Sistemas superintegrables: El hamiltoniano de Tremblay-Turbiner-Winternitz

Guillermo Gallego Sánchez

Departamento de Física Teórica

25 de junio de 2018

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Sistemas integrables

- Un sistema hamiltoniano (independiente del tiempo) con n grados de libertad se dice *completamente integrable* si admite n integrales primeras $F_1, \ldots, F_n$ independientes tales que $\{F_i, F_j\} = 0$ para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, n$.

Sistemas integrables

- Un sistema hamiltoniano (independiente del tiempo) con n grados de libertad se dice *completamente integrable* si admite n integrales primeras $F_1, \ldots, F_n$ independientes tales que $\{F_i, F_j\} = 0$ para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, n$.
- En particular, como hemos supuesto que el sistema no depende del tiempo, H es una de estas integrales primeras.

Sistemas integrables

- Un sistema hamiltoniano (independiente del tiempo) con n grados de libertad se dice *completamente integrable* si admite n integrales primeras $F_1, \ldots, F_n$ independientes tales que $\left\{F_i, F_j\right\} = 0$ para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, n$.
- En particular, como hemos supuesto que el sistema no depende del tiempo, H es una de estas integrales primeras.
- **Ejemplo**: El potencial central

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(r),$$

con las integrales primeras H, L^2 y L_z.

Teorema de Arnold-Liouville

Teorema

Sea H *un sistema hamiltoniano completamente integrable con* n *grados de libertad y sea* $F = (F_1, \ldots, F_n)$ *con* $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$ *las integrales en involución del sistema. Entonces:*

Teorema de Arnold-Liouville

Teorema

Sea H *un sistema hamiltoniano completamente integrable con* n *grados de libertad y sea* $F = (F_1, \dots, F_n)$ *con* $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ *las integrales en involución del sistema. Entonces:*

1. *Los conjuntos de nivel* $M_a = F^{-1}(a)$ *son subvariedades del espacio de fases invariantes bajo el flujo del sistema.*

Teorema de Arnold-Liouville

Teorema

Sea H un sistema hamiltoniano completamente integrable con n grados de libertad y sea $F = (F_1, \dots, F_n)$ con $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ las integrales en involución del sistema. Entonces:

1. *Los conjuntos de nivel $M_a = F^{-1}(a)$ son subvariedades del espacio de fases invariantes bajo el flujo del sistema.*
2. *Si M_a es compacta y conexa entonces es difeomorfa al toro n-dimensional y se llama un toro de Liouville.*

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Teorema de Arnold-Liouville

Teorema

Sea H un sistema hamiltoniano completamente integrable con n grados de libertad y sea $F = (F_1, \ldots, F_n)$ con $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$ las integrales en involución del sistema. Entonces:

1. *Los conjuntos de nivel $M_a = F^{-1}(a)$ son subvariedades del espacio de fases invariantes bajo el flujo del sistema.*
2. *Si M_a es compacta y conexa entonces es difeomorfa al toro n-dimensional y se llama un toro de Liouville.*
3. *En torno a cada toro de Liouville podemos dar unas coordenadas canónicas $(\mathbf{J}, \mathbf{w})$ llamadas variables de acción-ángulo, tales que las $\mathbf{J}$ son constantes en cada toro de Liouville y las $\mathbf{w}$ son coordenadas angulares en el toro.*

Integración por cuadraturas

- Como consecuencia, las ecuaciones de Hamilton quedan

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial w_i} = -\dot{J}_i = 0, \\ \dot{w}_i = \dfrac{\partial H}{\partial J_i} = \nu_i(\mathbf{J}). \end{cases}$$

Integración por cuadraturas

- Como consecuencia, las ecuaciones de Hamilton quedan

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial w_i} = -\dot{J}_i = 0, \\ \dot{w}_i = \dfrac{\partial H}{\partial J_i} = \nu_i(\mathbf{J}). \end{cases}$$

- Se pueden integrar por cuadraturas

$$\begin{cases} J_i(t) = J_i(0), \\ w_i(t) = w_i(0) + t\nu_i(\mathbf{J}). \end{cases}$$

Integración por cuadraturas

- Como consecuencia, las ecuaciones de Hamilton quedan

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial w_i} = -\dot{J}_i = 0, \\ \dot{w}_i = \dfrac{\partial H}{\partial J_i} = \nu_i(\mathbf{J}). \end{cases}$$

- Se pueden integrar por cuadraturas

$$\begin{cases} J_i(t) = J_i(0), \\ w_i(t) = w_i(0) + t\nu_i(\mathbf{J}). \end{cases}$$

- Un flujo de este tipo en el toro se llama *movimiento condicionalmente periódico*. La trayectoria es cerrada si y sólo si las frecuencias $\nu_1, \ldots, \nu_n$ son conmesurables.

