Apuntes de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Guillermo Gallego Sánchez

Índice general

Capítulo 1

Derivada débil y espacios de Sobolev

Ejemplo 1.0.1. Supongamos que se nos da un problema de contorno, como por ejemplo

$$\begin{cases} -y'' + 2y = e^x + \cos x \\ y(0) = 1, y(1) = 2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Es fácil definir lo que entendemos como una solución del problema (1.1): una función $y \in C^2([0,1])$ que cumpla la ecuación y los datos. Sin embargo, podemos cambiar la función a la derecha de la ecuación por otra con una forma más complicada, por ejemplo, que no sea continua, como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2) \\ 0, & x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

De modo que ahora queremos resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} -y'' + 2y = f(x) \\ y(0) = 1, y(1) = 2. \end{cases} \tag{1.2}$$

En este caso ya no podemos pedir que la solución sea C^2, en esta sección vamos a tratar de ver en qué espacios pueden vivir estas funciones que podemos entender como "soluciones" de problemas como el (1.2).

En primer lugar, vamos a cambiar ligeramente el aspecto de nuestra ecuación. Para ello consideramos una función φ en $[0,1]$, con $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ tan buena como queramos, por ejemplo $\varphi \in C^\infty([0,1])$ y la multiplicamos por la ecuación

$$-y''\varphi + 2y\varphi = f\varphi.$$

Integramos a ambos lados y obtenemos

$$-\int_0^1 y''\varphi + \int_0^1 2y\varphi = \int_0^1 f\varphi.$$

Integrando por partes

$$\int_0^1 y'\varphi' + 2\int_0^1 y\varphi = \int_0^1 f\varphi.$$

Buscaremos entonces qué funciones y pueden hacer que estas integrales tengan sentido. Los espacios en los que viven estas y serán los que llamaremos *espacios de Sobolev*. □

1.1. Repaso de espacios L^p

A partir de ahora, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ será un conjunto abierto y conexo, es decir, un dominio.

Definición 1.1.1. Dado $p \geq 1$, se llama *espacio* L^p en Ω al conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : U \to \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}.$$

Se define la *norma-p* de una función $f \in L^p(\Omega)$ como el número

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

Proposición 1.1.2 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean p, q tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

y sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^p(\Omega)$. Entonces se verifica la siguiente desigualdad

$$\int_\Omega |f||g| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demostración. Para probar la desigualdad de Hölder haremos uso del siguiente lema:

Lema 1. *Sean $a \geq b \geq 0$, y $\lambda \in (0,1)$. Se verifica la siguiente desigualdad*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Demostración. (del Lema 1) Si $a = 0$ ó $b = 0$, entonces el resultado es trivial. Supongamos entonces que $a, b > 0$. En tal caso, podemos considerar $x = a/b$ y queremos probar la desigualdad

$$x^\lambda \leq \lambda x + (1-\lambda).$$

Para verlo, consideremos la función

$$g(x) = x^\lambda - \lambda x - (1-\lambda).$$

Si tomamos su derivada, tenemos

$$g'(x) = \lambda(x^{\lambda-1} - 1).$$

Ahora, si $a \geq b$, tenemos que $x \geq 1$ y, como $\lambda \in (0,1)$, $\lambda - 1 \leq 0$ y $x^{\lambda-1} \leq 1$. Por tanto, $g'(x) < 0$, y, como $g(1) = 0$; para todo $x \geq 1$, $g(x) \leq 0$. □

Volviendo a la demostración de la desigualdad de Hölder, llamemos $a = |f|^p / \|f\|_p^p$ y $b = |g|^q / \|g\|_q^q$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \geq b$ y llamemos $\lambda = 1/p$, de modo que $1 - \lambda = 1/q$. Tenemos entonces, aplicando el lema

$$\left(\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} \right)^{1/p} \left(\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \right)^{1/q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|f|^q}{\|f\|_q^q}.$$

