VARIEDADES DIFERENCIABLES

Guillermo Gallego Sánchez

Última versión: 11 de noviembre de 2018

Índice general

Capítulo 1

Variedades diferenciables

§1.1. El modelo local

El propósito principal de la noción de variedad diferenciable consiste en *generalizar el cálculo diferencial* a un espacio topológico. Para realizar esta tarea, es preciso recordar qué es el cálculo diferencial, y en qué categoría se realiza.

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos y una aplicación $f : U \to V$. Decimos que f es una ***aplicación (C^∞-) diferenciable*** si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en U. La regla de la cadena garantiza que, si $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ y $W \subset \mathbb{R}^p$ son abiertos y $f : U \to V$ y $g : V \to W$ es diferenciable, entonces su composición

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & W \\ V, \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

es una aplicación diferenciable. Así, tenemos una categoría, que denotaremos **CartSp** y llamaremos ***espacios cartesianos*** o ***espacios de coordenadas abstractos*** cuyos objetos son los abiertos de los espacios afines y sus morfismos son las aplicaciones diferenciables entre ellos. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, denotamos por $C^\infty(U)$ a las funciones diferenciables $U \to \mathbb{R}$, es decir, $C^\infty(U) = \mathbf{CartSp}(U, \mathbb{R})$.

Sea $V \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Se definen las ***funciones coordenadas*** como las funciones

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_i : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^m) &\longmapsto x^i. \end{aligned}$$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to V$. Se definen las ***componentes de*** f como las funciones $f^i = \mathrm{pr}_i \circ f$, que son diferenciables por la regla de la cadena y denotamos $f = (f^1, \dots, f^m)$. Recíprocamente, si todas las componentes son diferenciables, entonces la aplicación es diferenciable.

Sean ahora U y V abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente y $f : U \to V$ una aplicación diferenciable entre ellos. Dado un punto $x \in U$, se define la ***derivada de*** f ***en*** x como la aplicación lineal $d_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuya matriz asociada es la matriz jacobiana de f en x, es decir

$$J_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}.$$

De nuevo, la regla de la cadena garantiza que $d_x(g \circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f$. Por tanto, si consideramos la categoría $\mathbf{CartSp}_*$ de los espacios cartesianos ***con punto base*** cuyos objetos son los pares (U, x), con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in U$ y tal que los morfismos entre (U, x) y (V, y) son las aplicaciones diferenciables $f : U \to V$ tales que $f(x) = y$, entonces tenemos un funtor covariante

$$d : \mathbf{CartSp}_* \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$$

que a cada par (U, x), con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto le asigna el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y a cada morfismo $f : (U, x) \to (V, f(x))$, con $V \subset \mathbb{R}^m$ abierto, le asigna la aplicación lineal $d_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Un isomorfismo en la categoría **CartSp** se llama un ***difeomorfismo***. Es decir, un difeomorfismo es una aplicación diferenciable $f : U \to V$ tal que existe una aplicación diferenciable $f^{-1} : V \to U$, llamada ***inversa de*** f tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_U"] & V \arrow[d, "f^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_V"] & \\ & U \arrow[r, "f"] & V. \end{tikzcd}$$

Dos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ se dicen ***difeomorfos*** si existe un difeomorfismo entre ellos.

Proposición 1.1.1 (Invariancia diferenciable de la dimensión)**.** *Si dos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ son difeomorfos entonces $n = m$.*

Demostración. En efecto, si existe un difeomorfismo $f : U \to V$, entonces existe una aplicación diferenciable $f^{-1} : V \to U$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_U"] & V \arrow[d, "f^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_V"] & \\ & U \arrow[r, "f"] & V. \end{tikzcd}$$

Ahora, si consideramos un punto $x \in U$ e $y = f(x)$, la imagen del diagrama anterior por el funtor d es

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "d_x f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "d_y(f^{-1})"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}"] & \\ & \mathbb{R}^n \arrow[r, "d_x f"] & \mathbb{R}^m. \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que $d_x f$ es un isomorfismo lineal, luego $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ y por tanto sus dimensiones coinciden, es decir, $n = m$. Más aún, hemos probado que $d_y(f^{-1}) = (d_x f)^{-1}$. □

El recíproco de este resultado es cierto *localmente*. En efecto, el teorema de la función inversa garantiza que si $f : U \to V$ es una aplicación diferenciable tal que $d_x U$ es un isomorfismo lineal, para cierto $x \in U$, entonces existe un entorno abierto $W \subset U$ de x tal que $f|_W : W \to f(W)$ es un difeomorfismo. Decimos entonces que f es un ***difeomorfismo local***.

§1.2. El concepto. Definición y ejemplos

Definición 1.2.1. Un ***espacio localmente afín*** es un espacio topológico M localmente homeomorfo a un abierto de un espacio afín. Es decir, para todo $x \in M$ existe un entorno abierto $U \subset M$ de x, un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ y un homeomorfismo $\varphi : U \to V$. El abierto U se llama ***dominio de coordenadas*** y el difeomorfismo φ, ***sistema local de coordenadas*** en x. El par (U, φ) se llama una ***carta*** de M en x.

Un espacio localmente afín que además es Hausdorff y segundo axioma de numerabilidad se llama una ***variedad topológica***.

Definición 1.2.2. Sea M una variedad topológica y $x \in M$ un punto. Dadas dos cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), se define el ***cambio de coordenadas*** como la aplicación ψ_{12} que cierra el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & V_1 \subset \mathbb{R}^n \\
 & & \varphi_1(U_1 \cap U_2) \arrow[u, hook] \arrow[dd, "\psi_{12}"] \\
U_1 \cap U_2 \arrow[uur, hook] \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[ddr, hook] & & \\
 & & \varphi_2(U_1 \cap U_2) \arrow[d, hook] \\
 & U_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & V_2 \subset \mathbb{R}^m.
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\psi_{12} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$.