Variables de acción-ángulo

Fijo M_a un toro de Liouville, las variables de acción-ángulo en torno a M_a se construyen como sigue:

Variables de acción-ángulo

Fijo M_a un toro de Liouville, las variables de acción-ángulo en torno a M_a se construyen como sigue:

1. Se escogen unos ciclos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ que den una base de $H_1(M_a)$.

Variables de acción-ángulo

Fijo M_a un toro de Liouville, las variables de acción-ángulo en torno a M_a se construyen como sigue:

1. Se escogen unos ciclos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ que den una base de $H_1(M_a)$.
2. Se calculan las variables de acción

$$J_i = \oint_{\gamma_i} \mathbf{p} \mathrm{d}\mathbf{q}.$$

Variables de acción-ángulo

Fijo M_a un toro de Liouville, las variables de acción-ángulo en torno a M_a se construyen como sigue:

1. Se escogen unos ciclos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ que den una base de $H_1(M_a)$.
2. Se calculan las variables de acción

$$J_i = \oint_{\gamma_i} \mathbf{p} \mathrm{d}\mathbf{q}.$$

3. Se genera una transformación canónica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{J}, \mathbf{w})$ con la función

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{J}, \mathbf{q}) \mathrm{d}\mathbf{q}.$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Variables de acción-ángulo

Fijo M_a un toro de Liouville, las variables de acción-ángulo en torno a M_a se construyen como sigue:

1. Se escogen unos ciclos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ que den una base de $H_1(M_a)$.
2. Se calculan las variables de acción
$$J_i = \oint_{\gamma_i} \mathbf{p} \mathrm{d}\mathbf{q}.$$
3. Se genera una transformación canónica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{J}, \mathbf{w})$ con la función
$$S(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{J}, \mathbf{q}) \mathrm{d}\mathbf{q}.$$
4. Se hallan las variables de ángulo
$$w_i = \frac{\partial S}{\partial J_i}.$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Sistemas superintegrables

- Un sistema hamiltoniano con n grados de libertad se llama *superintegrable* si admite $n+k$ integrales primeras independientes para cierto $k = 1, \ldots, n-1$. En el caso en que $k = n-1$ el sistema se dice que es *maximalmente superintegrable*.

Sistemas superintegrables

- Un sistema hamiltoniano con n grados de libertad se llama *superintegrable* si admite $n+k$ integrales primeras independientes para cierto $k=1,\dots,n-1$. En el caso en que $k=n-1$ el sistema se dice que es *maximalmente superintegrable*.
- En un sistema maximalmente superintegrable las órbitas acotadas son curvas cerradas (con movimiento periódico).

Sistemas superintegrables

- Un sistema hamiltoniano con n grados de libertad se llama *superintegrable* si admite $n+k$ integrales primeras independientes para cierto $k=1,\dots,n-1$. En el caso en que $k=n-1$ el sistema se dice que es *maximalmente superintegrable*.
- En un sistema maximalmente superintegrable las órbitas acotadas son curvas cerradas (con movimiento periódico).
- **Ejemplos**:

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Sistemas superintegrables

- Un sistema hamiltoniano con n grados de libertad se llama *superintegrable* si admite $n + k$ integrales primeras independientes para cierto $k = 1, \ldots, n - 1$. En el caso en que $k = n - 1$ el sistema se dice que es *maximalmente superintegrable*.
- En un sistema maximalmente superintegrable las órbitas acotadas son curvas cerradas (con movimiento periódico).
- **Ejemplos**:
  - El potencial central, con el *vector de Laplace-Runge-Lenz*

$$\mathbf{A} = \mathbf{q} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{q}}{r}.$$

Sistemas superintegrables

- Un sistema hamiltoniano con n grados de libertad se llama *superintegrable* si admite $n + k$ integrales primeras independientes para cierto $k = 1, \ldots, n - 1$. En el caso en que $k = n - 1$ el sistema se dice que es *maximalmente superintegrable*.
- En un sistema maximalmente superintegrable las órbitas acotadas son curvas cerradas (con movimiento periódico).
- **Ejemplos**:
  - El potencial central, con el *vector de Laplace-Runge-Lenz*

$$\mathbf{A} = \mathbf{q} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{q}}{r}.$$

  - El oscilador armónico isótropo, con el *tensor de Fradkin*

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}(p_i p_j + k q_i q_j).$$

El hamiltoniano de TTW

En 2009 F. Tremblay, A. V. Turbiner y P. Winternitz (TTW) propusieron una familia de sistemas hamiltonianos parametrizados por una constante k

$$H_k(r,\phi,p_r,p_\phi) = \tfrac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \omega^2 r^2\right) + V_k(r,\phi),$$

con

$$V_k(r,\phi) = \frac{\alpha k^2}{2r^2\cos^2 k\phi} + \frac{\beta k^2}{2r^2\operatorname{sen}^2 k\phi}.$$

