

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2018

# INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA Y LOS SISTEMAS INTEGRABLES

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM  
DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

GUILLERMO GALLEGO

**RESUMEN.** El objetivo principal de este trabajo es demostrar el teorema de Arnold-Liouville, que da una condición suficiente para saber si un *sistema mecánico hamiltoniano* es *integrable por cuadraturas*. Con este propósito, definimos y desarrollamos todos los conceptos necesarios para el estudio del teorema, dando unas nociones elementales sobre *geometría simpléctica* y su aplicación a la Mecánica Clásica.

*Palabras clave:* Geometría simpléctica, sistemas integrables, Teorema de Arnold-Liouville, flujos hamiltonianos, ecuaciones de Hamilton, derivada de Lie, campos dependientes del tiempo.

**ABSTRACT.** The main goal of this work is to prove the Arnold-Liouville theorem, which gives a sufficient condition for a *hamiltonian mechanical system* to be *integrable by quadratures*. To that end we define and develop all the concepts involved in the study of the theorem, giving some elementary notions of *symplectic geometry* and its application to Classical Mechanics.

*Keywords:* Symplectic geometry, integrable systems, Arnold-Liouville theorem, hamiltonian flows, Hamilton's equations, Lie derivative, time-dependent vector fields.

---

*Date:* **20 de febrero de 2018.**

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 37J05, 37J35, 53D05, 58A05, 70H05.

## ÍNDICE

Introducción	2
1. Motivación física. De Newton a Hamilton	3
2. Derivada de Lie	9
3. Campos y formas dependientes del tiempo	13
4. Espacios vectoriales simplécticos	15
5. Variedades simplécticas y symplectomorfismos	17
6. Campos simplécticos y campos hamiltonianos	20
7. Corchete de Poisson	21
8. Mecánica en variedades simplécticas	23
9. Simetrías y leyes de conservación	26
10. Teoría de Arnold-Liouville	29
11. Un poco más de movimiento condicionalmente periódico	45
Referencias	47

## INTRODUCCIÓN

Una *variedad simpléctica* es una variedad diferenciable de dimensión par en la que se define una forma diferencial  $\omega$  cerrada y no degenerada. La *geometría simpléctica* es el estudio de las variedades simplécticas y es interesante tanto por sus problemas fundamentales como por su aplicación a la Mecánica Clásica (y por extensión al resto de la Física). La forma  $\omega$  induce un isomorfismo entre campos y 1-formas, que nos permite obtener campos tangentes a partir de funciones definidas sobre la variedad. Las variedades simplécticas constituyen entonces una forma natural de visualizar los sistemas mecánicos ya que las *ecuaciones de Hamilton* nos permiten ver las leyes del movimiento como campos tangentes de manera intrínseca a la variedad.

Un *sistema mecánico integrable por cuadraturas* es aquel en el que las ecuaciones del movimiento pueden ser resueltas salvo el cálculo de integrales definidas (cuadraturas), de forma que el problema de estudiar el comportamiento del sistema queda (al menos numéricamente) resuelto. La *teoría de Arnold-Liouville* nos ofrece una forma de saber si un sistema mecánico es integrable por cuadraturas mediante el estudio de la variedad simpléctica que lleva asociado. Tras un desarrollo previo de algunos prerrequisitos de geometría diferencial como son la *derivada de Lie* y los *campos dependientes del tiempo*, y tras afianzar algunos conceptos del álgebra lineal de los *espacios vectoriales simplécticos* (espacios vectoriales en los que se define una forma cuadrática antisimétrica y no degenerada), nos concentramos en el estudio de la geometría simpléctica, para acabar probando los teoremas fundamentales que componen la teoría de Arnold-Liouville.

## 1. MOTIVACIÓN FÍSICA. DE NEWTON A HAMILTON

La forma más sencilla de describir el movimiento de un sistema de partículas es mediante el formalismo newtoniano, tomando como postulado fundamental de la mecánica clásica el *principio de determinación*: conocidas en cierto instante las posiciones y las velocidades iniciales de todas las partículas que conforman el sistema, es posible determinar sus posiciones y velocidades en cualquier otro instante.

Matemáticamente, este principio se traduce en la existencia de una función<sup>1</sup>, conocida como *fuerza*,  $F : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que cumple la llamada *ecuación de Newton*<sup>2</sup>:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t; \alpha),$$

donde  $n$  es el número de partículas,  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$  es la trayectoria del sistema<sup>3</sup> y  $\alpha$  son unos ciertos parámetros de los que puede depender  $F$ , como por ejemplo las masas o las cargas eléctricas de las diferentes partículas. Para cada sistema concreto, la fuerza se determina experimentalmente. Desde un punto de vista matemático, decimos que la fuerza define un *sistema mecánico newtoniano*. En general, cuando hablemos de los distintos tipos de sistema mecánico, llamaremos a sus ecuaciones diferenciales asociadas (Newton, Euler-Lagrange, Hamilton) *ecuaciones del movimiento* o *dinámica del sistema*.

El formalismo newtoniano ofrece una forma muy simple de entender los sistemas mecánicos pero tiene la complicación de que es necesario medir y calcular las tres componentes de la posición y de la velocidad de cada partícula que conforma el sistema. Por verlo con un ejemplo, si queremos describir el movimiento de un barco en un viaje transatlántico deberíamos tomar una referencia cartesiana (tal vez el centro de la Tierra y tres ejes perpendiculares) y describir su posición y velocidad en  $\mathbb{R}^3$  en términos de esta referencia, cuando lo que parece más sencillo es simplemente entender el barco como una partícula moviéndose en la superficie de  $\mathbb{S}^2$  y dar su posición y velocidad en términos de su latitud y longitud. Otro ejemplo lo podemos ver si consideramos el movimiento de una peonza. En este caso, aunque la peonza esté compuesta de cuatrillones de partículas, es posible describir su posición sólo con tres ángulos (el de giro respecto a su eje y los dos de orientación de su eje), o equivalentemente, con la rotación de sus ejes propios respecto a los de una referencia inmóvil exterior (un *sistema de laboratorio*), es decir, con un elemento de  $\text{SO}(3)$ .

De forma más general, podemos considerar sistemas newtonianos sometidos a *ligaduras* entre las partículas que lo conforman. Las posibilidades de movimiento quedan entonces restringidas a un subconjunto de  $\mathbb{R}^{3n}$ . En el caso de que estas ligaduras sean «lo suficientemente buenas» (*holónomas* es el término clásicamente usado en mecánica), es posible entenderlas como unas funciones  $f_1, \dots, f_r : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ , independientes en todo  $x \in \mathbb{R}^{3n}$

<sup>1</sup>A lo largo del texto sólo consideraremos funciones diferenciables ( $\mathcal{C}^\infty$  si es necesario), no lo especificaremos en lo que sigue.

<sup>2</sup>Esta ecuación es una forma peculiar de la conocida *segunda ley de Newton*:  $F = ma$ .

<sup>3</sup>A lo largo del texto utilizaremos la notación usual en Física por la que un punto encima de una función dependiente del tiempo indica la derivada temporal:  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ . En particular el punto indica que debe existir esa dependencia respecto del tiempo.

$(d_x f_1 \wedge \cdots \wedge d_x f_r \neq 0)$ , tales que

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x) = 0. \end{cases}$$

Por el teorema de la función implícita, las ligaduras definen una subvariedad regular  $M \subset \mathbb{R}^{3n}$  de dimensión  $m = 3n - r$ . En Física, a esta  $M$  se le suele llamar *espacio de configuración* del sistema y a  $m$  su número de *grados de libertad*. Así, llegamos al formalismo lagrangiano.

Un *sistema lagrangiano* viene dado por una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $m$ . Si  $(U, q)$  es una carta en  $M$ , las coordenadas  $q = (q_1, \dots, q_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  suelen llamarse en Física *coordenadas generalizadas* del sistema. Dados  $x \in M$  y  $v \in T_x M$ , las coordenadas de  $v$  suelen denotarse  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$  y suelen llamarse *velocidades generalizadas* del sistema. Esto significa en realidad que, en la carta  $(U, q)$ ,  $v = \sum_{i=1}^m \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ . Como no hay  $t$  respecto de la que derivar, es sólo una notación, pero es consistente. Si  $v = \dot{x}(t)$  tenemos

$$\dot{q}_i = dq_{i,x(t)}(v) = \frac{d}{dt}(q_i \circ x)(t).$$

Un *estado* del sistema lagrangiano vendrá dado por un punto  $(x, v) \in TM$ , donde  $x$  es la posición y  $v$  la velocidad del sistema en dicho estado, y una *trayectoria* del sistema vendrá dada por una aplicación

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto (x(t), \dot{x}(t)). \end{aligned}$$

Vemos que esta trayectoria está asociada a una curva  $x : \mathbb{R} \rightarrow M$  en el espacio de configuración, que podemos entender como la descripción de las posiciones de las partículas a lo largo del tiempo, mientras que  $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  describe sus velocidades.

La dinámica del sistema lagrangiano viene dada por lo que se conoce como el *principio de mínima acción*. Este principio puede deducirse a partir del formalismo newtoniano, imponiendo ciertas condiciones a las fuerzas y a partir del *principio de D'Alembert* (o de *los trabajos virtuales*), como puede leerse en [6]. Sin embargo, aquí le daremos un enfoque distinto, postulando directamente el principio de mínima acción, al estilo de Landau y Lifshitz [8]:

«La formulación más general de la ley del movimiento de los sistemas mecánicos es el *principio de mínima acción* (o *principio de Hamilton*).»

En primer lugar, el principio de mínima acción afirma que todo sistema mecánico viene caracterizado por una función  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada *lagrangiano* del sistema. Ahora, suponiendo que en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  el sistema ocupa los estados  $(x_1, v_1)$  y  $(x_2, v_2)$ , la trayectoria que describirá el sistema entre los dos estados será aquella que minimice (o más precisamente, que haga extremal) la integral

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t)).$$

Este funcional  $S$  se conoce como la *acción* del sistema.

Utilizando técnicas de cálculo variacional [1], es posible obtener unas ecuaciones diferenciales para las trayectorias que hacen extremales funcionales de la forma de  $S$ . Las soluciones de estas ecuaciones son las trayectorias «reales» del sistema lagrangiano. Tenemos así las *ecuaciones de Euler-Lagrange*, que en coordenadas locales se expresan:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] (t) = 0,$$

para  $i = 1, \dots, m$ .

\* \* \*

Dado un sistema newtoniano  $F : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ , se define la *energía cinética* como una aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{3n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2} \langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

Decimos que el sistema es *conservativo* o, equivalentemente que  $F$  es una *fuerza conservativa* si ésta sólo depende de la posición y además es un campo gradiente, es decir, si existe una función  $V : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla  $F(x) = -\nabla V(x)$ . Esta  $V$  toma el nombre de *energía potencial*. En un sistema newtoniano conservativo podemos ver la ecuación de Newton en la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_i} \Big|_{\dot{x}(t)} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big|_{x(t)}, \quad i = 1, \dots, 3n.$$

Ahora, escribiendo la función  $L(x, v) = T(v) - V(x)$ , tenemos

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right]_{(x(t), \dot{x}(t))} = 0, \quad i = 1, \dots, 3n.$$

Así, podemos ver cualquier sistema newtoniano conservativo como un sistema lagrangiano con  $M = \mathbb{R}^{3n}$  y  $L = T - V$ .

En el caso de una variedad diferenciable cualquiera, debemos tener en cuenta que el producto escalar  $\langle u, v \rangle$  deberá ser sustituido por una métrica riemanniana  $g$ . Recordamos que una *métrica riemanniana* en una variedad diferenciable  $M$  se define como una colección de productos escalares

$$g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in M,$$

que satisface la siguiente condición de *diferenciabilidad*: para cada par  $X, Y$  de campos tangentes diferenciables de  $M$  la función

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_x(X_x, Y_x) \end{aligned}$$

es diferenciable. Se llama *variedad riemanniana* a un par  $(M, g)$ , donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $g$  una métrica riemanniana en  $M$ .

Definimos entonces un sistema lagrangiano *natural*, como un par  $((M, g), L)$ , donde  $(M, g)$  es una variedad riemanniana y  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  es de la forma  $L = T - V$ , con  $T : TM \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v)$  y  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función<sup>4</sup>.

\* \* \*

Es una técnica común a la hora de estudiar ecuaciones diferenciales de orden 2

$$f''(x) = F(x, f, f'),$$

realizar un cambio de la forma

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = F(x, f, g), \end{cases}$$

lo que convierte la ecuación original de orden 2 en un sistema de dos ecuaciones de orden 1. Esto ofrece una serie de ventajas prácticas y fundamentales, ya que nos permite ver la ecuación diferencial como un campo y su solución como el flujo correspondiente. La misma idea se puede aplicar para estudiar sistemas lagrangianos.

Sea  $((M, g), L)$  un sistema natural. En  $TM$  tenemos las coordenadas  $(q, \dot{q})$ , pero podemos definir otras usando la dualidad asociada a la métrica riemanniana  $g$ , es decir, el isomorfismo de Riesz:

$$\begin{aligned} T_x M &\longrightarrow T_x M^* \\ v &\longmapsto g_x(v, \bullet). \end{aligned}$$

En efecto, las formas

$$p_i = g_x \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}, \bullet \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

que se llaman *momentos canónicos conjugados* o simplemente *momentos*, son independientes y forman una base de  $T_x M^*$ , de modo que  $p = (p_1, \dots, p_m)$  son coordenadas en  $T_x M$ . Explícitamente

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_i \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \right) dq_j = \sum_{j=1}^m g_{ij} dq_j,$$

es decir,  $p_i(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(q) \dot{q}_j$ , donde  $g_{ij}(q)$  son las componentes de la matriz asociada a  $g_x$  en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right\}$ . Por tanto

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} p(q, \dot{q}) = g_{ji}(q).$$

Así,  $(q, p)$  son unas nuevas coordenadas en  $TM$ . Ahora, si recordamos que

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \dot{q}_i g_{ij}(q) \dot{q}_j - V(q),$$

resulta que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^m g_{ij}(q) \dot{q}_j = p_i(q, \dot{q}).$$

---

<sup>4</sup>Aunque  $V(x)$  está definida en  $M$ , la expresión  $L = T - V$  tiene sentido si entendemos  $V$  como una función definida en  $TM$  con  $V(x, v) = V(x)$ .

Consideramos ahora una función  $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , que en las coordenadas  $(q, \dot{q})$  es

$$H(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^m p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}),$$

con las  $p$  dadas en función de las  $\dot{q}$  mediante la relación  $p_i(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(q) \dot{q}_j$ . Derivando a ambos lados de la expresión respecto de  $\dot{q}_j$  obtenemos

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_i + p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

que nos lleva a

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}_i \right) g_{ij} = 0.$$

Como la matriz  $(g_{ij})_{i,j}$  es regular,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i.$$

Si derivamos respecto de  $q_j$  tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Finalmente, usando la relación recién obtenida,

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = - \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Para ver cómo será la dinámica del sistema en estas coordenadas, consideramos una trayectoria  $(x(t), \dot{x}(t))$ , que en las nuevas coordenadas se expresa  $(q(t), p(t))$ , con  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t))$  y  $p_i(t) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(q(t)) \dot{q}_j(t)$ . Nótese que aquí el punto sí expresa derivación respecto del tiempo, es decir, que las  $p$  dependen de las  $q$ . En este caso, por la ecuación de Euler-Lagrange, la segunda de las relaciones anteriores queda:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}(t) = - \frac{\partial L}{\partial q_j}(t) = - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)(t) = - \frac{d}{dt} p_j(t) = - \dot{p}_j(t).$$

Obtenemos entonces un sistema de EDOs de orden 1 equivalentes a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t) \\ \dot{p}_i(t) &= - \frac{\partial H}{\partial q_i}(t), \end{cases} \quad (1)$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Estas son las *ecuaciones de Hamilton*.

Si queremos dotar de sentido físico a esta función  $H$ , conocida como *hamiltoniano* del sistema, consideremos un sistema natural con lagrangiano  $L = T - V$ . Entonces  $p_i = \sum_{j=1}^m g_{ij}(q) \dot{q}_j$  y  $T(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^m \frac{1}{2} \dot{q}_i g_{ij}(q) \dot{q}_j$ , por tanto

$$H(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^m p_i(q, \dot{q}) \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^m (g_{ij} \dot{q}_j) \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \dot{q}_i g_{ij} \dot{q}_j + V(q) = T(q, \dot{q}) + V(q),$$

Es decir, el hamiltoniano es exactamente  $T + V$ , la *energía total* del sistema.