Integrando todo en Ω, queda

$$\int_\Omega \frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\int_\Omega \frac{|f|^q}{\|f\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por tanto

$$\int_\Omega |f||g| \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

tal y como queríamos probar. □

Proposición 1.1.3. *Si Ω es acotado, entonces se tienen las siguientes inclusiones*

$$L^1(\Omega) \supset L^2(\Omega) \supset L^3(\Omega) \supset \cdots \supset L^{p-1}(\Omega) \supset L^p(\Omega) \supset L^{p+1}(\Omega) \supset \cdots$$

Demostración. En efecto, si $1 \leq p < q$, por la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega |f|^p = \int_\Omega |f^p| = \int_\Omega |f^p||\chi_\Omega| \leq \|f^p\|_q \|\chi_\Omega\|_r,$$

con r tal que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Por tanto,

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \leq \|f^p\|_q \|\chi_\Omega\|_r = \|f\|_q^p \mu(\Omega)^{1/r}.$$

Luego

$$\|f\|_p \leq \text{cte.}\|f\|_q.$$

□

Proposición 1.1.4. *El espacio $L^p(\Omega)$ equipado con la norma-p es un espacio normado.*

Demostración. Lo único no trivial que hay que demostrar es la desigualdad triangular, esto es

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Veámosla

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f+g|^p = \int_\Omega |f+g||f+g|^{p-1} \leq \int_\Omega (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} \\ &= \int_\Omega |f||f+g|^{p-1} + \int_\Omega |g||f+g|^{p-1} \leq \|f\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q\end{aligned}$$

Donde q es el necesario para que se cumpla la desigualdad de Hölder, es decir,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Despejando q, tenemos que vale precisamente $q = p/(p-1)$.

Pero entonces

$$\||f+g|^{p-1}\|_q = \left(\int_\Omega (|f+g|^{p-1})^q\right)^{1/q} = \left(\int_\Omega (|f+g|^p)\right)^{(p-1)/p} = \|f+g\|_p^{p-1}.$$

Por tanto,

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Dividiendo a ambos lados por $\|f+g\|_p^{p-1}$ tenemos lo que se quería probar. □

Que los espacios L^p sean normados me va a permitir hablar de convergencia de funciones en L^p. Así, si (f_n) es una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$, diremos que la sucesión (f_n) *converge a* f *en* L^p y se denota

$$f_n \to f \ L^p$$

si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Nos interesará ahora recordar ciertos resultados de teoría de la medida que nos relacionen integrales y convergencias y que nos serán útiles más adelante. Pasamos a enunciarlos a continuación, sin demostración.

Teorema 1.1.5 (Teorema de la convergencia monótona). *Sea una sucesión* (f_n) *de funciones* $f_n \in L^1(\Omega)$ *tales que*

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots .$$

Entonces

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f_n| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|.$$

Teorema 1.1.6 (Teorema de la convergencia dominada). *Sea una sucesión* (f_n) *de funciones* $f_n \in L^1(\Omega)$ *tales que existe una función* $g \in L^1$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y existe una función* f *tal que* $f_n \to f$ *en casi todo punto. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n| = \int_\Omega |f|.$$

Teorema 1.1.7 (Lema de Fatou). *Sea una sucesión* (f_n) *de funciones* $f_n \in L^1$ *tales que* $f_n \geq 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} |f_n| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n|.$$

Haciendo uso de alguno de estos resultados, vamos a ver que los espacios L^p, con sus respectivas normas-p, son completos.

Proposición 1.1.8. *El espacio* $L^p(\Omega)$ *es de Banach. Además, si* $p = 2$, *podemos definir el producto*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv,$$

que dota a $L^2(\Omega)$ *de la estructura de espacio de Hilbert.*

Demostración. Supongamos que (f_n) es una sucesión de Cauchy en L^p. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar una subsucesión tal que $\|f_{n+1} - f_n\|_p \leq 2^{-n}$. Tenemos que encontrar una función $f \in L^p$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Considero entonces la sucesión de funciones (g_n), con

$$g_n = |f_1| + |f_2 - f_1| + |f_3 - f_2| + \cdots + |f_n - f_{n-1}|.$$

Esta sucesión es claramente monótona creciente. Además,

$$\|g_n\|_p \leq \|f_1\|_p + \sum_{i=1}^{n-1} \|f_{i+1} - f_i\|_p \leq \|f_1\|_p + \sum_{i=1}^{\infty} \|f_{i+1} - f_i\|_p \leq \|f_1\|_p \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \text{cte}.$$

