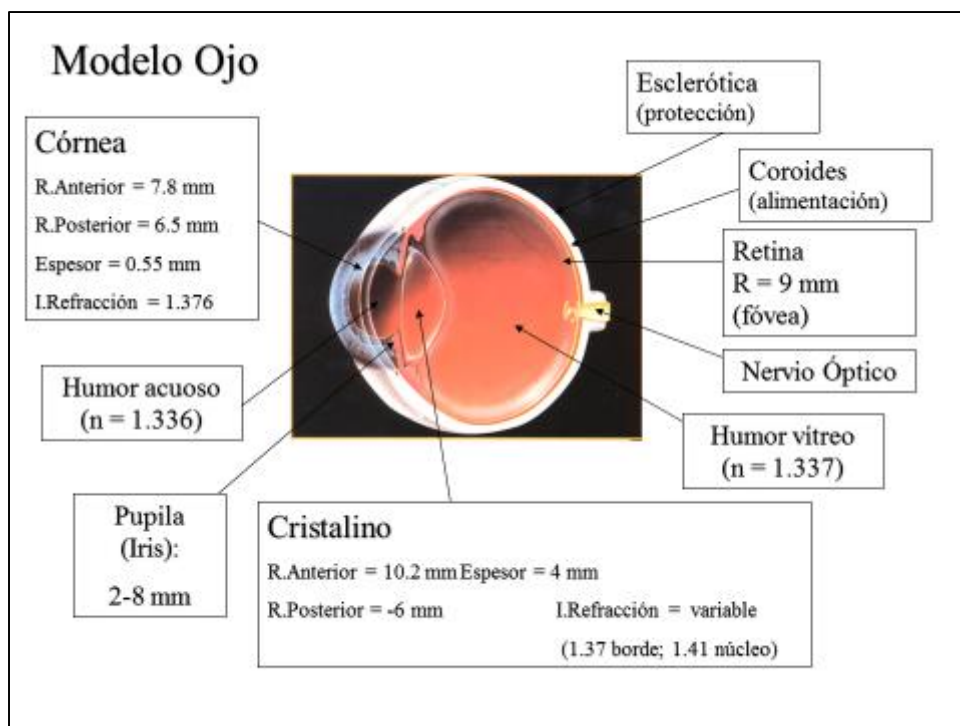


Figura 4.3.3.- Modelo del ojo humano, conocido como *modelo de Kooijman*, con varios de sus parámetros más importantes. (*J Opt Am A* 1983; 73(11):1544-1550)

Medio	Córnea		Humor acuoso		Cristalino		Humor vítreo	
Fotones	colimados	difusos	colimados	difusos	colimados	difusos	colimados	difusos
Absorbancia	0,000015	0,00002	0,000015	0,00002	0,000015	0,00002	0,000015	0,00002
Reflexión	0,000002	0,000002	0,000003	0,000003	0,000004	0,000004	0,000003	0,000003

Tabla 4.3.3.- Probabilidad de absorción y probabilidad de reflexión colimada y difusa en cada discontinuidad, dada por los distintos índices del ojo humano según el modelo de la *Figura 4.3.3*. Datos de la reflexión obtenidos a partir de los factores de Fresnel y de la absorción estimados según absorción del agua en condiciones normales. Datos en porcentajes.

Cambio medio	Aire-Córnea		Córnea-H.Acuoso		H.Acuoso-Cristalino		Cristalino-H.Vítreo	
Fotones	colimados	difusos	colimados	difusos	colimados	difusos	colimados	difusos
PR (Izq-Dcha)	0,02	0	0,0002	0,0009	0,00016	0,0006	0,0002	0,0009
PR (Dcha-Izq)	0,02	0,02	0,0002	0,0008	0,00016	0,0009	0,0002	0,0008

Tabla 4.3.4.- Probabilidad de reflexión especular en los cambios de medio de un ojo humano, para una radiación incidente colimada o difusa, obtenidos mediante las Leyes de Fresnel y del modelo de ojo de Kooijman.