Nótese que por ser φ_1 y φ_2 homeomorfismos, el cambio de coordenadas ψ_{12} es un homeomorfismo entre $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ y $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$, que son ambos abiertos de algún espacio afín. El caso que a nosotros nos incumbe es aquel en el que estos cambios de coordenadas son difeomorfismos, ya que queremos que nuestro modelo local sea la categoría **CartSp** cuyos morfismos eran las aplicaciones diferenciables.

Definición 1.2.3. Una variedad topológica se dice que es una ***variedad diferenciable*** si, para todo punto $x \in M$ y para cualesquiera dos cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), el cambio de coordenadas ψ_{12} es un difeomorfismo.

Una consecuencia inmediata de la definición de variedad diferenciable y de la Proposición 1.1.1, es que todos los dominios de coordenadas en un punto $x \in M$ de una variedad diferenciable M son abiertos del mismo $\mathbb{R}^n$. Este n se denomina ***dimensión de M en x*** y se denota $\dim_x M$. Nótese además que, de hecho, si U_1 y U_2 son dominios de coordenadas en x, todos los puntos de $U_1 \cap U_2$ tienen la misma dimensión, luego, si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \dim : M &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \dim_x M, \end{aligned}$$

y consideramos en $\mathbb{N}$ la topología discreta, la aplicación dim es continua, ya que el conjunto $\dim^{-1}(\dim_x M)$ contiene a $U_1 \cap U_2$. Más aún, como la imagen continua de un conexo es un conexo, la dimensión es constante en cada componente conexa de M. Así, si M es una variedad diferenciable conexa podemos hablar con propiedad de la ***dimensión*** de M, $\dim M$, que será el número $\dim_x M$ para cualquier $x \in M$. Las variedades diferenciables de dimensión 1 se llaman ***curvas*** y las de dimensión 2, ***superficies***.

Ejemplo 1.2.4. Un primer ejemplo trivial es el propio $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, con la carta

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

De la misma forma, cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es también una variedad diferenciable de dimensión n. □

Ejemplo 1.2.5. Consideramos la ***esfera n-dimensional***

$$\mathbb{S}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1 \right\}.$$

Podemos considerar los abiertos $U_1 = \mathbb{S}^n - \{p_N\}$ y $U_2 = \mathbb{S}^n - \{p_S\}$, con $p_N = (0, \dots, 0, 1)$ y $p_S = (0, \dots, 0, -1)$ los polos norte y sur de la esfera. Estos abiertos son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ mediante las aplicaciones $\varphi_S : U_1 \to \mathbb{R}^n$ la proyección estereográfica centrada en el polo sur y $\varphi_N : U_2 \to \mathbb{R}^n$ la proyección estereográfica centrada en el polo norte. No es difícil comprobar que el cambio de coordenadas $(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})|_{\varphi_S(\mathbb{S}^n - \{p_N, p_S\})}$ es un difeomorfismo, de modo que $\mathbb{S}^n$ es una variedad diferenciable. □

Ejemplo 1.2.6. Consideramos el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Los conjuntos de la forma

$$D(x_i) = \{(x_0 : \cdots : x_n) : x_i \neq 0\}$$

son abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ por medio de

$$\begin{aligned} \varphi_i : D(x_i) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0 : \cdots : x_i : \cdots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Los cambios de coordenadas vienen dados por

$$\psi_{ij} = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})|_{\varphi_i(D(x_i) \cap D(x_j))},$$

que son de la forma

$$\psi \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right)$$

y son claramente difeomorfismos. □

Regresando a la definición de variedad diferenciable. Nótese que esencialmente lo que pedimos a una variedad topológica M para que sea variedad diferenciable es que admita un conjunto de cartas $\mathcal{U}$ tal que

- los dominios de coordenadas recubran M, es decir, $M = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ y,
- los cambios de coordenadas sean difeomorfismos.

Un conjunto de cartas de estas características se denomina un ***atlas*** de M. Así, dotar a M de la estructura de variedad diferenciable es simplemente dar un atlas de M. Cabría preguntarse entonces si la elección de las cartas influirá en la estructura de variedad diferenciable que estamos dando. Dos cartas se dicen ***compatibles*** si el cambio de coordenadas entre ellas es un difeomorfismo. Dos atlas se dicen ***compatibles*** si todas las cartas de uno lo son con las del otro, es decir, si su unión es de nuevo un atlas. No es difícil comprobar que la compatibilidad entre atlas es una relación de equivalencia. De aquí se deduce que todo atlas es compatible con (es decir, está contenido en) un atlas maximal único, aquel que tiene todas las cartas compatibles con las del primero. Así, en vez de dar un atlas cualquiera, podemos considerar el atlas maximal correspondiente, de forma que tiene sentido decir que un atlas maximal es una ***estructura diferenciable***. Podemos entonces redefinir variedad diferenciable de la siguiente forma:

Definición 1.2.7. Una variedad diferenciable es un par $(M, \mathcal{U}_M)$, donde M es una variedad topológica y $\mathcal{U}_M$ es una estructura diferenciable (es decir, un atlas maximal) en M.

Observación. En ninguno de los ejemplos anteriores los atlas considerados eran maximales.

Ejemplo 1.2.8. En el caso del espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ cabría preguntarse si el atlas definido $\{(D(x_i), \varphi_i)\}$ depende de la elección de coordenadas homogéneas. Esto no es así, ya que para cualquier hiperplano

$$H = \left\{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} | F(x_0, \ldots, x_n) = 0\right\},$$

con $F \in \mathbb{R}[X_0, \ldots, X_n]_1$ un polinomio homogéneo de grado 1, podemos considerar la carta $(D(H), \varphi_H)$, con $D(H) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} - H$ un abierto homeomorfo a un espacio afín

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} = \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | F(x_0, \ldots, x_1) = 1\right\}$$

por

$$\begin{aligned} \varphi_H : D(H) &\longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \\ (x_0 : \cdots : x_n) &\longmapsto \frac{1}{F(x_0, \ldots, x_n)}(x_0, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Observación. Cabe preguntarse ahora si será posible dotar a una misma variedad topológica de estructuras diferenciables diferentes. En efecto, esto puede hacerse: basta considerar dos atlas que no sean compatibles. Por ejemplo, consideramos en $\mathbb{R}$ los homeomorfismos

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^3. \end{aligned}$$

Cada una de estas cartas define un atlas por sí sola, es decir, $\mathcal{U}_1 = \{(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})\}$ y $\mathcal{U}_2 = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$. Pero estos atlas no son compatibles, ya que el cambio de coordenadas es

$$\psi(t) = \varphi \circ \mathrm{id}^{-1}(t) = t^3,$$

que no es un difeomorfismo, ya que su inversa

$$\psi^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$$

no es diferenciable en $t = 0$. Por tanto, $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ darán dos estructuras diferenciables diferentes.

