

TRABAJO DE FIN DE GRADO, JUNIO 2018

# INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA Y LOS SISTEMAS INTEGRABLES

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UCM  
DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ

GUILLERMO GALLEGO

**RESUMEN.** El objetivo principal de este trabajo es demostrar el teorema de Arnold-Liouville, que da una condición suficiente para saber si un *sistema mecánico hamiltoniano* es *integrable por cuadraturas*. A lo largo del texto definimos y desarrollamos todos los conceptos necesarios para el estudio del teorema, dando unas nociones básicas sobre *geometría simpléctica* y su aplicación a la Mecánica Clásica.

*Palabras clave:* Geometría simpléctica, sistemas integrables, Arnold-Liouville, flujos hamiltonianos, ecuaciones de Hamilton, derivada de Lie, campos dependientes del tiempo

**ABSTRACT.** The main goal of this work is to prove Arnold-Liouville theorem, which gives a sufficient condition for knowing whether a *hamiltonian mechanical system* is *integrable by quadratures*. Along the text we define and develop all necessary concepts for the study of the theorem, giving some basic notions about *symplectic geometry* and its application to Classical Mechanics.

*Keywords:* Symplectic geometry, integrable systems, Arnold-Liouville, hamiltonian flows, Hamilton's equations, Lie derivative, time-dependent vector fields

---

*Date:* Última versión: 8 de octubre de 2017.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 37J05, 37J35, 53D05, 58A05, 70H05.

## ÍNDICE

Introducción	2
1. Motivación física. De Newton a Hamilton	3
2. Derivada de Lie	9
3. Campos y formas dependientes del tiempo	13
4. Espacios vectoriales simplécticos	15
5. Variedades simplécticas y symplectomorfismos	18
6. Campos y flujos hamiltonianos	21
7. Corchete de Poisson	24
8. Teoría de Arnold-Liouville	27
9. Un poco más de movimiento condicionalmente periódico	41
Referencias	44

## INTRODUCCIÓN

Una *variedad simpléctica* es una variedad diferenciable de dimensión par en la que se define una forma diferencial  $\omega$  cerrada y no degenerada. La *geometría simpléctica* es el estudio de las variedades simplécticas y es interesante tanto por sus problemas fundamentales como por su aplicación a la Mecánica Clásica (y por extensión al resto de la Física). La forma  $\omega$  induce un isomorfismo entre los campos y las 1-formas de la variedad, que nos permite obtener campos tangentes a partir de funciones definidas sobre la variedad. Las variedades simplécticas constituyen entonces una forma natural de visualizar los sistemas mecánicos ya que las *ecuaciones de Hamilton* nos permiten ver las leyes del movimiento como campos tangentes (luego intrínsecos) a la variedad.

Un *sistema mecánico integrable por cuadraturas* es aquel en el que las ecuaciones del movimiento pueden ser resueltas salvo el cálculo de integrales definidas (cuadraturas), de forma que el problema de estudiar el comportamiento del sistema queda (al menos numéricamente) resuelto. La *teoría de Arnold-Liouville* nos ofrece una forma de saber si un sistema mecánico es integrable por cuadraturas mediante el estudio de la variedad simpléctica que lleva asociado. Tras un desarrollo previo sobre algunos prerrequisitos de geometría diferencial como son la *derivada de Lie* y los *campos dependientes de un parámetro*, y tras afianzar algunos conceptos de álgebra lineal en *espacios vectoriales simplécticos* (espacios vectoriales en los que se define una forma cuadrática antisimétrica y no degenerada), nos sumergimos de lleno en el estudio de la geometría simpléctica, para acabar probando los teoremas fundamentales que componen la teoría de Arnold-Liouville.

## 1. MOTIVACIÓN FÍSICA. DE NEWTON A HAMILTON

La forma más sencilla de describir el movimiento de un sistema de partículas es mediante el formalismo newtoniano, tomando como postulado fundamental de la mecánica clásica el *principio de determinación*: conocidas en cierto instante las posiciones y las velocidades iniciales de todas las partículas que conforman el sistema, es posible determinar sus posiciones y velocidades en cualquier otro instante.

Matemáticamente, este principio se traduce en la existencia de una función<sup>1</sup>, conocida como *fuerza*,  $F : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que cumple la llamada *ecuación de Newton*<sup>2</sup>:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t; \alpha),$$

donde  $n$  es el número de partículas,  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$  es la trayectoria del sistema<sup>3</sup> y  $\alpha$  son unos ciertos parámetros de los que puede depender  $F$ , como por ejemplo las masas o las cargas eléctricas de las diferentes partículas. Para cada sistema concreto, la fuerza se determina experimentalmente. Desde un punto de vista matemático, decimos la fuerza define un *sistema mecánico newtoniano*. En general, cuando hablemos de los distintos tipos de sistema mecánico, llamaremos a sus ecuaciones diferenciales asociadas (Newton, Euler-Lagrange, Hamilton) *ecuaciones del movimiento* o *dinámica del sistema*.

El formalismo newtoniano ofrece una forma muy simple de entender los sistemas mecánicos pero tiene la complicación de que es necesario medir y calcular las tres componentes de la posición y de la velocidad de cada partícula que conforma el sistema. Por verlo con un ejemplo, si queremos describir el movimiento de un barco en un viaje transatlántico deberíamos tomar una referencia cartesiana (tal vez el centro de la Tierra y tres ejes perpendiculares) y describir su posición y velocidad en  $\mathbb{R}^3$  en términos de esta referencia, cuando lo que parece más sencillo es simplemente entender el barco como una partícula moviéndose en la superficie de  $\mathbb{S}^2$  y dar su posición y velocidad en términos de su latitud y longitud. Otro ejemplo lo podemos ver si consideramos el movimiento de una peonza. En este caso, aunque la peonza esté compuesta de cuatrillones de partículas, es posible describir su posición sólo con tres ángulos (el de giro respecto a su eje y los dos de orientación de su eje), o equivalentemente, con la rotación de sus ejes propios respecto a los de una referencia inmóvil exterior (un *sistema de laboratorio*), es decir, con un elemento de  $\text{SO}(3)$ .

De forma más general, podemos considerar sistemas newtonianos sometidos a *ligaduras* entre las partículas que lo conforman. Las posibilidades de movimiento quedan entonces restringidas a un subconjunto de  $\mathbb{R}^{3n}$ . En el caso de que estas ligaduras sean «lo suficientemente buenas» (*holónomas* es el término clásicamente usado en mecánica), es posible entenderlas como unas funciones  $f_1, \dots, f_r : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ , independientes en todo  $x \in \mathbb{R}^{3n}$

<sup>1</sup>A lo largo del texto sólo consideraremos funciones diferenciables ( $C^\infty$  si es necesario), no lo especificaremos en lo que sigue.

<sup>2</sup>Esta ecuación es una forma peculiar de la conocida *segunda ley de Newton*:  $F = ma$ .

<sup>3</sup>A lo largo del texto utilizaremos la notación usual en Física por la que un punto encima de una función dependiente del tiempo indica la derivada temporal:  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ . En particular el punto indica que debe existir esa dependencia respecto del tiempo.

$(d_x f_1 \wedge \cdots \wedge d_x f_r \neq 0)$ , tales que

$$\begin{cases} f_1(x) &= 0 \\ &\vdots \\ f_r(x) &= 0. \end{cases}$$

Por el teorema de la función implícita, las ligaduras definen una subvariedad regular  $M \subset \mathbb{R}^{3n}$  de dimensión  $m = 3n - r$ . En Física, a esta  $M$  se le suele llamar *espacio de configuración* del sistema y a  $m$  su número de *grados de libertad*. Así, llegamos al formalismo lagrangiano.

Un *sistema lagrangiano* viene dado por una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $m$ . Si  $(U, q)$  es una carta en  $M$ , las coordenadas  $q = (q_1, \dots, q_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  suelen llamarse en Física *coordenadas generalizadas* del sistema. Dados  $x \in M$  y  $v \in T_x M$ , las coordenadas de  $v$  suelen denotarse  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$  y suelen llamarse *velocidades generalizadas* del sistema. Esto significa en realidad que, en la carta  $(U, q)$ ,  $v = \sum_{i=1}^m \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ . Como no hay  $t$  respecto de la que derivar, es sólo una notación, pero es consistente. Si  $v = \dot{x}(t)$  tenemos

$$\dot{q}_i = dq_{i,x(t)}(v) = \frac{d}{dt}(q_i \circ x)(t).$$

Un *estado* del sistema lagrangiano vendrá dado por un punto  $(x, v) \in TM$ , donde  $x$  es la posición y  $v$  la velocidad del sistema en dicho estado, y una *trayectoria* vendrá dada por una aplicación

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto (x(t), \dot{x}(t)). \end{aligned}$$

La dinámica del sistema lagrangiano viene dada por lo que se conoce como el *principio de mínima acción*. Este principio puede deducirse a partir del formalismo newtoniano, imponiendo ciertas condiciones a las fuerzas y a partir del *principio de D'Alembert* (o de *los trabajos virtuales*), como puede leerse en [6]. Sin embargo, aquí le daremos un enfoque distinto, postulando directamente el principio de mínima acción, al estilo de Landau y Lifshitz [9]:

«La formulación más general de la ley del movimiento de los sistemas mecánicos es el *principio de mínima acción* (o *principio de Hamilton*).»

En primer lugar, el principio de mínima acción afirma que todo sistema mecánico viene caracterizado por una función  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada *lagrangiano* del sistema. Ahora, suponiendo que en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  el sistema ocupa los estados  $(x_1, v_1)$  y  $(x_2, v_2)$ , la trayectoria que describirá el sistema entre los dos estados será aquella que minimice (o más precisamente, que haga extremal) la integral

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t)).$$

Este funcional  $S$  se conoce como la *acción* del sistema.

Utilizando técnicas de cálculo variacional [1], es posible obtener unas ecuaciones diferenciales para las trayectorias que hacen extremales funcionales de la forma de  $S$ . Las

soluciones de estas ecuaciones son las trayectorias «reales» del sistema lagrangiano. Tenemos así las *ecuaciones de Euler-Lagrange*, que en coordenadas locales se expresan:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] (t) = 0,$$

para  $i = 1, \dots, m$ .

\* \* \*

Dado un sistema newtoniano  $F : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ , se define la *energía cinética* como una aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{3n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2} \langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

Decimos que el sistema es *conservativo* o, equivalentemente que  $F$  es una *fuerza conservativa* si ésta sólo depende de la posición y además es un campo gradiente, es decir, si existe una función  $V : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla  $F(x) = -\nabla V(x)$ . Esta  $V$  toma el nombre de *energía potencial*. En un sistema newtoniano conservativo podemos ver la ecuación de Newton en la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_i} \Big|_{\dot{x}(t)} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big|_{x(t)}, \quad i = 1, \dots, 3n.$$

Ahora, escribiendo la función  $L(x, v) = T(v) - V(x)$ , tenemos

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right]_{(x(t), \dot{x}(t))} = 0, \quad i = 1, \dots, 3n.$$

Así, podemos ver cualquier sistema newtoniano conservativo como un sistema lagrangiano con  $M = \mathbb{R}^{3n}$  y  $L = T - V$ .

En el caso de una variedad diferenciable cualquiera, debemos tener en cuenta que el producto escalar  $\langle u, v \rangle$  deberá ser sustituido por una métrica riemanniana  $g$ . Recordamos que una *métrica riemanniana* en una variedad diferenciable  $M$  se define como una colección de productos escalares

$$g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in M,$$

que satisface la siguiente condición de *diferenciabilidad*: para cada par  $X, Y$  de campos tangentes diferenciables de  $M$  la función

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_x(X_x, Y_x) \end{aligned}$$

es diferenciable. Se llama *variedad riemanniana* a un par  $(M, g)$ , donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $g$  una métrica riemanniana en  $M$ .

Definimos entonces un sistema lagrangiano *natural*, como un par  $((M, g), L)$ , donde  $(M, g)$  es una variedad riemanniana y  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  es de la forma  $L = T - V$ , con  $T : TM \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(x, v) = \frac{1}{2} g_x(v, v)$  y  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Aunque  $V(x)$  está definida en  $M$ , la expresión  $L = T - V$  tiene sentido si entendemos  $V$  como una función definida en  $TM$  con  $V(x, v) = V(x)$ .

\* \* \*

Es una técnica común a la hora de estudiar ecuaciones diferenciales de orden 2

$$f''(x) = F(x, f, f'),$$

realizar un cambio de la forma

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \\ g'(x) = F(x, f, g), \end{cases}$$

lo que convierte la ecuación original de orden 2 en un sistema de dos ecuaciones de orden 1. Esto ofrece una serie de ventajas prácticas y fundamentales, ya que nos permite ver la ecuación diferencial como un campo y su solución como el flujo correspondiente. La misma idea se puede aplicar para estudiar sistemas lagrangianos.

Sea  $((M, g), L)$  un sistema natural. En  $TM$  tenemos las coordenadas  $(q, \dot{q})$ , pero podemos definir otras usando la dualidad asociada a la métrica riemanniana  $g$ , es decir, el isomorfismo de Riesz:

$$\begin{aligned} T_x M &\longrightarrow T_x M^* \\ v &\longmapsto g_x(v, \bullet). \end{aligned}$$

En efecto, las formas

$$p_i = g_x \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}, \bullet \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

que se llaman *momentos canónicos conjugados* o simplemente *momentos*, son independientes y forman una base de  $T_x M^*$ , de modo que  $p = (p_1, \dots, p_m)$  son coordenadas en  $T_x M$ . Explícitamente

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_i \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \right) d\dot{q}_j = \sum_{j=1}^m g_{ij} d\dot{q}_j,$$

es decir,  $p_i(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(q) \dot{q}_j$ , donde  $g_{ij}(q)$  son las componentes de la matriz asociada a  $g_x$  en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right\}$ . Por tanto

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} p(q, \dot{q}) = g_{ji}(q).$$

Así,  $(q, p)$  son unas nuevas coordenadas en  $TM$ . Ahora, si recordamos que

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \dot{q}_i g_{ij} \dot{q}_j - V(q),$$

resulta que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^m g_{ij} \dot{q}_j.$$

Consideramos ahora una función  $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , que en las coordenadas  $(q, \dot{q})$  es

$$H(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^m p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}),$$

con las  $p$  dadas en función de las  $\dot{q}$  mediante la relación  $p_i(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(q) \dot{q}_j$ . Derivando a ambos lados de la expresión respecto de  $\dot{q}_j$  obtenemos

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_i + p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

que nos lleva a

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}_i \right) g_{ij} = 0.$$

Como la matriz  $(g_{ij})_{i,j}$  es regular,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i.$$

Si derivamos respecto de  $q_j$  tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Finalmente, usando la relación recién obtenida,

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = - \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Para ver cómo será la dinámica del sistema en estas coordenadas, consideramos una trayectoria  $(x(t), \dot{x}(t))$ , que en las nuevas coordenadas se expresa  $(q(t), p(t))$ , con  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t))$  y  $p_i(t) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(q(t)) \dot{q}_j(t)$ . Nótese que aquí el punto sí expresa derivación respecto del tiempo, es decir, que las  $p$  dependen de las  $q$ . En este caso, por la ecuación de Euler-Lagrange, la segunda de las relaciones anteriores queda:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}(t) = - \frac{\partial L}{\partial q_j}(t) = - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)(t) = - \frac{d}{dt} p_j(t) = - \dot{p}_j(t).$$

Obtenemos entonces un sistema de EDOs de orden 1 equivalentes a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t) \\ \dot{p}_i(t) &= - \frac{\partial H}{\partial q_i}(t), \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Éstas son las *ecuaciones de Hamilton*.