Suponiendo una velocidad de la luz media igual a la velocidad de la luz a través de agua ($n=1,33$) a 20°C, es decir, $\langle v \rangle = 224.844.349$ m/s [15] y asumiendo que la longitud del ojo humano es de aproximadamente 23 mm, la luz tarda prácticamente 10^{-10} s en recorrer el ojo. Dividiendo el ojo en un sistema formado por mil capas, siguiendo el criterio de la discretización

expuesto en la sección III, la luz tarda por término medio 10 ps en recorrer cada una de las capas. Ésta será por tanto la resolución temporal de nuestra simulación. La principal consecuencia de ello es que, para simular un pulso en forma de delta de Dirac, que es el necesario para conocer la respuesta-impulso, debemos asignar al pulso una anchura temporal no mayor a 10 ps. El tiempo correspondiente a un salto entre capas dependerá del índice del medio que estemos simulando, aunque por simplicidad consideramos ese valor como constante a efectos de representación. La *Figura 4.3.4* muestra el histograma de la reflectancia para dicha configuración, en el que se pueden apreciar las distancias que ocupa cada uno de los distintos medios analizados; Córnea, Humor acuoso, Cristalino y Humor vítreo, respectivamente. La *Figura 4.3.4* y *4.3.5* representan la misma configuración, pero incidiendo con un pulso de 80 y 800 ps, respectivamente.

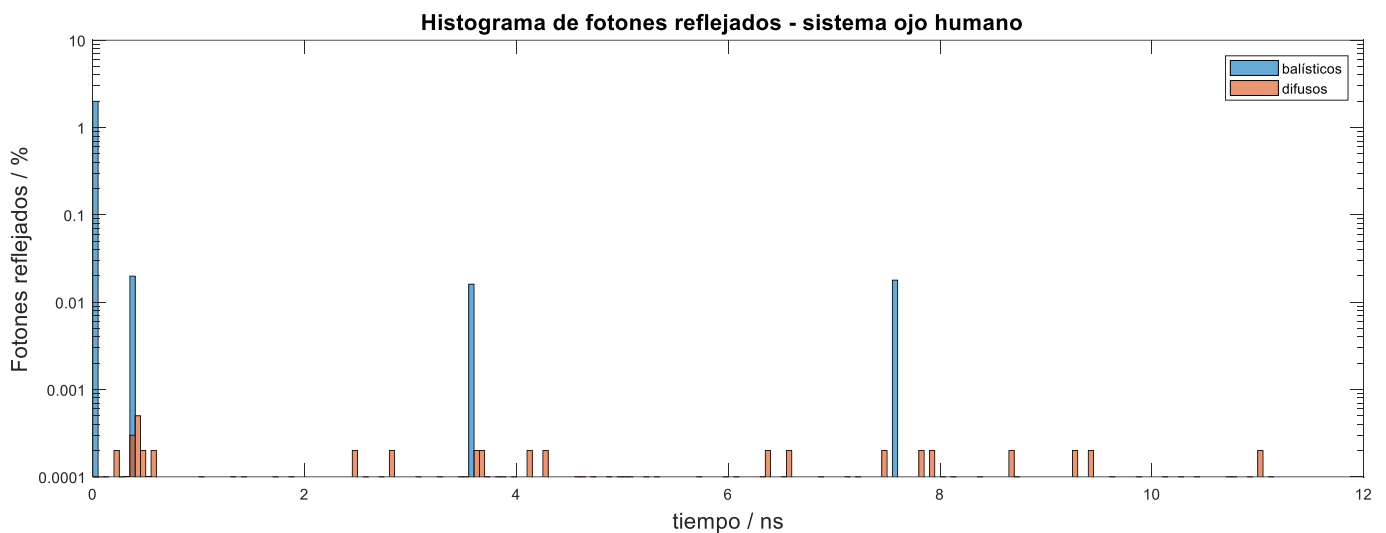


Figura 4.3.4.- Histograma de la reflectancia para un ojo humano, según los datos de las *Tablas 4.3.3* y *4.3.4*, para un pulso de anchura igual a 8 ps. Únicamente se muestran los fotones que han sido reflejados en los cambios de medio. Se aprecian claramente las distancias que ocupan cada uno de los medios que conforman el ojo (Córnea, Humor acuoso, Cristalino y Humor vítreo) en función del tiempo de vuelo de los fotones reflejados. Radiación incidente $N_I=1.10^6$ fotones.