De esta forma, podemos entender la dinámica de un sistema lagrangiano como la definición de un campo tangente al fibrado tangente del espacio de configuración, cuyas curvas integrales contendrán toda la información sobre la evolución temporal del sistema. En coordenadas locales este campo tangente se expresa

$$X = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

\* \* \*

La siguiente pregunta que cabe hacerse es si será posible construir este campo de forma independiente de las coordenadas a partir de la especificación de un hamiltoniano  $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$ . La construcción es sencilla, basta considerar un punto  $\zeta \in TM$ , con coordenadas  $(q, p)$  y la 1-forma  $\alpha$  que localmente se expresa

$$\alpha = \sum_{i=1}^m p_i dq_i.$$

Entonces, la 2-forma

$$\omega = d\alpha = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i,$$

es cerrada (porque es exacta) y no degenerada.

Usando esta forma se puede construir un isomorfismo lineal, dado  $\zeta \in TM$ ,

$$\begin{aligned} T_\zeta(TM) &\longrightarrow (T_\zeta(TM))^* \\ \xi &\longmapsto \omega(\xi, \bullet). \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora, si  $X^H$  es el campo asociado a  $dH$  por este isomorfismo, es decir, tal que  $dH = \omega(X^H, \bullet)$ , es fácil comprobar que en coordenadas locales se expresará tal y como queríamos:

$$X^H = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

En efecto, si  $X^H = \sum_{i=1}^m \left( a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$ ,

$$\begin{aligned} a_i &= \omega \left( X^H, \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = dH \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -b_i &= \omega \left( X^H, \frac{\partial}{\partial q_i} \right) = dH \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

ya que  $dH = \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$ .

Obsérvese que el único elemento realmente crucial en la construcción de este campo ha sido la 2-forma  $\omega$ . Una forma de esas características induce sobre  $TM$  la estructura de *variedad simpléctica*. El estudio de las variedades simplécticas y sus propiedades es la *geometría simpléctica*. A partir de la sección 4, introduciremos el formalismo de la geometría simpléctica, lo que nos permitirá enunciar la *formulación canónica* de la mecánica clásica y resolver alguno de sus problemas.



## 2. DERIVADA DE LIE

Antes de comenzar con el estudio de la geometría simpléctica, conviene recordar el concepto de la derivada de Lie de campos, extenderlo a formas, y obtener una serie de resultados que nos serán útiles más adelante.

Empecemos recordando la definición del corchete de Lie de campos, su estudio detallado puede encontrarse en [5].

**Definición 2.1** (Corchete de Lie). Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\mathfrak{X}(M)$  el conjunto de los campos diferenciables en  $M$ , se define el *corchete de Lie* como la aplicación

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \end{aligned}$$

donde la composición se entiende si vemos los campos como aplicaciones  $\mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Recordamos también que podemos ver el corchete de Lie de otra forma equivalente. Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $a \in M$ ,  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\varphi$  un flujo en  $M$  y  $X$  su generador infinitesimal. Entonces

$$[X, Y]_a = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{-t,*}(Y_{\varphi_t(a)}) - Y_a}{t}.$$

En vista de esta fórmula, se define la *derivada de Lie de  $Y$  respecto de  $X$*  como  $L_X Y = [X, Y]$ . Por último, recordamos otro resultado muy importante que usaremos posterior-

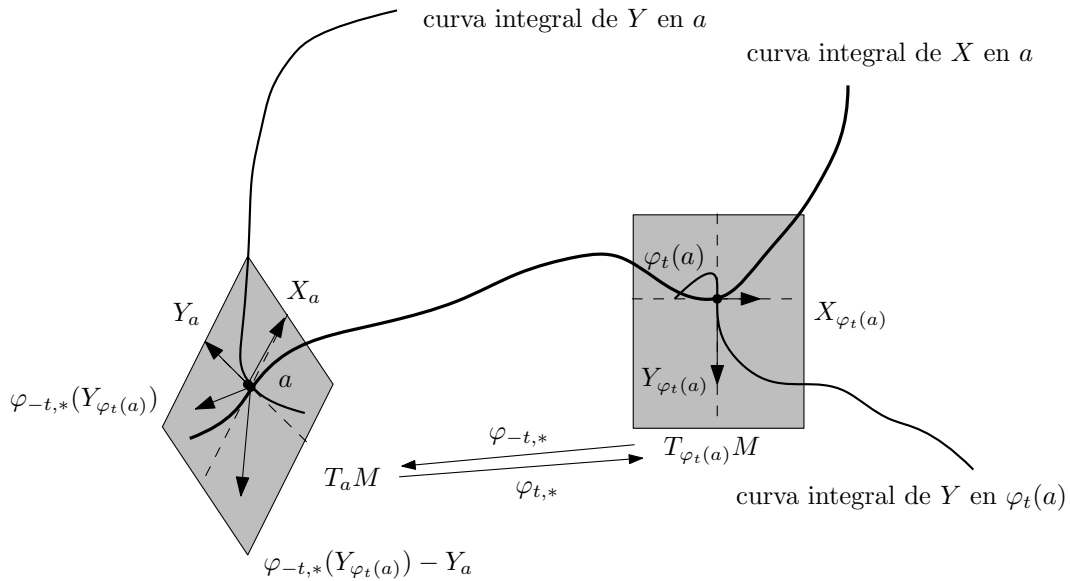


FIGURA 1. Visión geométrica de la derivada de Lie

mente:

**Proposición 2.2.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, sean  $\varphi, \psi$  flujos en  $M$  y sean  $X, Y$  sus generadores infinitesimales, respectivamente. Entonces los flujos conmutan si y sólo si lo hacen sus generadores infinitesimales (es decir,  $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$  si y sólo si  $[X, Y] = 0$ ).

Ya estamos en disposición de dar una definición más general de la derivada de Lie:

**Definición 2.3** (Derivada de Lie). Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $X$  un campo en  $M$ , y  $\varphi$  su flujo. Se define la *derivada de Lie respecto de  $X$*  como la aplicación

$$\begin{aligned} L_X : \Gamma^r(M) &\longrightarrow \Gamma^r(M) \\ \omega &\longmapsto L_X \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega - \omega}{t} \end{aligned}$$

(es decir,  $(L_X \omega)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega_{\varphi_t(x)} - \omega_x}{t}$  para  $x \in M$ ).

Vamos a obtener ahora un par de propiedades de la derivada de Lie.

**Proposición 2.4.** Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $\omega \in \Gamma^r(M)$ ,  $X, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ , se cumple

$$L_X \omega(X_1, \dots, X_r) = X \omega(X_1, \dots, X_r) - \sum_{i=1}^r \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r)$$

*Demostración.* Vamos a probarlo sólo para el caso en el que  $\omega$  es una 2-forma para simplificar su lectura. El cálculo general es completamente análogo. En primer lugar,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\varphi_t^* \omega)(X_1, X_2) - \omega(X_1, X_2)] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} [(\varphi_t^* \omega)(X_1, X_2) - \varphi_t^*(\omega(X_1, X_2))] \right] \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} [\varphi_t^*(\omega(X_1, X_2)) - \omega(X_1, X_2)] \right]. \end{aligned}$$

El segundo término de esta expresión es exactamente

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} [\varphi_t^*(\omega(X_1, X_2)) - \omega(X_1, X_2)] \right] = \left( \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \varphi_t \right) (\omega(X_1, X_2)) = X \omega(X_1, X_2),$$

mientras que el primer término, en  $x \in M$  es

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} [(\varphi_t^* \omega)(X_1, X_2) - \varphi_t^*(\omega(X_1, X_2))] \right] \bigg|_x \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\omega_{\varphi_t(x)}(d_x \varphi_t(X_{1,x}), d_x \varphi_t(X_{2,x})) - \omega_{\varphi_t(x)}(X_{1,\varphi_t(x)}, X_{2,\varphi_t(x)})] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \omega_{\varphi_t(x)} \left[ \frac{1}{t} (d_x \varphi_t(X_{1,x}) - X_{1,\varphi_t(x)}), d_x \varphi_t(X_{2,x}) \right] + \lim_{t \rightarrow 0} \omega_{\varphi_t(x)} \left[ X_{1,\varphi_t(x)}, \frac{1}{t} (d_x \varphi_t(X_{2,x}) - X_{2,\varphi_t(x)}) \right] \\ &= -\omega_x([X, X_1]_x, X_{2,x}) - \omega_x(X_{1,x}, [X, X_2]_x). \end{aligned}$$

Comprobemos que, en efecto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d_x \varphi_t(X_{1,x}) - X_{1,\varphi_t(x)}) = [X, X_1]_x,$$

y es análogo para  $[X, X_2]_x$ . Basta «sacar factor común» a  $d_x \varphi_t$ , de modo que

$$\frac{1}{t} (d_x \varphi_t(X_{1,x}) - X_{1,\varphi_t(x)}) = -d_x \varphi_t \left( \frac{(d_x \varphi_t)^{-1}(X_{1,\varphi_t(x)}) - X_{1,x}}{t} \right).$$

Ahora,  $(d_x \varphi_t)^{-1} = d_{\varphi_t(x)} \varphi_{-t} = \varphi_{-t,*}$  y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi_{-t,*}(X_{1,\varphi_t(x)}) - X_{1,x}) = [X, X_1]_x.$$

Volviendo a agrupar, tenemos lo que se quería demostrar.  $\square$

**Proposición 2.5.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\alpha \in \Gamma^r(M)$ . Se cumple*

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} X_i \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}), \end{aligned}$$

donde el circunflejo en un campo quiere decir que este campo se omite.

*Demostración.* En este caso probaremos solo la identidad más sencilla

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]),$$

válida para el caso en el que  $\alpha$  es de grado 1. El caso general es completamente análogo.

En primer lugar, escribimos todo en coordenadas locales:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_i \alpha_i dx_i, \quad d\alpha = \sum_{i,j} d\alpha_i \wedge dx_j = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j, \\ X &= \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad [X, Y] = \sum_{i,j} \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Ahora, operando en estas coordenadas:

$$\begin{aligned} \alpha(X) &= \sum_i \alpha_i X_i, \quad d\alpha(X, Y) = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} (X_j Y_i - X_i Y_j), \\ \alpha([X, Y]) &= \sum_{i,j} \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \alpha_j = \sum_{i,j} \alpha_i X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \sum_{i,j} \alpha_i Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \\ X(\alpha Y) &= \sum_{i,j} \alpha_i X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} + Y_i X_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}, \quad Y(\alpha X) = \sum_{i,j} \alpha_i Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + X_i Y_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$X(\alpha(Y)) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]) = \sum_{i,j} Y_i X_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} - X_i Y_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = d\alpha(X, Y).$$

$\square$

Antes de seguir, vamos a introducir una nueva operación para formas:

**Definición 2.6** (Producto interior). Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X$  un campo en  $M$ , se define el *producto interior*  $i_X : \Gamma^{r+1}(M) \rightarrow \Gamma^r(M)$  por

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(X, X_1, \dots, X_r),$$

para  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ .

Podemos probar ya una serie de fórmulas, debidas a Élie Cartan<sup>5</sup>, que nos serán de gran utilidad posteriormente.

**Teorema 2.7** (Fórmulas de Cartan). *Sea  $X$  un campo en una variedad  $M$ , y consideramos la derivada de Lie  $L_X$ , el producto interior  $i_X$ , y la diferencial exterior  $d$ . Entonces se cumplen las siguientes fórmulas:*

1.  $i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$ , para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,
2.  $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$  y
3.  $L_X \circ d = d \circ L_X$ .

*Demostración.*

1. Sean  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces

$$\begin{aligned} L_X[(i_Y \omega)(X_1, \dots, X_r)] &= X\omega(Y, X_1, \dots, X_r) - \sum_{i=1}^r \omega(Y, X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r), \\ i_Y[(L_X \omega)(X_1, \dots, X_r)] &= X\omega(Y, X_1, \dots, X_r) - \sum_{i=1}^r \omega(Y, X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r) \\ &\quad - \omega([X, Y], X_1, \dots, X_r). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]} \omega(X_1, \dots, X_r) &= \omega([X, Y], X_1, \dots, X_r) \\ &= L_X[(i_Y \omega)(X_1, \dots, X_r)] - i_Y[(L_X \omega)(X_1, \dots, X_r)]. \end{aligned}$$

2. Usando la relación entre el corchete de Lie y la diferencial exterior que obtuvimos antes, tenemos

$$\begin{aligned} (d(i_X \alpha))(X_1, \dots, X_r) &= \sum_i (-1)^{i-1} X_i \alpha(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(X, [X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (i_X(d\alpha))(X_1, \dots, X_r) &= \sum_i (-1)^i X_i \alpha(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \alpha(X, [X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r) \\ &\quad + X \alpha(X_1, \dots, X_r) + \sum_j (-1)^j \alpha([X, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r). \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>En la literatura, la segunda de estas fórmulas suele llamarse «fórmula mágica de Cartan».

Sumando ambas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} (di_X\alpha + i_Xd\alpha)(X_1, \dots, X_r) &= X\alpha(X_1, \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_j (-1)^j (-1)^{j-1} \alpha(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_r) \\ &= X\alpha(X_1, \dots, X_r) - \sum_j \alpha(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_r). \end{aligned}$$

3. Utilizando (2) y que  $d \circ d = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} L_X \circ d &= (i_X \circ d) \circ d + (d \circ i_X) \circ d = d \circ i_X \circ d, \\ d \circ L_X &= d \circ (i_X \circ d) + d \circ (d \circ i_X) = d \circ i_X \circ d, \end{aligned}$$

luego  $L_X \circ d = d \circ L_X$ .

□

### 3. CAMPOS Y FORMAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

**Definición 3.1** (Campos y formas dependientes del tiempo). Sea  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y  $M$  una variedad diferenciable:

1. Un *campo tangente (diferenciable) dependiente del tiempo* de  $M$  es una aplicación

$$\begin{aligned} X : M \times J &\longrightarrow TM \\ (x, t) &\longmapsto (x, X_{t,x}) \end{aligned}$$

que es diferenciable como aplicación entre variedades.

2. Una *forma diferencial (diferenciable) de grado  $r$  dependiente del tiempo* de  $M$  es una aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : M \times J &\longrightarrow \Lambda^r(M) \\ (x, t) &\longmapsto (x, \alpha_{t,x}) \end{aligned}$$

tal que la función

$$\begin{aligned} \alpha(X_1, \dots, X_r) : M \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \alpha_{t,x}(X_{1,x}^t, \dots, X_{r,x}^t) \end{aligned}$$

es diferenciable para cualesquiera  $r$  campos  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Observación 3.2.** Un campo y una forma dependientes del tiempo se expresan en una carta  $(U, \mathbf{x})$  en la forma

$$\begin{aligned} X_{t,x} &= \sum X_i(x, t) \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_x \\ \alpha_{t,x} &= \sum \alpha_i(x, t) d\mathbf{x}_i|_x. \end{aligned}$$

La diferenciabilidad de  $X$  y  $\alpha$  es equivalente a la de sus componentes  $X_i, \alpha_i$  como funciones  $U \times J \rightarrow \mathbb{R}$ .

Tiene sentido decir ahora qué entendemos por derivar una forma respecto al tiempo. Sea  $\alpha_t$  una  $r$ -forma dependiente del tiempo, la *derivada temporal* de  $\alpha_t$  es

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \alpha_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_{t_0+h} - \alpha_{t_0}}{h}.$$

El siguiente teorema nos permite integrar campos dependientes del tiempo:

**Teorema 3.3.** *Sea  $X : J \times M \rightarrow TM$  un campo dependiente del tiempo. Existen un abierto  $V \subset J \times J \times M$  y una función  $\varphi : V \rightarrow M$  tal que para cada  $s \in J$  y para cada  $x \in M$ , el conjunto  $V^{(s,x)} = \{t \in J \mid (t, s, x) \in V\}$  es un intervalo abierto que contiene a  $s$  y la curva  $\gamma : V^{(s,x)} \rightarrow M$  definida por  $\gamma(t) = \varphi(t, s, x)$  es la única solución maximal al problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \gamma'(t) &= X_{t,\gamma(t)}, \\ \gamma(s) &= x. \end{cases}$$

Equivalentemente, podemos ver el problema de valor inicial en la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s, x) &= X_{t,\varphi(t,s,x)}, \\ \varphi(s, s, x) &= x. \end{cases}$$

Esta  $\varphi$  recibe el nombre de *flujo dependiente del tiempo*. Nótese que cada  $\varphi(t, s, \bullet)$  es una aplicación diferenciable de un abierto de  $M$  en  $M$ , pero no tiene por qué ser un difeomorfismo, es decir, en general el flujo no es completo.

Ahora podemos generalizar la derivada de Lie de formas para campos dependientes del tiempo:

$$L_{X_t} \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h,t}^* \alpha - \alpha}{h},$$

para  $x \in M$ .