Si queremos dotar de sentido físico a esta función  $H$ , conocida como *hamiltoniano* del sistema, consideremos un sistema natural con lagrangiano  $L = T - V$ . Entonces  $p_i = \sum_{j=1}^m g_{ij}(q) \dot{q}_j$  y  $T(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^m \frac{1}{2} \dot{q}_i g_{ij}(q) \dot{q}_j$ , por tanto

$$H(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^m p_i(q, \dot{q}) \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^m (g_{ij} \dot{q}_j) \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \dot{q}_i g_{ij} \dot{q}_j + V(q) = T(q, \dot{q}) + V(q),$$

Es decir, el hamiltoniano es exactamente  $T + V$ , la *energía total* del sistema.

De esta forma, podemos entender la dinámica de un sistema lagrangiano como la definición de un campo tangente al fibrado tangente del espacio de configuración, cuyas curvas

integrales contendrán toda la información sobre la evolución temporal del sistema. En coordenadas locales este campo tangente se expresa

$$X = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

\* \* \*

La siguiente pregunta que cabe hacerse es si será posible construir este campo de forma independiente de las coordenadas a partir de la especificación de un hamiltoniano  $H : TM \rightarrow \mathbb{R}$ . La construcción es sencilla, basta considerar un punto  $\zeta \in TM$ , con coordenadas  $(q, p)$  y la 1-forma  $\alpha$  que localmente se expresa

$$\alpha = \sum_{i=1}^m p_i dq_i.$$

Entonces, la 2-forma

$$\omega = d\alpha = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i,$$

es cerrada (porque es exacta) y no degenerada.

Usando esta forma se puede construir un isomorfismo lineal, dado  $\zeta \in TM$ ,

$$\begin{aligned} J = I^{-1} : T_\zeta(TM) &\longrightarrow (T_\zeta(TM))^* \\ \xi &\longmapsto \omega(\xi, \bullet). \end{aligned}$$

Ahora, sea el campo  $X^H = IdH$ , es decir, tal que  $dH = \omega(X^H, \bullet)$ , es fácil comprobar que en coordenadas locales se expresará tal y como queríamos:

$$X^H = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

En efecto, si  $X^H = \sum_{i=1}^m \left( a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$ ,

$$\begin{aligned} a_i &= \omega \left( X^H, \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = dH \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -b_i &= \omega \left( X^H, \frac{\partial}{\partial q_i} \right) = dH \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

ya que  $dH = \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$ .

Obsérvese que el único elemento realmente crucial en la construcción de este campo ha sido la 2-forma  $\omega$ . Una forma de esas características induce sobre  $TM$  la estructura de *variedad simpléctica*. El estudio de las variedades simplécticas y sus propiedades es la *geometría simpléctica*. A partir de la sección 4, introduciremos el formalismo de la geometría simpléctica, lo que nos permitirá enunciar la *formulación canónica* de la mecánica clásica y resolver alguno de sus problemas.



## 2. DERIVADA DE LIE

Antes de comenzar con el estudio de la geometría simpléctica, conviene recordar el concepto de la derivada de Lie de campos, extenderlo a formas, y obtener una serie de resultados que nos serán útiles más adelante.

Empecemos recordando la definición del corchete de Lie de campos, su estudio detallado puede encontrarse en [5].

**Definición 2.1** (Corchete de Lie). Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\mathfrak{X}(M)$  el conjunto de los campos diferenciables en  $M$ , se define el *corchete de Lie* como la aplicación

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \end{aligned}$$

donde la composición se entiende si vemos los campos como aplicaciones  $\mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Recordamos también que podemos ver el corchete de Lie de otra forma equivalente. Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $a \in M$ ,  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\varphi$  un flujo en  $M$  y  $X$  su generador infinitesimal. Entonces

$$[X, Y]_a = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{-t,*}(Y_{\varphi_t(a)}) - Y_a}{t}.$$

En vista de esta fórmula, se define la *derivada de Lie de  $Y$  respecto de  $X$*  como  $L_X Y = [X, Y]$ . Por último, recordamos otro resultado muy importante que usaremos posterior-

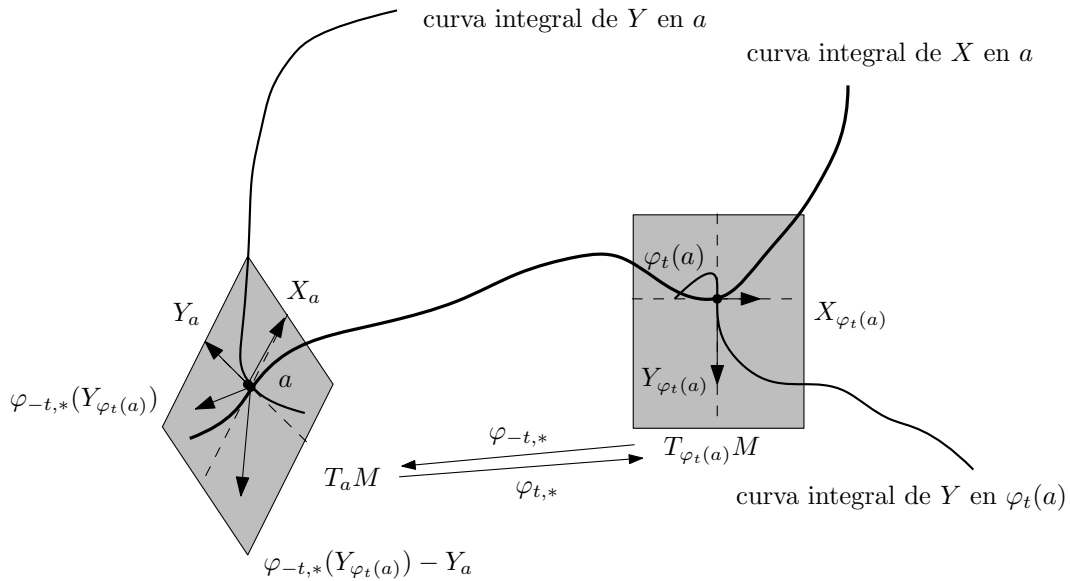


FIGURA 1. Visión geométrica de la derivada de Lie

mente:

**Proposición 2.2.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, sean  $\varphi, \psi$  flujos en  $M$  y sean  $X, Y$  sus generadores infinitesimales, respectivamente. Entonces los flujos conmutan si y sólo si lo hacen sus generadores infinitesimales (es decir,  $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$  si y sólo si  $[X, Y] = 0$ ).

Ya estamos en disposición de dar una definición más general de la derivada de Lie:

**Definición 2.3** (Derivada de Lie). Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $X$  un campo en  $M$ , y  $\varphi$  su flujo. Se define la *derivada de Lie respecto de  $X$*  como la aplicación

$$\begin{aligned} L_X : \Gamma^r(M) &\longrightarrow \Gamma^r(M) \\ \omega &\longmapsto L_X \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega - \omega}{t} \end{aligned}$$

(es decir,  $(L_X \omega)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega_{\varphi_t(x)} - \omega_x}{t}$  para  $x \in M$ ).

Vamos a obtener ahora un par de propiedades de la derivada de Lie.

**Proposición 2.4.** Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $\omega \in \Gamma^r(M)$ ,  $X, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ , se cumple

$$L_X \omega(X_1, \dots, X_r) = X \omega(X_1, \dots, X_r) - \sum_{i=1}^r \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r)$$

*Demostración.* Vamos a probarlo sólo para el caso en el que  $\omega$  es una 2-forma para simplificar su lectura. El cálculo general es completamente análogo. En primer lugar,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\varphi_t^* \omega)(X_1, X_2) - \omega(X_1, X_2)] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} [(\varphi_t^* \omega)(X_1, X_2) - \varphi_t^*(\omega(X_1, X_2))] \right] \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} [\varphi_t^*(\omega(X_1, X_2)) - \omega(X_1, X_2)] \right]. \end{aligned}$$

El segundo término de esta expresión es exactamente

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} [\varphi_t^*(\omega(X_1, X_2)) - \omega(X_1, X_2)] \right] = \left( \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \varphi_t \right) (\omega(X_1, X_2)) = X \omega(X_1, X_2),$$

mientras que el primer término, en  $x \in M$  es

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} [(\varphi_t^* \omega)(X_1, X_2) - \varphi_t^*(\omega(X_1, X_2))] \right] \bigg|_x \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\omega_{\varphi_t(x)}(d_x \varphi_t(X_{1,x}), d_x \varphi_t(X_{2,x})) - \omega_{\varphi_t(x)}(X_{1,\varphi_t(x)}, X_{2,\varphi_t(x)})] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \omega_{\varphi_t(x)} \left[ \frac{1}{t} (d_x \varphi_t(X_{1,x}) - X_{1,\varphi_t(x)}), d_x \varphi_t(X_{2,x}) \right] + \lim_{t \rightarrow 0} \omega_{\varphi_t(x)} \left[ X_{1,\varphi_t(x)}, \frac{1}{t} (d_x \varphi_t(X_{2,x}) - X_{2,\varphi_t(x)}) \right] \\ &= -\omega_x([X, X_1]_x, X_{2,x}) - \omega_x(X_{1,x}, [X, X_2]_x). \end{aligned}$$

Comprobemos que, en efecto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d_x \varphi_t(X_{1,x}) - X_{1,\varphi_t(x)}) = [X, X_1]_x,$$

y es análogo para  $[X, X_2]_x$ . Basta «sacar factor común» a  $d_x \varphi_t$ , de modo que

$$\frac{1}{t} (d_x \varphi_t(X_{1,x}) - X_{1,\varphi_t(x)}) = -d_x \varphi_t \left( \frac{(d_x \varphi_t)^{-1}(X_{1,\varphi_t(x)}) - X_{1,x}}{t} \right).$$

Ahora,  $(d_x \varphi_t)^{-1} = d_{\varphi_t(x)} \varphi_{-t} = \varphi_{-t,*}$  y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi_{-t,*}(X_{1,\varphi_t(x)}) - X_{1,x}) = [X, X_1]_x.$$

Volviendo a agrupar, tenemos lo que se quería demostrar.  $\square$

**Proposición 2.5.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\alpha \in \Gamma^r(M)$ . Se cumple*

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} X_i \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}), \end{aligned}$$

donde el circunflejo en un campo quiere decir que este campo se omite.

*Demostración.* En este caso probaremos solo la identidad más sencilla

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]),$$

válida para el caso en el que  $\alpha$  es de grado 1. El caso general es completamente análogo.

En primer lugar, escribimos todo en coordenadas locales:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_i \alpha_i d\mathbf{x}_i, \quad d\alpha = \sum_{i,j} d\alpha_i \wedge d\mathbf{x}_j = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{x}_j} d\mathbf{x}_i \wedge d\mathbf{x}_j, \\ X &= \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad [X, Y] = \sum_{i,j} \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial \mathbf{x}_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}. \end{aligned}$$

Ahora, operando en estas coordenadas:

$$\begin{aligned} \alpha(X) &= \sum_i \alpha_i X_i, \quad d\alpha(X, Y) = \sum_{i,j} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{x}_j} (X_j Y_i - X_i Y_j), \\ \alpha([X, Y]) &= \sum_{i,j} \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial \mathbf{x}_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \alpha_j = \sum_{i,j} \alpha_i X_j \frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{x}_j} - \sum_{i,j} \alpha_i Y_j \frac{\partial X_i}{\partial \mathbf{x}_j}, \\ X(\alpha Y) &= \sum_{i,j} \alpha_i X_j \frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{x}_j} + Y_i X_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{x}_j}, \quad Y(\alpha X) = \sum_{i,j} \alpha_i Y_j \frac{\partial X_i}{\partial \mathbf{x}_j} + X_i Y_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{x}_j}. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$X(\alpha(Y)) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]) = \sum_{i,j} Y_i X_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{x}_j} - X_i Y_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{x}_j} = d\alpha(X, Y).$$

$\square$

Antes de seguir, vamos a introducir una nueva operación para formas:

**Definición 2.6** (Producto interior). Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X$  un campo en  $M$ , se define el *producto interior*  $i_X : \Gamma^{r+1}(M) \rightarrow \Gamma^r(M)$  por

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_r) = \omega(X, X_1, \dots, X_r),$$

para  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ .

Podemos probar ya una serie de fórmulas, debidas a Élie Cartan<sup>5</sup>, que nos serán de gran utilidad posteriormente.

**Teorema 2.7** (Fórmulas de Cartan). *Sea  $X$  un campo en una variedad  $M$ , y consideramos la derivada de Lie  $L_X$ , el producto interior  $i_X$ , y la diferencial exterior  $d$ . Entonces se cumplen las siguientes fórmulas:*

1.  $i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$ , para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,
2.  $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$  y
3.  $L_X \circ d = d \circ L_X$ .

*Demostración.*

1. Sean  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces

$$\begin{aligned} L_X[(i_Y \omega)(X_1, \dots, X_r)] &= X\omega(Y, X_1, \dots, X_r) - \sum_{i=1}^r \omega(Y, X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r), \\ i_Y[(L_X \omega)(X_1, \dots, X_r)] &= X\omega(Y, X_1, \dots, X_r) - \sum_{i=1}^r \omega(Y, X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r) \\ &\quad - \omega([X, Y], X_1, \dots, X_r). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]} \omega(X_1, \dots, X_r) &= \omega([X, Y], X_1, \dots, X_r) \\ &= L_X[(i_Y \omega)(X_1, \dots, X_r)] - i_Y[(L_X \omega)(X_1, \dots, X_r)]. \end{aligned}$$

2. Usando la relación entre el corchete de Lie y la diferencial exterior que obtuvimos antes, tenemos

$$\begin{aligned} (d(i_X \alpha))(X_1, \dots, X_r) &= \sum_i (-1)^{i-1} X_i \alpha(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(X, [X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (i_X(d\alpha))(X_1, \dots, X_r) &= \sum_i (-1)^i X_i \alpha(X, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \alpha(X, [X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r) \\ &\quad + X\alpha(X_1, \dots, X_r) + \sum_j (-1)^j \alpha([X, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r). \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>En la literatura, la segunda de estas fórmulas suele llamarse «fórmula mágica de Cartan».