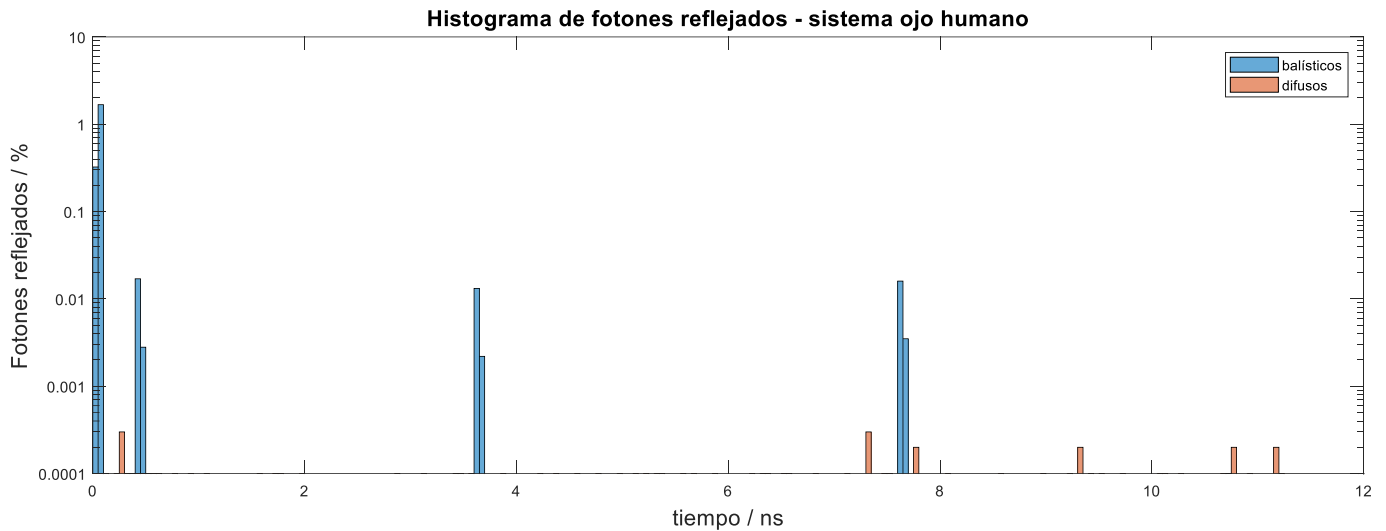


Figura 4.3.5.- Histograma de la reflectancia para un ojo humano, según los datos de las Tablas 4.3.3 y 4.3.4, para un pulso de anchura igual a 80 ps. Únicamente se muestran los fotones que han sido reflejados en los cambios de medio. Se aprecian claramente las distancias que ocupan cada uno de los medios que conforman el ojo (Córnea, Humor acuoso, Cristalino y Humor vítreo) en función del tiempo de vuelo de los fotones reflejados. Radiación incidente $N_I=1.10^6$ fotones.