Finalmente, tenemos una fórmula que nos relaciona la derivada temporal con la derivada de Lie de formas.

**Proposición 3.4.** *Sea  $X : J \times M \rightarrow TM$  un campo dependiente del tiempo y  $\varphi : V \rightarrow M$  el flujo dependiente del tiempo asociado. Si  $\alpha_t$  es una  $r$ -forma dependiente del tiempo, entonces para cualquier  $(t_1, t_0, x) \in V$*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} (\varphi_{t,t_0}^* \alpha_t)_x = \left( \varphi_{t_1,t_0}^* \left( L_{X_{t_1}} \alpha_{t_1} + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} \alpha_t \right) \right)_x,$$

donde  $\varphi_{t,s} = \varphi(t, s, \bullet)$ .

Podemos ver esta fórmula en una notación más compacta:

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha_t = \varphi_t^* \left( L_{X_t} \alpha_t + \frac{d}{dt} \alpha_t \right).$$

*Demostración.* En primer lugar, probaremos una forma más sencilla, en la que  $\alpha$  no depende del tiempo,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} (\varphi_{t,t_0}^* \alpha) = \varphi_{t_1,t_0}^* (L_{X_{t_1}} \alpha).$$

En efecto

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} (\varphi_{t,t_0} \alpha) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t_1+h,t_0}^* \alpha - \varphi_{t_1,t_0}^* \alpha}{h} = \varphi_{t_1,t_0}^* \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t_1+h,t_1} \alpha - \alpha}{h} \right) = \varphi_{t_1,t_0}^* (L_{X_{t_1}} \alpha).$$

Probemos ahora la fórmula general. Tomando un  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño, consideremos la aplicación  $F : (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \times (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \rightarrow \Gamma^k(T_x M)$  definida por

$$F(u, v) = (\varphi_{u,t_0}^* \alpha_v)_x.$$

Ahora, por la regla de la cadena

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} F(t, t) = \frac{\partial F}{\partial u}(t_1, t_1) + \frac{\partial F}{\partial v}(t_1, t_1) = (\varphi_{t_1,t_0}^* (L_{X_{t_1}} \alpha_{t_1}))_x + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} (\varphi_{t_1,t_0}^* \alpha_t)_x.$$

«Sacando factor común» a  $\varphi_{t_1,t_0}^*$ , obtenemos lo que queríamos probar.  $\square$

#### 4. ESPACIOS VECTORIALES SIMPLÉCTICOS

En esta sección repasamos algunos conceptos de álgebra lineal necesarios para estudiar geometría simpléctica. Introduciremos la noción de *espacio vectorial simpléctico* y veremos algunas de sus propiedades. Muchos de los resultados aquí expuestos pueden leerse más desarrollados en [4].

**Definición 4.1** (Espacio vectorial simpléctico). Un *espacio vectorial simpléctico* es un par ordenado  $(V, \omega)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

es una forma bilineal antisimétrica no degenerada.

##### Clasificación de formas bilineales antisimétricas.

1. Sean  $\omega$  una forma bilineal antisimétrica sobre un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita y  $M$  su matriz asociada. Entonces existe  $n \leq \frac{1}{2} \dim(V)$  tal que  $M$  es congruente con

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad  $n \times n$ .

2. Si  $(V, \omega)$  es un espacio vectorial simpléctico de dimensión finita, entonces  $\dim(V) = 2n$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico. Se dice que  $\mathcal{B} \subset V$  es una *base simpléctica* de  $V$  si la matriz asociada a  $\omega$  en  $\mathcal{B}$  es

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Podemos ver la forma bilineal  $\omega$  de matriz asociada  $J_n$  como una 2-forma alternada en  $V$ . Si  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$  es una base simpléctica y  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n\}$  es su base dual, entonces

$$\omega = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} (-1)^\sigma (\psi_i \otimes \varphi_i)^\sigma \right) = \sum_{i=1}^n \psi_i \wedge \varphi_i.$$

5. Llamaremos *n-ésima forma simpléctica estándar* a la forma  $\Omega_n : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  de matriz asociada  $J_n$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Llamaremos *espacio simpléctico estándar 2n-dimensional* a  $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_n)$ . Deducimos también de lo anterior que todo espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$  es isomorfo a  $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_n)$ .

### Aplicaciones simplécticas.

Sean  $(V, \omega)$  y  $(V', \omega')$  espacios vectoriales simplécticos, decimos que una aplicación lineal  $f : V \rightarrow V'$  es *simpléctica* si

$$\omega'(f(v), f(w)) = \omega(v, w)$$

para cualesquiera  $v, w \in V$ .

Ahora, si  $w \neq 0$  y  $f(v) = 0$ , entonces  $\omega(v, w) = 0$  y, como  $\omega$  es no degenerada,  $v = 0$ , de modo que  $\ker f = \{0\}$ . Es decir, toda aplicación simpléctica es inyectiva.

En el caso en que  $V$  y  $V'$  tienen la misma dimensión, entonces  $f$  es un isomorfismo que lleva una base simpléctica de  $(V, \omega)$  a una base simpléctica de  $(V', \omega')$ .

### El grupo simpléctico.

Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$ . El conjunto de las aplicaciones lineales simplécticas de  $V$  en  $V$  es un subgrupo de  $\text{GL}(2n)$ . Este grupo se conoce como *n-ésimo grupo simpléctico* y se denota por  $\text{Sp}(n)$ .

Asignando a cada  $f \in \text{Sp}(n)$  su matriz asociada  $A$  en cierta base, el grupo simpléctico se puede representar por medio de las matrices  $2n \times 2n$  que cumplen

$$J_n = A^t J_n A.$$

Estas matrices se dicen *matrices simplécticas*. De aquí deducimos inmediatamente, por un razonamiento análogo al que haríamos para matrices ortogonales, que todas las matrices simplécticas tienen determinante 1 o  $-1$ . Sin embargo, podemos probar un resultado aún más fuerte sobre el grupo simpléctico: su *subgrupo especial* (es decir, el subgrupo de las aplicaciones de determinante 1) coincide con él mismo.

**Proposición 4.2.** *Toda aplicación lineal simpléctica tiene determinante 1.*

*Demostración.* Sea  $\Omega_n$  la forma simpléctica canónica,  $\Lambda = \Omega_n \wedge \dots \wedge \Omega_n$  es una forma de grado máximo, luego, por el teorema del determinante,  $f^*(\Lambda) = \det(f)\Lambda$ . Ahora, como  $f$  es simpléctica,

$$f^*(\Lambda) = (\Omega_n \circ f) \wedge \dots \wedge (\Omega_n \circ f) = \Omega_n \wedge \dots \wedge \Omega_n = \Lambda.$$

Por tanto,  $\det(f) = 1$ . □



## 5. VARIEDADES SIMPLÉCTICAS Y SIMPLECTOMORFISMOS

Una vez repasados los conceptos básicos de la geometría lineal simpléctica, estamos preparados para entender lo que son las *variedades simplécticas* y estudiar las propiedades que exhiben.

**Definición 5.1.** Una *variedad simpléctica* es un par ordenado  $(M, \omega)$  donde  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $2n$  y  $\omega \in \Gamma^2(M)$  es cerrada y no degenerada (para todo  $x \in M$ ,  $\omega_x$  es no degenerada).

De la propia definición de variedad simpléctica podemos ya deducir unas cuantas restricciones para lo que puede y lo que no puede ser una variedad simpléctica. En primer lugar, claramente todas tienen que tener dimensión par, ya que lo hemos impuesto por definición, aunque venía motivado del hecho de que solo en dimensión par podemos tener matrices antisimétricas no degeneradas. Veamos entonces un primer ejemplo de variedad simpléctica, a parte del ya estudiado espacio simpléctico estándar al que trivialmente se le puede dotar de la estructura de variedad simpléctica.

**Ejemplo 5.2.** Podemos dar un ejemplo de variedad simpléctica si consideramos la esfera  $\mathbb{S}^2$  y su 2-forma diferencial  $\omega$  nunca nula que sabemos que tiene por ser orientable.

Vamos a obtener ahora algunas condiciones que tienen que cumplir las variedades simplécticas que se deducen directamente de la definición.

**Proposición 5.3.** *Toda variedad simpléctica es orientable.*

*Demostración.* Como  $\omega$  es no degenerada,  $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$  es una forma de grado máximo nunca nula, luego la variedad es orientable.  $\square$

A esta  $\omega^n$  se le suele llamar *volumen de Liouville* de  $M$  ya que, aunque aquí no lo desarrollemos, está relacionada con el elemento de volumen en  $M$  si definieramos en ésta una estructura riemanniana.

**Proposición 5.4.** *Si  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica compacta y sin borde, entonces su segundo grupo de cohomología de de Rham  $H^2(M)$  es no trivial:  $\omega$  no es exacta.*

*Demostración.* Consideramos en  $M$  el volumen de Liouville  $\omega^n$ . Ahora, si  $\omega = d\alpha$ , entonces  $\omega^n = d(\alpha \wedge \omega^{n-1})$ . Por el teorema de Stokes

$$\int_M \omega^n = \int_M d(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M = \emptyset} \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

Pero  $M$  es compacta y  $\omega^n$  es una forma diferencial de grado máximo, luego  $\int_M \omega^n$  no puede ser igual a 0. Por tanto,  $\omega$  es cerrada y no es exacta, luego  $[\omega] \neq 0$  y  $H^2(M) \neq \{0\}$ .  $\square$

Como consecuencia del resultado anterior, las esferas de dimensión superior a 2 no admiten una estructura simpléctica. En efecto, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 5.5.** *Si  $n > 1$ , entonces  $H^2(\mathbb{S}^n) = 0$ .*

*Demostración.* Sean  $\omega$  una 2-forma en  $\mathbb{S}^n$ ,  $n > 2$ ,  $x \in \mathbb{S}^n$  y  $U$  un disco entorno de  $x$ . Entonces existe una 1-forma  $\alpha$  definida en  $U$  tal que  $\omega = d\alpha$  en  $U$ . Sea  $\theta$  una función meseta que valga 1 en un entorno  $V \subset U$  de  $x$  relativamente compacto de  $U$  y 0 fuera de  $U$ , la forma

$$\omega_1 = \omega - d(\theta\alpha)$$

es cerrada con soporte compacto en  $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ , que es difeomorfa, por proyección estereográfica  $\varphi$ , a  $\mathbb{R}^n$ . Por tanto, existe una 1-forma  $\beta$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $d\beta = \varphi^*\omega_1$ . Con todo esto, tenemos

$$\omega = d(\theta\alpha + (\varphi^{-1})^*\beta),$$

luego  $\omega$  es exacta en  $\mathbb{S}^n$  y  $H^2(\mathbb{S}^n) = \{0\}$ . □

\* \* \*

Prosiguiendo el estudio de las variedades simplécticas más allá de la propia definición, nos encontramos con un resultado muy fuerte, central en toda la geometría simpléctica: las formas simplécticas son localmente constantes. Esto establece una diferenciación clara con la geometría riemanniana, donde existen invariantes locales, como la curvatura, de modo que pedirle a una forma riemanniana que sea localmente constante es casi tanto como pedirle a la variedad que sea plana. Sin embargo, en geometría simpléctica no hay invariantes locales.

**Teorema 5.6** (Darboux). *Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $\omega$  una 2-forma cerrada y no degenerada en  $M$ . Entonces, para todo  $x \in M$  existe una carta  $(U, \varphi)$  en  $x$  tal que  $\varphi^*\omega$  tiene coeficientes constantes.*

*Demostración.* Sea  $\omega_1 = \omega_x$ , que tiene coeficientes constantes, y sea

$$\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega = \omega + t(\omega_1 - \omega),$$

para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $\omega_{t,x} = \omega_x$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_t$  es no degenerada en  $x$ . Por tanto, sea  $J$  intervalo abierto acotado tal que  $[0, 1] \in J$ , existe un entorno  $U \subset M$  de  $x$  en el que  $\omega_t$  es no degenerada para cada  $t \in J$ .

Ahora, como  $\omega_1 - \omega$  es cerrada, podemos tomar  $U$  tal que sea difeomorfo a  $\mathbb{R}^{2n}$ , luego existirá una 1-forma  $\alpha$  en  $U$  tal que  $\omega_1 - \omega = d\alpha$ . Además, como  $\alpha$  está definida salvo una constante, podemos asumir  $\alpha_x = 0$ .

Para  $t \in J$ , sea  $X_t$  el campo dependiente del tiempo tal que  $i_{X_t}\omega_t = -\alpha$  y con  $X_{t,x} = 0$ . Ahora, si  $\varphi : V \rightarrow U$  es el flujo dependiente del tiempo asociado a  $X$ , entonces  $\varphi(t, 0, x) = x$  para todo  $t \in J$ , luego  $J \times \{0\} \times \{x\} \subset V$ . Como  $V$  es abierto en  $J \times J \times M$  y  $[0, 1]$  es compacto, existe un entorno  $U_0$  de  $x$  tal que  $[0, 1] \times \{0\} \times U_0 \subset V$ .

Por tanto, si  $\varphi_t = \varphi(t, 0, \bullet)$  para cada  $t \in [0, 1]$  se sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) &= \varphi_t^*(L_{X_t}\omega_t) + \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right) = \varphi_t^*(i_{X_t}(d\omega) + d(i_{X_t}\omega)) + \varphi_t^*(\omega_1 - \omega) \\ &= \varphi_t^*(0 - d\alpha + \omega_1 - \omega) = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de Cartan. De modo que  $\varphi_1^*\omega_1 = \varphi_0^*\omega_0 = \omega$ . Además, como  $\varphi_1^*$  es simpléctica, es un isomorfismo, lo que implica que  $\varphi_1$  es un difeomorfismo local. Así, reduciendo el entorno si es necesario, encontramos la carta que estábamos buscando: basta tomar  $\varphi = \varphi_1^{-1}$ , y  $\varphi^*\omega = \omega_1$  tiene coeficientes constantes.  $\square$

**Corolario 5.7.** *Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica. Para cada  $x \in M$  existe un entorno  $U$  de  $x$  y unas coordenadas  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  en  $x$  tales que*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

*Una carta  $(U, (q, p))$  de este tipo se llama carta de Darboux.*

*Demostración.* Basta tomar la carta  $(U, \varphi)$ , dada por el teorema de Darboux, para la cual la forma  $\varphi^*\omega$  es constante. Si tomamos ahora la aplicación lineal  $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , que diagonaliza  $\varphi^*\omega$  a la forma  $\Omega_n$ , basta tomar la carta  $\mathbf{x} = (q, p)$  para la cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^{2n} \\ & \searrow \mathbf{x} & \downarrow \psi \\ & & \mathbb{R}^{2n}. \end{array}$$

De modo que en  $U$  podemos escribir  $\omega = \mathbf{x}^*\Omega_n = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ .  $\square$

\* \* \*

Para terminar la sección, vamos a estudiar lo que podríamos tomar como morfismos en una categoría de las variedades simplécticas: aplicaciones diferenciables que preserven la forma  $\omega$ .

**Definición 5.8.** Sean  $(M, \omega)$  y  $(M', \omega')$  variedades simplécticas y  $f : M \rightarrow M'$  una aplicación diferenciable. Decimos que  $f$  es un *simplectomorfismo* si  $f^*\omega' = \omega$ , es decir, si para cada  $x \in M$ ,  $(d_x f)^*\omega'_{f(x)} = \omega_x$ . Equivalentemente,  $f$  es un simplectomorfismo si la aplicación lineal  $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M'$  es simpléctica.

Una propiedad básica de los simplectomorfismos es que preservan las cartas de Darboux.

**Proposición 5.9.** *Sean  $(M, \omega)$  y  $(M', \omega')$  variedades simplécticas y  $f : M \rightarrow M'$  una aplicación diferenciable. Entonces  $f$  es un simplectomorfismo si y sólo si, para cada  $x \in M$ , si  $(U, (q, p))$  es una carta de Darboux en  $x$ , entonces  $(f(U), (q \circ f, p \circ f))$  es una carta de Darboux en  $f(x)$ .*

*Demostración.* Basta ver que

$$\sum_{i=1}^n d(p_i \circ f) \wedge d(q_i \circ f) = \sum_{i=1}^n f^*(dp_i \wedge dq_i) = f^* \left( \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \right) = f^*\omega$$

es igual a  $\omega$  si y sólo si  $f$  es un simplectomorfismo.