El hamiltoniano de TTW

En 2009 F. Tremblay, A. V. Turbiner y P. Winternitz (TTW) propusieron una familia de sistemas hamiltonianos parametrizados por una constante k

$$H_k(r,\phi,p_r,p_\phi) = \tfrac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \omega^2 r^2\right) + V_k(r,\phi),$$

con

$$V_k(r,\phi) = \frac{\alpha k^2}{2r^2\cos^2 k\phi} + \frac{\beta k^2}{2r^2\,\mathrm{sen}^2\, k\phi}.$$

Tiene la integral primera

$$X_k = p_\phi^2 + \frac{\alpha k^2}{\cos^2 k\phi} + \frac{\beta k^2}{\mathrm{sen}^2\, k\phi},$$

luego es completamente integrable. TTW conjeturaron que también era superintegrable para todo k racional.

Otras coordenadas «polares»

Definimos unas nuevas coordenadas «polares» para ver la superintegrabilidad:

$$\phi \longmapsto \theta = k\phi.$$

Otras coordenadas «polares»

Definimos unas nuevas coordenadas «polares» para ver la superintegrabilidad:

$$\phi \longmapsto \theta = k\phi.$$

$$T(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \longmapsto T(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2}{k^2}\dot{\theta}^2\right).$$

Otras coordenadas «polares»

Definimos unas nuevas coordenadas «polares» para ver la superintegrabilidad:

$$\phi \longmapsto \theta = k\phi.$$

$$T(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \longmapsto T(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2}{k^2}\dot{\theta}^2\right).$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{r^2}{k^2}\dot{\theta} \implies p_\phi = k p_\theta.$$

Otras coordenadas «polares»

Definimos unas nuevas coordenadas «polares» para ver la superintegrabilidad:

$$\phi \longmapsto \theta = k\phi.$$

$$T(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \longmapsto T(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2}{k^2}\dot{\theta}^2\right).$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{r^2}{k^2}\dot{\theta} \implies p_\phi = k p_\theta.$$

$$H_k(r,\theta,p_r,p_\phi) = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{k^2}{r^2}p_\theta^2 + \omega^2 r^2\right) + V_k(r,\theta),$$

Otras coordenadas «polares»

Definimos unas nuevas coordenadas «polares» para ver la superintegrabilidad:

$$\phi \longmapsto \theta = k\phi.$$

$$T(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \longmapsto T(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2}{k^2}\dot{\theta}^2\right).$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \frac{r^2}{k^2}\dot{\theta} \implies p_\phi = kp_\theta.$$

$$H_k(r,\theta,p_r,p_\phi) = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{k^2}{r^2}p_\theta^2 + \omega^2 r^2\right) + V_k(r,\theta),$$

$$V_k(r,\theta) = \frac{\alpha k^2}{2r^2\cos^2\theta} + \frac{\beta k^2}{2r^2\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Otras coordenadas «polares»

Definimos unas nuevas coordenadas «polares» para ver la superintegrabilidad:

$$\phi \longmapsto \theta = k\phi.$$

$$T(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \longmapsto T(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{r^2}{k^2}\dot{\theta}^2\right).$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{r^2}{k^2}\dot{\theta} \implies p_\phi = kp_\theta.$$

$$H_k(r,\theta,p_r,p_\phi) = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{k^2}{r^2}p_\theta^2 + \omega^2 r^2\right) + V_k(r,\theta),$$

$$V_k(r,\theta) = \frac{\alpha k^2}{2r^2\cos^2\theta} + \frac{\beta k^2}{2r^2\operatorname{sen}^2\theta}.$$

$$X_k = k^2\left(p_\theta^2 + \frac{\alpha}{\cos^2\theta} + \frac{\beta}{\operatorname{sen}^2\theta}\right).$$

Superintegrabilidad del sistema de TTW

Toros de Liouville con $H = E$ y $X_k = k^2 A$:

$$\begin{cases} p_r^2 + \dfrac{k^2}{r^2} A + \omega^2 r^2 = 2E, \\ p_\theta^2 + \dfrac{\alpha}{\cos^2\theta} + \dfrac{\beta}{\operatorname{sen}^2\theta} = A. \end{cases}$$