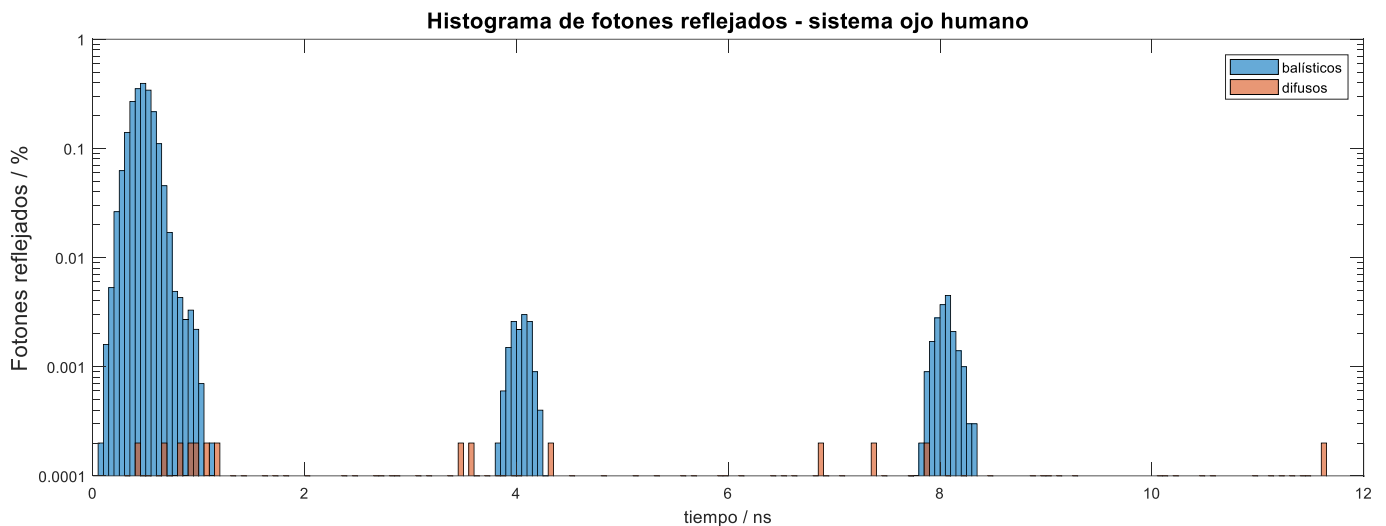


Figura 4.3.6.- Histograma de la reflectancia para un ojo humano, según los datos de las Tablas 4.3.3 y 4.3.4, para un pulso de anchura igual a 800 ps. Únicamente se muestran los fotones que han sido reflejados en los cambios de medio. Se aprecian mucho peor que en las Figuras 4.3.3 y 4.3.4 las distancias que ocupan cada uno de los medios que conforman el ojo (Córnea, Humor acuoso, Cristalino y Humor vítreo) en función del tiempo de vuelo de los fotones reflejados. Radiación incidente $N_I=1.10^6$ fotones.

Se aprecia claramente la pérdida de precisión y de exactitud en la Figura 4.3.4 y, aún más, en la Figura 4.3.5, en la cual es ya imposible detectar la existencia de la Córnea.

La Figura 4.3.7 muestra una biometría por reflectometría óptica [16]. En ella se puede apreciar que los picos corresponden a las partes en las que hay cambio de medio en el ojo muy similar a lo representado en las Figuras 4.3.4 y 4.3.5. Evidentemente existen varias diferencias entre dicha figura y nuestro modelo, pero en lo básico es ciertamente muy similar, ya que nuestras unidades de tiempo son muy fácilmente convertibles a unidades métricas, y la relación entre

los decibelios y los fotones reflejados ya ha sido descrita en el primer apartado de los “Resultados” respecto a la fibra óptica.



Figura 4.3.7.- Imagen que muestra una reflectometría óptica de baja coherencia para un ojo humano [16].

Por otro lado, añadir que las paquimetrías y biometrías del ojo es común que se realicen mediante ultrasonidos, un modelo que es igualmente representable mediante nuestro sistema de simulación, únicamente cambiando la intensidad de la radiación o número de fotones por la intensidad de sonido y adaptando las características a este nuevo medio, como pueden ser las velocidades de propagación o las probabilidades de absorción y difusión.

VI.- CONCLUSIONES

A continuación, se procede a resumir los resultados alcanzados y las principales conclusiones obtenidas a lo largo de este trabajo. Así mismo, se detallan las principales tareas formativas llevadas a cabo, y las potenciales aplicaciones de este estudio.