□

Enunciamos también una consecuencia inmediata de la definición de symplectomorfismo:

**Proposición 5.10.** *Los symplectomorfismos preservan el volumen de Liouville  $\omega^n$ .*

## 6. CAMPOS SIMPLÉCTICOS Y CAMPOS HAMILTONIANOS

Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica. Análogamente a lo visto en la fórmula (2), la aplicación

$$\begin{aligned} T_x M &\longrightarrow (T_x M)^* \\ \xi &\longmapsto \omega(\xi, \bullet), \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal entre campos y 1-formas. Resulta que a cada campo  $X$  le podemos asignar la forma  $i_X \omega$ . Veremos en seguida como esta propiedad, junto con la fórmula de Cartan nos va a permitir obtener resultados muy interesantes.

En primer lugar, observemos que si  $f_t$  es una familia uniparamétrica de symplectomorfismos y  $X$  es su generador infinitesimal, entonces

$$L_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_t^* \omega = 0.$$

En la otra dirección también es cierto, si  $X$  es un campo con  $L_X \omega = 0$ , su flujo  $\varphi$  es una familia uniparamétrica de symplectomorfismos. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^* \omega_{\varphi_t(x)}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^* \omega_{\varphi_{t+h}(x)} - \varphi_t^* \omega_{\varphi_t(x)}}{h} \\ &= \varphi_t^* \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_h^* \omega_{\varphi_h(\varphi_t(x))} - \omega_{\varphi_t(x)}}{h} \right) \\ &= \varphi_t^* ((L_X \omega)_{\varphi_t(x)}) = \varphi_t^*(0) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\varphi_t^* \omega_{\varphi_t(x)} = \omega_x$ .

Por otro lado, aplicando la fórmula de Cartan

$$L_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X \omega) = d(i_X \omega),$$

ya que  $\omega$  es cerrada. Por tanto, si  $X$  es un campo tangente a una variedad simpléctica,  $L_X \omega = 0$  si y sólo si  $i_X \omega$  es cerrada. Todo esto nos lleva a dar la siguiente definición:

**Definición 6.1.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica. Un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se dice *simpléctico*, si  $L_X \omega = 0$  o, equivalentemente, si  $i_X \omega$  es una 1-forma cerrada. El conjunto de los campos simplécticos de  $(M, \omega)$  se denota por  $\text{Vect}_\omega(M)$ .

En el caso en que  $X$  sea un campo simpléctico y además  $i_X \omega$  sea exacta, existe una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  con  $i_X \omega = dF$ . Denotamos entonces  $X = X^F$  y decimos que  $X^F$  es un *campo hamiltoniano* con hamiltoniano  $F$ .

Localmente, si tomamos una carta de Darboux en un punto  $x \in M$ , podemos escribir  $x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  y una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  como  $F(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ .

Tenemos entonces

$$dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i,$$

de modo que el campo de hamiltoniano  $F$  tiene la forma

$$X^F = \sum_{i=1}^n X_{q_i}^F \frac{\partial}{\partial q_i} + X_{p_i}^F \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Ahora,

$$dF = i_{X^F} \omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \left( X_{q_i}^F \frac{\partial}{\partial q_i} + X_{p_i}^F \frac{\partial}{\partial p_i}, \bullet \right) = \sum_{i=1}^n X_{q_i}^F dp_i - X_{p_i}^F dq_i.$$

Por tanto, las componentes del campo son  $X_{q_i}^F = \frac{\partial F}{\partial p_i}$  y  $X_{p_i}^F = -\frac{\partial F}{\partial q_i}$ . Si consideramos ahora las curvas integrales  $(q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$  del campo  $X^F$ , obtenemos las ecuaciones de Hamilton (1) con hamiltoniano  $F$ :

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial F}{\partial p_i}(t) \\ \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial F}{\partial q_i}(t), \end{cases}$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

Cabe preguntarse ahora cuándo los campos simplécticos y los campos hamiltonianos coincidirán. Esto es fácil de ver, nótese que existe una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$\mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{X^\bullet} \text{Vect}_\omega(M) \xrightarrow{[i_\bullet \omega]} H^1(M),$$

donde, precisamente  $\ker([i_\bullet \omega]) = \text{im}(X^\bullet)$  es el conjunto de campos hamiltonianos. Si  $H^1(M) = 0$  (en particular, si  $M$  es simplemente conexo), entonces todo campo simpléctico es hamiltoniano. Como consecuencia, todo campo simpléctico es localmente hamiltoniano. Es decir, si  $X$  es un campo simpléctico, en todo punto  $x \in M$  podemos tomar un entorno  $U$  simplemente conexo en el que hay una función  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $i_X \omega = dF$  en  $U$ .

## 7. CORCHETE DE POISSON

Podemos seguir sacándole jugo a los campos hamiltonianos y definir una nueva estructura en las variedades simplécticas. En esta sección veremos que toda variedad simpléctica es una *variedad de Poisson*.

**Definición 7.1** (Corchete de Poisson). Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $F, G : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Se define el *corchete de Poisson* de  $F$  y  $G$  como la función

$$\{F, G\}(x) = (X^F G)(x),$$

para cada  $x \in M$ .

**Proposición 7.2.** Sean  $F, G : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces,

1.  $\{F, G\} = dG(X^F) = \omega(X^G, X^F)$  y
2.  $[X^F, X^G] = X^{\{F, G\}}$ .

*Demostración.*

1. La primera igualdad es inmediata y la segunda es por la definición de  $X^G$ .
2. Por las fórmulas de Cartan:

$$\begin{aligned}
 i_{[X^F, X^G]}\omega &= L_{X^F}(i_{X^G}\omega) - i_{X^G}(L_{X^F}\omega) \\
 &= di_{X^F}i_{X^G}\omega + i_{X^F}di_{X^G}\omega - i_{X^G}(di_{X^F}\omega - i_{X^G}i_{X^F}(d\omega)) \\
 &= d(\omega(X^G, X^F)) + i_{X^F}(d(dG)) - i_{X^G}(d(dF)) - i_{X^G}i_{X^F}(0) \\
 &= d\{F, G\} = i_{X^{\{F, G\}}}\omega.
 \end{aligned}$$

□

Localmente, si tomamos una carta de Darboux  $(q, p)$  en un punto  $x \in M$ , podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \{F, G\} &= dG(X^F) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} dp_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i}.
 \end{aligned}$$

Ésta es la forma del corchete de Poisson que se suele ver en mecánica clásica. Observamos también las relaciones

$$\begin{cases} \{F, q_i\} &= \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \{F, p_i\} &= -\frac{\partial F}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Éstas son precisamente las componentes del campo  $X^F$ . Si ahora consideramos las curvas integrales de  $F$ , podemos ver que las ecuaciones de Hamilton toman una forma más simple

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \{F, q_i\} \\ \dot{p}_i &= \{F, p_i\}. \end{cases}$$

De aquí también obtenemos lo que se conoce como las *relaciones de conmutación canónicas*:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Veamos ahora las propiedades del corchete de Poisson.

**Proposición 7.3.** *La aplicación  $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  que a cada par de funciones le asigna su corchete de Poisson cumple las siguientes propiedades:*

1. *Es bilineal,*
2. *es antisimétrica,*
3. *cumple la identidad de Jacobi:*

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$$

y

4. *cumple la regla de Leibniz:*

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\},$$

*es decir,  $\{A, \bullet\}$  es una derivación.*

En particular las propiedades 1-3, nos dicen que  $(\mathcal{C}^\infty(M), \{, \})$  es un álgebra de Lie. Al añadir la propiedad 4 decimos que es un álgebra de Poisson.

*Demostración.* La demostración de 1 y 2 es inmediata del hecho de que  $\{F, G\} = \omega(X^G, X^F)$ .

3. Tenemos

$$\begin{aligned} [X^A, X^B](C) &= X^A \circ X^B(C) - X^B \circ X^A(C) = X^A(\{B, C\}) - X^B(\{A, C\}) \\ &= \{A, \{B, C\}\} - \{B, \{A, C\}\}. \end{aligned}$$

Mientras que

$$[X^A, X^B](C) = X^{\{A, B\}}(C) = \{\{A, B\}, C\}.$$

Tenemos entonces

$$\{\{A, B\}, C\} = \{A, \{B, C\}\} - \{B, \{A, C\}\} = -\{\{B, C\}, A\} - \{\{C, A\}, B\}.$$

Pasando el segundo término al otro lado obtenemos la identidad de Jacobi.

4. La regla de Leibniz es inmediata porque  $\{A, \bullet\}(x) = X_x^A$  es una derivación.  $\square$

En general, si en una variedad diferenciable  $M$  consideramos el conjunto de funciones  $\mathcal{C}^\infty(M)$  y lo dotamos de la estructura de álgebra de Poisson mediante un corchete  $\{, \}$ , decimos que el par  $(M, \{, \})$  es una *variedad de Poisson*. Podemos reducir el enunciado de la proposición anterior simplemente a afirmar que *toda variedad simpléctica es de Poisson*.

## 8. MECÁNICA EN VARIEDADES SIMPLÉCTICAS

Una vez estudiadas las estructuras básicas de las variedades simplécticas, veamos cómo éstas plantean el marco natural en el que estudiar la mecánica clásica, dando lo que se denomina el *formalismo hamiltoniano*.

En general, un sistema mecánico se compone de tres partes: un conjunto de *estados* o configuraciones, cuyos elementos contienen toda la información sobre el estado del sistema en cierto instante, un conjunto de *observables*, cantidades medibles del sistema, que nos proporcionan información sobre éste, y una *ley de evolución temporal*, que nos dice cómo se comportará el sistema a tiempos futuros. En el caso de la mecánica hamiltoniana, estas partes se pueden dar en el contexto de la geometría simpléctica, a saber, un *sistema mecánico hamiltoniano* se compone de:

**Estados.** El conjunto de estados de un sistema hamiltoniano viene dado por una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ , comúnmente llamada *espacio de fases*.

**Observables.** Los observables del sistema son las funciones  $\mathcal{C}^\infty(M)$ , que además forman un álgebra de Poisson, como vimos en la sección anterior.

**Evolución temporal.** La ley de evolución temporal está determinada por una función  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  (característica de cada sistema), llamada *hamiltoniano del sistema*. Las trayectorias del sistema seguirán las curvas integrales del campo  $X^H$ , luego, localmente, son solución de las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t) \\ \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t). \end{cases}$$

O, en su forma más compacta:

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = \{H, q_i(t)\} \\ \dot{p}_i(t) = \{H, p_i(t)\}. \end{cases}$$

El flujo  $\varphi^H$  generado por  $X^H$  se llama *flujo hamiltoniano* del sistema y contiene toda la información sobre su comportamiento. El hamiltoniano  $H$  también determina la evolución temporal de los observables, según la *ecuación de Liouville*:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\varphi_t^H(x)) = \{H, F\}(x).$$

De manera más formal, podemos definir un *sistema hamiltoniano* simplemente como un par  $(M, H)$ , donde  $M = (M, \omega)$  es una variedad simpléctica y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función.

\* \* \*

Como todos los campos hamiltonianos son simplécticos, los flujos hamiltonianos preservan la forma  $\omega$  y en particular el volumen de Liouville  $\omega^n$ . Este resultado se conoce clásicamente como el *teorema de Liouville*. A la vista de esto, los sistemas hamiltonianos tendrán una de las características más importantes de los sistemas que preservan el volumen, el *teorema de recurrencia de Poincaré*<sup>6</sup>:

**Proposición 8.1** (Teorema de recurrencia de Poincaré). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  acotado y sea  $g : D \rightarrow D$  que preserva el volumen. Entonces, para cualquier  $U \subset D$  abierto, hay un punto  $x \in D$  y un  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ , tal que  $g^n(x) \in U$ .*

*Demostración.* Consideramos la familia

$$\{g^n U | n \in \mathbb{N}\}.$$

Todos estos conjuntos tienen el mismo volumen y, si no se cortaran en ningún punto,  $D$  tendría volumen infinito. Por tanto, existen  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $k > l$  tal que

$$g^k U \cap g^l U \neq \emptyset,$$

luego  $A = g^{k-l} U \cap U \neq \emptyset$ . Entonces, dado  $y \in A$ , existen  $x \in U$  y  $n = k - l$  tal que  $y = g^n(x) \in U$ . □

**Ejemplo 8.2.** Sea  $D$  una circunferencia y  $g$  la rotación de ángulo  $\alpha$ . Si  $\alpha = 2\pi(m/n)$ , entonces  $g^n$  es la identidad y el resultado es obvio. Pero, si  $\alpha$  es un múltiplo irracional de  $2\pi$ , entonces, por el teorema de recurrencia de Poincaré, para todo  $x \in D$  y para todo  $\delta > 0$  existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g^n(x) \in B_\delta(x)$ . De aquí se sigue que, dado  $x \in D$ , el conjunto  $\{g^k(x) | k \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $D$ . Más adelante veremos una aplicación de este ejemplo a mecánica hamiltoniana.

\* \* \*

---

<sup>6</sup>En inglés *Poincaré recurrence theorem*. Nótese que aquí la palabra «recurrencia» no toma el significado habitual en matemáticas (por ejemplo en «construcción de sucesiones por recurrencia»), que se traduce del inglés *recursion*. El diccionario Oxford define *recursion* como “the repeated application of a recursive procedure or definition”. Por otro lado, define *recurrence* como “the fact of occurring again”, que podría traducirse también como «repetición» o «reaparición».



Para terminar la sección, vamos a ver cómo se comportan las ecuaciones de Hamilton mediante cambios de coordenadas:

**Proposición 8.3.** Sean  $M, M'$  variedades simplécticas y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f : M \rightarrow M'$  es una aplicación diferenciable, entonces

$$f^*i_{X^H}\omega = i_{X^{H \circ f}}\omega'.$$

*Demostración.* Basta hacer los cálculos,

$$f^*i_{X^H}\omega = f^*dH = dH \circ f_* = d(H \circ f) = i_{X^{H \circ f}}\omega.$$

□

Vamos a buscar entonces cambios de coordenadas que mantengan las ecuaciones de Hamilton invariantes, es decir, que al escribir las ecuaciones en las nuevas coordenadas obtenga precisamente las ecuaciones de Hamilton del mismo hamiltoniano, expresado en las nuevas coordenadas.

**Definición 8.4.** Sean  $(M, H)$  un sistema hamiltoniano y  $f : M \rightarrow M$  una aplicación diferenciable. Decimos que  $f$  es una *transformación canónica* si deja las ecuaciones de Hamilton invariantes, es decir, si  $f^*X^H = X^{H \circ f^{-1}}$ .

**Proposición 8.5.** Sean  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $f : M \rightarrow M$  una aplicación diferenciable. Son equivalentes:

1.  $f$  es un *simplectomorfismo*,
2. para todo  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  es una *transformación canónica* del sistema  $(M, H)$ ,
3.  $f$  deja invariante el corchete de Poisson, es decir, para cualesquiera  $F, G \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,

$$\{F, G\} \circ f^{-1} = \{F \circ f^{-1}, G \circ f^{-1}\}.$$

*Demostración.*

1  $\implies$  2. En primer lugar, por una comprobación inmediata se tiene, para cualquier difeomorfismo  $f$ , para cualquier forma  $\lambda$ , y para cualquier campo  $X$ ,

$$(f^{-1})^*i_X\lambda = i_{f_*X}(f^{-1})^*\lambda.$$

Ahora,

$$(f^{-1})^*i_{X^H}\omega = i_{X^{H \circ f^{-1}}}\omega,$$

mientras que, por lo anterior,

$$(f^{-1})^*(i_{X^H}\omega) = i_{f_*X^H}(f^{-1})^*\omega.$$

Como  $f$  es un simplectomorfismo,  $f^{-1}$  también lo será, luego  $(f^{-1})^*\omega = \omega$ . Tenemos entonces,

$$i_{X^{H \circ f^{-1}}}\omega = i_{f_*X^H}\omega,$$

es decir

$$\omega(X^{H \circ f^{-1}}, \bullet) = \omega(f_*X^H, \bullet)$$

y, como  $\omega$  es no degenerada,

$$X^{H \circ f^{-1}} = f_*X^H.$$

2  $\implies$  1. Si  $f_*(X^H) = X^{H \circ f^{-1}}$  para todo  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces

$$i_{X^{H \circ f^{-1}}}(f^{-1})^*\omega = i_{f_*(X^H)}(f^{-1})^*\omega = (f^{-1})^*i_{X^H}\omega = i_{X^{H \circ f^{-1}}}\omega.$$

Luego  $(f^{-1})^*\omega = \omega$ . Es decir,  $f^{-1}$  (y por tanto  $f$ ) es un symplectomorfismo.