§1.3. Aplicaciones diferenciables

Definición 1.3.1. Sean dos variedades topológicas M y N y una aplicación continua $f : M \to N$. Sean $x \in M$, (U, φ) una carta en x y (V, ψ) una carta en $f(x)$. Se llama ***localización*** de f a las cartas (U, φ), (V, ψ) a la aplicación $\tilde{f}$ que cierra el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \subset M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \subset N \arrow[d, "\psi"] \\
\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \arrow[r, "\tilde{f}"] & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n.
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Definición 1.3.2. Una aplicación $f : M \to N$ entre dos variedades diferenciables M y N es ***diferenciable*** si, para todo $x \in M$ y para cualesquiera dos cartas (U, φ), (V, ψ) en x y $f(x)$, respectivamente, su localización $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ es diferenciable. Es decir, si $\tilde{f} \in$ **CartSp**$(\varphi(U), \psi(V))$.

Si M, N y P son variedades diferenciables y $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son aplicaciones diferenciables, entonces la localización de $(g \circ f)$ a unas cartas (U, φ), (W, η) es la aplicación $\widetilde{(g \circ f)}$ dada por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \subset M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & V \subset N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & W \subset P \arrow[d, "\eta"] \\
\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[rr, bend right, "\widetilde{(g\circ f)}"'] & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{g}"] & \eta(W) \subset \mathbb{R}^p.
\end{tikzcd}$$

La regla de la cadena garantiza que, si $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son diferenciables, entonces $\widetilde{(g \circ f)} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ es diferenciable, luego $g \circ f$ es diferenciable.

Podemos por tanto definir la categoría de las variedades diferenciables, que denotamos **Diff**, cuyos objetos son las variedades diferenciables y sus morfismos son las aplicaciones diferenciables entre ellas. Los isomorfismos de esta categoría también se llaman ***difeomorfismo***. Es decir, un difeomorfismo entre dos variedades diferenciables M y N es una aplicación diferenciable $f : M \to N$ biyectiva y con inversa diferenciable.

Ejemplo 1.3.3. Una homografía $h : \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$ es una aplicación diferenciable. Basta tomar un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, de modo que su imagen $h(H) \subset \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$ es también un hiperplano, y considerar la localización a las cartas $(D(H), \varphi_H)$, $(D(h(H)), \varphi_{h(H)})$

$$\begin{tikzcd}
D(H) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi_H"'] & D(h(H)) \arrow[d, "\varphi_{h(H)}"] \\
\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \arrow[r, "\tilde{h}"] & \mathbb{A}^m_{\mathbb{R}}.
\end{tikzcd}$$

Por ser h una homografía, su localización $\tilde{h}$ es una aplicación afín, luego es diferenciable. Por tanto, h es diferenciable.

Observación. En una observación al final de la sección anterior vimos como una misma variedad topológica puede fácilmente admitir estructuras diferenciables distintas. Vimos concretamente el ejemplo de $\mathbb{R}$ con la carta dada por la identidad y la dada por la función elevar al cubo. Sin embargo, aunque estas dos estructuras son diferentes, son difeomorfas. En efecto, basta considerar la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^3. \end{aligned}$$

La localización de esta aplicación a las cartas $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ y $(\mathbb{R}, \varphi)$ viene dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

Es decir,

$$\tilde{f}(t) = \varphi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \mathrm{id}(t) = \sqrt[3]{t^3} = t.$$

Por tanto, $\tilde{f} = \mathrm{id}$, luego es diferenciable. De hecho, es un difeomorfismo, luego f es un difeomorfismo y $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ es difeomorfa a $(\mathbb{R}, \varphi)$.

Cabe preguntarse entonces si una misma variedad topológica admite diferentes estructuras diferenciables no difeomorfas, si es que admite alguna. Es decir, consideramos el problema de la ***clasificación de las variedades diferenciables***. Sea M una variedad diferenciable conexa. Se tiene que:

- Si $\dim M = 0$, entonces M es difeomorfa a un punto.
- Si $\dim M = 1$, entonces la clasificación coincide con la clasificación de las curvas topológicas: M es difeomorfa a la recta real $\mathbb{R}$ si no es compacta o a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ si es compacta.
- Si $\dim M = 2$ entonces la clasificación también coincide con la clasificación de las superficies topológicas, con lo que, si M es compacta entonces es difeomorfa a una suma conexa de toros Σ_g, si es orientable o a una suma conexa de espacios proyectivos X_k si no lo es.
- Si $\dim M = 3$ la clasificación también coincide con el caso topológico, aunque en este caso la clasificación en el caso topológico no está completa.
- En dimensión $\dim M \geq 4$ las cosas se complican, ya que aparecen variedades topológicas que admiten varias estructuras diferenciables no difeomorfas. Si M es compacta y $\dim M \geq 5$, entonces M puede admitir varias estructuras diferenciables no difeomorfas, aunque una cantidad finita. Por ejemplo, la esfera $\mathbb{S}^7$ admite 28 estructuras diferenciables no difeomorfas entre sí («esferas exóticas»). En el caso en que $\dim M = 4$ entonces una variedad compacta M puede admitir una cantidad infinita numerable de estructuras diferenciables. En el caso no compacto aparecen resultados realmente sorprendentes. Por ejemplo, mientras que $\mathbb{R}^n$ admite una única estructura diferenciable salvo difeomorfismo si $n \neq 4$, $\mathbb{R}^4$ admite una cantidad *infinita no numerable* de estructuras diferenciables no difeomorfas. Estas variedades se conocen como los «falsos $\mathbb{R}^4$».

