Sistemas superintegrables: El hamiltoniano de TTW

Guillermo Gallego Sánchez

25 de junio de 2018

Geometría simpléctica

- Una *variedad simpléctica* es un par (M, ω), donde M es una variedad diferenciable y ω es una 2-forma diferencial no degenerada y cerrada, es decir, tal que $\mathrm{d}\omega = 0$.
- El *teorema de Darboux* garantiza que localmente es posible encontrar unas coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ (llamadas *canónicas* o de Darboux) en las que la forma toma el aspecto $\omega = \sum_i \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$.
- Sea una función $F : M \to \mathbb{R}$. Se define el *campo hamiltoniano asociado a* F, como aquel campo X_F tal que $i_{X_F} F = -\mathrm{d}F$. En coordenadas canónicas el campo X_F se expresa

$$X_F = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Mecánica hamiltoniana

Un *sistema mecánico hamiltoniano* (independiente del tiempo) con n grados de libertad consiste en:

- **Estados**: Una variedad simpléctica M de dimensión $2n$. M se le suele llamar *espacio de fases*. Los puntos $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in M$ se llaman *estados* del sistema.
- **Observables**: Funciones $M \to \mathbb{R}$.
- **Evolución temporal**: Fijada una función $H : M \to \mathbb{R}$ que llamaremos *hamiltoniano del sistema*, la evolución temporal de los estados $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ vendrá dada por las curvas integrales del campo hamiltoniano X_H, es decir, siguiendo las *ecuaciones de Hamilton*

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Sistemas integrables

- Un sistema hamiltoniano con n grados de libertad se dice *completamente integrable* si admite n integrales primeras $F_1, \ldots, F_n$ independientes tales que $\{F_i, F_j\} = 0$ para cualesquiera $i, j = 1, \ldots, n$.
- En particular, como hemos supuesto que el sistema no depende del tiempo, H es una de estas integrales primeras.
- **Ejemplo**: El potencial central

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(r),$$

con las integrales primeras H, L^2 y L_z.

Teorema de Arnold-Liouville

Teorema

Sea H un sistema hamiltoniano completamente integrable con n grados de libertad y sea $F = (F_1, \dots, F_n)$ con $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ las integrales en involución del sistema. Entonces:

1. *Los conjuntos de nivel $M_a = F^{-1}(a)$ son subvariedades del espacio de fases invariantes bajo el flujo del sistema.*
2. *Si M_a es compacta y conexa entonces es difeomorfa al toro n-dimensional y se llama un toro de Liouville.*
3. *En torno a cada toro de Liouville podemos dar unas coordenadas canónicas $(\mathbf{J}, \mathbf{w})$ llamadas variables de acción-ángulo, tales que las $\mathbf{J}$ son constantes en cada toro de Liouville y las $\mathbf{w}$ son coordenadas angulares en el toro.*

Integración por cuadraturas

- Como consecuencia, las ecuaciones de Hamilton quedan

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial w_i} = -\dot{J}_i = 0, \\ \dot{w}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \nu_i(\mathbf{J}). \end{cases}$$

- Se pueden integrar por cuadraturas

$$\begin{cases} J_i(t) = J_i(0), \\ w_i(t) = w_i(0) + t\nu_i(\mathbf{J}). \end{cases}$$

- Un flujo de este tipo en el toro se llama *movimiento condicionalmente periódico*. La trayectoria es cerrada si y sólo si las frecuencias $\nu_1, \dots, \nu_n$ son conmesurables.

Variables de acción-ángulo

Fijo M_a un toro de Liouville, las variables de acción-ángulo en torno a M_a se construyen como sigue:

1. Se escogen unos ciclos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ que den una base de $H_1(M_a)$.
2. Se calculan las variables de acción
$$J_i = \oint_{\gamma_i} \mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{q}.$$
3. Se genera una transformación canónica $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{J}, \mathbf{w})$ con la función
$$S(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{J}, \mathbf{q})\mathrm{d}\mathbf{q}.$$
4. Se hallan las variables de ángulo
$$w_i = \frac{\partial S}{\partial J_i}.$$

Sistemas superintegrables

- Un sistema hamiltoniano con n grados de libertad se llama *superintegrable* si admite $n+k$ integrales primeras independientes para cierto $k = 1, \ldots, n-1$. En el caso en que $k = n-1$ el sistema se dice que es *maximalmente superintegrable*.
- En un sistema maximalmente superintegrable todas las órbitas son curvas cerradas (con movimiento periódico).
- **Ejemplos**:
  - El potencial central, con el *vector de Laplace-Runge-Lenz*

$$\mathbf{A} = \mathbf{q} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{q}}{r}.$$

  - El oscilador armónico isótropo, con el *tensor de Fradkin*

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}(p_i p_j + k q_i q_j).$$

El hamiltoniano de TTW

a