Sumando ambas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} (di_X\alpha + i_Xd\alpha)(X_1, \dots, X_r) &= X\alpha(X_1, \dots, X_r) \\ &\quad + \sum_j (-1)^j (-1)^{j-1} \alpha(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_r) \\ &= X\alpha(X_1, \dots, X_r) - \sum_j \alpha(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_r). \end{aligned}$$

3. Utilizando (2) y que  $d \circ d = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} L_X \circ d &= (i_X \circ d) \circ d + (d \circ i_X) \circ d = d \circ i_X \circ d, \\ d \circ L_X &= d \circ (i_X \circ d) + d \circ (d \circ i_X) = d \circ i_X \circ d, \end{aligned}$$

luego  $L_X \circ d = d \circ L_X$ .

□

### 3. CAMPOS Y FORMAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

**Definición 3.1** (Campos y formas dependientes del tiempo). Sea  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y  $M$  una variedad diferenciable:

1. Un *campo tangente (diferenciable) dependiente del tiempo* de  $M$  es una aplicación

$$\begin{aligned} X : M \times J &\longrightarrow TM \\ (x, t) &\longmapsto (x, X_{t,x}) \end{aligned}$$

que es diferenciable como aplicación entre variedades.

2. Una *forma diferencial (diferenciable) de grado  $r$  dependiente del tiempo* de  $M$  es una aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : M \times J &\longrightarrow \Lambda^r(M) \\ (x, t) &\longmapsto (x, \alpha_{t,x}) \end{aligned}$$

tal que la función

$$\begin{aligned} \alpha(X_1, \dots, X_r) : M \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \alpha_{t,x}(X_{1,x}^t, \dots, X_{r,x}^t) \end{aligned}$$

es diferenciable para cualesquiera  $r$  campos  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Observación 3.2.** Un campo y una forma dependientes del tiempo se expresan en una carta  $(U, \mathbf{x})$  en la forma

$$\begin{aligned} X_{t,x} &= \sum X_i(x, t) \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_x \\ \alpha_{t,x} &= \sum \alpha_i(x, t) d\mathbf{x}_i|_x. \end{aligned}$$

La diferenciabilidad de  $X$  y  $\alpha$  es equivalente a la de sus componentes  $X_i, \alpha_i$  como funciones  $U \times J \rightarrow \mathbb{R}$ .

Tiene sentido decir ahora qué entendemos por derivar una forma respecto al tiempo. Sea  $\alpha_t$  una  $r$ -forma dependiente del tiempo, la *derivada temporal* de  $\alpha_t$  es

$$\frac{d}{dt}\alpha_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_{t+h} - \alpha_t}{h}.$$

El siguiente teorema nos permite integrar campos dependientes del tiempo:

**Teorema 3.3.** *Sea  $X : J \times M \rightarrow TM$  un campo dependiente del tiempo. Existen un abierto  $V \subset J \times J \times M$  y una función  $\varphi : V \rightarrow M$  tal que para cada  $s \in J$  y para cada  $x \in M$ , el conjunto  $V^{(s,x)} = \{t \in J \mid (t, s, x) \in V\}$  es un intervalo abierto que contiene a  $s$  y la curva  $\gamma : V^{(s,x)} \rightarrow M$  definida por  $\gamma(t) = \varphi(t, s, x)$  es la única solución maximal al problema de valor inicial*

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= X_{t, \gamma(t)}, \\ \gamma(s) &= x.\end{aligned}$$

Equivalentemente, podemos ver el problema de valor inicial en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s, x) &= X_{t, \varphi(t, s, x)}, \\ \varphi(t, s, x) &= x.\end{aligned}$$

Esta  $\varphi$  recibe el nombre de *flujo dependiente del tiempo*. Nótese que en general cada  $\varphi(t, s, \bullet)$  no tiene por qué ser un difeomorfismo, es decir, en general el flujo no es completo.

Ahora podemos generalizar la derivada de Lie de formas para campos dependientes del tiempo:

$$(L_{X_t}\omega)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega_{\varphi_t(x)} - \omega_x}{t},$$

para  $x \in M$ .

Finalmente, tenemos una fórmula que nos relaciona la derivada temporal con la derivada de Lie de formas.

**Proposición 3.4.** *Sea  $X : J \times M \rightarrow TM$  un campo dependiente del tiempo y  $\varphi : V \rightarrow M$  el flujo dependiente del tiempo asociado. Si  $\alpha_t$  es una  $r$ -forma dependiente del tiempo, entonces para cualquier  $(t_1, t_0, x) \in V$*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} (\varphi_{t,t_0}^* \alpha_t)_x = \left( \varphi_{t_1,t_0}^* \left( L_{X_{t_1}} \alpha_{t_1} + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} \alpha_t \right) \right)_x,$$

donde  $\varphi_{t,s} = \varphi(t, s, \bullet)$ .

**Observación 3.5.** Podemos ver esta fórmula en una notación más compacta:

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha_t = \varphi_t^* \left( L_{X_t} \alpha_t + \frac{d}{dt} \alpha_t \right).$$

*Demostración.* En primer lugar

$$\frac{\varphi_{t+h}^* \alpha_{t+h} - \varphi_t^* \alpha_t}{h} = \frac{\varphi_{t+h}^* \alpha_{t+h} - \varphi_t^* \alpha_{t+h} + \varphi_t^* \alpha_{t+h} - \varphi_t^* \alpha_t}{h},$$

y reagrupando, tenemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\alpha_{t+h} - \varphi_t^*\alpha_t}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\alpha_{t+h} - \varphi_t^*\alpha_{t+h}}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^*\alpha_{t+h} - \varphi_t^*\alpha_t}{h}.$$

Finalmente, «sacando factor común»  $\varphi_t^*$  y aplicando las definiciones de derivada de Lie y derivada temporal de formas llegamos a

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha_t = \varphi_t^* \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_h^*\alpha_t - \alpha_t}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_{t+h} - \alpha_t}{h} \right) = \varphi_t^* \left( L_{X^t}\alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t \right).$$

□

#### 4. ESPACIOS VECTORIALES SIMPLÉCTICOS

**Definición 4.1** (Espacio vectorial simpléctico). Un *espacio vectorial simpléctico* es un par ordenado  $(V, \omega)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

es una forma bilineal antisimétrica no degenerada.

**Proposición 4.2.**

1. Sea  $\omega$  una forma bilineal antisimétrica sobre un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita y sea  $M$  su matriz asociada. Entonces existe  $n \leq \frac{1}{2} \dim(V)$  tal que  $M$  es congruente con

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad  $n \times n$ .

2. Si  $(V, \omega)$  es un espacio vectorial simpléctico de dimensión finita, entonces  $\dim(V) = 2n$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.*

1. Es un resultado conocido de álgebra lineal [4].
2. Por (1),  $\det(\omega) \neq 0$  si y sólo si la matriz con la que es congruente es exactamente

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego  $\dim(V) = 2n$ .

□

**Definición 4.3** (Base simpléctica). Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico, se dice que  $\mathcal{B} \subset V$  es una *base simpléctica* de  $V$  si la matriz asociada a  $\omega$  en  $\mathcal{B}$  es

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

**Observación 4.4.** Claramente, por la proposición anterior todo espacio vectorial simpléctico de dimensión finita tiene una base simpléctica.

**Observación 4.5.** Llamaremos *n-ésima forma simpléctica canónica* a la forma  $\omega_n : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  de matriz asociada  $J_n$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Llamaremos *espacio simpléctico canónico n-dimensional* a  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_n)$ . Deducimos también de la proposición anterior que todo espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$  es isomorfo a  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_n)$ .

**Observación 4.6.** Podemos ver la forma bilineal  $\omega$  de matriz asociada  $J_n$  como una 2-forma alternada en  $V$ . Si  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$  es una base simpléctica y  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n\}$  es su base dual, entonces

$$\omega = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} (-1)^\sigma (\psi_i \otimes \varphi_i)^\sigma \right) = \sum_{i=1}^n \psi_i \wedge \varphi_i.$$

**Definición 4.7** (Aplicación simpléctica). Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico, decimos que una aplicación lineal  $A : V \rightarrow V$  es *simpléctica* si

$$\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)$$

para cualesquiera  $v, w \in V$ .

**Proposición 4.8.** Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$  y  $A : V \rightarrow V$  lineal. Son equivalentes:

1.  $A$  es simpléctica.
2.  $J_n = A^T J_n A$ .
3. Si  $\mathcal{B}$  es una base simpléctica, entonces  $\mathcal{B}' = A(\mathcal{B})$  es una base simpléctica.

*Demostración.*

(1)  $\implies$  (2):

Basta evaluar  $\omega$  en una base simpléctica.

$$\begin{aligned} \omega(Av, Aw) &= v^T A^T J_n Aw \\ \omega(v, w) &= v^T J_n w. \end{aligned}$$

Como  $\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)$  para cualesquiera  $v, w \in V$ , entonces

$$A^T J_n A = J_n.$$

(2)  $\implies$  (3):

Si  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_{2n}\}$  y  $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_{2n}\}$  la componente  $(i, j)$  de la matriz asociada a  $\omega$  en la base  $\mathcal{B}'$  es

$$\omega(e'_i, e'_j) = e_i'^T J_n e_j' = e_i'^T A^T J_n A e_j = e_i^T J_n e_j = \omega(e_i, e_j).$$

Como  $\mathcal{B}$  es simpléctica, la matriz asociada a  $\omega$  en  $\mathcal{B}'$  es  $J_n$ , es decir,  $\mathcal{B}'$  es simpléctica.

(3)  $\implies$  (1):



Tomamos  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  como antes y sabemos que ambas son simplécticas. Entonces

$$v = \sum_{i=1}^{2n} v_i e_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{2n} w_i e_i$$

y

$$Av = \sum_{i=1}^{2n} v_i A e_i = \sum_{i=1}^{2n} v_i e'_i$$

$$Aw = \sum_{i=1}^{2n} w_i A e_i = \sum_{i=1}^{2n} w_i e'_i.$$

Por tanto,

$$\omega(Av, Aw) = \omega\left(\sum_{i=1}^{2n} v_i e'_i, \sum_{j=1}^{2n} w_j e'_j\right) = \sum_{i,j=1}^{2n} v_i w_j \omega(e'_i, e'_j) = \sum_{i,j=1}^{2n} v_i w_j \omega(e_i, e_j) = \omega(v, w).$$

Luego  $A$  es simpléctica. □

**Proposición 4.9.** *Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$ , el conjunto de las aplicaciones lineales simplécticas de  $V$  es un subgrupo de  $\text{GL}(2n)$ . Este grupo se conoce como  $n$ -ésimo grupo simpléctico y se denota por  $\text{Sp}(n)$ .*

*Demostración.*

1. Sea  $A$  una aplicación simpléctica,

$$1 = \det(J_n) = \det(A^T J_n A) = \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2.$$

Luego  $\det(A) \neq 0$ , es decir,  $A \in \text{GL}(2n)$ .

2. Sea  $A$  una aplicación simpléctica y  $A^{-1}$  su inversa. Multiplicando por la derecha por  $A^{-1}$  y por la izquierda por  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  en  $J_n = A^T J_n A$  tenemos

$$J_n = (A^{-1})^T J_n A^{-1}.$$

Por tanto,  $A^{-1}$  es simpléctica.

3. Sean  $A, B$  simplécticas.

$$(AB)^T J_n AB = B^T A^T J_n AB = B^T J_n B = J_n,$$

luego  $AB$  también es simpléctica. □

Podemos probar un resultado aún más fuerte sobre el grupo simpléctico:

**Proposición 4.10.** *Toda aplicación lineal simpléctica tiene determinante 1.*

*Demostración.* Sea  $\omega_n$  la forma simpléctica canónica,  $\Omega = \omega_n \wedge \cdots \wedge \omega_n$  es una forma de grado máximo, luego, por el teorema del determinante,  $f^*(\Omega) = \det(f)\Omega$ . Ahora, como  $f$  es simpléctica,

$$f^*(\Omega) = (\omega_n \circ f) \wedge \cdots \wedge (\omega_n \circ f) = \omega_n \wedge \cdots \wedge \omega_n = \Omega.$$

Por tanto,  $\det(f) = 1$ . □

## 5. VARIEDADES SIMPLÉCTICAS Y SIMPLECTOMORFISMOS

**Definición 5.1** (Variedad simpléctica). Una *variedad simpléctica* es un par ordenado  $(M, \omega)$  donde  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $2n$  y  $\omega \in \Gamma^2(M)$  es cerrada y no degenerada (para todo  $x \in M$  y para todo  $\xi \in T_x M$  existe  $\eta \in T_x M$  tal que  $\omega(\xi, \eta) \neq 0$ ).

**Definición 5.2** (Carta simpléctica). Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica, una *carta simpléctica en torno a un punto*  $x \in M$  es un par  $(U, (q, p))$ , donde  $U \subset M$  es un entorno de  $x$  y  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  es un sistema de coordenadas en  $x$  tal que:

$$(1) \quad \omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Vamos a probar ahora uno de los resultados fundamentales de la geometría simpléctica, que confirma una de las intuiciones que podríamos tener: toda variedad simpléctica es localmente como un espacio vectorial simpléctico.

**Teorema 5.3** (Darboux). *Sea  $\omega$  una 2-forma no degenerada en una variedad  $M$  de dimensión  $2n$ . Entonces  $\omega$  es cerrada si y sólo si para cada  $x \in M$  hay una carta  $(U, (q, p))$  en torno a  $x$ , donde  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  es un sistema de coordenadas que cumple (1).*

*Demostración.* En primer lugar, inmediatamente si  $\omega$  tiene esa forma entonces es cerrada. El procedimiento a seguir para demostrar la otra implicación del teorema es el siguiente:

1. Vamos a encontrar un entorno  $U \subset M$  y un difeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tal que  $\omega_1 = (\varphi^*)^{-1}\omega$  es una forma bilineal antisimétrica con coeficientes constantes en  $\mathbb{R}^{2n}$ .
2. Tomamos  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  un cambio de base tal que la matriz asociada a  $\omega_1$  en la nueva base es  $J_n$ .
3. Tomamos como sistema de coordenadas  $(q, p) = \psi \circ \varphi$ , entonces  $(U, (q, p))$  es una carta simpléctica en torno a  $x$ .

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^{2n} \\
 \searrow (q,p) & & \downarrow \psi \\
 & & \mathbb{R}^{2n}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \omega & \xleftarrow{\varphi^*} & \omega_1 \\
 \nwarrow (q,p)^* & & \uparrow \psi^* \\
 & & \omega_n
 \end{array}$$

Falta hallar  $\omega_1$  y  $\varphi$ . Sea  $\omega_1 = \omega_x$ , que tiene coeficientes constantes, y sea

$$\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega = \omega + t(\omega_1 - \omega),$$

para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $\omega_{t,x} = \omega_x$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_t$  es no degenerada en  $x$ . Por tanto, sea  $J$  intervalo abierto acotado tal que  $[0, 1] \in J$ , existe un entorno  $U \subset M$  de  $x$  en el que  $\omega_t$  es no degenerada para cada  $t \in \bar{J}$ .