§1.4. Haces y C^∞-variedades

Sea X un espacio topológico. Denotamos por $\mathbf{Op}(X)$ a la categoría cuyos objetos son los subconjuntos abiertos $U \subset X$ y tal que, si $U \subset X$ y $V \subset X$ son abiertos de X, entonces el conjunto de morfismos de U a V, $\mathbf{Op}(X)(U, V)$ consta de:

- la inclusión $U \hookrightarrow V$ si $U \subset V$ y,
- es vacío en caso contrario.

Definición 1.4.1. Un ***prehaz*** sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante

$$\mathcal{F} : \mathbf{Op}(X) \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Es decir, un prehaz $\mathcal{F}$ asigna a cada abierto $U \subset X$ un conjunto $\mathcal{F}(U)$ y a cada par de abiertos U y V con $U \subset V$ le asigna una función

$$\begin{aligned} \mathrm{res}^V_U : \mathcal{F}(V) &\longrightarrow \mathcal{F}(U) \\ s &\longmapsto s|_U. \end{aligned}$$

Esta función se denomina ***restricción*** de V a U. Nótese que aquí la expresión $s|_U$ es simplemente una notación, pero que será consistente con los ejemplos que consideremos a continuación. Además, la funtorialidad asegura que, si $U \subset V \subset W$, entonces, para todo $s \in \mathcal{F}(W)$, $(s|_V)|_U = s|_W$. Los elementos de $\mathcal{F}(U)$ se denominan ***secciones*** de U.

Definición 1.4.2. Un ***haz*** sobre un espacio topológico X es un prehaz sobre X que satisface las siguientes propiedades

- ***localidad***: si tenemos un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de un abierto $U \subset X$ y dos secciones $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ tales que $s_1|_V = s_2|_V$ para todo $V \in \mathcal{U}$, entonces $s_1 = s_2$.
- ***pegado***: si tenemos un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de un abierto $U \subset X$ y, para cada $V \in \mathcal{U}$ tenemos una sección $s_V \in \mathcal{F}(V)$ tal que

  $$s_V|_{V\cap W} = s_W|_{V\cap W},$$

  para cualesquiera $V, W \in \mathcal{U}$, entonces existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_V = s_V$ para todo $V \in \mathcal{U}$.

Definición 1.4.3. Un ***subhaz*** de un haz $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico es un haz $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ para todo U abierto de X.

Definición 1.4.4. Una ***C^∞-variedad*** es un par (M, C^∞_M), donde M es una variedad topológica y C^∞_M es un subhaz del haz $C(M)$ de forma que, para todo punto $x \in M$ existe una carta (U, φ) en x tal que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi^* : C^\infty(\varphi(U)) &\longrightarrow C^\infty_M(U) \\ s &\longmapsto s \circ \varphi \end{aligned}$$

es biyectiva.

$$\begin{tikzcd} M \supset U \arrow[r, "s\circ\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \supset \varphi(U). \arrow[ur, "s"] & \end{tikzcd}$$

El haz C^∞_M se denomina ***haz de funciones diferenciables*** o ***haz de estructura*** de M.

Definición 1.4.5. Un C^∞***-morfismo*** entre dos C^∞-variedades (M, C^∞_M) y (N, C^∞_N) es una aplicación continua $f : M \to N$ tal que, si $V \subset N$, es un abierto, entonces existe una aplicación

$$\begin{aligned} f_V^* : C^\infty_N(V) &\longrightarrow C^\infty_M(f^{-1}(V)) \\ s &\longmapsto s \circ f. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} M \supset f^{-1}(V) \arrow[r, "s\circ f"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R} \\ N \supset V. \arrow[ur, "s"] & \end{tikzcd}$$

Estas definiciones nos permiten considerar una nueva categoría C^∞−**Man** cuyos objetos son las C^∞-variedades y sus morfismos son los C^∞-morfismos.

Proposición 1.4.6. *Existe una equivalencia de categorías*

$$\mathbf{Diff} \longrightarrow C^\infty\text{−}\mathbf{Man}.$$

Demostración. En primer lugar, debemos definir el funtor que nos dará la equivalencia de categorías. A cada variedad diferenciable $(M, \mathcal{U}_M)$ es necesario asignarle una C^∞-variedad $(M, \mathcal{F}_M)$. Claramente, a la variedad topológica le asociaremos ella misma. Podemos definir un prehaz a partir de $\mathcal{U}_M$ de la siguiente manera. Para cada $U \subset M$ tal que existe un sistema de coordenadas φ tal que $(U, \varphi) \in \mathcal{U}_M$ consideramos el conjunto

$$C^\infty_M(U) = \{f \circ \varphi : f \in C^\infty(\varphi(U))\}.$$

Si U no es un dominio de coordenadas del altas $\mathcal{U}_M$, entonces existe un conjunto de dominios de coordenadas $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_M$ tal que $U = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$ y puedo considerar

$$C^\infty_M(U) = \left\{f \in C(U) : f|_V \in C^\infty_M(V) \text{ para todo } V \in \mathcal{V}\right\}.$$

Es inmediato que esta asignación C^∞_M así definida es, de hecho un haz sobre M.

En cuanto a los morfismos, si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable, su C^∞-morfismo asociado es simplemente la propia aplicación f, que claramente induce una aplicación de la forma

$$\begin{aligned} f_V^* : C^\infty_N(V) &\longrightarrow C^\infty_M(f^{-1}(V)) \\ s &\longmapsto s \circ f, \end{aligned}$$

con $V \subset N$ abierto.

Tenemos que probar entonces

1. que el funtor es esencialmente sobreyectivo, es decir, que toda C^∞-variedad puede obtenerse de esta manera, y
2. que el funtor es plenamente fiel, es decir, que, dadas dos variedades diferenciables M y N, existe una biyección entre las aplicaciones diferenciables entre M y N y los C^∞-morfismos entre las C^∞-variedades asociadas.