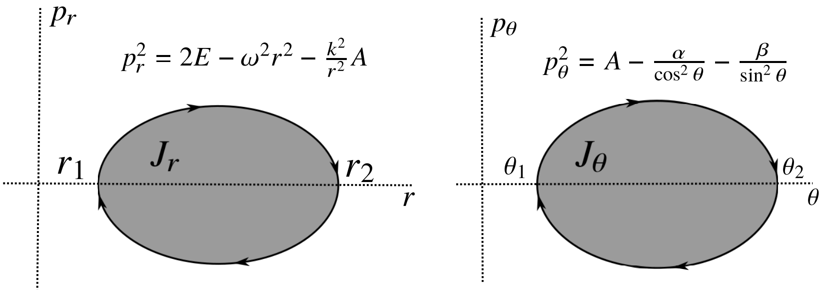
Superintegrabilidad del sistema de TTW

Toros de Liouville con $H = E$ y $X_k = k^2 A$:

$$\begin{cases} p_r^2 + \dfrac{k^2}{r^2} A + \omega^2 r^2 = 2E, \\ p_\theta^2 + \dfrac{\alpha}{\cos^2\theta} + \dfrac{\beta}{\operatorname{sen}^2\theta} = A. \end{cases}$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr,$$
$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta.$$

Superintegrabilidad del sistema de TTW



Superintegrabilidad del sistema de TTW

Toros de Liouville con $H = E$ y $X_k = k^2 A$:

$$\begin{cases} p_r^2 + \dfrac{k^2}{r^2} A + \omega^2 r^2 = 2E, \\ p_\theta^2 + \dfrac{\alpha}{\cos^2\theta} + \dfrac{\beta}{\operatorname{sen}^2\theta} = A. \end{cases}$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2E - \omega^2 r^2 - \frac{k^2}{r^2} A}\, dr = \frac{E}{2\omega} - \frac{k\sqrt{A}}{2},$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{A - \frac{\alpha}{\cos^2\theta} - \frac{\beta}{\operatorname{sen}^2\theta}}\, d\theta = \frac{\sqrt{A}}{2} - \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2} \sim \frac{\sqrt{A}}{2}.$$

Superintegrabilidad del sistema de TTW

$$H(J_r, J_\theta, w_r, w_\theta) = 2\omega(J_r + kJ_\theta).$$

Superintegrabilidad del sistema de TTW

$$H(J_r, J_\theta, w_r, w_\theta) = 2\omega(J_r + kJ_\theta).$$

$$\begin{cases} \nu_r = \dot{w}_r = \dfrac{\partial H}{\partial J_r} = 2\omega, \\ \nu_\theta = \dot{w}_\theta = \dfrac{\partial H}{\partial J_\theta} = 2k\omega. \end{cases}$$

Superintegrabilidad del sistema de TTW

$$H(J_r, J_\theta, w_r, w_\theta) = 2\omega(J_r + kJ_\theta).$$

$$\begin{cases} \nu_r = \dot{w}_r = \dfrac{\partial H}{\partial J_r} = 2\omega, \\ \nu_\theta = \dot{w}_\theta = \dfrac{\partial H}{\partial J_\theta} = 2k\omega. \end{cases}$$

- k irracional $\implies$ ν_r, ν_θ inconmesurables $\implies$ Trayectorias densas $\implies$ No superintegrable

Superintegrabilidad del sistema de TTW

$$H(J_r, J_\theta, w_r, w_\theta) = 2\omega(J_r + kJ_\theta).$$

$$\begin{cases} \nu_r = \dot{w}_r = \dfrac{\partial H}{\partial J_r} = 2\omega, \\ \nu_\theta = \dot{w}_\theta = \dfrac{\partial H}{\partial J_\theta} = 2k\omega. \end{cases}$$

- k irracional $\implies$ ν_r, ν_θ inconmesurables $\implies$ Trayectorias densas $\implies$ No superintegrable
- $k = m/n \implies m\dot{w}_r - n\dot{w}_\theta = 0 \implies mw_r - nw_\theta$ es una cantidad conservada $\implies e^{i(mw_r - nw_\theta)} = (e^{iw_r})^m (e^{-iw_\theta})^n$ es una cantidad conservada univaluada en el toro de Liouville.

TTW en coordenadas complejas

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

TTW en coordenadas complejas

$$z = x + iy, \;\; \bar{z} = x - iy.$$

$$\cos k\phi = \frac{z^k + \bar{z}^k}{2|z|^k}, \;\; \operatorname{sen} k\phi = \frac{z^k - \bar{z}^k}{2i|z|^k}.$$

TTW en coordenadas complejas

$$z = x + iy, \;\; \bar{z} = x - iy.$$

$$\cos k\phi = \frac{z^k + \bar{z}^k}{2|z|^k}, \;\; \operatorname{sen} k\phi = \frac{z^k - \bar{z}^k}{2i|z|^k}.$$

$$V_k(z, \bar{z}) = 2k^2 z^{k-1} \bar{z}^{k-1} \left[\frac{\alpha}{(z^k + \bar{z}^k)^2} - \frac{\beta}{(z^k - \bar{z}^k)^2} \right].$$