De modo que las $g_n \in L^p(\Omega)$. Pero entonces las $g_n^p \in L^1(\Omega)$, ya que

$$\int_\Omega |g_n^p| \leq \int_\Omega |g_n|^p \leq \infty.$$

Podemos aplicar entonces el teorema de la convergencia monótona para obtener que

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} |g_n|^p = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |g_n^p| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |g_n^p| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |g_n|^p.$$

Tenemos entonces que si $g = \lim_{n\to\infty} g_n$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_p = 0,$$

o, lo que es lo mismo

$$g_n \to g \;\; L^p.$$

Para ver que (f_n) converge en L^p, podemos usar que la sucesión es de Cauchy para observar que entonces debe converger puntualmente a una función f en casi todo punto. Además,

$$|f_n| = |f_1| + \sum_{i=1}^{n} (|f_{i+1}| - |f_i|) \leq |f_1| + \sum_{i=1}^{n} |f_{i+1} - f_i| = g_n \leq g.$$

Ahora, como elevar a p es continuo, tenemos que $|f_n^p| \leq g^p \in L^1(\Omega)$ y que $f_n^p \to f^p$ en casi todo punto. Por tanto, $|f_n - f|^p \leq 2|g|^p$ y $f_n^p - f^p \to 0$ en casi todo punto. Aplicando el teorema de la convergencia dominada, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p = 0.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0,$$

o, lo que es lo mismo

$$f_n \to f \;\; L^p.$$

□

En lo que sigue, haremos bastante uso del siguiente teorema, que no demostraremos:

Proposición 1.1.9. *El conjunto $C_c(\Omega)$ de las funciones continuas con soporte compacto en Ω es denso en $L^p(\Omega)$.*

Proposición 1.1.10. *Sea $f \in L^1(\Omega)$. Si*

$$\int_\Omega f\varphi = 0,$$

para toda $\varphi \in C_c(\Omega)$, entonces $f(x) = 0$ para casi todo $x \in \Omega$.

Observación. Nótese que el hecho de que una sucesión (f_n) converga una función f en casi todo punto no implica que lo haga en $L^p(\Omega)$. Por ejemplo podemos tomar la sucesión

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}.$$

Esta sucesión converge a 0 en casi todo punto, pero $\|f_n\|_p = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si f es continua, el resultado es fácil. Si hay algún punto $x_0 \in \Omega$ tal que $|f(x_0)| > 0$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x)| > 0$ para todo $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Basta tomar entonces una función φ que valga 1 en $B_{\varepsilon/2}(x_0)$ y 0 fuera de $B_\varepsilon(x_0)$, de modo que

$$\left|\int_\Omega f\varphi\right| = \left|\int_{B_{\varepsilon/2}(x_0)} f\right| > 0.$$

En el caso general, en que f puede no ser continua, vamos a usar la Proposición 1.1.9. Sea $\varepsilon > 0$. Sé que existe una sucesión (f_n) de funciones $f_n \in C_c(\Omega)$ tal que $f_n \to f\ L_1$, es decir, tal que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que si $n \geq n_0$ entonces $\|f_n - f\|_1 < \varepsilon$. Ahora, para cualquier $\varphi \in C_c(\Omega)$, se tiene

$$\int_\Omega f_n\varphi = \int_\Omega (f_n - f)\varphi + \int_\Omega f\varphi = \int_\Omega (f_n - f)\varphi,$$

ya que $\int_\Omega f\varphi = 0$ por hipótesis. Ahora, si aplico la desigualdad de Hölder,

$$\int_\Omega f_n\varphi = \int_\Omega (f_n - f)\varphi \leq \|f_n - f\|_1 \|\varphi\|_\infty < \|\varphi\|_\infty \varepsilon.$$