Veamos 1. Sea (M, C_M^∞) una C^∞-variedad. Para cada punto $x \in M$ consideremos la carta (U_x, φ_x) que aparece en la definición de C^∞-variedad y definimos el conjunto

$$\mathcal{U}_M = \{(U_x, \varphi_x) : x \in M\}.$$

Veamos que $\mathcal{U}_M$ es un atlas en M. Dadas dos cartas $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{U}_M$, con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, tenemos que ver que $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es un difeomorfismo. La biyectividad está clara, así que basta ver que tanto ella como su inversa son diferenciables. Tan solo probaremos la diferenciabilidad de ella, ya que para la de su inversa la demostración es análoga. Para ver esto, basta considerar las funciones coordenadas

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_i : \varphi_2(U_2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y^1, \ldots, y^n) &\longmapsto y^i, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$, con $n = \dim M$ (en la componente conexa que corresponda). Estas aplicaciones son claramente diferenciables, es decir, $\mathrm{pr}_i \in C^\infty(\varphi_2(U_2))$. Pero $\mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1}$, luego $\mathrm{pr}_i \circ \varphi_2 \in C_M^\infty(U_2)$ y, por ser prehaz, $\mathrm{pr}_i \circ \varphi_2|_{U_1 \cap U_2} \in C_M^\infty(U_1 \cap U_2)$. Pero, de nuevo, por la definición de C^∞-variedad, $\mathrm{pr}_i \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in C_M^\infty(\varphi_1(U_1 \cap U_2))$. Por tanto, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable coordenada a coordenada, luego es diferenciable. Tenemos entonces que $\mathcal{U}_M$ es un atlas en M y, tomando el maximal que lo contiene, dotamos a M de una estructura diferenciable.

Finalmente, veamos 2. La inyectividad está clara ya que aplicaciones diferenciables distintas $M \to N$ inducen C^∞-morfismos distintos. Basta ver entonces que, si $f : M \to N$ es un C^∞-morfismo, entonces es una aplicación diferenciable respecto de la estructura diferenciable que acabamos de construir. En efecto, si $x \in M$ es un punto y (V, ψ) es una carta de N en $f(x)$ como la de la definición de C^∞-variedad, entonces, para $i = 1, \ldots, n$, con $n = \dim N$, $\mathrm{pr}_i = (\mathrm{pr}_i \circ \psi) \circ \psi^{-1}$ es una función diferenciable en $\psi(V)$, es decir $\mathrm{pr}_i \in C^\infty(\psi(V)$, luego $\mathrm{pr}_i \circ \psi \in C_N^\infty(V)$. Ahora, por ser f un C^∞-morfismo, $f_V^*(\mathrm{pr}_i \circ \psi) = \mathrm{pr}_i \circ \psi \circ f \in C_M^\infty(f^{-1}(V))$. Si tomamos ahora una carta (U, φ) de M en x como la de la definición de C^∞-variedad y tal que $U \subset f^{-1}(V)$, entonces $\mathrm{pr}_i \circ \psi \circ f \in C_M^\infty(U)$, luego $\mathrm{pr}_i \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U))$. Hemos visto entonces que, para cada punto $x \in M$ existen cartas (U, φ) y (V, ψ) en M y N respectivamente, con $f(U) \subset V$ y tales que cada componente de la localización (y por tanto, la localización) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable, luego, por la definición de aplicación diferenciable, f es diferenciable. □

§1.5. Variedades sumergidas

Definición 1.5.1. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ dos conjuntos. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice ***diferenciable*** si existen dos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$, con $X \subset U$ e $Y \subset V$ y una aplicación diferenciable $F : U \to V$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "F"] & V \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & Y. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Análogamente, decimos que f es un difeomorfismo si es biyectiva y su inversa es diferenciable (en el mismo sentido que acabamos de definir).

Definición 1.5.2. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se llama una ***subvariedad regular*** de $\mathbb{R}^p$ o una ***variedad diferenciable sumergida*** en $\mathbb{R}^p$ si es localmente difeomorfo a un abierto de un espacio afín. Es decir, para todo $x \in M$ existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^p$ de x, un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, para cierto $n \in \mathbb{N}$ y un difeomorfismo $\varphi : U \cap M \to V$.

Nótese que todo subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se puede dotar de la topología relativa: los abiertos de M son los conjuntos de la forma $U \cap M$, con $U \subset \mathbb{R}^p$ abierto de $\mathbb{R}^p$. Por tanto, si M es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^p$, entonces es una variedad topológica con la topología relativa y, para cada $x \in M$ tenemos una carta $\varphi_x : U_x \cap M \to V \subset \mathbb{R}^n$. De hecho, como las cartas φ son difeomorfismos, los cambios de coordenadas $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ también son difeomorfismos, luego las cartas son compatibles y forman un atlas. Tenemos entonces que toda subvariedad regular es una variedad diferenciable.

Los ejemplos no triviales más simples de variedades sumergidas vienen dados por el teorema de la función implícita:

Proposición 1.5.3 (Teorema de la función implícita)**.** *Sean $U \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto y $F : U \to \mathbb{R}^q$ una aplicación diferenciable. Supongamos que existe un punto $a \in U$ en el que d_aF es sobreyectiva. Entonces existe un entorno abierto $B \subset U$ de a tal que*

$$M = \{x \in B : F(x) = F(a)\},$$

es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^p$ de dimensión $p - q$.