3  $\iff$  2. Tenemos,

$$\begin{aligned}\{F, G\} \circ f^{-1} &= X^F(G) \circ f^{-1} = f_*X^F(G \circ f^{-1}) \\ \{F \circ f^{-1}, G \circ f^{-1}\} &= X^{F \circ f^{-1}}(G \circ f^{-1}).\end{aligned}$$

Por tanto,  $\{F, G\} \circ f^{-1} = \{F \circ f^{-1}, G \circ f^{-1}\}$  si y sólo si  $X^{F \circ f^{-1}} = f_*X^F$ , para cada  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\square$

## 9. SIMETRÍAS Y LEYES DE CONSERVACIÓN

En esta sección damos la noción de *cantidad conservada* o *integral primera* de un sistema hamiltoniano y estudiamos la relación que tiene con las simetrías del sistema, mediante el mecanismo descubierto por Emmy Noether, que constituye una de las ideas centrales a toda la Física.

**Definición 9.1.** Sea  $(M, H)$  un sistema hamiltoniano, una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una *integral primera* del sistema o una *constante del movimiento* si es constante a lo largo del flujo hamiltoniano. Esto es, si

$$F(\varphi_t^H(x)) = F(x)$$

para todo  $t \geq 0$  y para todo  $x \in M$ .

El primer ejemplo de integral primera es el propio hamiltoniano.

**Proposición 9.2** (Ley de conservación de la energía).  *$H$  es una integral primera del sistema hamiltoniano  $(M, H)$ .*

*Demostración.* Basta hallar la derivada de  $H$  en la dirección de  $X^H$  y ver que es 0. En efecto, dado  $x \in M$ ,

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^H(x)) = d_x H(X_x^H) = \omega(X_x^H, X_x^H) = 0,$$

ya que  $d_x H = \omega(X_x^H, \bullet)$  y  $\omega$  es antisimétrica.  $\square$

Veamos ahora como el corchete de Poisson, ecuación de Liouville mediante, juega un papel central en todo este asunto. En efecto, de la ecuación de Liouville obtenemos inmediatamente lo siguiente:

**Proposición 9.3.** *Una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una integral primera de  $(M, H)$  si y sólo si  $\{H, F\}$  es idénticamente nula.*

Además, si conocemos ya alguna integral primera, la identidad de Jacobi nos permite obtener otras nuevas:

**Proposición 9.4** (Teorema de Poisson). *Si  $F_1, F_2$  son integrales primeras de  $(M, H)$ , entonces  $\{F_1, F_2\}$  es también una integral primera de  $(M, H)$ .*

*Demostración.* Por la identidad de Jacobi,

$$\{\{F_1, F_2\}, H\} = \{F_1, \{F_2, H\}\} + \{F_2, \{H, F_1\}\} = 0,$$

ya que  $F_1, F_2$  son integrales primeras.  $\square$

Veamos ahora el ya mencionado resultado principal de esta sección, que nos relaciona las integrales primeras con las simetrías del sistema.

**Proposición 9.5** (Teorema de Noether). *Sea  $(M, H)$  un sistema hamiltoniano y  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $H$  es constante a lo largo del flujo de  $X^F$ , entonces  $F$  es una integral primera de  $(M, H)$ .*

*Demostración.* Como  $H$  es constante a lo largo de  $X^F$ , es una integral primera de  $(M, F)$ , luego  $\{F, H\} = 0$ . Ahora,  $\{H, F\} = -\{F, H\} = 0$ , luego  $F$  es una integral primera de  $(M, H)$ .  $\square$

Otra forma de ver este mismo teorema es la siguiente:

**Proposición 9.6** (Otra forma del teorema de Noether). *Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica conexa y sean  $X^F$  y  $X^G$  campos hamiltonianos en  $M$ . Los dos campos conmutan (y, por tanto, lo hacen los flujos que generan) si y sólo si  $\{F, G\}$  es constante.*

*Demostración.* Si  $\{F, G\} = a \in \mathbb{R}$ , entonces

$$[X^F, X^G] = X^{\{F, G\}} = X^a = 0,$$

y recíprocamente

$$d\{F, G\} = \omega(X^{\{F, G\}}, \bullet) = \omega([X^F, X^G], \bullet).$$

$\square$

Para entender bien qué queremos decir por las «simetrías» del sistema consideremos la siguiente definición:

**Definición 9.7.** *Sea  $(M, H)$  un sistema hamiltoniano y  $G$  un grupo. Una  $G$ -simetría del sistema  $(M, H)$  es una acción*

$$\varphi : G \longrightarrow \text{Diff}(M)$$

$$g \longmapsto \varphi_g,$$

con  $\varphi_g$  un difeomorfismo de  $M$ , tal que  $H \circ \varphi_g = H$ .

Ahora, consideremos el caso en que  $G$  sea un grupo de Lie y  $\varphi$  una  $G$ -simetría diferenciable de un sistema hamiltoniano  $(M, H)$ . Si  $g_t$  es un subgrupo uniparamétrico de  $G$  entonces  $g_t$  lleva asociado por la acción un flujo completo  $\varphi_t = \varphi_{g_t}$ . En el caso en que  $\varphi_t$  sea un flujo generado por un hamiltoniano  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces, por el teorema de Noether,  $F$  es una cantidad conservada del sistema  $(M, H)$ . La mejor forma de ilustrar estas ideas es con ejemplos:

**Ejemplo 9.8** (Conservación del momento lineal). Consideremos un sistema hamiltoniano cuyo espacio de fases es el espacio simpléctico estándar  $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_n)$ . Decimos que el sistema es *invariante por traslaciones* si la acción

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (y, (q, p)) &\longmapsto (q + y, p) \end{aligned}$$

del grupo  $G = (\mathbb{R}^n, +)$  sobre  $\mathbb{R}^{2n}$  es una  $G$ -simetría del sistema. Fijo ahora  $y \in \mathbb{R}^n$ , si consideramos el flujo

$$\varphi_t(q, p) = (q + yt, p),$$

el hamiltoniano del sistema es invariante bajo este flujo. Busquemos ahora un posible hamiltoniano para  $\varphi_t$ . Para ello, hallemos su generador infinitesimal

$$X_y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(q, p) = (y, 0) = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Ahora, si  $F$  es el hamiltoniano asociado (suponiendo que exista) tenemos que

$$dF = i_{X_y} \Omega_n = \sum_{i=1}^n (dp_i \wedge dq_i) \left( \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^n y_i dp_i.$$

De modo que la cantidad conservada es  $F = \sum_{i=1}^n y_i p_i = \langle y, p \rangle$ . Como esto es cierto para cualquier  $y \in \mathbb{R}^n$ , en particular lo es para los vectores  $e_i$  de la base canónica, de modo que, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $p_i$  es una cantidad conservada y, en general, el *momento lineal*  $p = (p_1, \dots, p_n)$  se conserva. De esta forma, hemos visto como la simetría bajo traslaciones lleva asociada la conservación del momento lineal.

**Ejemplo 9.9** (Conservación del momento angular). De nuevo, consideremos un sistema hamiltoniano cuyo espacio de fases es el espacio simpléctico estándar, en este caso 6 dimensional  $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \Omega_3)$ . Decimos que el sistema es *invariante por rotaciones* si la acción

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (R, (q, p)) &\longmapsto (R(q), R(p)) \end{aligned}$$

del grupo de rotaciones  $G = \mathrm{SO}(3)$  con la operación de composición, es una  $G$ -simetría del sistema. Consideremos ahora el grupo uniparamétrico de rotaciones en torno al eje  $OZ$ , que matricialmente se representa como

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, a este grupo uniparamétrico le podemos asociar el flujo

$$\varphi_\phi(q, p) = (A(\phi)q, A(\phi)p),$$

cuyo generador infinitesimal será, por la regla de la cadena

$$X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\phi=0} \varphi_\phi(q, p) = (\hat{A}q, \hat{A}p),$$

con

$$\hat{A} = \frac{d}{dt} \Big|_{\phi=0} A(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De modo que

$$X = -q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Luego,

$$i_X \Omega_3 = -q_2 dp_1 + q_1 dp_2 + p_2 dq_1 - p_1 dq_2.$$

Definimos ahora el *momento angular* como la función  $L : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por el producto vectorial  $L(q, p) = q \times p$ , de modo que su componente  $k$ -ésima es  $L_k(q, p) = \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} q_i p_j$ , donde  $\epsilon_{ijk}$  es la paridad de  $(i, j, k)$  como permutación de  $(1, 2, 3)$ . Ahora,

$$dL_3 = d(q_1 p_2 - q_2 p_1) = -q_2 dp_1 + q_1 dp_2 + p_2 dq_1 - p_1 dq_2 = i_X \Omega_3.$$

De modo que, aplicando el teorema de Noether, la simetría del sistema bajo las rotaciones en torno al eje  $OZ$  lleva asociada una conservación de la tercera componente del momento angular  $L_3$ . Podemos hacer un cálculo análogo para los casos de las rotaciones en torno a los ejes  $OX$  y  $OY$ , de forma que obtendríamos la conservación de las componentes  $L_1$  y  $L_2$ , o, de otra manera, como sabemos ya que el sistema es invariante bajo rotaciones, podemos tomar directamente el eje  $OZ$  como la dirección del momento angular. Finalmente, llegaríamos a que la simetría bajo rotaciones lleva asociada la conservación del momento angular.

## 10. TEORÍA DE ARNOLD-LIOUVILLE

A la hora de estudiar sistemas dinámicos, una cuestión interesante a plantearse, con consecuencias prácticas y también de carácter fundamental, es si las ecuaciones del sistema podrán ser «integradas», es decir, si podrán ser resueltas mediante integrales definidas («cuadraturas») de funciones conocidas. Decimos entonces que una ecuación diferencial es *integrable por cuadraturas* si es posible escribir su solución general en términos de sumas, productos, composiciones e integrales de funciones conocidas.

En 1885, Joseph Liouville encontró una condición necesaria para que las ecuaciones de Hamilton de ciertos sistemas hamiltonianos fueran (localmente) integrables por cuadraturas. Décadas más tarde, con la introducción del formalismo geométrico y topológico al estudio de los sistemas dinámicos se descubrirían muchas más cosas interesantes sobre los sistemas que cumplían la condición que Liouville propuso. Destaca especialmente en todo este estudio la teoría de los toros invariantes desarrollada por Vladimir Arnold en 1963. Nace así la teoría de los *sistemas integrables*, cuyos resultados más básicos constituyen el *teorema de Arnold-Liouville*.

**Definición 10.1.** Sea  $(M, H)$  un sistema hamiltoniano con  $\dim(M) = 2n$ . Decimos que  $(M, H)$  es *integrable (en el sentido de Liouville)* si existen  $F_1 (= H), \dots, F_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$  tales que

1. son *funcionalmente independientes*, es decir,  $dF_{1,x} \wedge \cdots \wedge dF_{n,x} \neq 0$  para casi todo punto<sup>7</sup>,
2. están *en involución*, esto es,  $\{F_i, F_j\} = 0$  para cada  $i, j = 1, \dots, n$ , y
3. los campos  $X^{F_i}$  son completos para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Nótese que, como  $F_1 = H$ , en particular, todas las funciones  $F_1, \dots, F_n$  son integrales primeras del sistema.

Si escribimos  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ . Los puntos  $x \in M$  en los que  $\text{rango}(dF_x) = n$  se dicen *puntos regulares* del sistema. Los puntos que no son regulares se dicen *puntos críticos*. Si  $x \in M$  es un punto crítico,  $F(x)$  se dice un *valor crítico*. Si  $\Sigma$  es el conjunto de los puntos críticos,  $F(\Sigma) \in \mathbb{R}^n$  se llama *diagrama de bifurcación* del sistema. Nótese que, por el teorema de Sard, el diagrama de bifurcación tiene medida nula.

**Teorema 10.2** (Arnold-Liouville). *Sea  $(M, H)$  un sistema integrable en el sentido de Liouville con  $F_1, \dots, F_n$  las funciones en involución.*

*Sea  $x \in M$  un punto regular del sistema y sea  $a = F(x)$ . Entonces la componente conexa  $M_a$  del conjunto de nivel  $F^{-1}(a)$  que contiene a  $x$  es una variedad diferenciable invariante bajo el flujo del sistema y  $\omega|_{M_a} = 0$ .*

*Además  $M_a$  es difeomorfa a  $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , para cierto  $0 \leq k \leq n$ . En particular, si  $M_a$  es compacta,  $M_a$  es difeomorfa al toro  $n$ -dimensional  $\mathbb{T}^n$ . En este caso, se dice que  $M_a$  es un toro invariante.*

*Podemos tomar unas coordenadas  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  en  $M_a$  de manera que existen unas velocidades constantes  $\nu(a) = (\nu_1(a), \dots, \nu_n(a))$  tales que  $\dot{\lambda}(t) = \nu$ .*

*Existe un entorno  $U \subset M$  de cada  $M_a$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \times M_a$  (se dice entorno tubular) y un sistema de coordenadas de Darboux  $(J, w) = (J_1, \dots, J_n, w_1, \dots, w_n)$  (llamadas variables de acción-ángulo<sup>8</sup>) en  $U$  tales que las  $w_i$  son coordenadas en  $M_a$  y las  $J_i$  son constantes en cada  $M_a$ . Como consecuencia, las ecuaciones de Hamilton del sistema son integrables por cuadraturas.*

Cabe hacer un breve comentario sobre la historia de este resultado. Como ya se ha comentado, la formulación original, en términos de mecánica hamiltoniana clásica, se debe a Liouville en 1855, mientras que la teoría moderna la desarrolló Arnold en 1963. Por otra parte, las variables de acción-ángulo fueron introducidas originalmente por Delaunay en 1860 para estudiar el movimiento de la Luna y más tarde, a principios del siglo XX, usadas por los físicos para estudiar el átomo de Bohr, siendo Schwarzschild el que acuñara esa terminología en 1916. La obtención formal de las variables de acción-ángulo se atribuye a Mineur en 1936. Una discusión más extensa sobre la historia del teorema de Arnold-Liouville puede encontrarse en las páginas 640 y 641 del texto de Spivak [10].

Podemos dar entonces la demostración, que haremos en varios pasos.

<sup>7</sup>Aquí con *para casi todo punto* queremos decir que estos puntos forman un conjunto denso.

<sup>8</sup>Las  $w_i$  suelen llamarse variables de ángulo ya que, en el caso en que  $M_a$  es compacta, son precisamente coordenadas angulares en el toro  $M_a$ . Las  $J_i$  se llaman variables de acción debido a sus dimensiones físicas, en efecto, como las  $w_i$  son adimensionales, las  $J_i$  tienen que tener dimensiones de Posición  $\times$  Momento Lineal, que son precisamente las dimensiones de la integral de acción (citar caso lagrangiano).

*Demostración.* En primer lugar, como  $x$  es regular,  $F$  tiene rango máximo en cada punto de  $M_a$  y, por el teorema de la función implícita,  $M_a$  es una subvariedad regular de  $M$  de dimensión  $2n - n = n$ . Como  $M$  es una variedad simpléctica, para cada  $i = 1, \dots, n$ , podemos definir el campo  $X_i = X^{F_i}$ . Al ser las  $dF_i$  linealmente independientes los campos  $X_i$  son linealmente independientes. Además, por el teorema de Noether, como para cada  $i, j = 1, \dots, n$   $\{F_i, F_j\} = 0$  (luego es constante), entonces  $[X_i, X_j] = 0$ . Por esto mismo, la derivada de la función  $F_i$  en la dirección de  $X_j$  es 0, luego los campos  $X_j$  son tangentes a  $M_a$ .

De aquí sacamos varias conclusiones:

1.  $M_a$  es invariante con respecto a cada uno de los  $n$  flujos hamiltonianos generados por cada función  $F_i$  (luego, en particular lo será respecto del generado por  $F_1$ ).
2. Como, para cada  $x \in M_a$ , los campos  $X_1|_x, \dots, X_n|_x$  forman una base de  $T_x M_a$ , sean  $X_x, Y_x \in T_x M_a$ , entonces  $X_x = \sum_{i=1}^n b_i X_i|_x$ ,  $Y_x = \sum_{i=1}^n c_i X_i|_x$ . Ahora,

$$\omega(X_x, Y_x) = \sum_{i,j=1}^n b_i c_j \omega(X_i|_x, X_j|_x) = \sum_{i,j=1}^n b_i c_j \{F_j, F_i\} = 0.$$

Por tanto,  $\omega$  se anula en  $T_x M_a$ .

3.  $M_a$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $n$  campos conmutativos dos a dos y linealmente independientes en todo punto de  $M_a$ .

Esto prueba la primera parte del teorema. Para continuar, necesitamos probar un lema previo.