Defino entonces los conjuntos

$$\begin{aligned} K_1 &= \{x \in \Omega | f(x) \geq \varepsilon\}, \\ K_2 &= \{x \in \Omega | f(x) \leq -\varepsilon\}, \end{aligned}$$

y llamo $K = K_1 \cup K_2$. Tomo además una función $\varphi \in C_c(\Omega)$ que valga 1 en K_1 y -1 en K_2. Entonces

$$\int_\Omega f_n\varphi = \int_K f_n\varphi + \int_{\Omega - K} f_n\varphi = \int_K |f_n| + \int_{\Omega - K} f_n\varphi.$$

Recordemos además que $\int_\Omega f_n\varphi \leq \|\varphi\|_\infty \varepsilon$. Tenemos entonces

$$\int_K |f_n| \leq \|\varphi\|_\infty \varepsilon - \int_{\Omega - K} f_n\varphi \leq \|\varphi\|_\infty \varepsilon + \varepsilon\|\varphi\|_\infty \mu(\Omega - K) \leq \text{cte}.\varepsilon.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega |f_n| \leq \int_K |f_n| + \int_{\Omega - K} |f_n| \leq \text{cte}.\varepsilon + \varepsilon\mu(\Omega - K) = \text{cte}.\varepsilon.$$

De aquí concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n| = 0.$$

Usando el lema de Fatou, obtenemos

$$\int_\Omega |f| = 0,$$

que implica que f es nula en casi todo punto de Ω, tal y como queríamos probar. $\square$

1.2. Derivada débil y espacios de Sobolev

Ejemplo 1.2.1. Volvamos al caso del Ejemplo 1.0.1. Habíamos llegado a la conclusión de que podíamos entender como una solución de nuestro problema de contorno (1.2) una función y tal que

$$\int_0^1 y'\varphi' + 2\int_0^1 y\varphi = \int_0^1 f\varphi,$$

para funciones φ «tan buenas como queramos». Queríamos entonces ver qué funciones y podrían hacer que estas integrales tuvieran sentido. Para que la integral $\int_0^1 y\varphi$ tenga sentido basta pedir que $y \in L^2$. Sin embargo, ¿qué le tenemos que pedir a y para que $\int_0^1 y'\varphi'$ tenga sentido? ¿Qué es y'? ¿Se puede definir algún tipo de *derivada*?

Más en general, si paraa una función φ, denotamos por φ_{x_i} a la derivada parcial $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, dada una función u, queremos hallar una función «derivada débil» (respecto de x_i), que podremos denotar como u_{x_i} que cumpla la fórmula de integración por partes. Es decir, u_{x_i} ha de ser tal que

$$\int u\varphi_{x_i} = -\int u_{x_i}\varphi,$$

para cualquier φ «suficientemente buena» y de soporte compacto. De nuevo, para que esta integral tenga sentido, es necesario que esta $u_{x_i} \in L^2$. □

Definición 1.2.2 (Derivada débil y espacios de Sobolev)**.** Sea $u \in L^p(\Omega)$. Se dice que una función $v \in L^p(\Omega)$ para algún $p \geq 1$ es una *derivada débil de u respecto de x_i* si

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} = -\int_\Omega v\varphi$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (función suave con soporte compacto en Ω). Esta v se denota como u_{x_i}.

Más generalmente, si $\alpha = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r})$, con $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq N$, se dice que una función $v \in L^p(\Omega)$ para algún $p \geq 1$ es una *derivada débil de u respecto del multiíndice α* si

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, donde

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_r}}}{\partial x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots \partial x_{i_r}^{\alpha_{i_r}}}.$$

Esta v se denota como $D^\alpha u$.

Finalmente, se definen los *espacios de Sobolev* como los conjuntos

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^j u \in L^p(\Omega),\ \text{para todo } |j| \leq k\right\}.$$

En particular nos interesa el espacio

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : u_{x_i} \in L^2(\Omega),\ \text{para todo } i = 1, \dots, n\right\}.$$

Ejemplo 1.2.3. Sea $f(x) = |x|$ para $x \in (-1, 1)$. Definimos

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Veamos que, en efecto, f' es la derivada débil de f. Basta comprobar la fórmula: dada $\varphi \in C_c^\infty((0,1))$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx = \int_{-1}^{0} -x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} f'(x)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

□

Observación. Veremos que la condición de que las $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se puede relajar. Podemos considerar simplemente funciones en espacios de Sobolev y tales que «valgan 0 en el borde», más tarde precisaremos qué quiere decir esto.