Demostración. Como $d_aF : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es sobreyectiva, $p > q$ y $\dim\ker d_aF = p - q$, luego existe un isomorfismo lineal $\psi : \ker d_aF \to \mathbb{R}^{p-q}$ que nos permite definir una aplicación lineal sobreyectiva $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p-q}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in \ker d_aF \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Definimos entonces

$$\begin{aligned} h : U &\longrightarrow \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p-q} \\ x &\longmapsto (F(x), g(x)). \end{aligned}$$

Ahora, $d_ah = (d_aF, g) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ es inyectiva ya que si $d_ah(\mathbf{u}) = 0$ entonces $d_aF(\mathbf{u}) = 0$, luego $\mathbf{u} \in \ker d_aF$. Pero entonces $g(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{u}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = 0$, ya que ψ es un isomorfismo lineal. Por tanto, d_ah es un isomorfismo lineal y, por el teorema de la función inversa, existen un entorno $B \subset U$ de a y un entorno $V \subset \mathbb{R}^p$ de $h(a) = (F(a), g(a))$ tales que $h : B \to V$ es un difeomorfismo. Finalmente, M es difeomorfo a $h(M) = (\{f(a)\} \times \mathbb{R}^{p-q}) \cap V \subset \mathbb{R}^p$, que es claramente una subvariedad regular de dimensión $p - q$. □

Ejemplo 1.5.4. Un ejemplo muy sencillo de subvariedad regular dada por el teorema de la función implícita es la esfera. En efecto, consideramos la función

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &\longmapsto (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2. \end{aligned}$$

La derivada de F en un punto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es

$$\begin{aligned} d_aF : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\longmapsto 2\langle a, \mathbf{u}\rangle, \end{aligned}$$

que es sobreyectiva si $a \neq 0$. Por tanto, la ***esfera n-dimensional de radio*** $\sqrt{F(a)}$,

$$\mathbb{S}^n_{\sqrt{F(a)}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : F(x) = F(a) \right\},$$

es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^p$ de dimensión n. En el caso que $F(a) = 1$ (es decir, si $\|a\| = 1$) la denotamos $\mathbb{S}^n$ y la llamamos simplemente ***esfera n-dimensional***. Claramente, todas las esferas de la misma dimensión son difeomorfas, basta considerar la homotecia

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n_r &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

□

Las aplicaciones diferenciables entre dos subvariedades regulares $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ son simplemente aplicaciones diferenciables $M \to N$ en el sentido de la Definición 1.5.1. Así, podemos considerar una nueva categoría, que llamaremos **RegMan** cuyos objetos son las subvariedades regulares y sus morfismos, las aplicaciones diferenciables entre ellas.

Nótese también que, en el caso de las subvariedades regulares, podemos dotar a $M \subset \mathbb{R}^p$ de un haz de funciones diferenciables de manera trivial: como los abiertos de M son de la forma $U \cap M$, con $U \subset \mathbb{R}^p$ abierto, consideramos simplemente

$$C^\infty_M(U \cap M) = \{U \cap M \to \mathbb{R} \text{ diferenciables}\},$$

donde la diferenciabilidad se entiende en el sentido de la definición 1.5.1. Claramente, como M es una subvariedad regular, para todo punto $x \in M$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^p$ y un difeomorfismo $\varphi : U \cap M \to V$, con $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto, para cierto $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_* : C^\infty_M(U \cap M) &\longrightarrow C^\infty(V) \\ s &\longmapsto s \circ \varphi^{-1}, \end{aligned}$$

es biyectiva y (M, C^∞_M) es una C^∞-variedad.

Hemos visto que toda subvariedad regular es una variedad diferenciable, pero el recíproco también es cierto. El teorema de inmersión de variedades abstractas garantiza que toda variedad diferenciable M es difeomorfa a alguna subvariedad regular $\hat{M} \subset \mathbb{R}^p$, para algún $p \in \mathbb{N}$. Esto nos permite demostrar el siguiente teorema:

Proposición 1.5.5. *Existe una equivalencia de categorías*

$$\mathbf{Diff} \longrightarrow \mathbf{RegMan}.$$

Demostración. Si M es una variedad diferenciable denotamos $\hat{M} \subset \mathbb{R}^p$ y $\varphi_M : M \to \hat{M}$ la subvariedad regular y el difeomorfismo dados por el teorema de inmersión de variedades abstractas. Podemos definir un funtor que asigne, a cada variedad diferenciable M, la subvariedad regular $\hat{M}$ y, a cada aplicación diferenciable $f : M \to N$, la aplicación $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$ que cierra el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_M"'] & N \arrow[d, "\varphi_N"] \\
\hat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{N}.
\end{tikzcd}
$$

La funtorialidad es inmediata y la asignación entre morfismos es claramente biyectiva por ser φ_M y φ_N difeomorfismos. Por tanto, el funtor es plenamente fiel. Que es esencialmente sobreyectivo es inmediato también porque toda subvariedad regular M es ya una variedad diferenciable, es decir $M = \hat{M}$. Por tanto, tenemos una equivalencia de categorías. □

En resumen, a lo largo de este capítulo hemos definido tres categorías: **Diff**, C^∞−**Man** y **RegMan**, que han resultado ser equivalentes. Es decir, las tres categorías representan el mismo concepto matemático: espacios localmente modelados por **CartSp**, o sea, espacios donde se puede hacer cálculo diferencial. A la vista de esto, a lo largo del texto, trabajaremos con las tres categorías indistintamente: una variedad diferenciable significará para nosotros un objeto de alguna de estas tres categorías, según nos sea conveniente.

§1.6. Variedades con borde

Para terminar el capítulo, vamos a considerar una clase de objetos ligeramente más general que las variedades diferenciables. En esta clase queremos incluir objetos que puedan «tener borde». Intuitivamente estamos pensando en objetos como un semiplano que contiene a la recta delimitante, discos con frontera, cilindros, bandas, etc.

En este caso el modelo local son los abiertos U del ***semiespacio cerrado***

$$\mathbb{H}^n = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0\right\},$$

cuyo ***borde*** es simplemente la frontera topológica

$$\partial\mathbb{H}^n = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 = 0\right\}.$$

Proposición 1.6.1 (Invariancia diferenciable del borde)**.** *Sean dos abiertos $U \subset \mathbb{H}^n$, $V \subset \mathbb{H}^n$ y un difeomorfismo $f : U \to V$. Entonces $f(U \cap \partial\mathbb{H}^n) = V \cap \partial\mathbb{H}^n$.*