**Lema 10.3.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  conexa y compacta tal que existen campos  $X_1, \dots, X_n$  en  $M$  completos y linealmente independientes y tales que, para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ,  $[X_i, X_j] = 0$ . Entonces  $M$  es difeomorfa al  $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ .*

*Demostración.* (del Lema 10.3). Para cada  $i = 1, \dots, n$ , sea  $g_i$  el flujo completo generado por  $X_i$ . Como para todo  $i \neq j$   $[X_i, X_j] = 0$  entonces  $g_i$  conmuta con  $g_j$ , es decir,  $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ , para todo  $x \in M$ .

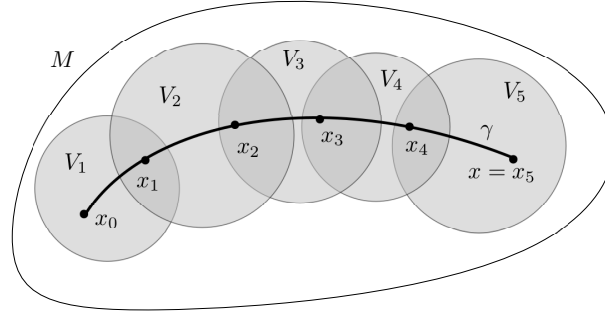
Así, podemos definir una acción de  $\mathbb{R}^n$  en  $M$  que a cada  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$  le asigna  $g_t : M \rightarrow M$ , con  $g_t = g_{1,t_1} \cdots g_{n,t_n}$ . Por conmutar los flujos,  $g_{t+s} = g_t g_s$ . Ahora, fijo  $x_0 \in M$ , definimos

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto g_t(x_0). \end{aligned}$$

Como los campos son linealmente independientes,  $d_t g$  es un isomorfismo lineal para todo  $t$  y, por el teorema de la función implícita,  $g$  es un difeomorfismo local. Además, sea  $x \in M$ , tomamos una curva  $\gamma$  que una  $x$  y  $x_0$  y una sucesión finita de entornos  $V_1, \dots, V_n$  que recubran  $\gamma$ , en los que  $g$  sea difeomorfismo y tales que  $x_0 \in V_1$ ,  $x \in V_n$ . Para cada  $i = 1, \dots, n-1$ , sea  $x_i \in V_i \cap V_{i+1}$  y sea  $x_n = x$ . Para cada  $i = 0, \dots, n-1$ , centramos  $g$  en  $x_i$  (de tal forma que  $g(0) = x_i$ ) en el entorno  $V_{i+1}$  y lo llamamos  $g_i$ . Definimos  $t_i$  tal que  $g_{i-1,t_i}(x_{i-1}) = x_i$ , entonces,

$$x = g_{n-1,t_n}(x_{n-1}) = g_{n-1,t_n} g_{n-2,t_{n-1}}(x_{n-2}) = \cdots = g_{n-1,t_n} \cdots g_{0,t_1}(x_0),$$

luego, sea  $t = t_1 + \cdots + t_n$ ,  $x = g_t(x_0)$ . Por tanto,  $g$  es sobreyectiva.

FIGURA 2. Idea de la demostración de que  $g$  es sobreyectiva.

Tenemos entonces que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow M$  es un difeomorfismo local sobreyectivo, luego es una identificación diferenciable, de modo que si llamamos

$$H := \{t \in \mathbb{R}^n \mid g_t(x_0) = x_0\},$$

entonces, por la propiedad universal del cociente, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & M \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathbb{R}^n/H, & & \end{array}$$

da un difeomorfismo entre  $M$  y  $\mathbb{R}^n/H$ . Si  $H$  es vacío,  $M \cong \mathbb{R}^n$  y habríamos terminado. Supongamos que  $H$  es no vacío. Entonces, dados  $t, s \in H$ ,

$$g_{s+t}(x_0) = g_s g_t(x_0) = g_s(x_0) = x_0$$

y

$$g_{-t}(x_0) = g_{-t} g_t(x_0) = x_0.$$

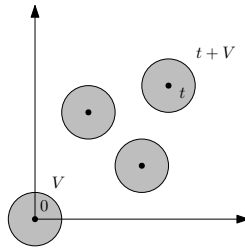
Es decir,  $H$  es un subgrupo de  $(\mathbb{R}^n, +)$ . Además,  $H$  no depende de la elección de  $x_0$ , en efecto, si  $x = g_r(x_0)$  y  $t \in H$ , entonces

$$g_t(x) = g_{t+r}(x_0) = g_r g_t(x_0) = g_r(x_0) = x.$$

Como  $g$  es un difeomorfismo local, existe un entorno  $V \subset \mathbb{R}^n$  de 0 tal que  $H \cap V = \{0\}$ . Es más, sean  $t \in H$ ,  $s \in V \setminus \{0\}$  y  $x \in M$ ,

$$g_{t+s}(x) = g_s g_t(x) = g_s(x) \neq x.$$

Luego  $H$  es un conjunto discreto.

FIGURA 3. Idea de que  $H$  es discreto.



Antes de continuar, es necesario probar el siguiente lema:

**Lema 10.4.** *Todo subgrupo no trivial, cerrado y discreto  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^k$  para algún  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Es decir, existen  $e_1, \dots, e_k \in H$  linealmente independientes tales que*

$$H = \{n_1 e_1 + \dots + n_k e_k \mid (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k\}.$$

*Demostración.* (del Lema 10.4). Sea  $e_0 \in H$ ,  $e_0 \neq 0$ . Como  $H$  es discreto,  $H \cap B(0, \|e_0\|)$  es finito. De estos puntos, consideramos aquellos que están en  $L(e_0)$ <sup>9</sup> y de estos escogemos el más cercano, que llamaremos  $e_1$ .

Si existieran algún  $e \in H$  y algún  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $e \in (me_1, (m+1)e_1)$ , entonces  $e - me_1 \in H \cap L(e_0)$  estaría más cerca de 0 que  $e_1$ . Por tanto,

$$H \cap L(e_0) = e_1 \mathbb{Z}.$$

Si no hay puntos de  $H$  fuera de  $L(e_1)$  hemos terminado,  $H$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . En caso contrario, sea  $e \in H \setminus L(e_1)$ , proyectamos ortogonalmente  $e$  sobre  $L(e_1)$ . Esta proyección cae exactamente sobre un intervalo  $\Delta = [me_1, (m+1)e_1]$  para cierto  $m \in \mathbb{Z}$ . Sea  $C$  el cilindro de eje  $\Delta$  y de radio igual a la distancia entre  $\Delta$  y  $e$ .  $C \cap H$  es finito. De estos puntos, sea  $e_2$  el más cercano a  $\Delta$  que no esté en  $\Delta$ . Entonces, para cualquier otro  $f \in H$ , la distancia entre  $f$  y  $L(e_1)$  es mayor que la distancia entre  $e_2$  y  $L(e_1)$ .

En efecto, en tal caso, sea  $l \in \mathbb{Z}$  tal que la proyección ortogonal de  $f$  cae sobre  $[le_1, (l+1)e_1]$ , entonces  $f' = f - le_1 + me_1 \in C$  y la distancia entre  $f'$  y  $L(e_1)$  es menor que la distancia entre  $e_2$  y  $L(e_1)$ , lo que nos lleva a una contradicción.

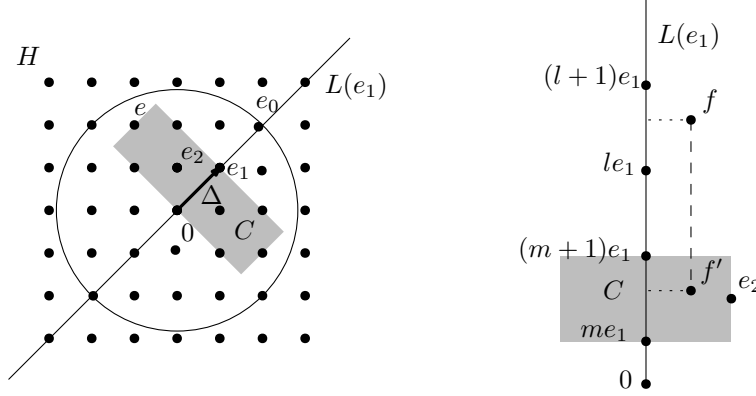


FIGURA 4. Idea de la demostración del lema.

Ahora,  $\{n_1 e_1 + n_2 e_2 \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$  forma una red discreta en  $L(e_1, e_2)$ . Además, si existiera un  $e \in H$  que no perteneciese a la red, sean  $m_1 = [\langle e, e_1 \rangle]$ ,  $m_2 = [\langle e, e_2 \rangle]$ . Entonces,  $e - m_1 e_1 - m_2 e_2$  estaría más cerca de  $L(e_1)$  que  $e_2$ . Por tanto, esta red es exactamente  $L(e_1, e_2) \cap H$ .

Procedemos ahora por inducción, supongamos que existen  $e_1, \dots, e_k$  linealmente independientes tales que  $\{n_1 e_1 + \dots + n_k e_k \mid (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k\} = L(e_1, \dots, e_k) \cap H$  y que existe  $e \in H$  tal que  $e \notin L(e_1, \dots, e_k)$ . Análogamente, la proyección ortogonal de  $e$  sobre

<sup>9</sup>Aquí  $L(x)$  denota la envoltura lineal de  $x$ .

$L(e_1, \dots, e_k)$  cae sobre un hipercubo  $\Delta = [m_1 e_1, (m_1 + 1)e_1] \times \dots \times [m_k e_k, (m_k + 1)e_k]$ . Sea  $C$  el conjunto de los puntos cuyas proyecciones ortogonales caen en  $\Delta$  y más cercanos a  $\Delta$  que  $e$ , entonces  $C \cap H$  es finito. Sea  $e_{k+1}$  el más cercano a  $\Delta$  de estos puntos, que no esté en  $\Delta$ . Para cualquier otro  $f \in H$ , la distancia entre  $f$  y  $L(e_1, \dots, e_k)$  es mayor que entre  $e_2$  y  $L(e_1, \dots, e_k)$ , por un razonamiento completamente análogo al caso bidimensional.

Por tanto,  $\{n_1 e_1 + \dots + n_{k+1} e_{k+1} \mid \in \mathbb{Z}^{k+1}\}$  forma una red discreta en  $L(e_1, \dots, e_{k+1})$  y, de forma análoga al caso anterior, esta red agota los puntos de  $H \cap L(e_1, \dots, e_{k+1})$ .

Finalmente, sea  $k$  el mínimo número natural tal que no existe  $e \in H \setminus L(e_1, \dots, e_k)$ . Entonces  $H$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^k$ .  $\square$

Terminamos ahora la demostración del Lema 10.3.

Sea  $k$  el número de generadores de  $H$  y sea la proyección natural

$$\begin{aligned} \varpi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (x, y) &\longmapsto (\exp(x), y). \end{aligned}$$

En particular,  $\varpi$  da un homomorfismo de grupos cuyo núcleo es un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^n$  generado por  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ . Sean  $e_1, \dots, e_k$  los generadores de  $H$  y sea  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un isomorfismo lineal tal que cada  $u_i$  va a parar a  $e_i$ . Entonces, la aplicación  $\tilde{B}$  que hace el siguiente diagrama conmutativo es un difeomorfismo,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^n \\ \varpi \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\tilde{B}} & \mathbb{R}^n / H \cong M. \end{array}$$

$\square$

Aplicando directamente el Lema 10.3 a  $M_a$  tenemos que es difeomorfa a  $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  para cierto  $k = 0, \dots, n$ . En particular, si  $M_a$  es compacta, entonces  $k = n$  y  $M_a \cong \mathbb{T}^n$ . Hemos probado entonces la segunda parte del teorema.

Si consideramos ahora el isomorfismo lineal  $B$  (que depende del punto  $a$ ) dado por el diagrama anterior y llamamos  $\nu(a)$  a la primera columna de la matriz asociada a  $B$ , entonces  $B(t, 0, \dots, 0) = \nu(a)t$ . Podemos dar entonces unas coordenadas  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $\lambda$  es una sección de  $\varpi$ , es decir, hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow \varpi & \uparrow \lambda \\ & & M. \end{array}$$

Ahora, como el flujo del sistema  $\varphi^H$  es igual a  $g_1$ , el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n & \xleftarrow{\nu(a)\bullet} & \mathbb{R} \\
\swarrow \wr & & \downarrow \varphi_{\bullet}^H(x) \\
& & M.
\end{array}$$

Por tanto,  $\lambda(t) = \lambda(\varphi_t(x)) = \nu(a)t$ , luego  $\dot{\lambda}(t) = \nu(a)$ . Esto prueba la tercera parte del teorema.

Para probar la última parte del teorema veamos primero que existe un  $U \subset M$  entorno de  $M_a$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \times M_a$ . Como  $F$  tiene rango máximo, si tomamos  $D \cong \mathbb{R}^{2n}$  entorno simplemente conexo de  $x$ , existe  $V \subset D$  y existe  $B \subset \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $F|_V : V \rightarrow B$  es un difeomorfismo. Ahora, reduciendo el entorno  $V$  si es preciso, sea

$$\begin{aligned}
\Phi : V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times M_a \\
x &\longmapsto (F(x), \lambda),
\end{aligned}$$

con  $\lambda$  las coordenadas antes obtenidas en la componente  $M_{F(x)}$  que contiene a  $x$ . Entonces claramente  $\Phi$  da un difeomorfismo entre  $U = \bigcup_{x \in V} M_{F(x)}$  (que es un entorno de  $M_a$ ) y  $\mathbb{R}^n \times M_a$ .

**Observación 10.5.** Aquí estamos suponiendo que  $x$  no está en el borde de  $M$ , en tal caso procederíamos análogamente para obtener un entorno difeomorfo a  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{T}^n$ .

□

En primer lugar, vamos a considerar un ejemplo característico que aclara alguna de las ideas detrás de esta teoría.

**Ejemplo 10.6.** Consideramos el oscilador armónico unidimensional, con hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2.$$

Por simplicidad, supondremos que la masa y la constante del muelle valen 1, de forma que  $H(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ . Las curvas  $C_E$  de energía constante en el espacio de fases  $\mathbb{R}^2$  son circunferencias de centro 0 y radio  $a = \sqrt{2E}$ , con

$$E = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

Ahora, si tomamos unas coordenadas «polares»  $(E, \phi)$ , donde  $\phi$  es la coordenada angular en cada una de estas circunferencias, la dinámica del sistema queda mucho más simplificada:

$$\begin{aligned}
E(t) &= E(0) \\
\phi(t) &= \phi(0) + \omega(E(0))t.
\end{aligned}$$

Sin embargo, ¿será canónica la transformación  $(q, p) \rightarrow (E, \phi)$ ? En este caso es claro que la transformación preserva el área  $\frac{1}{2}a^2\phi$ . Más generalmente, si  $A$  es una región del plano,

$$\text{área}(A) = \int_A r dr \wedge d\phi = \int_A d\left(\frac{1}{2}r^2\right) \wedge d\phi.$$

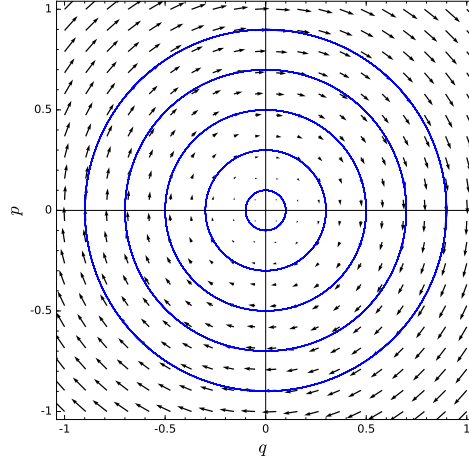


FIGURA 5. Espacio de fases del oscilador armónico junto al campo y al flujo hamiltonianos

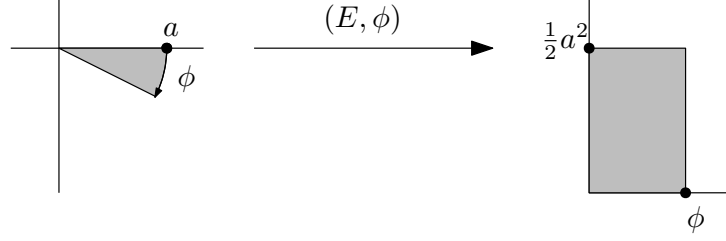


FIGURA 6. Cambio de coordenadas  $(q, p) \rightarrow (E, \phi)$

Por tanto, la transformación es canónica porque precisamente, si  $A_E$  es la región encerrada por  $C_E$ , entonces

$$E = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2\pi} \text{área}(A_E).$$

En las coordenadas originales, esta área es

$$J = \int_{A_E} dp \wedge dq = \int_{A_E} d(pdq) = \int_{C_E} pdq,$$

donde en el último paso hemos utilizado el teorema de Stokes. Esta  $J$  normalmente se conoce como *variable de acción*, debido a sus dimensiones.