Ahora, como  $\omega_1 - \omega$  es cerrada, podemos tomar  $U$  tal que sea difeomorfo a  $\mathbb{R}^{2n}$ , luego existirá una 1-forma  $\alpha$  en  $U$  tal que  $\omega_1 - \omega = d\alpha$ . Además, como  $\alpha$  está definida salvo una constante, podemos asumir  $\alpha_x = 0$ .

Para  $t \in J$ , sea  $X_t$  el campo dependiente del tiempo tal que  $i_{X_t}\omega_t = -\alpha$  y con  $X_{t,x} = 0$ . Ahora, si  $\varphi : V \rightarrow U$  es el flujo dependiente del tiempo asociado a  $X$ , entonces  $\varphi(t, 0, x) = x$  para todo  $t \in J$ , luego  $J \times \{0\} \times \{x\} \subset V$ . Como  $V$  es abierto en  $J \times J \times M$  y  $[0, 1]$  es compacto, existe un entorno  $U_0$  de  $x$  tal que  $[0, 1] \times \{0\} \times U_0 \subset V$ .

Por tanto, si  $\varphi_t = \varphi(t, 0, \bullet)$  para cada  $t \in [0, 1]$  se sigue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) &= \varphi_t^*(L_{X_t}\omega_t) + \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right) = \varphi_t^*(i_{X_t}(d\omega) + d(i_{X_t}\omega)) + \varphi_t^*(\omega_1 - \omega) \\ &= \varphi_t^*(0 - d\alpha + \omega_1 - \omega) = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de Cartan. De modo que  $\varphi_1^*\omega_1 = \varphi_0^*\omega_0 = \omega$ . Además, como  $\varphi_1^*$  es simpléctica, es un isomorfismo, lo que implica que  $\varphi_1$  es un difeomorfismo local. Así, reduciendo el entorno si es necesario, encontramos la carta que estábamos buscando.  $\square$

Vamos a dar ahora dos propiedades fuertes de las variedades simplécticas:

**Proposición 5.4.** *Toda variedad simpléctica es orientable.*

*Demostración.* Como  $\omega$  es no degenerada,  $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$  es una forma de grado máximo nunca nula, luego la variedad es orientable.  $\square$

**Proposición 5.5.** *Si  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica compacta y sin borde, entonces su segundo grupo de cohomología de de Rham es no trivial.*

*Demostración.* Consideramos en  $M$  la forma de volumen  $\Omega = \frac{1}{n!}\omega^n$ . Ahora, si  $\omega = d\alpha$ , entonces  $\omega^n = d(\alpha \wedge \omega^{n-1})$ . Por el teorema de Stokes

$$\text{Vol}(M) = \int_M \Omega = \int_M d(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M = \emptyset} \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0,$$

que es absurdo porque el volumen de  $M$  no puede ser 0. Por tanto,  $\omega$  es cerrada y no es exacta, luego  $[\omega] \neq 0$  y  $H^2(M) \neq \{0\}$ .  $\square$

**Corolario 5.6.**  $\mathbb{S}^{2n}$  admite una estructura simpléctica si y sólo si  $n = 1$ .

*Demostración.* Sean  $\omega$  una 2-forma en  $\mathbb{S}^n$ ,  $n > 2$ ,  $x \in \mathbb{S}^n$  y  $U$  un disco entorno de  $x$  ( $U \simeq \mathbb{R}^n$ ). Entonces existe una 1-forma  $\alpha$  definida en  $U$  tal que  $\omega = d\alpha$  en  $U$ . Sea  $\theta$  una función meseta que valga 1 en  $U$  y 0 fuera de un entorno  $V$  de  $U$ , la forma

$$\omega_1 = \omega - \theta d\alpha$$

es cerrada con soporte compacto en  $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ , que es difeomorfa, por proyección estereográfica  $\varphi$ , a  $\mathbb{R}^n$ . Por tanto, existe una 1-forma  $\beta$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $d\beta = \varphi^* \omega_1$ . Con todo esto, tenemos

$$\omega = d(\theta\alpha + (\varphi^{-1})^* \beta),$$

luego  $\omega$  es exacta en  $\mathbb{S}^n$  y

$$H^2(\mathbb{S}^n) = \{0\}.$$

Si  $n = 2$ , como  $\mathbb{S}^2$  es conexa, compacta y sin borde,

$$H^2(\mathbb{S}^2) = H^0(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}.$$

Por la proposición anterior, si  $\mathbb{S}^{2n}$  admitiera una estructura simpléctica tendría que ser  $H^2(\mathbb{S}^{2n}) \neq \{0\}$ , que solamente se da en el caso  $n = 1$ .  $\square$

Para terminar la sección, vamos a estudiar los isomorfismos en la categoría de las variedades simplécticas:

**Definición 5.7** (Simplectomorfismo). Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo. Decimos que  $f$  es un *simplectomorfismo* o una *transformación canónica* <sup>6</sup> si

$$f^* \omega = \omega$$

**Proposición 5.8.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo. Son equivalentes:

1.  $f$  es un simplectomorfismo.
2. Para cada  $x \in M$ , la aplicación lineal  $d_x f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  es simpléctica.
3. Para cada  $x \in M$ , si  $(U, (q, p))$  es una carta simpléctica en torno a  $x$ ,  $(f(U), (q \circ f, p \circ f))$  es una carta simpléctica en torno a  $f(x)$ .

*Demostración.*

(1)  $\implies$  (2):

$$\omega_x = (f^* \omega)_x = \omega_{f(x)} \circ d_x f,$$

donde  $\omega_x$  es una forma bilineal antisimétrica no degenerada en  $T_x M$  y  $\omega_{f(x)}$  lo mismo en  $T_{f(x)} M$ . Tomando bases simplécticas  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  en  $T_x M$  y  $T_{f(x)} M$ , respectivamente, las formas  $\omega_x, \omega_{f(x)}$  quedan en la forma canónica  $\omega_n$ . Por tanto

$$\omega_n = \omega_n \circ d_x f,$$

luego  $d_x f$  es una aplicación lineal simpléctica.

(2)  $\implies$  (1):

Si  $d_x f$  es simpléctica, para cada  $x \in M$  en las bases adecuadas tenemos

$$\omega_x = \omega_{f(x)} \circ d_x f = (f^* \omega)_x.$$

---

<sup>6</sup>Esta nomenclatura es más común en Física

Como esto es válido para todo  $x \in M$ ,  $\omega = f^*\omega$ .

(1)  $\iff$  (3):

$$\sum_{i=1}^n d(p_i \circ f) \wedge d(q_i \circ f) = \sum_{i=1}^n f^*(dp_i \wedge dq_i) = f^*\left(\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i\right) = f^*\omega$$

es igual a  $\omega$  si y sólo si  $f$  es un symplectomorfismo.

□

Enunciamos también una propiedad inmediata de los symplectomorfismos:

**Proposición 5.9.** *Los symplectomorfismos preservan el elemento de volumen  $\Omega = \frac{1}{n!}\omega^n$ .*

## 6. CAMPOS Y FLUJOS HAMILTONIANOS

**Observación 6.1.** Sea  $M$  una variedad simpléctica, la aplicación

$$\begin{aligned} J = I^{-1} : T_x M &\longrightarrow (T_x M)^* \\ \xi &\longmapsto \omega(\xi, \bullet), \end{aligned}$$

da un isomorfismo lineal entre campos y 1-formas, a cada campo  $X$  le podemos asignar la forma  $i_X\omega$ .

**Definición 6.2** (Campo hamiltoniano y flujo hamiltoniano). Sea una función  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ , se llama *campo hamiltoniano generado por  $H$*  a

$$X^H = \text{Id}H.$$

Se llama *flujo hamiltoniano generado por  $H$*  y se denota por  $\varphi^H$  al flujo cuyo generador infinitesimal es  $X^H$ .

**Observación 6.3.**  $dH = i_{X^H}\omega$

**Observación 6.4.** Obtenemos ahora una versión geométrica e independiente de las coordenadas de las clásicas ecuaciones de Hamilton:

$$X_x^H = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^H(x).$$

Podemos dar ahora una formulación canónica de la mecánica clásica:

**Definición 6.5** (Sistema hamiltoniano). Un *sistema mecánico hamiltoniano* es un par  $(M, H)$ , donde  $M$  es una variedad simpléctica (comúnmente llamada *espacio de fases*) y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función (normalmente llamada *hamiltoniano* del sistema).

Se llama *flujo hamiltoniano del sistema* o *evolución temporal del sistema* al flujo hamiltoniano generado por  $H$ .

**Ejemplo 6.6.** Consideremos el espacio simpléctico canónico  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_n)$ , con un hamiltoniano  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Podemos escribir un punto  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  en coordenadas simplécticas

$x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  y el hamiltoniano  $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ . Podemos escribir entonces

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

y el campo hamiltoniano tendrá la forma

$$X^H = \sum_{i=1}^n X_{q_i}^H \frac{\partial}{\partial q_i} + X_{p_i}^H \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Ahora,

$$dH = i_{X^H} \omega_n = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \left( X_{q_i}^H \frac{\partial}{\partial q_i} + X_{p_i}^H \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^n X_{q_i}^H dp_i - X_{p_i}^H dq_i.$$

Por tanto, las componentes del campo hamiltoniano son  $X_{q_i}^H = \frac{\partial H}{\partial p_i}$  y  $X_{p_i}^H = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ .

El flujo hamiltoniano tendrá la forma  $\varphi_t^H(x) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ . Luego su generador infinitesimal será de la forma  $X_x^H = (\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), \dot{p}_1(t), \dots, \dot{p}_n(t))$ . Obtenemos entonces las ecuaciones de Hamilton en su forma clásica:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t) \\ \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t), \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

**Proposición 6.7.** *Los flujos hamiltonianos son familias uniparamétricas de simplectomorfismos, es decir, el flujo hamiltoniano preserva  $\omega$ .*

*Demostración.* Sea  $X^H$  un campo hamiltoniano, por la fórmula de Cartan,

$$L_{X^H} \omega = d(i_{X^H} \omega) + i_{X^H} (d\omega) = d(dH) + 0 = 0.$$

□

Una consecuencia inmediata de este teorema es el conocido resultado de Liouville:

**Corolario 6.8** (Teorema de Liouville). *El flujo hamiltoniano preserva el volumen del espacio de fases.*

*Demostración.* Claramente, como el flujo hamiltoniano consiste en simplectomorfismos y estos preservan el elemento de volumen (proposición 5.9), entonces el volumen total se preserva con el flujo hamiltoniano. □

A la vista de este resultado, vamos a probar un teorema muy importante sobre transformaciones que preservan el volumen:

**Proposición 6.9** (Teorema de recurrencia de Poincaré <sup>7</sup>). *Sea  $D \in \mathbb{R}^n$  acotado y sea  $g : D \rightarrow D$  que preserva el volumen. Entonces, para cualquier  $U \subset D$  abierto, hay un punto  $x \in D$  y un  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ , tal que  $g^n(x) \in U$ .*

*Demostración.* Consideramos la familia

$$\{g^n U | n \in \mathbb{N}\}.$$

Todos estos conjuntos tienen el mismo volumen y, si no se cortaran en ningún punto,  $D$  tendría volumen infinito. Por tanto, existen  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $k > l$  tal que

$$g^k U \cap g^l U \neq \emptyset.$$

Por tanto,  $A = g^{k-l} U \cap U \neq \emptyset$ . Entonces, sea  $y \in A$ , existen  $x \in U$  y  $n = k - l$  tal que  $y = g^n(x) \in U$ .  $\square$

**Ejemplo 6.10.** Sea  $D$  una circunferencia y  $g$  la rotación de ángulo  $\alpha$ . Si  $\alpha = 2\pi(m/n)$ , entonces  $g^n$  es la identidad y el resultado es obvio. Pero, si  $\alpha$  es un múltiplo irracional de  $2\pi$ , entonces, por el teorema de recurrencia de Poincaré, para todo  $x \in D$  y para todo  $\delta > 0$  existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g^n(x) \in B_\delta(x)$ . De aquí se sigue que, dado  $x \in D$ , el conjunto  $\{g^k(x) | k \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $D$ . Más adelante veremos una aplicación de este ejemplo a mecánica hamiltoniana.

Para terminar la sección, haremos un breve comentario sobre cantidades conservadas.

**Definición 6.11** (Integral primera). Sea  $(M, H)$  un sistema hamiltoniano, una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una *integral primera* del sistema o una *constante del movimiento* si es constante a lo largo del flujo hamiltoniano. Esto es, si

$$F(\varphi_t^H(x)) = F(x)$$

para todo  $t \geq 0$  y para todo  $x \in M$ .

**Proposición 6.12** (Ley de conservación de la energía).  *$H$  es una integral primera del sistema hamiltoniano  $(M, H)$ .*

*Demostración.* Basta hallar la derivada de  $H$  en la dirección de  $X^H$  y ver que es 0. En efecto, sea  $x \in M$ ,

$$d_x H(X_x^H) = \omega(X_x^H, X_x^H) = 0.$$

Ya que  $d_x H = \omega(X_x^H, \bullet)$ .  $\square$

---

<sup>7</sup>En inglés *Poincaré recurrence theorem*. Nótese que aquí la palabra «recurrencia» no toma el significado habitual en matemáticas (por ejemplo en «construcción de sucesiones por recurrencia»), que se traduce del inglés *recursion*. El diccionario Oxford define *recursion* como “the repeated application of a recursive procedure or definition”. Por otro lado, define *recurrence* como “the fact of occurring again”, que podría traducirse también como «repetición» o «reaparición».

## 7. CORCHETE DE POISSON

**Definición 7.1** (Corchete de Poisson). Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $F, G : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Se define el *corchete de Poisson* de  $F$  y  $G$  como la función

$$\{F, G\}(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} G(\varphi_t^F(x)),$$

para cada  $x \in M$ .

**Proposición 7.2.**

1. Una función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una primera integral de  $(M, H)$  si y sólo si  $\{H, F\}$  es idénticamente nula.
2.  $\{F, G\} = dG(X^F)$ .
3.  $\{F, G\} = \omega(X^G, X^F)$ .
4.  $\{, \} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  es una aplicación bilineal y antisimétrica. Es decir,

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

y

$$\{F, \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2\} = \lambda_1 \{F, G_1\} + \lambda_2 \{F, G_2\},$$

para cualesquiera  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

5.  $[X^F, X^G] = X^{\{F, G\}}$ .