Demostración. Probamos uno de los contenidos, el otro es análogo considerando f^{-1}, ya que f es un difeomorfismo. Supongamos que existe un punto $x \notin U \cap \partial\mathbb{H}^n$ tal que $f(x) \in V \cap \partial\mathbb{H}^n$. Como x está en el interior de U, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B_\varepsilon(x) \subset U$. Por tanto, para cualquier vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, la imagen de la curva $\gamma(t) = x + t\mathbf{u}$ está contenida en U si $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Podemos considerar entonces una aplicación $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada tiempo t nos diga «a qué altura» se encuentra la imagen por f de $\gamma(t)$ del borde. Es decir, definimos la aplicación $g = \mathrm{pr}_1 \circ f \circ \gamma$, cuya derivada es simplemente

$$g'(t) = \langle \nabla f_1(x + t\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle,$$

donde $f = (f_1, \ldots, f_n)$ y hemos aplicado la regla de la cadena. Ahora, como $f(y) \in \mathbb{H}^n$ para todo $y \in U$, $\mathrm{pr}_1(f(y)) \geq 0$ y, como $f(x) \in \partial\mathbb{H}^n$, $\mathrm{pr}_1(f(x)) = 0$, luego g alcanza un mínimo local en $t = 0$. Por tanto, $g'(0) = 0$, luego $\langle \nabla f_1(x), \mathbf{u} \rangle$. Como esto es cierto para todos los vectores unitarios $\mathbf{u}$, tenemos que $\nabla f_1(x) = 0$, lo que contradice que f es un difeomorfismo. □

Por el buen comportamiento de la derivada en la frontera, el cálculo diferencial se puede generalizar fácilmente a esta nueva clase de espacios, lo que nos permite considerar una nueva clase de variedades.

Definición 1.6.2. Una ***variedad topológica con borde*** es un espacio topológico M Hausdorff y segundo axioma de numerabilidad que es localmente homeomorfo a un abierto de un semiespacio cerrado. Es decir, para todo $x \in M$ existe un entorno abierto $U \subset M$ de x, un abierto $V \subset \mathbb{H}^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ y un homeomorfismo $\varphi : U \to V$. El par (U, φ) se llama una ***carta*** de M en x.

Una variedad topológica con borde es una ***variedad diferenciable con borde*** si, para todo punto $x \in M$ y para cualesquiera dos cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), el cambio de coordenadas $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$ es un difeomorfismo. El ***borde*** de M, que se denota ∂M, es el conjunto de los puntos que corresponden por cartas a puntos del borde del semiespacio cerrado.

El hecho de que los cambios de coordenadas sean difeomorfismos junto con la Proposición 1.6.1 garantizan que el que un punto esté en el borde no depende de la elección de cartas. Es inmediato comprobar que el borde ∂M de una variedad diferenciable M de dimensión n es una variedad diferenciable sin borde de dimensión $n - 1$.

Capítulo 2

El espacio tangente

§2.1. Espacio tangente a una variedad sumergida

Sean $M \subset \mathbb{R}^p$ una subvariedad regular de dimensión n, $x \in M$ y (U, φ) una carta en x. La aplicación $\psi = \varphi^{-1}$ se dice que es una ***parametrización local*** de M por el dominio de coordenadas U. Si llamamos $V = \varphi(U)$ y $a = \varphi(x)$, esta parametrización es una aplicación diferenciable $\psi : V \to \mathbb{R}^p$, de modo que tiene una derivada en a, que es una aplicación lineal $d_a\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. La imagen de esta aplicación lineal no depende de la parametrización ya que, si $\bar{\psi} : W \to \mathbb{R}^p$ es otra parametrización y llamamos $b = \psi^{-1}(x)$, entonces

$$d_a(\bar{\psi}^{-1} \circ \psi) = (d_b\bar{\psi})^{-1} \circ d_a\psi.$$

De modo que

$$d_a\psi = (d_b\bar{\psi}) \circ d_a(\bar{\psi}^{-1} \circ \psi)$$

y, como $d_a(\bar{\psi}^{-1} \circ \psi)$ es un isomorfismo lineal (ya que el cambio de coordenadas es un difeomorfismo) entonces $d_a\psi$ y $d_b\tilde{\psi}$ deben tener la misma imagen. Así, sin pérdida de generalidad podemos definir el ***espacio tangente a*** M ***en*** x como $T_xM = \operatorname{im}(d_a\psi)$. Los elementos $\mathbf{u} \in T_xM$ se llaman ***vectores tangentes a*** M ***en*** x. Además, como las derivada de ψ es inyectiva, este espacio tangente es un espacio vectorial de dimensión $n = \dim M$.

Un vector $\mathbf{u} \in T_xM = \operatorname{im}(d_a\psi)$ es de la forma

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi^1}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial\psi^1}{\partial x^n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\psi^p}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial\psi^p}{\partial x^n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

donde $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^p)$ es la expresión en componentes de ψ y $u^1, \ldots, u^n \in \mathbb{R}^n$. Es decir, los vectores

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(a) := \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial x^i}(a), \ldots, \frac{\partial\psi^p}{\partial x^i}(a)\right)$$

forman una base del espacio tangente T_xM y podemos escribir $\mathbf{u} = \sum_i u^i \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(a)$.

Otra forma «dual» de obtener el espacio tangente en ciertos casos es por medio del teorema de la función implícita. Consideremos un abierto $U \subset \mathbb{R}^p$ y una aplicación diferenciable $F : U \to \mathbb{R}^q$. Si tenemos un punto $a \in U$ en el que d_aF es sobreyectiva tenemos un difeomorfismo local $h : U \to \mathbb{R}^p$ que transforma, en un entorno B de a, el conjunto

$$M = \{x \in B : F(x) = F(a)\}$$

en $\{F(a)\} \times \mathbb{R}^{p-q}$. Vimos además que $d_a h = (d_a F, g)$, de modo que, si consideramos la parametrización h^{-1},

$$T_a M = \operatorname{im} d_{h(a)}(h^{-1}) = (d_a h)^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{p-q}) = \ker d_a F.$$

Ejemplo 2.1.1. Volviendo al ejemplo de la esfera $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\right\}$. Llamando $F(x) = \|x\|^2$, vimos que la derivada de F en un punto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es $d_a F(\mathbf{u}) = 2\langle a, \mathbf{u}\rangle$. Tenemos entonces que, si $\|a\| = 1$,

$$T_a \mathbb{S}^n = \ker d_a F = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle a, \mathbf{u}\rangle = 0\right\}.$$