En un caso más general, podemos considerar el sistema formado por  $n$  osciladores armónicos acoplados o, equivalentemente, un oscilador armónico  $n$ -dimensional. El hamiltoniano del sistema será (tomando  $k = m = 1$ )

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = H_1(q_1, p_1) + \dots + H_n(q_n, p_n) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2 + q_1^2 + \dots + q_n^2).$$

Este sistema es integrable en el sentido de Liouville. Basta tomar  $F = (H, H_2 + \dots + H_n, H_3 + \dots + H_{n-2}, \dots, H_n)$ , ya que

$$\{H_i, H_j\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_j}{\partial q_k} - \frac{\partial H_j}{\partial p_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} = p_i q_j \delta_{ij} - p_j q_i \delta_{ij} = p_i q_i - p_i q_i = 0,$$

y  $\det(F_{*,x}) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ .

$F^{-1}(a)$  vendrá dado por

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) = a_1 - a_2 \\ \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) = a_2 - a_3 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(p_n^2 + q_n^2) = a_n, \end{cases}$$

que son las ecuaciones de un toro  $n$ -dimensional.

Entonces, sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  una base de ciclos del toro ♣ **Esto es muy intuitivo pero hay que escribirlo bien, en los libros pone que son los generadores del grupo de homología de  $\mathbb{T}^n$ , cuando dé TOAL a lo mejor sé lo que es, podemos definir las variables de acción**

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \sum_{k=1}^n p_k dq_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \alpha.$$

La definición de estas variables no depende de la base elegida ya que, por el teorema de Stokes,

$$\int_{\gamma_i} \alpha - \int_{\gamma'_i} \alpha = \int_{\sigma} \omega = 0,$$

donde  $\sigma$  es la región encerrada por las curvas y  $\omega = 0$  en el toro (el cálculo de esto está hecho con precisión más adelante).

Sean las variables angulares  $\phi_i$  a lo largo de cada ciclo generado por  $\gamma_i$ , si  $(q, p) \rightarrow (J, \phi)$  es canónica, podemos tomar las variables  $(J, \phi)$  en las que la dinámica toma una forma especialmente simple. Esto se debe a que  $J = J(a)$ , de modo que, por las ecuaciones de Hamilton,

$$\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = -\dot{J}_i = 0.$$

Por tanto,  $H = H(J_1(a), \dots, J_n(a))$  y

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_j(a),$$

con  $\omega_j$  constante en  $M_a$ . Las ecuaciones de Hamilton quedan entonces integradas en la forma

$$\begin{aligned} J(t) &= J(a) \\ \phi(t) &= \phi(0) + \omega(a)t. \end{aligned}$$

No hemos demostrado que el cambio de coordenadas sea un symplectomorfismo, lo que puede hacerse usando el método de Hamilton-Jacobi, que aquí no vamos a exponer. Sin embargo, no nos hará falta, ya que nosotros daremos otra prueba, demostrando un teorema general para construir variables de acción-ángulo en variedades simplécticas.

Vamos a estudiar también algunos ejemplos de sistemas con funciones en involución, que en ciertos supuestos serán integrables en el sentido de Liouville.

**Ejemplo 10.7** (Péndulo simple). Consideramos un péndulo cuya «cuerda» es una barra rígida de masa despreciable y longitud 1. El espacio de fases del péndulo es el fibrado cotangente de  $\mathbb{S}^1$ , que no es otra cosa que un cilindro. Tomando como coordenada generalizada el ángulo  $\phi$  de desviación del péndulo respecto de la vertical, el hamiltoniano viene dado por

$$H(\phi, p) = \frac{1}{2}p^2 - g \cos \phi,$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y hemos tomado el centro como origen de energía potencial. Como podemos ver en la figura 10.7 las trayectorias son cerradas, luego cada

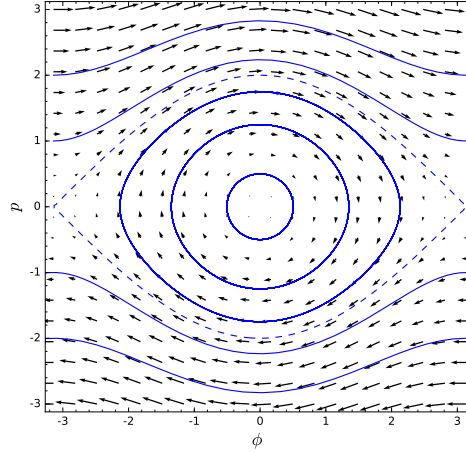


FIGURA 7. Espacio de fases del péndulo junto al campo y al flujo hamiltonianos.

curva de energía constante es compacta.  $dH$  será distinta de 0 en todo punto exceptuando los casos  $(\phi = 0, p = 0)$  y  $(\phi = \pi, p = 0)$ , que corresponden a puntos de equilibrio (el primero, estable, el segundo, inestable) donde la trayectoria es sólo un punto. La curva que aparece punteada en la figura 10.7, de ecuación

$$g = H(\phi, p) = \frac{1}{2}p^2 - g \cos \phi,$$

corresponde al punto de equilibrio y a dos trayectorias que tienden asintóticamente al punto de equilibrio inestable. Estas trayectorias son matemáticamente factibles aunque su realización práctica parezca una tarea imposible y en ellas no aplica la teoría de Arnold-Liouville, puesto que la curva punteada no es una variedad, al contener un punto con  $dH = 0$ . Estas trayectorias se conocen como *singularidades* del sistema. Las curvas que quedan dentro de la curva punteada corresponden a movimientos de oscilación en torno al punto de equilibrio estable, mientras que las que quedan fuera corresponden a movimientos de rotación del péndulo alrededor de su centro.

**Ejemplo 10.8** (Potencial central). Consideramos una partícula que se mueve en  $\mathbb{R}^3$  sometida a un potencial central, esto es, una función  $V$  que sólo depende de  $r = ||x||$ . El espacio de fases es  $\mathbb{R}^6$  y el hamiltoniano (tomando  $m = 1$ ) viene dado por

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + V(r).$$

Sea ahora el momento angular

$$L = x \times p,$$

cada una de sus componentes es  $L_i = \epsilon_{ijk}(x_j p_k - x_k p_j)$ , donde  $\epsilon_{ijk}$  es la paridad de  $(i, j, k)$  como permutación de  $(1, 2, 3)$ . Podemos calcular ahora

$$\{H, L_i\} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial L_i}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial L_i}{\partial p_k} = - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left( p_k p_j + \frac{x_k x_j}{r} V'(r) \right) = 0.$$

Por tanto,  $L$  es una cantidad conservada. Al ser  $L$  un vector, realmente son cantidades conservadas su norma y su dirección y sentido, lo que implica que se conservan  $L^2 = \langle L, L \rangle$  y  $L_3$ . Además  $\{L^2, L_3\} = 0$ , lo que nos da tres funciones en involución en el sistema. Sin embargo, la integrabilidad en sentido de Liouville no está garantizada por los resultados que hemos probado, ya que en general las órbitas pueden ser no acotadas y las funciones no ser independientes.

**Ejemplo 10.9** (Trompo simétrico). Consideremos un trompo simétrico (la clásica peonza de juguete) que gira con su punta fija en un punto. Su espacio de configuración viene dado por las posibles rotaciones de sus ejes principales de inercia  $(X', Y', Z')$  respecto a los tres ejes del sistema de laboratorio (la vertical y dos ejes arbitrarios en el suelo,  $X, Y, Z$ ). De modo que el espacio de fases del trompo simétrico es  $T^*\text{SO}(3)$ . Sean  $I_1, I_2, I_3$  los momentos de inercia del trompo, que el trompo sea *simétrico* quiere decir que  $I_1 = I_2$  y que el centro de masas cae sobre el eje  $Z'$ . En este caso, tras unos cálculos se obtiene que el hamiltoniano del sistema es

$$H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta,$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $M$  es la masa de la peonza,  $l$  es la distancia de la punta al centro de masas,  $(\theta, \phi, \psi)$  son los ángulos de Euler de la rotación de los ejes principales de inercia respecto a los del laboratorio y  $(p_\theta, p_\phi, p_\psi)$  son sus momentos canónicos conjugados. Las frecuencias de giro de cada uno de los ángulos de Euler  $\theta, \phi$  y  $\psi$  se llaman frecuencias de *nutación*, *precesión* y *rotación*, respectivamente.

Inmediatamente tenemos

$$\begin{aligned} \dot{p}_\phi &= \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \\ \dot{p}_\psi &= \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0, \end{aligned}$$

luego  $p_\phi$  y  $p_\psi$  son cantidades conservadas y por tanto su corchete de Poisson con  $H$  se anula. Además,

$$\{p_\phi, p_\psi\} = 0.$$

Por tanto,  $H, p_\phi$  y  $p_\psi$  son funciones en involución en  $(T^*\text{SO}(3), H)$ .

Ahora, si estas funciones son constantes, como los ángulos (y sus relaciones trigonométricas) siempre están acotados también lo estará  $p_\theta$  por la relación  $E = H$  y la variedad  $F^{-1}(a)$  estará acotada. Como  $F^{-1}(a)$  es cerrada, es compacta y el trompo simétrico es «casi» un sistema integrable en el sentido de Liouville. Este «casi» viene porque, al igual que en el caso del péndulo habrá que exceptuar algún caso en el cual las funciones no son independientes.

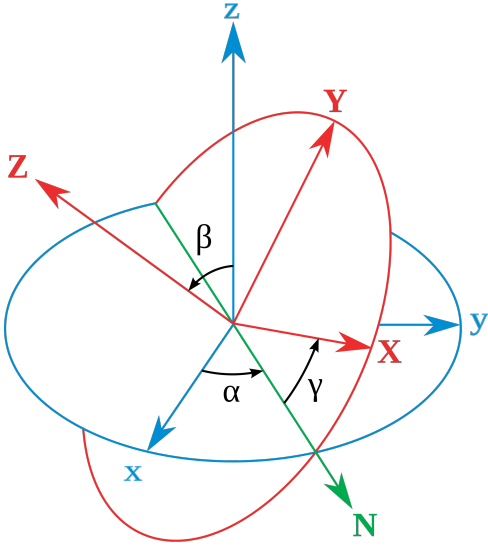


FIGURA  
8. Construcción  
de los ángulos de  
Euler. Fuente: [2].

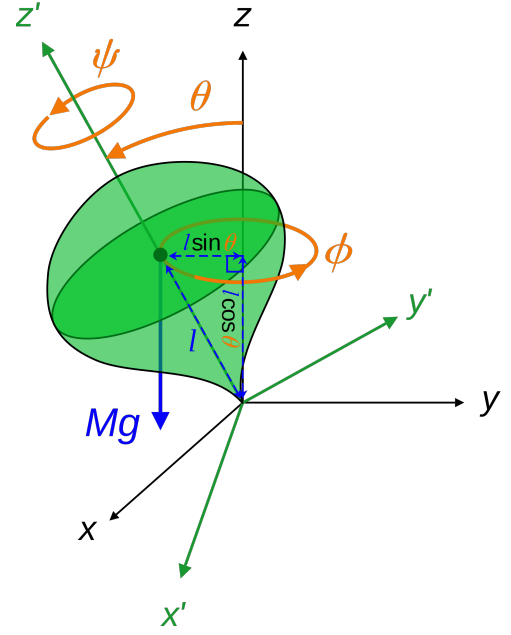


FIGURA 9. Trompo  
simétrico. Fuente: [3].

**Ejemplo 10.10.** Por citar un ejemplo no trivial, aunque no lo demostremos, el problema de hallar las geodésicas en un elipsoide puede verse como un sistema hamiltoniano integrable en el sentido de Liouville. La demostración se basa en la teoría de cuádricas confocales y coordenadas elípticas, demostrando unos teoremas de Jacobi y Chasles. Puede leerse en el apéndice 15 de [1].

Podemos probar ahora el resultado fundamental de esta teoría:

**Teorema 10.11** (Arnold). *Sea  $(M, H)$  un sistema integrable en el sentido de Liouville. Entonces:*

1.  $M_a$  es una variedad diferenciable invariante bajo el flujo de hamiltoniano  $H = F_1$  y  $\omega|_{M_a} = 0$ .
2. Cada componente conexa  $C_a$  de  $M_a$  es difeomorfa al toro  $n$ -dimensional

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$$

y, sean  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  coordenadas angulares en  $C_a$ , entonces existen unas frecuencias constantes  $\omega(a) = (\omega_1(a), \dots, \omega_n(a))$  tales que

$$\dot{\theta}(t) = \omega.$$

*Demostración.* En primer lugar, como las  $n$  funciones  $F_i$  son independientes en cada punto de  $M_a$ , por el teorema de la función implícita  $M_a$  es una subvariedad regular de  $M$  de dimensión  $2n - n = n$ . Como  $M$  es una variedad simpléctica, para cada  $i = 1, \dots, n$ , podemos definir el campo  $X_i = X^{F_i}$ . Al ser las  $dF_i$  linealmente independientes los campos  $X_i$  son linealmente independientes. Además, por el teorema de Noether, como para cada  $i, j = 1, \dots, n$   $\{F_i, F_j\} = 0$  (luego es constante), entonces  $[X_i, X_j] = 0$ . Por esto mismo,



la derivada de la función  $F_i$  en la dirección de  $X_j$  es 0, luego los campos  $X_j$  son tangentes a  $M_a$ .

De aquí sacamos varias conclusiones:

1.  $M_a$  es invariante con respecto a cada uno de los  $n$  flujos hamiltonianos generados por cada función  $F_i$  (luego, en particular lo será respecto del generado por  $F_1$ ).
2. Como, para cada  $x \in M_a$ , los campos  $X_1|_x, \dots, X_n|_x$  forman una base de  $T_x M_a$ , sean  $X_x, Y_x \in T_x M_a$ , entonces  $X_x = \sum_{i=1}^n b_i X_i|_x$ ,  $Y_x = \sum_{i=1}^n c_i X_i|_x$ . Ahora,

$$\omega(X_x, Y_x) = \sum_{i,j=1}^n b_i c_j \omega(X_i|_x, X_j|_x) = \sum_{i,j=1}^n b_i c_j \{F_j, F_i\} = 0.$$

Por tanto,  $\omega$  se anula en  $T_x M_a$ .

3.  $M_a$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $n$  campos conmutativos dos a dos y linealmente independientes en todo punto de  $M_a$ .

Por esto último, por la proposición anterior y porque  $M_a$  es compacta tenemos que cada componente conexa  $C_a$  de  $M_a$  es difeomorfa a  $\mathbb{T}^n$ . De la demostración de la proposición anterior obtenemos un diagrama de la forma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow p & \downarrow g \\ & & C_a = \mathbb{T}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \theta & \xrightarrow{\quad} & t \\ & \searrow & \downarrow \\ \theta & & \text{mód } 2\pi \end{array}$$

En este caso, el flujo hamiltoniano asociado a  $F_1$  es  $g_1$ , luego

$$\theta(t) = g_{1,t}(\theta(0)).$$

Ahora, fijo  $\theta(0)$ ,  $g_{1,t} = g(t, 0, \dots, 0)$ , por tanto

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De modo que, si  $a_{ij}$  es la entrada de índices  $(i, j)$  de la matriz  $A$ , entonces, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\theta_i(t) = a_{i1}t.$$

Por tanto, sea  $\omega_i = a_{i1}$ ,

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i.$$

□

**Observación 10.12.** Estas subvariedades  $C_a$  de  $M$  se suelen llamar *toros invariantes* del sistema  $(M, H)$ . Esta dinámica en el toro recibe el nombre de *movimiento condicionalmente periódico*.

**Observación 10.13.** Consideremos un 2-toro invariante con la dinámica del teorema (por ejemplo, el asociado a los niveles de energía de un oscilador armónico bidimensional). Sea  $(\theta_1, \theta_2)$  un punto en el toro y su trayectoria bajo el flujo hamiltoniano  $\gamma(t) = \varphi_t(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \omega_1 t, \theta_2 + \omega_2 t)$ . Si  $\omega_1/\omega_2 = m/n$  es racional, entonces

$$\gamma\left(\frac{2n\pi}{\omega_2}\right) = (\theta_1 + 2m\pi, \theta_2 + 2n\pi) = (\theta_1, \theta_2).$$

Es decir, a cierto tiempo la trayectoria «se cierra». Estas órbitas se dicen *periódicas*.