TTW en coordenadas complejas

$$z = x + iy, \;\; \bar{z} = x - iy.$$

$$\cos k\phi = \frac{z^k + \bar{z}^k}{2|z|^k}, \;\; \operatorname{sen} k\phi = \frac{z^k - \bar{z}^k}{2i|z|^k}.$$

$$V_k(z, \bar{z}) = 2k^2 z^{k-1} \bar{z}^{k-1} \left[\frac{\alpha}{(z^k + \bar{z}^k)^2} - \frac{\beta}{(z^k - \bar{z}^k)^2} \right].$$

$$T(z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}}) = \tfrac{1}{2} \dot{z} \dot{\bar{z}}.$$

TTW en coordenadas complejas

$$z = x + iy, \;\; \bar{z} = x - iy.$$

$$\cos k\phi = \frac{z^k + \bar{z}^k}{2|z|^k}, \;\; \operatorname{sen} k\phi = \frac{z^k - \bar{z}^k}{2i|z|^k}.$$

$$V_k(z,\bar{z}) = 2k^2 z^{k-1}\bar{z}^{k-1}\left[\frac{\alpha}{(z^k+\bar{z}^k)^2} - \frac{\beta}{(z^k-\bar{z}^k)^2}\right].$$

$$T(z,\bar{z},\dot{z},\dot{\bar{z}}) = \tfrac{1}{2}\dot{z}\dot{\bar{z}}.$$

$$\begin{cases} p_z = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \tfrac{1}{2}(p_x - ip_y), \\ p_{\bar{z}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\bar{z}}} = \tfrac{1}{2}(p_x + ip_y). \end{cases}$$

TTW en coordenadas complejas

$$z = x + iy, \;\; \bar{z} = x - iy.$$

$$\cos k\phi = \frac{z^k + \bar{z}^k}{2|z|^k}, \;\; \operatorname{sen} k\phi = \frac{z^k - \bar{z}^k}{2i|z|^k}.$$

$$V_k(z, \bar{z}) = 2k^2 z^{k-1} \bar{z}^{k-1} \left[\frac{\alpha}{(z^k + \bar{z}^k)^2} - \frac{\beta}{(z^k - \bar{z}^k)^2} \right].$$

$$T(z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}}) = \tfrac{1}{2} \dot{z} \dot{\bar{z}}.$$

$$\begin{cases} p_z = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \tfrac{1}{2}(p_x - i p_y), \\ p_{\bar{z}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\bar{z}}} = \tfrac{1}{2}(p_x + i p_y). \end{cases}$$

$$H_k(z, \bar{z}, p_z, p_{\bar{z}}) = \tfrac{1}{2}(p_z p_{\bar{z}} + \omega^2 z \bar{z}) + V_k(z, \bar{z}).$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

TTW en unas nuevas coordenadas

$$u = \frac{1}{2}(z^k + \bar{z}^k) = r^k \cos k\phi, \quad v = \frac{1}{2}(z^k - \bar{z}^k) = r^k \sin k\phi$$

TTW en unas nuevas coordenadas

$$u = \frac{1}{2}(z^k + \bar{z}^k) = r^k \cos k\phi, \quad v = \frac{1}{2}(z^k - \bar{z}^k) = r^k \sin k\phi$$

$$\dot{u} = \frac{k}{2}(z^{k-1}\dot{z} + \bar{z}^{k-1}\dot{\bar{z}}), \quad \dot{v} = \frac{k}{2i}(z^{k-1}\dot{z} - \bar{z}^{k-1}\dot{\bar{z}}).$$

TTW en unas nuevas coordenadas

$$u = \frac{1}{2}(z^k + \bar{z}^k) = r^k \cos k\phi, \;\; v = \frac{1}{2}(z^k - \bar{z}^k) = r^k \sin k\phi$$

$$\dot{u} = \frac{k}{2}(z^{k-1}\dot{z} + \bar{z}^{k-1}\dot{\bar{z}}), \;\; \dot{v} = \frac{k}{2i}(z^{k-1}\dot{z} - \bar{z}^{k-1}\dot{\bar{z}}).$$

$$T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{2k^2(u^2 + v^2)^{(k-1)/k}}$$

TTW en unas nuevas coordenadas

$$u = \frac{1}{2}(z^k + \bar{z}^k) = r^k \cos k\phi, \;\; v = \frac{1}{2}(z^k - \bar{z}^k) = r^k \sin k\phi$$

$$\dot{u} = \frac{k}{2}(z^{k-1}\dot{z} + \bar{z}^{k-1}\dot{\bar{z}}), \;\; \dot{v} = \frac{k}{2i}(z^{k-1}\dot{z} - \bar{z}^{k-1}\dot{\bar{z}}).$$

$$T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{2k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}}$$

$$p_u = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = \frac{\dot{u}}{k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}}$$

$$p_v = \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} = \frac{\dot{v}}{k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}}$$