Cabe preguntarse ahora sobre la unicidad de la derivada débil.

Proposición 1.2.4. *La derivada débil es única (en casi todo punto) si Ω es acotado.*

Demostración. Supongamos que existen $v_1, v_2 \in L^p(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_1 \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_2 \varphi$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)\varphi = 0$$

para toda φ. Como $v_1, v_2 \in L^p(\Omega)$, $v_1 - v_2 \in L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, ya que Ω es acotado. Ahora, por la Proposición 1.1.10, $(v_1 - v_2)(x) = 0$ para casi todo x, luego $v_1(x) = v_2(x)$ para casi todo x. □

Ejemplo 1.2.5. Consideremos la función

$$u(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1] \\ 1 & x \in (1,2). \end{cases}$$

Como la derivada débil es única, en la parte donde la función es derivable, debe coincidir con la derivada «clásica», por tanto, nuestra única candidata a derivada débil es la función

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \in (1,2). \end{cases}$$

En efecto, esta función es la derivada débil, ya que, dada $\varphi \in C_c^\infty((0,2))$,

$$\int_0^2 u(x)\varphi'(x) = \int_0^1 x\varphi'(x)dx + \int_1^2 \varphi'(x)dx = \varphi(1) - \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Pero cabe preguntarse entonces qué pasa si cambiamos ligeramente la función por una que no es continua, por ejemplo

$$u(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1] \\ 2 & x \in (1,2). \end{cases}$$

En este caso, dada $\varphi \in C_c^\infty((0,2))$,

$$\int_0^2 u(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 x\varphi'(x)dx + \int_1^2 2\varphi'(x)dx = \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)dx - 2\varphi(1) = -\int_0^1 \varphi(x)dx - \varphi(1),$$

que es, en general, distinto de $-\int_0^1 \varphi(x)dx$.

¿Es posible encontrar entonces alguna derivada débil? Es decir, ¿existe alguna v tal que

$$-\int_0^1 v\varphi = -\int_0^1 \varphi - \varphi(1),$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty((0,2))$? La respuesta es que no. Para verlo consideremos la sucesión de funciones (φ_n), con

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1/n, \\ 1 + nx & x \in (-1/n, 0], \\ 1 - nx & x \in (0, 1/n], \\ 0 & x > 1/n. \end{cases}$$

(Realmente estas funciones no me sirven, porque no son C^∞, pero puedo tomar unas funciones similares, «redondeadas».) Puedo tomar entonces un n lo suficientemente grande de forma que

$$-\int_0^1 v\varphi_n + \int_0^1 \varphi_n < \varphi_n(1) = 1.$$

En general, este problema lo van a tener todas las funciones que no son continuas, de hecho, veremos la inclusión $H^1(\Omega) \subset C^0(\Omega)$. □

Ejemplo 1.2.6. Si aceptamos que u pueda ser continua con valores infinitos, entonces sí que puede aceptar derivada débil en ciertos casos. Por ejemplo, pensemos para qué valores $\alpha > 0$ puede aceptar derivada débil la función

$$u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha},$$

en $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Más concretamente, buscamos qué relaciones tienen que cumplir α, n y p para que $u \in W^{1,p}(B_1(0))$.

En primer lugar, queremos que $u \in L^p(B_1(0))$, luego hemos de calcular la integral

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{|x|^{\alpha p}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_1(0) - B_\varepsilon(0)} \frac{1}{|x|^{\alpha p}} dx,$$

pasando a coordenadas polares

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{|x|^{\alpha p}} dx = \text{cte.} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^{\alpha p}} r^{n-1} dr = \text{cte.}(1 - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{n - \alpha p}).$$

Esta integral es finita sólo si $n - \alpha p > 0$.