Sin embargo, si  $\omega_2/\omega_1$  es irracional, dado un ángulo  $\alpha$  y sea  $T$  tal que  $\alpha = \theta_1 + \omega T$ , entonces, sea  $T_n = T + 2n\pi/\omega_1$ ,  $\alpha = \theta_1 + \omega_1(T_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea ahora la aplicación

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \phi &\longmapsto \phi + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}, \end{aligned}$$

es una rotación de ángulo un múltiplo irracional de  $2\pi$  en la circunferencia del toro de ángulo  $\alpha$ . Entonces, como ya vimos por el teorema de recurrencia de Poincaré,  $\{g^n(\phi) | n \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $\mathbb{S}^1$ . Como esto es válido para todo  $\alpha$  y se cumple

$$\gamma(T_n) = (\alpha, g^n(\theta_2) + \omega_2 T),$$

tenemos que  $\{\gamma(t) | t \in \mathbb{R}\}$  es denso en el toro. Este tipo de órbitas se llaman *cuasiperiódicas*. Una forma sencilla de visualizar esto es mediante las *figuras de Lissajous*

$$L_\omega = \{(\cos t, \cos \omega t) | t \in \mathbb{R}\},$$

ver figura 10.

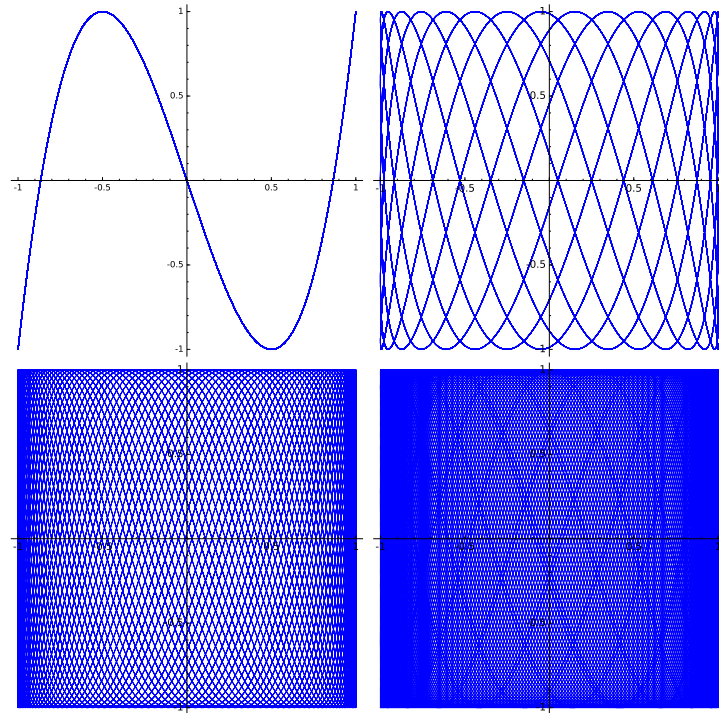


FIGURA 10. Figuras de Lissajous para  $\omega = 3; 3,1; 3,14; 3,1416$ ,  $t \in (0, 128\pi)$  con pasos de 0,01.

Si  $(M, H)$  es integrable en el sentido de Liouville, entonces para todo  $x \in M$ ,  $M_{F(x)}$  es compacta, luego la componente conexa a la que pertenezca  $x$ ,  $C_{F(x)}$ , es un toro invariante, en el que podemos dar coordenadas angulares con una dinámica como la del teorema. A la vista de esto, tenemos el siguiente corolario:

Finalmente, vamos a demostrar el teorema clave que nos permite construir la carta en la cual las ecuaciones de Hamilton pueden ser integradas por cuadraturas.

**Teorema 10.14** (de las variables de acción-ángulo). *Sea  $(M, H)$  un sistema integrable en el sentido de Liouville,  $D \in \mathbb{R}^n$  un disco,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $C_a$  un toro invariante y  $U$  un entorno de  $C_a$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ . Entonces existe un sistema de coordenadas simplécticas  $(\phi, J) = (\phi_1, \dots, \phi_n, J_1, \dots, J_n)$  en  $U$  tales que las  $\phi_i$  son coordenadas angulares en cada toro invariante y las  $J_i$  (comúnmente llamadas variables de acción) son constantes en estos toros.*

*Demostración.* Sea  $\pi : U \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección canónica, entonces  $\pi^{-1}(x)$  es un toro invariante para cada  $x \in D = \pi(U)$ . En cada uno de estos toros, sean  $X_i = X^{F_i}$  y  $(F, \theta)$  las coordenadas obtenidas en el lema anterior,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k,$$

donde las  $a_{ik}$  son funciones constantes en cada toro.

Como  $\omega$  se anula en el toro, no tiene términos en  $d\theta_i \wedge d\theta_j$ . Los términos en  $d\theta_i \wedge dF_j$  serán

$$\omega \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial F_j} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \omega \left( X_k, \frac{\partial}{\partial F_j} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot dF_k \left( \frac{\partial}{\partial F_j} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{ij} = a_{ij}.$$

Por tanto,  $\omega$  es de la forma

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} d\theta_i \wedge dF_j + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} dF_i \wedge dF_j,$$

con  $b_{ij}$  unas ciertas funciones. Además, como  $\omega$  es cerrada, el término correspondiente a  $d\theta_k \wedge dF_i \wedge dF_j$  debe anularse. Este término es exactamente

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial F_j} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial F_i} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k}.$$

El término  $\frac{\partial a_{ki}}{\partial F_j} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial F_i}$  no depende de las variables angulares, luego las  $\frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k}$  son constantes al variar los ángulos  $\theta_k$ . Como las variables  $\theta_k$  son angulares, las  $b_{ij}$  deben ser periódicas, luego

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k} = 0$$

y las  $b_{ij}$  son constantes en cada toro invariante.

Si ahora definimos  $A_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} dF_j$ ,  $B = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} dF_i \wedge dF_j$ ,

$$\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge A_i + B.$$

Como las  $a_{ij}$  y las  $b_{ij}$  son constantes en cada toro invariante podemos ver las  $A_i$  y  $B$  como formas en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, existen 1-formas  $\alpha_i$  y una 2-forma  $\beta$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que

$$A_i = \pi^* \alpha_i \quad B = \pi^* \beta.$$

De aquí tenemos

$$0 = d\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge \pi^* d\alpha_i + \pi^* d\beta,$$

de donde concluimos que  $d\alpha_i = 0$  y  $d\beta = 0$ . En  $\mathbb{R}^n$  todas las formas cerradas son exactas. Por tanto, existen  $I_i$  y  $\gamma$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\alpha_i = dI_i$ ,  $\beta = d\gamma$ .

Finalmente, sean  $J_i = (I_i \circ \pi) = \pi^* I_i$ , tenemos que  $dJ_i = A_i$ , luego

$$\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dJ_i + B.$$

En el sistema de coordenadas  $(\theta, F)$ , la matriz asociada a  $\omega$  es de la forma

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & \frac{\partial J_i}{\partial F_j} \\ \hline -\frac{\partial J_i}{\partial F_j} & b_{ij} \end{array} \right).$$

Como  $\omega$  es regular, el determinante de esta matriz es distinto de cero, luego  $\det \left( \frac{\partial J_i}{\partial F_j} \right) \neq 0$ . Por tanto,  $(\theta, J)$  es un sistema de coordenadas.

Ahora, si escribimos  $\gamma = \sum_{i=1}^n g_i dI_i$ , para algunas funciones  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces podemos tomar unas nuevas coordenadas

$$\phi_i = \theta_i + (g_i \circ \pi).$$

En estas nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d\phi_i \wedge dJ_i &= \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dJ_i + \sum_{i=1}^n d(g_i \circ \pi) \wedge J_i \\ &= \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dJ_i + \sum_{i=1}^n d(g_i \circ \pi) \wedge d(I_i \circ \pi) \\ &= \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dJ_i + \pi^* d\gamma = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge A_i + B = \omega. \end{aligned}$$

Por tanto, hemos encontrado unas coordenadas simplécticas  $(J, \phi)$ , con las  $J_i$  constantes en cada toro invariante y con las  $\phi_i$  coordenadas angulares en estos toros.  $\square$

**Observación 10.15.** Volviendo al caso del oscilador armónico  $n$ -dimensional, notamos que  $\omega = d\alpha$ , con  $\alpha = \sum_{i=1}^n J_i d\phi_i$ , entonces  $J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \alpha$ .

**Corolario 10.16.** *Todo sistema integrable en el sentido de Liouville es integrable por cuadraturas.*

*Demostración.* Dado un punto  $x \in M$ , basta tomar unas variables de acción-ángulo (las  $(J, \phi)$  del teorema). Entonces, como ya hemos visto, las soluciones de las ecuaciones de Hamilton en estas coordenadas quedan escritas en la forma

$$\begin{aligned} J_i(t) &= J_i(0) \\ \phi_i(t) &= \phi_i(0) + \omega_i(F(0))t, \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$ , donde las frecuencias  $\omega_i$  se obtuvieron en términos de funciones conocidas. Así, el sistema queda integrado por cuadraturas.  $\square$

## 11. UN POCO MÁS DE MOVIMIENTO CONDICIONALMENTE PERIÓDICO

Como colofón, una vez tenemos a nuestra disposición la teoría de Arnold-Liouville, sabemos que el flujo en los toros invariantes de los sistemas integrables en el sentido de Liouville será condicionalmente periódico. En esta sección definiremos bien qué significa esto y obtendremos un teorema muy importante sobre este tipo de sistemas.

**Definición 11.1** (Movimiento condicionalmente periódico en  $\mathbb{T}^n$ ). Sean  $\mathbb{T}^n$  el toro  $n$ -dimensional y  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  coordenadas angulares. Se entiende por un *movimiento condicionalmente periódico* en el toro el flujo uniparamétrico dado por

$$\phi(t) = \phi(0) + \omega t$$

con  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  frecuencias constantes en el toro. Las frecuencias  $\omega$  se dicen *independientes* si, sea  $k \in \mathbb{Z}^n$ , entonces  $\langle k, \omega \rangle = 0$  si y sólo si  $k = 0$ .

**Definición 11.2** (Promedios espacial y temporal). Sea  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable Riemann,

1. El *promedio espacial* de  $f$  en  $\mathbb{T}^n$  es el número

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi_1, \dots, d\phi_n.$$

2. El *promedio temporal* de  $f$  en  $\mathbb{T}^n$  es la función

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(\phi_0 + \omega t) dt,$$

definida en los puntos  $\phi_0$  en los que exista el límite.

**Teorema 11.3** (Teorema de los promedios). Si  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable Riemann y las frecuencias  $\omega$  son independientes, el promedio temporal está bien definido en todo el toro  $\mathbb{T}^n$  y coincide en todo punto con el promedio espacial.

*Demostración.* Daremos la demostración en varios pasos:

1. Consideramos funciones de la forma  $e^{i\langle k, \phi \rangle}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ . Si  $k = 0$ , entonces  $\bar{f} = f = f^* = 1$ . Si  $k \neq 0$ ,  $\bar{f}$  es una integral a periodos en funciones trigonométricas, luego es igual a 0. Por otra parte

$$\int_0^T e^{i\langle k, \phi_0 + \omega t \rangle} dt = e^{i\langle k, \phi_0 \rangle} \int_0^T e^{i\langle k, \omega \rangle t} dt = e^{i\langle k, \phi_0 \rangle} \frac{e^{i\langle k, \omega \rangle T} - 1}{i \langle k, \omega \rangle}.$$

Por tanto, el promedio temporal será

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{i\langle k, \phi_0 \rangle} e^{i\langle k, \omega \rangle T} - 1}{i\langle k, \omega \rangle T} = 0.$$

2. Como los promedios dependen linealmente de  $f$ , también coincidirán para los polinomios trigonométricos

$$f = \sum_{|k| < N} f_k e^{i\langle k, \omega \rangle}.$$

3. Dado  $\varepsilon > 0$ , si  $f$  es continua y real por el teorema de Weierstrass podemos aproximarla por un polinomio trigonométrico  $P$  que cumpla  $|f - P| < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Sean  $P_1 = P - \frac{1}{2}\varepsilon$ ,  $P_2 = P + \frac{1}{2}\varepsilon$  entonces

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (P_2 - P_1) d\phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \varepsilon (2\pi)^n = \varepsilon.$$

4. Dado  $\varepsilon > 0$ , si  $f$  es real e integrable Riemann, entonces existen dos funciones continuas  $f_1, f_2$  tales que  $f_1 < f < f_2$  y  $\int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} (f_2 - f_1) d\phi < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Tomando ahora  $P_1, P_2$  polinomios trigonométricos tales que  $P_1 < f_1 < f_2 < P_2$  y  $\int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} (P_i - f_i) d\phi < \frac{1}{3}\varepsilon$ , para  $i = 1, 2$ , entonces

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (P_2 - P_1) d\phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \varepsilon (2\pi)^n = \varepsilon.$$

5. Por último, sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existen dos polinomios trigonométricos  $P_1, P_2$  tales que  $P_1 < f < P_2$  y  $\bar{P}_2 - \bar{P}_1 < \varepsilon$ . Ahora, como  $f < P_2$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(t)) dt < \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t)) dt,$$

luego

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(t)) dt - \bar{f} \right| < \left| \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t)) dt - \bar{f} \right| < \left| \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t)) dt - \bar{P}_2 \right| + |\bar{P}_2 - \bar{f}|.$$

Pero, como  $P_1 < f < P_2$ , por la monotonía de la integral  $\bar{P}_1 < \bar{f} < \bar{P}_2$ , luego  $|\bar{P}_2 - \bar{f}| < |\bar{P}_2 - \bar{P}_1| < \varepsilon$ . Además, como  $P_2$  es un polinomio trigonométrico existe un  $T_0$  tal que, si  $T > T_0$

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t)) dt - \bar{P}_2 \right| < \varepsilon.$$

Finalmente, obtenemos lo que queríamos probar

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(t)) dt - \bar{f} \right| < \left| \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t)) dt - \bar{P}_2 \right| + |\bar{P}_2 - \bar{f}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

luego  $f^*(\phi_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(t)) dt = \bar{f}$ .

□

**Corolario 11.4.** Si las frecuencias son independientes, entonces, para todo  $\phi_0 \in \mathbb{T}^n$ ,

$$\{\phi(t) = \phi_0 + \omega t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es denso en el toro  $\mathbb{T}^n$ .

*Demostración.* En caso contrario, sea un abierto  $D$  del toro que no tiene ningún punto de la trayectoria  $\phi(t)$ . Construimos la función

$$f(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi \notin D \\ \frac{(2\pi)^n}{\int_D d\phi} & \text{si } \phi \in D. \end{cases}$$

Claramente,  $\bar{f} = 1$ , pero  $f^*(\phi_0) = 0$ , lo que contradice el teorema de los promedios.  $\square$

**Corolario 11.5.** Sea  $D \subset \mathbb{T}^n$  un conjunto medible Jordan. Sea  $A_D = \{t \in \mathbb{R} \mid \phi(t) \in D\}$  (que también es medible Jordan) y sea  $\tau_D(T) = \int_0^T \chi_{A_D}(t) dt$ . Entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \frac{\text{Vol}(D)}{(2\pi)^n}.$$

*Demostración.* Aplicamos el teorema a  $\chi_D$ , entonces  $\int_0^T \chi_D(\phi(t)) dt = \int_0^T \chi_{A_D}(t) dt = \tau_D(t)$  y  $\bar{\chi}_D = (2\pi)^{-n} \text{Vol}(D)$ . Finalmente, por el teorema de los promedios

$$\bar{\chi}_D = \frac{\text{Vol}(D)}{(2\pi)^n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_D(\phi(t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_D(T)}{T}.$$

$\square$

## REFERENCIAS

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989. 5, 40
- [2] Wikimedia Commons. Euler angles. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler.png>, 2007. Online; visto el 18 de julio de 2017. 40
- [3] Wikimedia Commons. Heavy symmetric top in terms of Euler angles. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heavy\\_symmetric\\_top\\_euler\\_angles.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heavy_symmetric_top_euler_angles.svg), 2015. Online; visto el 18 de julio de 2017. 40
- [4] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, and J.M. Ruiz. *Álgebra lineal (vol. 2)*. Editorial Sanz y Torres, 2010. 15
- [5] J.M. Gamboa and J.M. Ruiz. *Introducción al estudio de las Variedades Diferenciables*. Editorial Sanz y Torres, 2016. 9
- [6] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson Education India, 2011. 4
- [7] Victor Guillemin. Lecture notes on Theory of Differential Forms. Chapter 5: Cohomology via forms. <http://math.mit.edu/classes/18.952/spring2012/chapter5.pdf>, 2012. Online; visto el 22 de julio de 2017.
- [8] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Curso de física teórica (vol. 1): Mecánica*. Editorial Reverté, 1985. 4
- [9] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2003.
- [10] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010. 30