El presente Trabajo de Fin de Grado ha permitido, en primer lugar, aclarar conceptos en relación a la Teoría de Kubelka-Munk de difusión de luz por superficies, y en concreto en torno a la aplicabilidad de las ecuaciones aproximadas. Es decir, la posibilidad de ignorar las ecuaciones exactas, o incluso la presencia de un sustrato, resulta muy interesante, pero recurrir a ella sin cumplir las condiciones adecuadas puede inducir errores muy graves.

En cuanto a la metodología, este trabajo ha proporcionado una herramienta muy potente: el modelo numérico tipo Monte-Carlo aplicado a un medio multicapa. El modelo ha sido sometido a diversas pruebas de consistencia y ha mostrado su fiabilidad. Se trata de una herramienta que no sólo es tan válida como la teoría exacta que parta de los mismos supuestos, sino que ya no está sujeta a las condiciones iniciales de la Teoría (homogeneidad, difusión isótropa). Por ello, puede ser aplicada con garantías sobre otros sistemas menos restrictivos, aportando además el valor añadido del conocimiento de la distribución espacial y temporal de la radiación electromagnética.

Su aplicación sobre un sistema de flujo bidireccional, y su desarrollo hasta un modelo de cuatro flujos, logra reproducir satisfactoriamente los resultados que caben esperar en sistemas ya conocidos. Así hemos visto que funciona bien para un modelo de fibra óptica o ecógrafo, con una simulación muy detallada en cuanto a la diferencia en la transmisión de información según las ventanas de la fibra óptica, y con una precisión importante a la hora de captar cambios en el sustrato que indiquen variaciones en el medio. También se ha simulado un sistema típico de medio denso o de niebla, sin sustrato, con resultados muy interesantes en los histogramas de reflectancia y sobretodo en la transmitancia, con una alta capacidad para distinguir fotones balísticos de los fotones difusos, y fundamentalmente capaz de mostrar la forma del pulso una vez sale del medio, lo que garantiza una excelente fuente de información sobre el medio en sí. Por último, se ha querido simular un sistema que contase con una discontinuidad o heterogeneidad en su interior para comprobar de qué manera afectaba, principalmente al histograma de la reflexión, y el resultado ha sido muy positivo con un alto nivel de detalle,

como se puede apreciar en el ejemplo del ojo humano, lo que posibilita estas simulaciones en un amplio abanico de aplicaciones.

Estos ejemplos dan idea de la versatilidad de esta herramienta, que podría ser utilizada para estudiar nuevos sistemas.

Otra parte importante de las conclusiones es la formación obtenida en la realización del Trabajo. Cabe destacar el estudio de la Teoría de Kubelka-Munk y del Método de MonteCarlo, pilares teóricos de este TFG y desconocidos hasta el momento de su elaboración, así como el manejo del software de programación MATLAB, que, si bien ya había sido utilizado a lo largo de la carrera, ha sido necesaria una mayor profundización y conocimientos para llegar a la elaboración del programa aquí empleado. La búsqueda de bibliografía, el empleo de las leyes de Fresnel, la existencia de las tres principales ventanas de fibra o el uso del modelo completo de ojo humano, son parte también de la formación realizada.