TTW en unas nuevas coordenadas

$$u = \frac{1}{2}(z^k + \bar{z}^k) = r^k \cos k\phi, \quad v = \frac{1}{2}(z^k - \bar{z}^k) = r^k \sin k\phi$$

$$\dot{u} = \frac{k}{2}(z^{k-1}\dot{z} + \bar{z}^{k-1}\dot{\bar{z}}), \quad \dot{v} = \frac{k}{2i}(z^{k-1}\dot{z} - \bar{z}^{k-1}\dot{\bar{z}}).$$

$$T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{2k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}}$$

$$p_u = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = \frac{\dot{u}}{k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}}$$

$$p_v = \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} = \frac{\dot{v}}{k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}}$$

$$V_k(u, v) = k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}\left[\frac{\alpha}{2u^2} + \frac{\beta}{2v^2}\right].$$

TTW en unas nuevas coordenadas

$$H_k = k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}\left[\frac{1}{2}(p_u^2+p_v^2)+\frac{\omega^2}{2k^2}(u^2+v^2)^{2/k-1}+\frac{\alpha}{2u^2}+\frac{\beta}{2v^2}\right]$$

TTW en unas nuevas coordenadas

$$H_k = k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}\left[\tfrac{1}{2}(p_u^2+p_v^2)+\frac{\omega^2}{2k^2}(u^2+v^2)^{2/k-1}+\frac{\alpha}{2u^2}+\frac{\beta}{2v^2}\right]$$

Aparte del factor global $k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}$, obtenemos un oscilador no lineal con términos centrífugos, que nos plantea varias preguntas

TTW en unas nuevas coordenadas

$$H_k = k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}\left[\frac{1}{2}(p_u^2+p_v^2)+\frac{\omega^2}{2k^2}(u^2+v^2)^{2/k-1}+\frac{\alpha}{2u^2}+\frac{\beta}{2v^2}\right]$$

Aparte del factor global $k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}$, obtenemos un oscilador no lineal con términos centrífugos, que nos plantea varias preguntas

- ¿Cuál es su origen?

TTW en unas nuevas coordenadas

$$H_k = k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}\left[\frac{1}{2}(p_u^2+p_v^2)+\frac{\omega^2}{2k^2}(u^2+v^2)^{2/k-1}+\frac{\alpha}{2u^2}+\frac{\beta}{2v^2}\right]$$

Aparte del factor global $k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}$, obtenemos un oscilador no lineal con términos centrífugos, que nos plantea varias preguntas

- ¿Cuál es su origen?
- ¿Cuál es su sentido físico?

TTW en unas nuevas coordenadas

$$H_k = k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}\left[\frac{1}{2}(p_u^2+p_v^2)+\frac{\omega^2}{2k^2}(u^2+v^2)^{2/k-1}+\frac{\alpha}{2u^2}+\frac{\beta}{2v^2}\right]$$

Aparte del factor global $k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}$, obtenemos un oscilador no lineal con términos centrífugos, que nos plantea varias preguntas

- ¿Cuál es su origen?
- ¿Cuál es su sentido físico?
- ¿Se puede obtener de la reducción de un sistema en dimensión superior?

TTW en unas nuevas coordenadas

$$H_k = k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}\left[\frac{1}{2}(p_u^2+p_v^2)+\frac{\omega^2}{2k^2}(u^2+v^2)^{2/k-1}+\frac{\alpha}{2u^2}+\frac{\beta}{2v^2}\right]$$

Aparte del factor global $k^2(u^2+v^2)^{(k-1)/k}$, obtenemos un oscilador no lineal con términos centrífugos, que nos plantea varias preguntas

- ¿Cuál es su origen?
- ¿Cuál es su sentido físico?
- ¿Se puede obtener de la reducción de un sistema en dimensión superior?
- ¿Se puede interpretar como un factor conforme de un espacio curvo?

Espacios de curvatura constante

Modelizamos los espacios de curvatura constante κ con la familia de superficies $\Sigma_\kappa \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación

$$x_0^2 + \kappa(x_1^2 + x_2^2) = 1,$$

dotadas de la estructura riemanniana

$$ds^2 = \frac{1}{\kappa}(\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2) = \frac{\kappa(x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2)^2}{1 - \kappa(x_1^2 + x_2^2)} + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2.$$

Espacios de curvatura constante

Modelizamos los espacios de curvatura constante κ con la familia de superficies $\Sigma_\kappa \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación

$$x_0^2 + \kappa(x_1^2 + x_2^2) = 1,$$

dotadas de la estructura riemanniana

$$ds^2 = \frac{1}{\kappa}(\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2) = \frac{\kappa(x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2)^2}{1 - \kappa(x_1^2 + x_2^2)} + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2.$$

- Si $\kappa > 0$ tenemos modelos de la geometría esférica $\mathbb{S}^2$.