Ahora, la única candidata posible a derivada débil debe coincidir con la derivada «clásica» en los puntos donde ésta esté bien definida, de modo que

$$u_{x_i} = -\frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}} \frac{2x_i}{2|x|} = -\frac{\alpha x_i}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Si integramos con una función $C_c^\infty(B_1(0))$,

$$\int_{B_1(0)-B_\varepsilon(0)} u\varphi_{x_i} = \int_{\partial B_1(0)} u\varphi\nu_1 + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi\nu_2 - \int_{B_1(0)-B_\varepsilon(0)} u_{x_i}\varphi = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi\nu_2 - \int_{B_1(0)-B_\varepsilon(0)} u_{x_i}\varphi,$$

donde la integral en $\partial B_1(0)$ se anula porque φ tiene soporte compacto y ν_1 y ν_2 son vectores normales. Nos interesa saber entonces para qué valores de α podemos asegurar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi\nu_2 = 0,$$

pues será en esos casos en los que podremos asegurar que se cumple

$$\int_{B_1(0)} u\varphi_{x_i} = -\int_{B_1(0)} u_{x_i}\varphi$$

y que u_{x_i} es la derivada débil de u. Para ello, basta acotar

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi\nu_2\right| \leq \|\varphi\|_\infty \varepsilon^{-\alpha}|\partial B_\varepsilon(0)| \leq \text{cte.}\varepsilon^{n-1-\alpha},$$

ya que el área de una $n-1$-esfera de radio ε es proporcional a ε^{n-1}. Para que el límite que buscamos pueda ser cero, es necesario que el exponente $n-1-\alpha > 0$.

Finalmente, si, además de la existencia de la derivada débil queremos asegurar que esta derivada está en $L^p(B_1(0))$, podemos pensar para qué valores de α estará acotada la norma-p del gradiente $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$. Nótese que

$$|\nabla u| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Por tanto

$$\int_{B_1(0)} |\nabla u|^p = \text{cte.}\int \frac{1}{|x|^{p(\alpha+1)}}.$$

Por un razonamiento análogo al que hemos hecho con la integral de $1/|x|^{\alpha p}$, tenemos que esta integral es finita sólo si $n - p(\alpha+1) > 0$.

Tenemos entonces las siguientes relaciones necesarias para que $u \in W^{1,p}(B_1(0))$:

$$\begin{aligned} n - p(\alpha+1) &> 0 \\ n - p\alpha &> 0 \\ n - 1 - \alpha &> 0. \end{aligned}$$

Claramente, si se cumple la primera se cumplen las otras dos, luego la única condición fundamental para α es

$$n - p(\alpha+1) > 0.$$

Proposición 1.2.7 (Propiedades de la derivada débil)**.** *Sean $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$. Supongamos que α y β son multiíndices con $|\alpha|, |\beta| \leq k$. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones*

1. $D^\alpha u \in W^{k-\alpha,p}(\Omega)$,
2. $D^{\alpha+\beta}(u) := D^\alpha D^\beta(u) = D^\beta D^\alpha u$,

3. *$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ (linealidad),*

4. *para cada $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ el producto ψu satisface la regla de Leibniz y*

5. *si $V \subset \Omega$, entonces $W^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(V)$.*

Demostración.

1. Inmediato.

2. Basta iterar la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned}\int_\Omega D^\alpha D^\beta u\varphi &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\beta u D^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|}\int_\Omega u D^\beta D^\alpha \varphi \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|}\int_\Omega u D^\alpha D^\beta\varphi = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega D^\alpha u D^\beta\varphi \\ &= \int_\Omega D^\beta D^\alpha u\varphi.\end{aligned}$$

3. Inmediato.

4. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces, si $(\psi u)_{x_i}$ es una derivada débil de ψu, debe cumplir

$$\int_\Omega (\psi u)_{x_i}\varphi = -\int_\Omega (\psi u)\varphi_{x_i} = -\int_\Omega u\left[(\psi\varphi)_{x_i} - \psi_{x_i}\varphi\right] = \int_\Omega (u_{x_i}\psi + u\psi_{x_i})\varphi.$$

5. Basta calcular

$$\|D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} = \int_V |D^\alpha u|^p \leq \int_\Omega |D^\alpha u|^p = \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

□

Norma en los espacios de Sobolev A la vista de estas propiedades, podemos definir una norma en los espacios $W^{k,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{|j|\leq|k|}\|D^j u\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Además, en $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$, podemos definir el producto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k}\langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

en particular

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Para concluir la sección vamos a ver que, además de normados, los espacios de Sobolev son completos.