Finalmente, resultan también importantes las aplicaciones y el posible futuro desarrollo del contenido de este TFG. En este sentido, su potencialidad es enorme ya que lleva desarrollándose e implementándose desde hace tiempo, no se trata de algo nuevo, pero sí de algo muy actual. Estas simulaciones pueden ser muy útiles para situaciones y características que de otra manera necesitarían de una exploración práctica, con el gasto de recursos que eso conlleva, e incluso, en determinadas áreas, riesgos en la propia salud, como el uso de radiación en tejidos biológicos. Es evidente que una técnica capaz de realizar simulaciones a este nivel de precisión, con todos los detalles que haya que pulir y mejorar, resulta muy interesante a un nivel muy amplio de áreas científicas. Podríamos pensar, por ejemplo, en un barrido en tres dimensiones, se puede emplear esta herramienta para obtener una gran cantidad de información de un medio material determinado, sobre su homogeneidad, isotropía, forma, sensibilidad a cambios de temperatura o presión, objetos ocultos y un amplio abanico de información. A todo ello hay que añadir la posibilidad de emplear esta herramienta para el estudio de sistemas físicos completamente distintos a los aquí expuestos pero que cumplan con las condiciones de discretización necesarias. Otra forma de utilizar esta herramienta puede ser guardar los histogramas de modelos conocidos en una base de datos, y posteriormente comparar esa base de datos con los histogramas reales que se obtengan de sistemas desconocidos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. Alcaraz de la Osa, A. García Alonso, D. Ortiz, F. González, F. Moreno, J. M. Saiz, “*Extension of the Kubelka–Munk theory to an arbitrary substrate: a Monte Carlo approach*” J. Opt. Soc. Am. 33, nº 10 (2016)
- [2] P. Kubelka, F. Munk, “*An article on optics of paint layers*” Z. Tech. Phys. 12, 593–609 (1931)
- [3] J. H. Nobbs, “*Kubelka-Munk theory and the prediction of reflectance*” Rev. Prog. Color. 15, 66–75 (1985)
- [4] L. Fukshansky and N. Kazarinova, “*Extension of the Kubelka–Munk theory of light propagation in intensely scattering materials to fluorescent media*” J. Opt. Soc. Am. 70, 1101–1111 (1980).
- [5] Feng Liu, K. M. Yoo, and R. R. Alfano, “*Ultrafast laser-pulse transmission and imaging through biological tissues*” APPLIED OPTICS, 32, nº 4, (1993)
- [6] Jun Liang, Kecheng Yang, Min Xia, Xiaohui Zhang, Xuanhua Lei, Yi Zheng and Dan Tan, “*Monte Carlo simulation for modulated pulse bathymetric light detecting and ranging systems*” J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 8 (2006) 415–422
- [7] González Suárez, K. “*Aplicaciones del método de Monte Carlo a la solución de algunos problemas financieros*”, Tesis Doctoral, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas, México D.F (2008) (Enlace: <http://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/10946/39.pdf?sequence=1>)
- [8] Saavedra Barrera, P., Ibarra Mercado, V.H, “*El método Monte-Carlo y su aplicación a finanzas*” Universidad Anahuac; Escuela de Actuaría y Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa; Departamento de Matemáticas, México (2008), (Enlace: <http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/notas%20de%20clase/cfenaoe3.pdf>)
- [9] Araya, F. y Andrés, F. “*Aplicación del método de Monte Carlo en la planificación de proyectos de Ingeniería Civil*” Tesis Doctoral, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. (2015). (Enlace: <http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/132649>)
- [10] Cal González, J. “*Aplicación de Simulaciones Monte Carlo para el análisis de información CT y su uso en PET y Dosimetría.*” Memoria del Trabajo para la obtención del

Diploma de Estudios Avanzados, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Físicas, Madrid (2010)

- [11] Indian, J. "A new radiation", Phys., 2, 387 (1928)
- <http://www.uky.edu/~holler/raman.html>
- [12] Hyperphysics, Sitio web, visitado el 17/9/17, <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/atmos/blusky.html#c3>
- [13] RefractiveIndex, Sitio web visitado el 17/9/17,
<https://refractiveindex.info/?shelf=glass&book=BK7&page=SCHOTT>
- [14] AulaWiki, "La Capa Física", Sitio web visitado el 19/9/17
http://www.aulawiki.info/redes/T2-capa_fisica.htm
- [15] Thomas, George B.; Finney, Ross L. "Cálculo: una variable" Pearson Education (1998)
- [16] Martínez, J. "Biometría", Sitio web visitado el 3/1/18
<http://www.qvision.es/blogs/javier-martinez/2017/05/21/biometria-13-del-ultrasonido-a-la-oct/>
- [17] M. Tanzid, N. Hogan, H. Robotjazi, A. Veeraraghavan, N. Halas, "Absorption-enhanced imaging through scattering media using carbon black nano-particles: from visible to near infrared wavelengths" J. Opt. 20 (2018)