*Demostración.*

1. Inmediata de la definición de integral primera.
2. Por la regla de la cadena y por el hecho de que  $X^F$  es el generador infinitesimal de  $\varphi^F$ .
3.  $\omega(X^G, X^F) = dG(X^F) = \{F, G\}$ .
4. Por (3) y porque  $\omega$  es bilineal y antisimétrica.
5. Por las fórmulas de Cartan:

$$\begin{aligned} i_{[X^F, X^G]}\omega &= L_{X^F}(i_{X^G}\omega) - i_{X^G}(L_{X^F}\omega) \\ &= d(i_{X^F}(i_{X^G}\omega)) + i_{X^F}(d(i_{X^G}\omega)) - i_{X^G}(d(i_{X^F}\omega)) - i_{X^G}(i_{X^F}(d\omega)) \\ &= d(\omega(X^G, X^F)) + i_{X^F}(d(dG)) - i_{X^G}(d(dF)) - 0 \\ &= d(\{F, G\}) = i_{X^{\{F, G\}}}\omega. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 7.3.** Consideremos el espacio simpléctico canónico  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_n)$  y dos funciones  $F, G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Obtenemos entonces la definición clásica del corchete de Poisson:

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= dG(X^F) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} dp_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i}. \end{aligned}$$



Observamos también las relaciones

$$\begin{aligned}\{F, q_i\} &= \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \{F, p_i\} &= -\frac{\partial F}{\partial q_i},\end{aligned}$$

lo que deja las ecuaciones de Hamilton en una forma más simple:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{H, q_i\} \\ \dot{p}_i = \{H, p_i\}. \end{cases}$$

De aquí también obtenemos las *relaciones de conmutación canónicas*:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

El corchete de Poisson permite probar la versión hamiltoniana de uno de los resultados más importantes de toda la Física, debido a Emmy Noether, que relaciona las simetrías de un sistema con sus cantidades conservadas.

**Proposición 7.4** (Teorema de Noether). *Sea  $(M, H)$  un sistema hamiltoniano y  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $H$  es constante a lo largo de  $X^F$ , entonces  $F$  es una integral primera de  $(M, H)$ .*

*Demostración.* Como  $H$  es constante a lo largo de  $X^F$ , es una integral primera de  $(M, F)$ , luego  $\{F, H\} = 0$ . Ahora,  $\{H, F\} = -\{F, H\} = 0$ , luego  $F$  es una integral primera de  $(M, H)$ .  $\square$

Otra forma de ver este mismo teorema es la siguiente:

**Proposición 7.5** (Otra forma del teorema de Noether). *Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y sean  $X^F$  y  $X^G$  campos hamiltonianos en  $M$ . Los dos campos conmutan (y, por tanto, lo hacen los flujos que generan) si y sólo si  $\{F, G\}$  es constante.*

*Demostración.* Sea  $\{F, G\} = a \in \mathbb{R}$ , entonces

$$[X^F, X^G] = X^{\{F, G\}} = X^a = \text{Id}a = 0.$$

$\square$

Podemos ver también que el corchete de Poisson es un corchete de Lie sobre  $\mathcal{C}^\infty(M)$ , ya que cumple la identidad de Jacobi:

**Proposición 7.6** (Identidad de Jacobi). *Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y sean  $A, B, C : M \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces*

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$$

*Demostración.* Tenemos

$$\begin{aligned}[X^A, X^B](C) &= X^A \circ X^B(C) - X^B \circ X^A(C) = X^A(\{B, C\}) - X^B(\{A, C\}) \\ &= \{A, \{B, C\}\} - \{B, \{A, C\}\}.\end{aligned}$$

*Mientras que*

$$[X^A, X^B](C) = X^{\{A, B\}}(C) = \{\{A, B\}, C\}.$$

Tenemos entonces

$$\{\{A, B\}, C\} = \{A, \{B, C\}\} - \{B, \{A, C\}\} = -\{\{B, C\}, A\} - \{\{C, A\}, B\}.$$

Pasando el segundo término al otro lado obtenemos la identidad de Jacobi.  $\square$

**Corolario 7.7** (Teorema de Poisson). Si  $F_1, F_2$  son integrales primeras de  $(M, H)$ , entonces  $\{F_1, F_2\}$  es también una integral primera de  $(M, H)$ .

*Demostración.* Por la identidad de Jacobi,

$$\{\{F_1, F_2\}, H\} = \{F_1, \{F_2, H\}\} + \{F_2, \{H, F_1\}\} = 0,$$

ya que  $F_1, F_2$  son integrales primeras.  $\square$

De la bilinealidad, la antisimetría y la identidad de Jacobi obtenemos inmediatamente el siguiente resultado:

**Corolario 7.8.**  $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$  es un álgebra de Lie.

Por último, vamos a dar una caracterización clásica de las transformaciones canónicas: que preservan las ecuaciones de Hamilton y el corchete de Poisson.

**Proposición 7.9.** Son equivalentes:

1.  $f : M \rightarrow M$  es un symplectomorfismo.
2. Para todo  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_*(X^H) = X^{H \circ f^{-1}}$ .
3. Para cualesquiera  $F, G : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{F, G\} \circ f^{-1} = \{F \circ f^{-1}, G \circ f^{-1}\}$ .

*Demostración.*

(1)  $\implies$  (2):

En primer lugar, por una comprobación inmediata **♣ seguro?** se tiene, para cualquier difeomorfismo  $f$ , para cualquier forma  $\lambda$ , y para cualquier campo  $X$ ,

$$(f^{-1})^*(i_X \lambda) = i_{f_* X}((f^{-1})^* \lambda).$$

Ahora,

$$(f^{-1})^*(i_{X^H} \omega) = (f^{-1})^*(dH) = d(H \circ f^{-1}) = i_{X^{H \circ f^{-1}}} \omega,$$

mientras que, por lo anterior,

$$(f^{-1})^*(i_{X^H} \omega) = i_{f_*(X^H)}((f^{-1})^* \omega).$$

Como  $f$  es un symplectomorfismo,  $f^{-1}$  también lo será, luego  $(f^{-1})^* \omega = \omega$ .

Tenemos entonces,

$$i_{X^{H \circ f^{-1}}} \omega = i_{f_*(X^H)}(\omega),$$

luego

$$f_*(X^H) = X^{H \circ f^{-1}}.$$

(2)  $\implies$  (1):

Si  $f_*(X^H) = X^{H \circ f^{-1}}$  para todo  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces

$$i_{X^{H \circ f^{-1}}}(f^{-1})^*\omega = i_{f_*(X^H)}(f^{-1})^*\omega = (f^{-1})^*(i_{X^H}\omega) = i_{X^{H \circ f^{-1}}}\omega.$$

Luego  $(f^{-1})^*\omega = \omega$ . Es decir,  $f^{-1}$  (y por tanto  $f$ ) es un symplectomorfismo.

(2)  $\iff$  (3):

Tenemos,

$$\begin{aligned} \{F, G\} \circ f^{-1} &= X^F(G) \circ f^{-1} = f_*X^F(G \circ f^{-1}) \\ \{F \circ f^{-1}, G \circ f^{-1}\} &= X^{F \circ f^{-1}}(G \circ f^{-1}). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\{F, G\} \circ f^{-1} = \{F \circ f^{-1}, G \circ f^{-1}\}$  si y sólo si  $X^{F \circ f^{-1}} = f_*X^F$ , para cada  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\square$

## 8. TEORÍA DE ARNOLD-LIOUVILLE

A la hora de estudiar sistemas dinámicos, una cuestión interesante a plantearse, con consecuencias prácticas y también de carácter fundamental, es si las ecuaciones del sistema podrán ser «integradas», es decir, si podrán ser resueltas mediante integrales definidas («cuadraturas») de funciones conocidas. Definimos entonces:

**Definición 8.1** (Ecuación integrable por cuadraturas). Una ecuación diferencial es *integrable por cuadraturas* si es posible escribir su solución general en términos de sumas, productos, composiciones e integrales de funciones conocidas.

**Definición 8.2** (Sistema integrable por cuadraturas). Un sistema hamiltoniano  $(M, H)$ , es *integrable por cuadraturas* si para todo punto  $x \in M$  existe una carta simpléctica en torno a  $x$  en la que el flujo hamiltoniano es integrable por cuadraturas.

Es decir, un sistema hamiltoniano integrable por cuadraturas es aquel en el que, conocidas sus condiciones iniciales, podemos integrar las ecuaciones de Hamilton mediante manipulaciones algebraicas, cálculos de integrales definidas e inversiones de difeomorfismos.

Para estudiar la integrabilidad por cuadraturas de los sistemas hamiltonianos, serán cruciales las siguientes nociones:

**Definición 8.3** (Funciones en involución). Sea  $M$  una variedad simpléctica y  $F_1, \dots, F_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que  $F_1, \dots, F_n$  *están en involución* si, para cada  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $\{F_i, F_j\} = 0$ .

**Definición 8.4** (Integrabilidad en el sentido de Liouville). Sea  $(M, H)$  un sistema hamiltoniano y sea  $2n = \dim(M)$ , decimos que  $(M, H)$  *es integrable en el sentido de Liouville* si existen  $F_1(= H), \dots, F_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  en involución, independientes para todo  $x \in M$  (es decir,  $dF_{1,x} \wedge \dots \wedge dF_{n,x} \neq 0$ ) y, sea  $F = (F_1, \dots, F_n)$ , para todo  $a \in F(M) \subset \mathbb{R}^n$

$$M_a = F^{-1}(a) = \{x \in M \mid F(x) = a\}$$

es compacto.

Como ya se habrá podido intuir, el propósito de esta sección es probar que todo sistema integrable en el sentido de Liouville es integrable por cuadraturas. El resultado original, formulado en términos de mecánica hamiltoniana clásica, se debe a Joseph Liouville en 1855, mientras que el resultado moderno junto con toda la teoría de los toros invariantes se debe a Vladimir Arnold en 1963. Por otra parte, las variables de acción-ángulo fueron introducidas originalmente por Delaunay en 1860 para estudiar el movimiento de la luna y más tarde, a principios del siglo XX, usadas por los físicos para estudiar el átomo de Bohr, siendo Schwarzschild el que acuñara esa terminología en 1916. La demostración original del teorema de las variables de acción-ángulo se atribuye a Mineur en 1936.

En la bibliografía habitual de geometría simpléctica, la serie de teoremas y proposiciones que llevan a la demostración del resultado se suele nombrar «teorema de Arnold-Liouville». En este texto, hemos decidido decantarnos por el nombre de «teoría de Arnold-Liouville». Una discusión más extensa sobre la historia y el nombre de esta teoría puede encontrarse en las páginas 640 y 641 de [11].

En primer lugar, vamos a considerar un ejemplo característico que aclara alguna de las ideas detrás de esta teoría.

**Ejemplo 8.5.** Consideramos el oscilador armónico unidimensional, con hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2.$$

Por simplicidad, supondremos que la masa y la constante del muelle valen 1, de forma que  $H(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ . Las curvas  $C_E$  de energía constante en el espacio de fases  $\mathbb{R}^2$  son circunferencias de centro 0 y radio  $a = \sqrt{2E}$ , con

$$E = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

Ahora, si tomamos unas coordenadas «polares»  $(E, \phi)$ , donde  $\phi$  es la coordenada an-

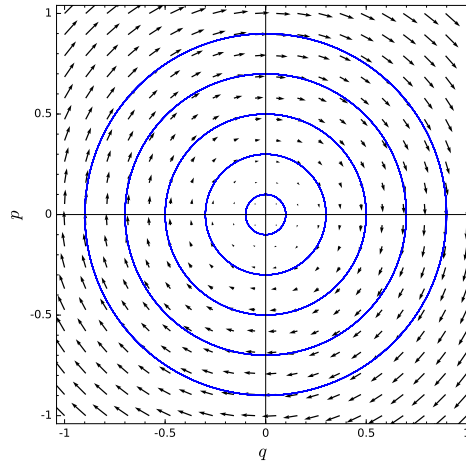


FIGURA 2. Espacio de fases del oscilador armónico junto al campo y al flujo hamiltonianos

gular en cada una de estas circunferencias, la dinámica del sistema queda mucho más

simplificada:

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0) \\ \phi(t) &= \phi(0) + \omega(E(0))t. \end{aligned}$$

Sin embargo, ¿será canónica la transformación  $(q, p) \rightarrow (E, \phi)$ ? En este caso es claro que

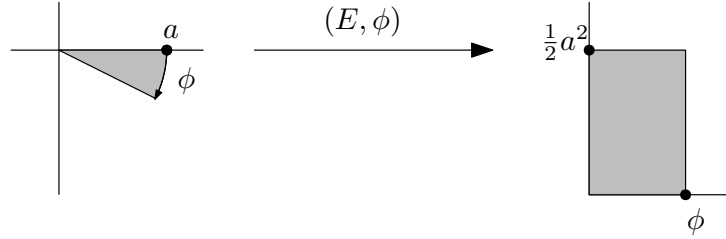


FIGURA 3. Cambio de coordenadas  $(q, p) \rightarrow (E, \phi)$

la transformación preserva el área  $\frac{1}{2}a^2\phi$ . Más generalmente, si  $A$  es una región del plano,

$$\text{área}(A) = \int_A r dr \wedge d\phi = \int_A d\left(\frac{1}{2}r^2\right) \wedge d\phi.$$

Por tanto, la transformación es canónica porque precisamente, si  $A_E$  es la región encerrada por  $C_E$ , entonces

$$E = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2\pi}\text{área}(A_E).$$

En las coordenadas originales, esta área es

$$J = \int_{A_E} dp \wedge dq = \int_{A_E} d(pdq) = \int_{C_E} pdq,$$

donde en el último paso hemos utilizado el teorema de Stokes. Esta  $J$  normalmente se conoce como *variable de acción*, debido a sus dimensiones.

En un caso más general, podemos considerar el sistema formado por  $n$  osciladores armónicos acoplados o, equivalentemente, un oscilador armónico  $n$ -dimensional. El hamiltoniano del sistema será (tomando  $k = m = 1$ )

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = H_1(q_1, p_1) + \dots + H_n(q_n, p_n) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2 + q_1^2 + \dots + q_n^2).$$

Este sistema es integrable en el sentido de Liouville. Basta tomar  $F = (H, H_2 + \dots + H_n, H_3 + \dots + H_{n-2}, \dots, H_n)$ , ya que

$$\{H_i, H_j\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_j}{\partial q_k} - \frac{\partial H_j}{\partial p_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} = p_i q_j \delta_{ij} - p_j q_i \delta_{ij} = p_i q_i - p_i q_i = 0,$$

y  $\det(F_{*,x}) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ .

$F^{-1}(a)$  vendrá dado por

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) = a_1 - a_2 \\ \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) = a_2 - a_3 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(p_n^2 + q_n^2) = a_n, \end{cases}$$

que son las ecuaciones de un toro  $n$ -dimensional.

Entonces, sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  una base de ciclos del toro ♣ **Esto es muy intuitivo pero hay que escribirlo bien, en los libros pone que son los generadores del grupo de homología de  $\mathbb{T}^n$ , cuando dé TOAL a lo mejor sé lo que es**, podemos definir las variables de acción

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \sum_{k=1}^n p_k dq_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \alpha.$$

La definición de estas variables no depende de la base elegida ya que, por el teorema de Stokes,

$$\int_{\gamma_i} \alpha - \int_{\gamma'_i} \alpha = \int_{\sigma} \omega = 0,$$

donde  $\sigma$  es la región encerrada por las curvas y  $\omega = 0$  en el toro (el cálculo de esto está hecho con precisión más adelante).