Proposición 1.2.8. *$W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Supongamos que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $W^{k,p}(\Omega)$. En particular las sucesiones (f_n) y $(D^\alpha f_n)$ son de Cauchy en L^p y, como L^p es completo, convergen a unas ciertas funciones f y f_α, respectivamente, en L^p. Falta ver entonces que, de hecho $f_\alpha = D^\alpha f$.

Por converger (f_n) en el sentido de L^p, existe una subsucesión (f_m) de (f_n) tal que f_m converge a f puntualmente para casi todo x. Además, dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\left| \int_\Omega f_m \varphi - \int_\Omega f\varphi \right| \leq \int_\Omega |f_m - f||\varphi| \leq \|f_m - f\|_p \|\varphi\|_q,$$

que converge a 0 con $m \to \infty$. Por tanto,

$$\int_\Omega f\varphi = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega f_m \varphi.$$

Por un cálculo análogo, podemos ver que

$$\int_\Omega f_\alpha \varphi = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega D^\alpha f_m \varphi.$$

Finalmente, tenemos que

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega f_m D^\alpha \varphi = \lim_{m\to\infty} \left((-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha f_m \varphi \right) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha \varphi.$$

Concluimos que

$$\int_\Omega D^\alpha f \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi = \int_\Omega f_\alpha \varphi,$$

luego $f_\alpha = D^\alpha f$. □

1.3. Operador de traza

Volviendo al caso del ejemplo 1.0.1, nos encontrábamos con un problema de contorno. Es decir, queríamos hallar una función que fuera una solución (débil) de nuestra ecuación diferencial, pero además debía tomar unos valores concretos en el borde del dominio en el que estaba definida. Sin embargo, en general hemos visto que las soluciones débiles, para que estén bien definidas, van a pertenecer a espacios de Sobolev y en general pueden no ser continuas en un conjunto de medida cero. Entonces, como el borde de hecho tiene medida cero, no tiene mucho sentido preguntarse qué supone que la función tome un determinado valor en el borde, ya que en principio podría ser ese o cualquier otro. Es decir, parece que la condición de contorno no añade nada.

En esta sección precisamente de lo que vamos a tratar es de «darle sentido al borde». Concretamente, vamos a encontrar un operador que tome posibles soluciones débiles y las mande a funciones en el borde y que en el caso de las funciones continuas hasta el borde sea simplemente la restricción. Es decir, buscamos un operador $T : W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} W^{k,p}(\Omega) \arrow[r, "T"] & L^p(\partial\Omega) \\ C(\bar{\Omega}), \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

donde $C(\bar{\Omega}) \to L^p(\partial\Omega)$ es simplemente la aplicación restricción $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$.

Para la construcción de este operador, voy a definirlo primero en el caso de las funciones continuas hasta el borde, simplemente

$$Tu = u|_{\partial\Omega},$$

y luego voy a construirmelo para el resto de funciones u mediante una sucesión (u_m) de funciones continuas hasta el borde tal que $u_m \to u$. Definiré entonces

$$Tu = \lim_{m\to\infty} Tu_m.$$

Para hacer esta aproximación correctamente vamos a necesitar un teorema de densidad, cuya demostración omitiremos, pero puede leerse en [Evans].

Teorema 1.3.1 (Teorema de densidad)**.** *Si Ω es acotado, $\partial\Omega$ es de clase C^1 y $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Entonces existe $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $u_m \to u$ en la norma de $W^{k,p}(\Omega)$. Además, si $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, la convergencia es uniforme.*

Teorema 1.3.2 (Teorema de trazas)**.** *Supongamos que $\partial\Omega$ es de clase C^1. Entonces existe un operador (llamado* operador de traza*) $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ continuo y acotado tal que*

1. *si $u \in C(\bar{\Omega})$, entonces $Tu = u|_{\partial\Omega}$ y*

2. *$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \text{cte.}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.*