Espacios de curvatura constante

Modelizamos los espacios de curvatura constante κ con la familia de superficies $\Sigma_\kappa \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación

$$x_0^2 + \kappa(x_1^2 + x_2^2) = 1,$$

dotadas de la estructura riemanniana

$$ds^2 = \frac{1}{\kappa}(\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2) = \frac{\kappa(x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2)^2}{1 - \kappa(x_1^2 + x_2^2)} + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2.$$

- Si $\kappa > 0$ tenemos modelos de la geometría esférica $\mathbb{S}^2$.
- Si $\kappa = 0$ tenemos dos planos, de los cuales escogemos uno, que nos da un modelo de la geometría euclidiana $\mathbb{E}^2$.

Espacios de curvatura constante

Modelizamos los espacios de curvatura constante κ con la familia de superficies $\Sigma_\kappa \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación

$$x_0^2 + \kappa(x_1^2 + x_2^2) = 1,$$

dotadas de la estructura riemanniana

$$ds^2 = \frac{1}{\kappa}(\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2) = \frac{\kappa(x_1 \mathrm{d}x_1 + x_2 \mathrm{d}x_2)^2}{1 - \kappa(x_1^2 + x_2^2)} + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2.$$

- Si $\kappa > 0$ tenemos modelos de la geometría esférica $\mathbb{S}^2$.
- Si $\kappa = 0$ tenemos dos planos, de los cuales escogemos uno, que nos da un modelo de la geometría euclidiana $\mathbb{E}^2$.
- Si $\kappa < 0$ obtenemos un hiperboloide de dos hojas, de las cuales escogemos una, que nos da un modelo del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Espacios de curvatura constante

Modelizamos los espacios de curvatura constante κ con la familia de superficies $\Sigma_\kappa \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación

$$x_0^2 + \kappa(x_1^2 + x_2^2) = 1,$$

dotadas de la estructura riemanniana

$$ds^2 = \frac{1}{\kappa}(\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2) = \frac{\kappa(x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2)^2}{1 - \kappa(x_1^2 + x_2^2)} + \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2.$$

La energía cinética tiene entonces la forma

$$T_\kappa(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{\kappa(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)^2}{2[1 - \kappa(x_1^2 + x_2^2)]} + \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

Coordenadas polares geodésicas

Definimos las *coordenadas polares geodésicas* (χ, ϕ), dadas por la relación

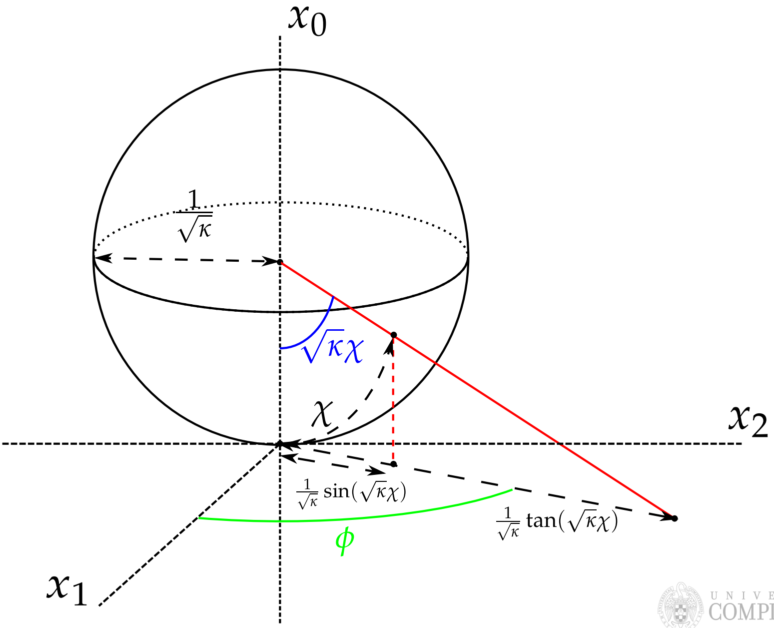
$$\begin{cases} x_1 = s_\kappa(\chi)\cos\phi, \\ x_2 = s_\kappa(\chi)\operatorname{sen}\phi, \end{cases}$$

donde s_κ es una de las *funciones trigonométricas generalizadas*

$$c_\kappa(\chi) = \begin{cases} \cos\sqrt{\kappa}\chi & \kappa > 0, \\ 1 & \kappa = 0, \\ \cosh\sqrt{-\kappa}\chi & \kappa < 0, \end{cases} \quad s_\kappa(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\operatorname{sen}\sqrt{\kappa}\chi & \kappa > 0, \\ \chi & \kappa = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\operatorname{senh}\sqrt{-\kappa}\chi & \kappa < 0. \end{cases}$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Coordenadas polares geodésicas