Sean las variables angulares  $\phi_i$  a lo largo de cada ciclo generado por  $\gamma_i$ , si  $(q, p) \rightarrow (J, \phi)$  es canónica, podemos tomar las variables  $(J, \phi)$  en las que la dinámica toma una forma especialmente simple. Esto se debe a que  $J = J(a)$ , de modo que, por las ecuaciones de Hamilton,

$$\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = -\dot{J}_i = 0.$$

Por tanto,  $H = H(J_1(a), \dots, J_n(a))$  y

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_j(a),$$

con  $\omega_j$  constante en  $M_a$ . Las ecuaciones de Hamilton quedan entonces integradas en la forma

$$\begin{aligned} J(t) &= J(a) \\ \phi(t) &= \phi(0) + \omega(a)t. \end{aligned}$$

No hemos demostrado que el cambio de coordenadas sea un symplectomorfismo, lo que puede hacerse usando el método de Hamilton-Jacobi, que aquí no vamos a exponer. Sin embargo, no nos hará falta, ya que nosotros daremos otra prueba, demostrando un teorema general para construir variables de acción-ángulo en variedades simplécticas.

Vamos a estudiar también algunos ejemplos de sistemas con funciones en involución, que en ciertos supuestos serán integrables en el sentido de Liouville.

**Ejemplo 8.6** (Péndulo simple). Consideramos un péndulo cuya «cuerda» es una barra rígida de masa despreciable y longitud 1. El espacio de fases del péndulo es el fibrado cotangente de  $\mathbb{S}^1$ , que no es otra cosa que un cilindro. Tomando como coordenada generalizada el ángulo  $\phi$  de desviación del péndulo respecto de la vertical, el hamiltoniano viene dado por

$$H(\phi, p) = \frac{1}{2}p^2 - g \cos \phi,$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y hemos tomado el centro como origen de energía potencial. Como podemos ver en la figura 8.6 las trayectorias son cerradas, luego cada curva de energía constante es compacta.  $dH$  será distinta de 0 en todo punto exceptuando

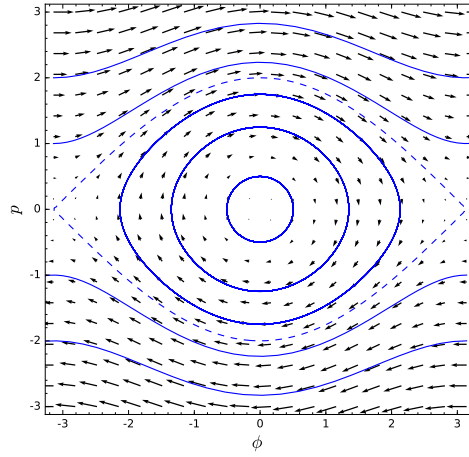


FIGURA 4. Espacio de fases del péndulo junto al campo y al flujo hamiltonianos.

los casos  $(\phi = 0, p = 0)$  y  $(\phi = \pi, p = 0)$ , que corresponden a puntos de equilibrio (el primero, estable, el segundo, inestable) donde la trayectoria es sólo un punto. La curva que aparece punteada en la figura 8.6, de ecuación

$$g = H(\phi, p) = \frac{1}{2}p^2 - g \cos \phi,$$

corresponde al punto de equilibrio y a dos trayectorias que tienden asintóticamente al punto de equilibrio inestable. Estas trayectorias son matemáticamente factibles aunque su realización práctica parezca una tarea imposible y en ellas no aplica la teoría de Arnold-Liouville, puesto que la curva punteada no es una variedad, al contener un punto con  $dH = 0$ . Estas trayectorias se conocen como *singularidades* del sistema. Las curvas que quedan dentro de la curva punteada corresponden a movimientos de oscilación en torno al punto de equilibrio estable, mientras que las que quedan fuera corresponden a movimientos de rotación del péndulo alrededor de su centro.

**Ejemplo 8.7** (Potencial central). Consideramos una partícula que se mueve en  $\mathbb{R}^3$  sometida a un potencial central, esto es, una función  $V$  que sólo depende de  $r = \|x\|$ . El espacio de fases es  $\mathbb{R}^6$  y el hamiltoniano (tomando  $m = 1$ ) viene dado por

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + V(r).$$

Sea ahora el momento angular

$$L = x \times p,$$

cada una de sus componentes es  $L_i = \epsilon_{ijk}(x_j p_k - x_k p_j)$ , donde  $\epsilon_{ijk}$  es la paridad de  $(i, j, k)$  como permutación de  $(1, 2, 3)$ . Podemos calcular ahora

$$\{H, L_i\} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial L_i}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial L_i}{\partial p_k} = - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left( p_k p_j + \frac{x_k x_j}{r} V'(r) \right) = 0.$$

Por tanto,  $L$  es una cantidad conservada. Al ser  $L$  un vector, realmente son cantidades conservadas su norma y su dirección y sentido, lo que implica que se conservan  $L^2 = \langle L, L \rangle$  y  $L_3$ . Además  $\{L^2, L_3\} = 0$ , lo que nos da tres funciones en involución en el sistema. Sin embargo, la integrabilidad en sentido de Liouville no está garantizada por los resultados

que hemos probado, ya que en general las órbitas pueden ser no acotadas y las funciones no ser independientes.

**Ejemplo 8.8** (Trompo simétrico). Consideremos un trompo simétrico (la clásica peonza de juguete) que gira con su punta fija en un punto. Su espacio de configuración viene dado por las posibles rotaciones de sus ejes principales de inercia  $(X', Y', Z')$  respecto a los tres ejes del sistema de laboratorio (la vertical y dos ejes arbitrarios en el suelo,  $X, Y, Z$ ). De modo que el espacio de fases del trompo simétrico es  $T^*\text{SO}(3)$ . Sean  $I_1, I_2, I_3$  los momentos de inercia del trompo, que el trompo sea *simétrico* quiere decir que  $I_1 = I_2$  y que el centro de masas cae sobre el eje  $Z'$ . En este caso, tras unos cálculos se obtiene que el hamiltoniano del sistema es

$$H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta,$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $M$  es la masa de la peonza,  $l$  es la distancia de la punta al centro de masas,  $(\theta, \phi, \psi)$  son los ángulos de Euler de la rotación de los ejes principales de inercia respecto a los del laboratorio y  $(p_\theta, p_\phi, p_\psi)$  son sus momentos canónicos conjugados. Las frecuencias de giro de cada uno de los ángulos de Euler  $\theta, \phi$  y  $\psi$  se llaman frecuencias de *nutación*, *precesión* y *rotación*, respectivamente.

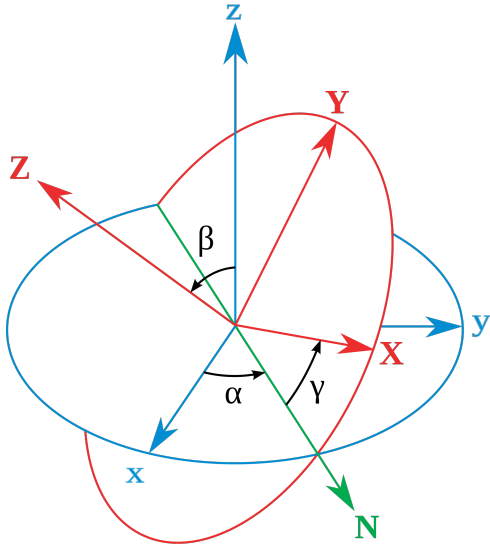


FIGURA 5. Construcción de los ángulos de Euler. Fuente: [2].

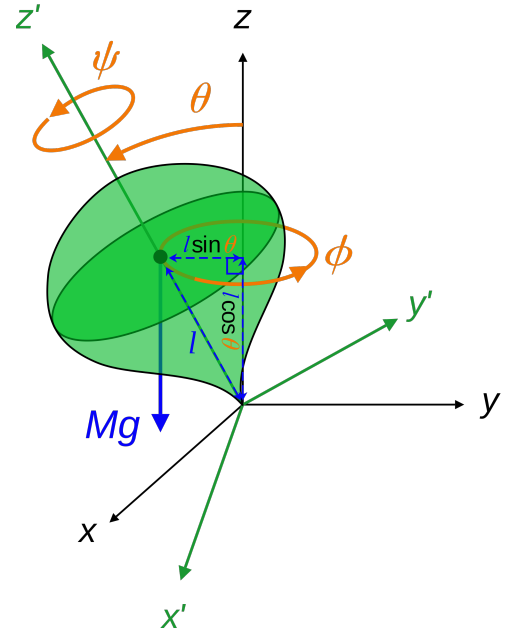


FIGURA 6. Trompo simétrico. Fuente: [3].

Inmediatamente tenemos

$$\begin{aligned} \dot{p}_\phi &= \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \\ \dot{p}_\psi &= \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0, \end{aligned}$$



luego  $p_\phi$  y  $p_\psi$  son cantidades conservadas y por tanto su corchete de Poisson con  $H$  se anula. Además,

$$\{p_\phi, p_\psi\} = 0.$$

Por tanto,  $H$ ,  $p_\phi$  y  $p_\psi$  son funciones en involución en  $(T^*\text{SO}(3), H)$ .

Ahora, si estas funciones son constantes, como los ángulos (y sus relaciones trigonométricas) siempre están acotados también lo estará  $p_\theta$  por la relación  $E = H$  y la variedad  $F^{-1}(a)$  estará acotada. Como  $F^{-1}(a)$  es cerrada, es compacta y el trompo simétrico es «casi» un sistema integrable en el sentido de Liouville. Este «casi» viene porque, al igual que en el caso del péndulo habrá que exceptuar algún caso en el cual las funciones no son independientes.

**Ejemplo 8.9.** Por citar un ejemplo no trivial, aunque no lo demostremos, el problema de hallar las geodésicas en un elipsoide puede verse como un sistema hamiltoniano integrable en el sentido de Liouville. La demostración se basa en la teoría de cuádricas confocales y coordenadas elípticas, demostrando unos teoremas de Jacobi y Chasles. Puede leerse en el apéndice 15 de [1].

Comenzaremos ahora a probar los resultados fundamentales de esta teoría. En primer lugar, vamos a obtener una caracterización general de los toros, que necesitaremos más adelante:

**Proposición 8.10.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  conexa y compacta tal que existen campos  $X_1, \dots, X_n$  en  $M$  linealmente independientes y tales que, para todo  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ,  $[X_i, X_j] = 0$ . Entonces  $M$  es difeomorfa al toro  $n$ -dimensional*

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1.$$

*Demostración.* Para cada  $i = 1, \dots, n$ , sea  $g_i$  el flujo cuyo generador infinitesimal es  $X_i$ . Como para todo  $i \neq j$ ,  $[X_i, X_j] = 0$  entonces  $g_i$  conmuta con  $g_j$ , es decir,  $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$ , para todo  $x \in M$ .

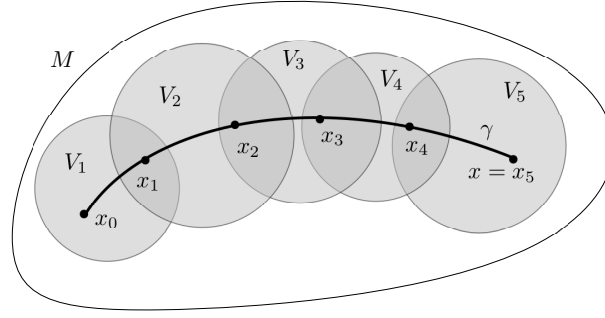
Así, podemos definir una acción de  $\mathbb{R}^n$  en  $M$  que a cada  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$  le asigna  $g_t : M \rightarrow M$ , con  $g_t = g_{1,t_1} \cdots g_{n,t_n}$ . Claramente, dados  $t, s \in \mathbb{R}^n$ ,  $g_{t+s} = g_t g_s$ . Ahora, fijo  $x_0 \in M$ , definimos

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto g_t(x_0). \end{aligned}$$

♣ **Esto hay que verlo bien (Problemas 1 y 2 de la 274 del Arnold).** Como los campos son linealmente independientes,  $d_0 g$  es un isomorfismo lineal y, por el teorema de la función implícita,  $g$  es un difeomorfismo local. Además, sea  $x \in M$ , tomamos una curva  $\gamma$  que una  $x$  y  $x_0$  y una sucesión finita de entornos  $V_1, \dots, V_n$  que recubran  $\gamma$ , en los que  $g$  sea difeomorfismo y tales que  $x_0 \in V_1$ ,  $x \in V_n$ . Para cada  $i = 1, \dots, n-1$ , sea  $x_i \in V_i \cap V_{i+1}$  y sea  $x_n = x$ . Para cada  $i = 0, \dots, n-1$ , centramos  $g$  en  $x_i$  (de tal forma que  $g(0) = x_i$ ) en el entorno  $V_{i+1}$  y lo llamamos  $g_i$ . Definimos  $t_i$  tal que  $g_{i-1,t_i}(x_{i-1}) = x_i$ , entonces,

$$x = g_{n-1,t_n}(x_{n-1}) = g_{n-1,t_n} g_{n-2,t_{n-1}}(x_{n-2}) = \dots = g_{n-1,t_n} \cdots g_{0,t_1}(x_0),$$

luego, sea  $t = t_1 + \dots + t_n$ ,  $x = g_t(x_0)$ . Por tanto,  $g$  es sobreyectiva.

FIGURA 7. Idea de la demostración de que  $g$  es sobreyectiva.

Si  $g$  fuese inyectiva, entonces sería un difeomorfismo entre  $\mathbb{R}^n$  y  $M$ , pero no puede serlo porque  $M$  es compacta y  $\mathbb{R}^n$  no lo es.

Por tanto, sea

$$H := \{t \in \mathbb{R}^n \mid g_t(x_0) = x_0\},$$

entonces  $H \neq 0$ . Ahora, sean  $t, s \in H$ , entonces

$$g_{s+t}(x_0) = g_s g_t(x_0) = g_s(x_0) = x_0$$

y

$$g_{-t}(x_0) = g_{-t} g_t(x_0) = (x_0).$$

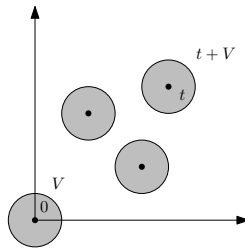
Es decir,  $H$  es un subgrupo de  $(\mathbb{R}^n, +)$ . Además,  $H$  no depende de la elección de  $x_0$ , en efecto, si  $x = g_r(x_0)$  y  $t \in H$ , entonces

$$g_t(x) = g_{t+r}(x_0) = g_r g_t(x_0) = g_r(x_0) = x.$$

Como  $g$  es un difeomorfismo local, existe un entorno  $V \subset \mathbb{R}^n$  de 0 tal que  $H \cap V = \{0\}$ . Es más, sean  $t \in H$ ,  $s \in V \setminus \{0\}$  y  $x \in M$ ,

$$g_{t+s}(x) = g_s g_t(x) = g_s(x) \neq x.$$

Luego  $H$  es un conjunto discreto.

FIGURA 8. Idea de que  $H$  es discreto.

Antes de continuar, es necesario probar el siguiente lema:

**Lema 8.11.** *Todo subgrupo discreto no trivial  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^k$  para algún  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Es decir, existen  $e_1, \dots, e_k \in H$  linealmente independientes tales que*

$$H = \{n_1 e_1 + \dots + n_k e_k \mid (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k\}.$$

*Demostración.* Sea  $e_0 \in H$ ,  $e_0 \neq 0$ . Como  $H$  es discreto,  $H \cap B(0, \|e_0\|)$  es finito. De estos puntos, consideramos aquellos que están en  $L(e_0)$ <sup>8</sup> y de estos escogemos el más cercano, que llamaremos  $e_1$ .

Si existieran algún  $e \in H$  y algún  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $e \in (me_1, (m+1)e_1)$ , entonces  $e - me_1 \in H \cap L(e_0)$  estaría más cerca de 0 que  $e_1$ . Por tanto,

$$H \cap L(e_0) = e_1\mathbb{Z}.$$

Si no hay puntos de  $H$  fuera de  $L(e_1)$  hemos terminado,  $H$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . En caso contrario, sea  $e \in H \setminus L(e_1)$ , proyectamos ortogonalmente  $e$  sobre  $L(e_1)$ . Esta proyección cae exactamente sobre un intervalo  $\Delta = [me_1, (m+1)e_1]$  para cierto  $m \in \mathbb{Z}$ . Sea  $C$  el cilindro de eje  $\Delta$  y de radio igual a la distancia entre  $\Delta$  y  $e$ .  $C \cap H$  es finito. De estos puntos, sea  $e_2$  el más cercano a  $\Delta$  que no esté en  $\Delta$ . Entonces, para cualquier otro  $f \in H$ , la distancia entre  $f$  y  $L(e_1)$  es mayor que la distancia entre  $e_2$  y  $L(e_1)$ .

En efecto, en tal caso, sea  $l \in \mathbb{Z}$  tal que la proyección ortogonal de  $f$  cae sobre  $[le_1, (l+1)e_1]$ , entonces  $f' = f - le_1 + me_1 \in C$  y la distancia entre  $f'$  y  $L(e_1)$  es menor que la distancia entre  $e_2$  y  $L(e_1)$ , lo que nos lleva a una contradicción.

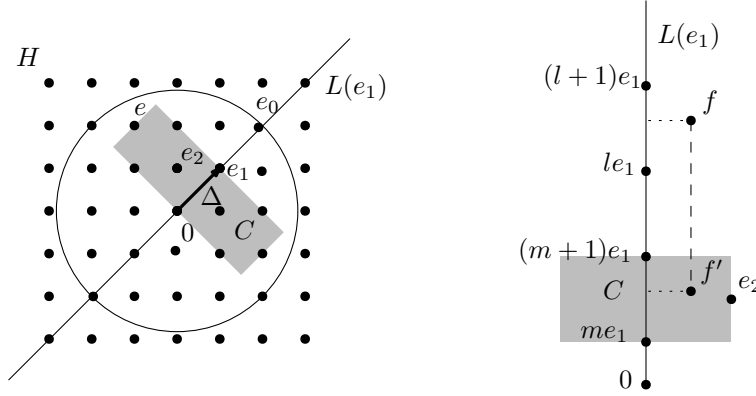


FIGURA 9. Idea de la demostración del lema.

Ahora,  $\{n_1e_1 + n_2e_2 \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$  forma una red discreta en  $L(e_1, e_2)$ . Además, si existiera un  $e \in H$  que no perteneciese a la red, sean  $m_1 = [\langle e, e_1 \rangle]$ ,  $m_2 = [\langle e, e_2 \rangle]$ . Entonces,  $e - m_1e_1 - m_2e_2$  estaría más cerca de  $L(e_1)$  que  $e_2$ . Por tanto, esta red es exactamente  $L(e_1, e_2) \cap H$ .

Procedemos ahora por inducción, supongamos que existen  $e_1, \dots, e_k$  linealmente independientes tales que  $\{n_1e_1 + \dots + n_ke_k \mid (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k\} = L(e_1, \dots, e_k) \cap H$  y que existe  $e \in H$  tal que  $e \notin L(e_1, \dots, e_k)$ . Análogamente, la proyección ortogonal de  $e$  sobre  $L(e_1, \dots, e_k)$  cae sobre un hipercubo  $\Delta = [m_1e_1, (m_1+1)e_1] \times \dots \times [m_ke_k, (m_k+1)e_k]$ . Sea  $C$  el conjunto de los puntos cuyas proyecciones ortogonales caen en  $\Delta$  y más cercanos a  $\Delta$  que  $e$ , entonces  $C \cap H$  es finito. Sea  $e_{k+1}$  el más cercano a  $\Delta$  de estos puntos, que no esté en  $\Delta$ . Para cualquier otro  $f \in H$ , la distancia entre  $f$  y  $L(e_1, \dots, e_k)$  es mayor que entre  $e_2$  y  $L(e_1, \dots, e_k)$ , por un razonamiento completamente análogo al caso bidimensional.

Por tanto,  $\{n_1e_1 + \dots + n_{k+1}e_{k+1} \mid (n_1, \dots, n_{k+1}) \in \mathbb{Z}^{k+1}\}$  forma una red discreta en  $L(e_1, \dots, e_{k+1})$  y, de forma análoga al caso anterior, esta red agota los puntos de  $H \cap L(e_1, \dots, e_{k+1})$ .

<sup>8</sup>Aquí  $L(x)$  denota la envoltura lineal de  $x$ .

Finalmente, sea  $k$  el mínimo número natural tal que no existe  $e \in H \setminus L(e_1, \dots, e_k)$ . Entonces  $H$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^k$ .  $\square$

Terminamos ahora la demostración de la proposición.

Sea  $k$  el número de generadores de  $H$  y sea la proyección natural

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (x, y) &\longmapsto (x \text{ mód } 2\pi, y), \end{aligned}$$

los puntos  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$  de la forma

$$u_i = (x_1 = 0, \dots, x_i = 2\pi, \dots, x_k = 0, y = 0)$$

van a 0 por esta aplicación.

Sean  $e_1, \dots, e_k$  los generadores de  $H$  y sea  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un isomorfismo tal que cada  $u_i$  va a parar a  $e_i$ . Entonces, la aplicación  $\tilde{A}$  dada por el siguiente diagrama es un difeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ p \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\tilde{A}} & M \end{array}$$

### ♣ Probar que es un difeomorfismo

Como por hipótesis  $M$  es compacta, necesariamente  $k = n$  y  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{T}^n$ .  $\square$

Podemos probar ahora el resultado fundamental de esta teoría:

**Teorema 8.12** (Arnold). *Sea  $(M, H)$  un sistema integrable en el sentido de Liouville. Entonces:*

1.  $M_a$  es una variedad diferenciable invariante bajo el flujo de hamiltoniano  $H = F_1$  y  $\omega|_{M_a} = 0$ .
2. Cada componente conexa  $C_a$  de  $M_a$  es difeomorfa al toro  $n$ -dimensional

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$$

y, sean  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  coordenadas angulares en  $C_a$ , entonces existen unas frecuencias constantes  $\omega(a) = (\omega_1(a), \dots, \omega_n(a))$  tales que

$$\dot{\theta}(t) = \omega.$$

*Demostración.* En primer lugar, como las  $n$  funciones  $F_i$  son independientes en cada punto de  $M_a$ , por el teorema de la función implícita  $M_a$  es una subvariedad regular de  $M$  de dimensión  $2n - n = n$ . Como  $M$  es una variedad simpléctica, para cada  $i = 1, \dots, n$ , podemos definir el campo  $X_i = X^{F_i} = \text{Id}F_i$ . Al ser las  $dF_i$  linealmente independientes e  $I$  un isomorfismo lineal, los campos  $X_i$  son linealmente independientes. Además, por el

teorema de Noether, como para cada  $i, j = 1, \dots, n$   $\{F_i, F_j\} = 0$  (luego es constante), entonces  $[X_i, X_j] = 0$ . Por esto mismo, la derivada de la función  $F_i$  en la dirección de  $X_j$  es 0, luego los campos  $X_j$  son tangentes a  $M_a$ .

De aquí sacamos varias conclusiones:

1.  $M_a$  es invariante con respecto a cada uno de los  $n$  flujos hamiltonianos generados por cada función  $F_i$  (luego, en particular lo será respecto del generado por  $F_1$ ).
2. Como, para cada  $x \in M_a$ , los campos  $X_1|_x, \dots, X_n|_x$  forman una base de  $T_x M_a$ , sean  $X_x, Y_x \in T_x M_a$ , entonces  $X_x = \sum_{i=1}^n b_i X_i|_x$ ,  $Y_x = \sum_{i=1}^n c_i X_i|_x$ . Ahora,

$$\omega(X_x, Y_x) = \sum_{i,j=1}^n b_i c_j \omega(X_i|_x, X_j|_x) = \sum_{i,j=1}^n b_i c_j \{F_j, F_i\} = 0.$$

Por tanto,  $\omega$  se anula en  $T_x M_a$ .

3.  $M_a$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $n$  campos conmutativos dos a dos y linealmente independientes en todo punto de  $M_a$ .

Por esto último, por la proposición anterior y porque  $M_a$  es compacta tenemos que cada componente conexa  $C_a$  de  $M_a$  es difeomorfa a  $\mathbb{T}^n$ . De la demostración de la proposición anterior obtenemos un diagrama de la forma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow p & \downarrow g \\ & & C_a = \mathbb{T}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \theta & \xrightarrow{\quad} & t \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \theta \text{ mód } 2\pi \end{array}$$

En este caso, el flujo hamiltoniano asociado a  $F_1$  es  $g_1$ , luego

$$\theta(t) = g_{1,t}(\theta(0)).$$

Ahora, fijo  $\theta(0)$ ,  $g_{1,t} = g(t, 0, \dots, 0)$ , por tanto

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De modo que, si  $a_{ij}$  es la entrada de índices  $(i, j)$  de la matriz  $A$ , entonces, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\theta_i(t) = a_{i1}t.$$

Por tanto, sea  $\omega_i = a_{i1}$ ,

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i.$$

□

**Observación 8.13.** Estas subvariedades  $C_a$  de  $M$  se suelen llamar *toros invariantes* del sistema  $(M, H)$ . Esta dinámica en el toro recibe el nombre de *movimiento condicionalmente periódico*.

**Observación 8.14.** Consideremos un 2-toro invariante con la dinámica del teorema (por ejemplo, el asociado a los niveles de energía de un oscilador armónico bidimensional). Sea  $(\theta_1, \theta_2)$  un punto en el toro y su trayectoria bajo el flujo hamiltoniano  $\gamma(t) = \varphi_t(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \omega_1 t, \theta_2 + \omega_2 t)$ . Si  $\omega_1/\omega_2 = m/n$  es racional, entonces

$$\gamma\left(\frac{2n\pi}{\omega_2}\right) = (\theta_1 + 2m\pi, \theta_2 + 2n\pi) = (\theta_1, \theta_2).$$

Es decir, a cierto tiempo la trayectoria «se cierra». Estas órbitas se dicen *periódicas*.

Sin embargo, si  $\omega_2/\omega_1$  es irracional, dado un ángulo  $\alpha$  y sea  $T$  tal que  $\alpha = \theta_1 + \omega T$ , entonces, sea  $T_n = T + 2n\pi/\omega_1$ ,  $\alpha = \theta_1 + \omega_1(T_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea ahora la aplicación

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \phi &\longmapsto \phi + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}, \end{aligned}$$

es una rotación de ángulo un múltiplo irracional de  $2\pi$  en la circunferencia del toro de ángulo  $\alpha$ . Entonces, como ya vimos por el teorema de recurrencia de Poincaré,  $\{g^n(\phi) | n \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $\mathbb{S}^1$ . Como esto es válido para todo  $\alpha$  y se cumple

$$\gamma(T_n) = (\alpha, g^n(\theta_2) + \omega_2 T),$$

tenemos que  $\{\gamma(t) | t \in \mathbb{R}\}$  es denso en el toro. Este tipo de órbitas se llaman *cuasiperiódicas*. Una forma sencilla de visualizar esto es mediante las *figuras de Lissajous*

$$L_\omega = \{(\cos t, \cos \omega t) | t \in \mathbb{R}\},$$

ver figura 10.

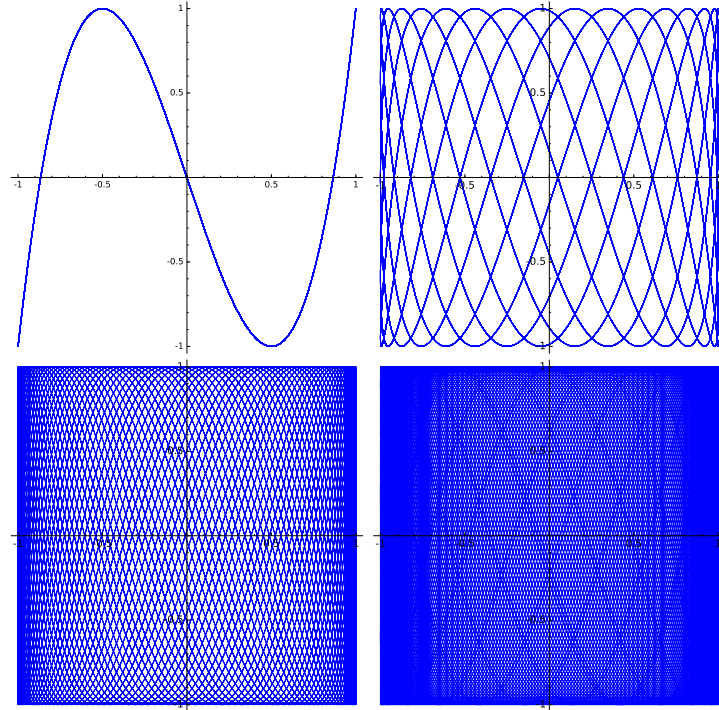


FIGURA 10. Figuras de Lissajous para  $\omega = 3; 3,1; 3,14; 3,1416$ ,  $t \in (0, 128\pi)$  con pasos de 0,01.