Coordenadas polares geodésicas

En estas coordenadas la energía cinética toma la forma

$$T_\kappa(\chi, \phi, \dot{\chi}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}(\dot{\chi}^2 + s_\kappa^2(\chi)\dot{\phi}^2).$$

Coordenadas polares geodésicas

En estas coordenadas la energía cinética toma la forma

$$T_\kappa(\chi, \phi, \dot{\chi}, \dot{\phi}) = \tfrac{1}{2}(\dot{\chi}^2 + s_\kappa^2(\chi)\dot{\phi}^2).$$

Los momentos conjugados de las coordenadas polares geodésicas vendrán dados por

$$p_\chi = \frac{\partial T_\kappa}{\partial \dot{\chi}} = \dot{\chi}$$

$$p_\phi = \frac{\partial T_\kappa}{\partial \dot{\phi}} = s_\kappa^2(\chi)\dot{\phi}.$$

Coordenadas polares geodésicas

En estas coordenadas la energía cinética toma la forma

$$T_\kappa(\chi, \phi, \dot{\chi}, \dot{\phi}) = \tfrac{1}{2}(\dot{\chi}^2 + s_\kappa^2(\chi)\dot{\phi}^2).$$

Los momentos conjugados de las coordenadas polares geodésicas vendrán dados por

$$p_\chi = \frac{\partial T_\kappa}{\partial \dot{\chi}} = \dot{\chi}$$

$$p_\phi = \frac{\partial T_\kappa}{\partial \dot{\phi}} = s_\kappa^2(\chi)\dot{\phi}.$$

Por tanto, el hamiltoniano libre es

$$H_\kappa(\chi, \phi, p_\chi, p_\phi) = \frac{1}{2}\left(p_\chi^2 + \frac{p_\phi^2}{s_\kappa^2(\chi)}\right).$$

TTW en espacios de curvatura constante

Podemos generalizar el hamiltoniano de TTW a los espacios de curvatura constante en la forma

$$H_{k,\kappa}(\chi,\phi,p_\chi,p_\phi) = \frac{1}{2}\left(p_\chi^2 + \frac{p_\phi^2}{s_\kappa^2(\chi)} + \omega^2 t_\kappa^2(\chi)\right) + V_{k,\kappa}(\chi,\phi),$$

donde $t_k = s_k/c_k$ y

$$V_{k,\kappa}(\chi,\phi) = \frac{k^2\alpha}{2s_\kappa^2(\chi)\cos^2 k\phi} + \frac{k^2\beta}{2s_\kappa^2(\chi)\operatorname{sen}^2 k\phi}.$$

TTW en espacios de curvatura constante

Podemos generalizar el hamiltoniano de TTW a los espacios de curvatura constante en la forma

$$H_{k,\kappa}(\chi,\phi,p_\chi,p_\phi)=\frac{1}{2}\left(p_\chi^2+\frac{p_\phi^2}{s_\kappa^2(\chi)}+\omega^2 t_\kappa^2(\chi)\right)+V_{k,\kappa}(\chi,\phi),$$

donde $t_k = s_k/c_k$ y

$$V_{k,\kappa}(\chi,\phi)=\frac{k^2\alpha}{2s_\kappa^2(\chi)\cos^2 k\phi}+\frac{k^2\beta}{2s_\kappa^2(\chi)\,\mathrm{sen}^2\, k\phi}.$$

Nótese que en el límite euclidiano (cuando $\kappa \to 0$), se recupera el hamiltoniano de TTW en el plano.

Referencias

- V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer Science & Business Media, 2013)
- F. Tremblay, A. V. Turbiner and P. Winternitz, An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), p. 242001
- C. Gonera, On the superintegrability of TTW model, *Phys. Lett. A* **376** (2012), pp. 2341–2343
- M. A. Rodríguez, A. Sampedro and P. Tempesta, “On classical harmonic oscillators and their generalizations”, Workshop on Nonlinear Integrable Systems. Burgos (Spain). October 20-22, 2016
- M. F. Rañada, The Tremblay–Turbiner–Winternitz system on spherical and hyperbolic spaces: superintegrability, curvature-dependent formalism and complex factorization, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), p. 165203

¿PREGUNTAS?