Si  $(M, H)$  es integrable en el sentido de Liouville, entonces para todo  $x \in M$ ,  $M_{F(x)}$  es compacta, luego la componente conexa a la que pertenezca  $x$ ,  $C_{F(x)}$ , es un toro invariante, en el que podemos dar coordenadas angulares con una dinámica como la del teorema. A la vista de esto, tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 8.15.** *Sea  $(M, H)$  un sistema integrable en el sentido de Liouville,  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $C_a$  un toro invariante. Existe un  $U \subset M$  entorno de  $C_a$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ .*

*Demostración.* ♣ **Cuidado con ésta que la he escrito yo.** Por hipótesis, las  $F_i$  son independientes para todo  $x \in M$ , luego  $F_*$  tiene rango máximo. Por tanto, sea  $x$  tal que  $F(x) = a$ , existe  $D \simeq \mathbb{R}^{2n}$  entorno simplemente conexo de  $x$ , existe  $V \subset D$  y existe  $B \subset \mathbb{R}^n$  abierto tal que  $F|_V : V \rightarrow B$  es un difeomorfismo. Ahora, sea

$$\begin{aligned} \Phi : M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \\ x &\longmapsto (F(x), \theta), \end{aligned}$$

con  $\theta$  coordenadas angulares en  $C_{F(x)}$  el toro invariante al que pertenece  $x$ . Entonces claramente  $\Phi$  da un difeomorfismo entre  $U = \bigcup_{x \in V} C_{F(x)}$  (que es un entorno de  $C_a$ ) y  $\bigcup_{b \in B} C_b$ . Como  $B$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $C_b$  es un toro invariante,  $U$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ .  $\square$

**Observación 8.16.** Aquí estamos suponiendo que  $x$  no está en el borde de  $M$ , en tal caso procederíamos análogamente para obtener un entorno difeomorfo a  $\mathbb{H}^n \times \mathbb{T}^n$ .

Finalmente, vamos a demostrar el teorema clave que nos permite construir la carta en la cual las ecuaciones de Hamilton pueden ser integradas por cuadraturas.

**Teorema 8.17** (de las variables de acción-ángulo). *Sea  $(M, H)$  un sistema integrable en el sentido de Liouville,  $D \in \mathbb{R}^n$  un disco,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $C_a$  un toro invariante y  $U$  un entorno de  $C_a$  difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ . Entonces existe un sistema de coordenadas simplécticas  $(\phi, J) = (\phi_1, \dots, \phi_n, J_1, \dots, J_n)$  en  $U$  tales que las  $\phi_i$  son coordenadas angulares en cada toro invariante y las  $J_i$  (comúnmente llamadas variables de acción) son constantes en estos toros.*

*Demostración.* Sea  $\pi : U \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección canónica, entonces  $\pi^{-1}(x)$  es un toro invariante para cada  $x \in D = \pi(U)$ . En cada uno de estos toros, sean  $X_i = X^{F_i}$  y  $(F, \theta)$  las coordenadas obtenidas en el lema anterior,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k,$$

donde las  $a_{ik}$  son funciones constantes en cada toro.

Como  $\omega$  se anula en el toro, no tiene términos en  $d\theta_i \wedge d\theta_j$ . Los términos en  $d\theta_i \wedge dF_j$  serán

$$\omega \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial F_j} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \omega \left( X_k, \frac{\partial}{\partial F_j} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot dF_k \left( \frac{\partial}{\partial F_j} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{ij} = a_{ij}.$$

Por tanto,  $\omega$  es de la forma

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} d\theta_i \wedge dF_j + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} dF_i \wedge dF_j,$$

con  $b_{ij}$  unas ciertas funciones. Además, como  $\omega$  es cerrada, el término correspondiente a  $d\theta_k \wedge dF_i \wedge dF_j$  debe anularse. Este término es exactamente

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial F_j} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial F_i} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k}.$$

El término  $\frac{\partial a_{ki}}{\partial F_j} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial F_i}$  no depende de las variables angulares, luego las  $\frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k}$  son constantes al variar los ángulos  $\theta_k$ . Como las variables  $\theta_k$  son angulares, las  $b_{ij}$  deben ser periódicas, luego

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial \theta_k} = 0$$

y las  $b_{ij}$  son constantes en cada toro invariante.

Si ahora definimos  $A_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} dF_j$ ,  $B = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} dF_i \wedge dF_j$ ,

$$\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge A_i + B.$$

Como las  $a_{ij}$  y las  $b_{ij}$  son constantes en cada toro invariante podemos ver las  $A_i$  y  $B$  como formas en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, existen 1-formas  $\alpha_i$  y una 2-forma  $\beta$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que

$$A_i = \pi^* \alpha_i \quad B = \pi^* \beta.$$

De aquí tenemos

$$0 = d\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge \pi^* d\alpha_i + \pi^* d\beta,$$

de donde concluimos que  $d\alpha_i = 0$  y  $d\beta = 0$ . En  $\mathbb{R}^n$  todas las formas cerradas son exactas. Por tanto, existen  $I_i$  y  $\gamma$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\alpha_i = dI_i$ ,  $\beta = d\gamma$ .

Finalmente, sean  $J_i = (I_i \circ \pi) = \pi^* I_i$ , tenemos que  $dJ_i = A_i$ , luego

$$\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dJ_i + B.$$

En el sistema de coordenadas  $(\theta, F)$ , la matriz asociada a  $\omega$  es de la forma

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & \frac{\partial J_i}{\partial F_j} \\ \hline -\frac{\partial J_i}{\partial F_j} & b_{ij} \end{array} \right).$$

Como  $\omega$  es regular, el determinante de esta matriz es distinto de cero, luego  $\det \left( \frac{\partial J_i}{\partial F_j} \right) \neq 0$ . Por tanto,  $(\theta, J)$  es un sistema de coordenadas.

Ahora, si escribimos  $\gamma = \sum_{i=1}^n g_i dI_i$ , para algunas funciones  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces podemos tomar unas nuevas coordenadas

$$\phi_i = \theta_i + (g_i \circ \pi).$$



En estas nuevas coordenadas

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n d\phi_i \wedge dJ_i &= \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dJ_i + \sum_{i=1}^n d(g_i \circ \pi) \wedge J_i \\
&= \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dJ_i + \sum_{i=1}^n d(g_i \circ \pi) \wedge d(I_i \circ \pi) \\
&= \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dJ_i + \pi^* d\gamma = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge A_i + B = \omega.
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos encontrado unas coordenadas simplécticas  $(J, \phi)$ , con las  $J_i$  constantes en cada toro invariante y con las  $\phi_i$  coordenadas angulares en estos toros.  $\square$

**Observación 8.18.** Volviendo al caso del oscilador armónico  $n$ -dimensional, notamos que  $\omega = d\alpha$ , con  $\alpha = \sum_{i=1}^n J_i d\phi_i$ , entonces  $J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \alpha$ .

**Corolario 8.19.** *Todo sistema integrable en el sentido de Liouville es integrable por cuadraturas.*

*Demostración.* Dado un punto  $x \in M$ , basta tomar unas variables de acción-ángulo (las  $(J, \phi)$  del teorema). Entonces, como ya hemos visto, las soluciones de las ecuaciones de Hamilton en estas coordenadas quedan escritas en la forma

$$\begin{aligned}
J_i(t) &= J_i(0) \\
\phi_i(t) &= \phi_i(0) + \omega_i(F(0))t,
\end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$ , donde las frecuencias  $\omega_i$  se obtuvieron en términos de funciones conocidas. Así, el sistema queda integrado por cuadraturas.  $\square$

## 9. UN POCO MÁS DE MOVIMIENTO CONDICIONALMENTE PERIÓDICO

Como colofón, una vez tenemos a nuestra disposición la teoría de Arnold-Liouville, sabemos que el flujo en los toros invariantes de los sistemas integrables en el sentido de Liouville será condicionalmente periódico. En esta sección definiremos bien qué significa esto y obtendremos un teorema muy importante sobre este tipo de sistemas.

**Definición 9.1** (Movimiento condicionalmente periódico en  $\mathbb{T}^n$ ). Sean  $\mathbb{T}^n$  el toro  $n$ -dimensional y  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  coordenadas angulares. Se entiende por un *movimiento condicionalmente periódico* en el toro el flujo uniparamétrico dado por

$$\phi(t) = \phi(0) + \omega t$$

con  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  frecuencias constantes en el toro. Las frecuencias  $\omega$  se dicen *independientes* si, sea  $k \in \mathbb{Z}^n$ , entonces  $\langle k, \omega \rangle = 0$  si y sólo si  $k = 0$ .

**Definición 9.2** (Promedios espacial y temporal). Sea  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable Riemann,

1. El *promedio espacial* de  $f$  en  $\mathbb{T}^n$  es el número

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi_1, \dots, d\phi_n.$$

2. El *promedio temporal* de  $f$  en  $\mathbb{T}^n$  es la función

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(\phi_0 + \omega t) dt,$$

definida en los puntos  $\phi_0$  en los que exista el límite.

**Teorema 9.3** (Teorema de los promedios). *Si  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función integrable Riemann y las frecuencias  $\omega$  son independientes, el promedio temporal está bien definido en todo el toro  $\mathbb{T}^n$  y coincide en todo punto con el promedio espacial.*

*Demostración.* Daremos la demostración en varios pasos:

1. Consideramos funciones de la forma  $e^{i\langle k, \phi \rangle}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ . Si  $k = 0$ , entonces  $\bar{f} = f = f^* = 1$ . Si  $k \neq 0$ ,  $\bar{f}$  es una integral a periodos en funciones trigonométricas, luego es igual a 0. Por otra parte

$$\int_0^T e^{i\langle k, \phi_0 + \omega t \rangle} dt = e^{i\langle k, \phi_0 \rangle} \int_0^T e^{i\langle k, \omega \rangle t} dt = e^{i\langle k, \phi_0 \rangle} \frac{e^{i\langle k, \omega \rangle T} - 1}{i \langle k, \omega \rangle}.$$

Por tanto, el promedio temporal será

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{i\langle k, \phi_0 \rangle} e^{i\langle k, \omega \rangle T} - 1}{i \langle k, \omega \rangle T} = 0.$$

2. Como los promedios dependen linealmente de  $f$ , también coincidirán para los polinomios trigonométricos

$$f = \sum_{|k| < N} f_k e^{i\langle k, \omega \rangle}.$$

3. Dado  $\varepsilon > 0$ , si  $f$  es continua y real por el teorema de Weierstrass podemos aproximarla por un polinomio trigonométrico  $P$  que cumpla  $|f - P| < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Sean  $P_1 = P - \frac{1}{2}\varepsilon$ ,  $P_2 = P + \frac{1}{2}\varepsilon$  entonces

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (P_2 - P_1) d\phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \varepsilon (2\pi)^n = \varepsilon.$$

4. Dado  $\varepsilon > 0$ , si  $f$  es real e integrable Riemann, entonces existen dos funciones continuas  $f_1, f_2$  tales que  $f_1 < f < f_2$  y  $\int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} (f_2 - f_1) d\phi < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Tomando ahora  $P_1, P_2$  polinomios trigonométricos tales que  $P_1 < f_1 < f_2 < P_2$  y  $\int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} (P_i - f_i) d\phi < \frac{1}{3}\varepsilon$ , para  $i = 1, 2$ , entonces

$$\bar{P}_2 - \bar{P}_1 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (P_2 - P_1) d\phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \varepsilon (2\pi)^n = \varepsilon.$$

5. Por último, sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existen dos polinomios trigonométricos  $P_1, P_2$  tales que  $P_1 < f < P_2$  y  $\bar{P}_2 - \bar{P}_1 < \varepsilon$ . Ahora, como  $f < P_2$ ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(t)) dt < \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t)) dt,$$

luego

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(t))dt - \bar{f} \right| < \left| \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t))dt - \bar{f} \right| < \left| \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t))dt - \bar{P}_2 \right| + |\bar{P}_2 - \bar{f}|.$$

Pero, como  $P_1 < f < P_2$ , por la monotonía de la integral  $\bar{P}_1 < f < \bar{P}_2$ , luego  $|\bar{P}_2 - \bar{f}| < |\bar{P}_2 - \bar{P}_1| < \varepsilon$ . Además, como  $P_2$  es un polinomio trigonométrico existe un  $T_0$  tal que, si  $T > T_0$

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t))dt - \bar{P}_2 \right| < \varepsilon.$$

Finalmente, obtenemos lo que queríamos probar

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(t))dt - \bar{f} \right| < \left| \frac{1}{T} \int_0^T P_2(\phi(t))dt - \bar{P}_2 \right| + |\bar{P}_2 - \bar{f}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

$$\text{luego } f^*(\phi_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi(t))dt = \bar{f}.$$

□

**Corolario 9.4.** *Si las frecuencias son independientes, entonces, para todo  $\phi_0 \in \mathbb{T}^n$ ,*

$$\{\phi(t) = \phi_0 + \omega t | t \in \mathbb{R}\}$$

*es denso en el toro  $\mathbb{T}^n$ .*

*Demostración.* En caso contrario, sea un abierto  $D$  del toro que no tiene ningún punto de la trayectoria  $\phi(t)$ . Construimos la función

$$f(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi \notin D \\ \frac{(2\pi)^n}{\int_D d\phi} & \text{si } \phi \in D. \end{cases}$$

Claramente,  $\bar{f} = 1$ , pero  $f^*(\phi_0) = 0$ , lo que contradice el teorema de los promedios.

□

**Corolario 9.5.** *Sea  $D \subset \mathbb{T}^n$  un conjunto medible Jordan. Sea  $A_D = \{t \in \mathbb{R} | \phi(t) \in D\}$  (que también es medible Jordan) y sea  $\tau_D(T) = \int_0^T \chi_{A_D}(t)dt$ . Entonces*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \frac{\text{Vol}(D)}{(2\pi)^n}.$$

*Demostración.* Aplicamos el teorema a  $\chi_D$ , entonces  $\int_0^T \chi_D(\phi(t))dt = \int_0^T \chi_{A_D}(t)dt = \tau_D(T)$  y  $\bar{\chi}_D = (2\pi)^{-n} \text{Vol}(D)$ . Finalmente, por el teorema de los promedios

$$\bar{\chi}_D = \frac{\text{Vol}(D)}{(2\pi)^n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_D(\phi(t))dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_D(T)}{T}.$$

□

## REFERENCIAS

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989. 4, 33
- [2] Wikimedia Commons. Euler angles. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler.png>, 2007. Online; visto el 18 de julio de 2017. 32
- [3] Wikimedia Commons. Heavy symmetric top in terms of Euler angles. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heavy\\_symmetric\\_top\\_euler\\_angles.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heavy_symmetric_top_euler_angles.svg), 2015. Online; visto el 18 de julio de 2017. 32
- [4] J.F. Fernando, J.M. Gamboa, and J.M. Ruiz. *Álgebra lineal (vol. 2)*. Editorial Sanz y Torres, 2010. 15
- [5] J.M. Gamboa and J.M. Ruiz. *Introducción al estudio de las Variedades Diferenciabiles*. Editorial Sanz y Torres, 2016. 9
- [6] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson Education India, 2011. 4
- [7] Victor Guillemin. Lecture notes on Theory of Differential Forms. Chapter 5: Cohomology via forms. <http://math.mit.edu/classes/18.952/spring2012/chapter5.pdf>, 2012. Online; visto el 22 de julio de 2017.
- [8] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Curso de física teórica (vol. 1): Mecánica*. Editorial Reverté, 1985. 4
- [10] Federica Pasquotto. Reminder on basic differential geometry. <http://www.few.vu.nl/~pasquott/reminder.pdf>, 2013. Online; visto el 22 de julio de 2017.
- [11] Michael Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Publish or Perish, 2010. 28