Es decir, los vectores tangentes a $\mathbb{S}^n$ en un punto a son precisamente los perpendiculares al radio vector que une el origen con a. □

Finalmente, podemos definir la *derivada* de una aplicación diferenciable entre subvariedades regulares. Sean $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ subvariedades regulares y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Por definición, existen dos abiertos $U \subset \mathbb{R}^p$ y $V \subset \mathbb{R}^q$ y una extensión $F : U \to V$ diferenciable de f. Si tomamos un punto $x \in M$ y escogemos los abiertos U y V tales que $(U \cap M, \varphi)$ y $(V \cap M, \psi)$ son cartas en x y en $f(x)$, respectivamente, podemos considerar la localización $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Esta localización es una aplicación diferenciable que cumple $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \tilde{f}$ luego, por la regla de la cadena,

$$d_x F \circ (d_x \varphi)^{-1} = (d_{f(x)} \psi)^{-1} \circ d_{\varphi(x)} \tilde{f}.$$

Ahora, $\operatorname{im}(d_x \varphi)^{-1} = T_x M$ e $\operatorname{im}(d_{f(x)} \psi)^{-1} = T_{f(x)} N$, por tanto, tenemos que

$$d_x F(T_x M) \subset T_{f(x)} N.$$

Además,

$$d_x F|_{T_x M} = (d_{f(x)} \psi)^{-1} \circ d_{\varphi(x)} \tilde{f} \circ d_x \varphi,$$

que no depende de la extensión F. Por tanto, podemos definir

$$d_x f = d_x F|_{T_x M} : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$$

la ***derivada de f en x***.

§2.2. Derivaciones

Hemos definido el espacio tangente para variedades sumergidas, pero cabe preguntarse ahora si se puede hacer una construcción análoga para el caso de una variedad diferenciable cualquiera, en principio no sumergida. Esta construcción puede hacerse, usando el concepto de *derivación* de un álgebra.

Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre un espacio topológico X. Consideramos un punto $x \in X$ y el sistema directo de los entornos de x respecto a la inclusión. Se define la ***espiga*** de $\mathcal{F}$ en x como

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{p \in U \subset M} \mathcal{F}(U).$$

En el caso en que nos incumbe, si M es una variedad diferenciable de dimensión n y C^∞_M denota su haz de funciones diferenciables, entonces la espiga de C^∞_M en un punto $x \in M$ es simplemente el conjunto de las funciones $f : M \to \mathbb{R}$ que son diferenciables en algún entorno de x. Este conjunto se denota $C^\infty_{M,x}$ y se llama el ***álgebra de gérmenes de funciones diferenciables en x***. Cada conjunto $C^\infty_M(U)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra, donde las operaciones son simplemente la suma y el producto de funciones. Por tanto, las espigas $C^\infty_{M,x}$ también serán $\mathbb{R}$-álgebras.

Definición 2.2.1. Una ***derivación*** en $x \in M$ es una aplicación lineal $D : C^\infty_{M,x} \to \mathbb{R}$ que satisface la ***regla de Leibniz***:

$$D(fg) = f(x)D(g) + g(x)D(f),$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty_{M,x}$. Llamamos ***espacio tangente a M en x*** al espacio vectorial T_xM formado por las derivaciones en x.

Observación. Si $f \in C^\infty_{M,a}$ es un germen de una función constante, entonces para cualquier derivación $D \in T_xM$, $D(f) = 0$. En efecto, si $f \equiv c$, con c una constante, por linealidad $D(f) = cD(1)$. Ahora, por la regla de Leibniz $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$, con lo que $D(1) = 0$.

Como M es una variedad diferenciable, podemos encontrar una carta (U, φ) en x tal que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi^* : C^\infty(\varphi(U)) &\longrightarrow C^\infty_M(U) \\ s &\longmapsto s \circ \varphi \end{aligned}$$

es biyectiva. Claramente, esta aplicación es también un isomorfismo de álgebras, que en las espigas induce un isomorfismo entre $C^\infty_{M,x}$ y $C^\infty_{\varphi(x)}$. De modo que T_xM es isomorfo al espacio $T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$ de las derivaciones en $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$. Explícitamente, este isomorfismo está dado por $\varphi_{*,x} : T_xM \to T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$, de modo que, si $s \in C^\infty_{\varphi(x)}$ y $D \in T_xM$,

$$(\varphi_{*,x}D)(s) = D(s \circ \varphi).$$

Proposición 2.2.2. *Sea un punto $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$. Las aplicaciones*

$$\begin{aligned} \partial_i|_a : C^\infty_a &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(a), \end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, n$, son derivaciones en a y forman una base de $T_a\mathbb{R}^n$. En consecuencia, $T_a\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

Demostración. Que son derivaciones es inmediato, puesto que la regla de Leibniz es simplemente la regla del producto de las derivadas. Veamos que son una base.

En primer lugar, tenemos que probar que son linealmente independientes, es decir, que si existe un vector $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_i u^i \partial_i|_a = 0$, entonces $\mathbf{u} = 0$. Para ver esto, consideremos las proyecciones $\mathrm{pr}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $j = 1, \dots, n$. Entonces,

$$0 = \sum_i u^i \partial_i|_a(\mathrm{pr}_j) = \sum_i u^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(a) = u_j$$

. Tenemos entonces que $u_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, es decir, $\mathbf{u} = 0$.

Veamos ahora que son un sistema de generadores. Si $f \in C^\infty_a$ es un germen de una función diferenciable, entonces existe un entorno U de a donde f es diferenciable y donde podemos hacer un desarrollo de Taylor, si $x \in U$,

$$f(x) = f(a) + \sum_i (x^i - a^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) + O((x^i - a^i)^2).$$

Entonces, si $D \in T_a\mathbb{R}^n$ es una derivación en a,

$$D(f) = D(f(a)) + \sum_i D(x^i - a^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) + \sum_i (x^i - a^i)|_{x=a} D\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) + D(O((x^i - a^i)^2)).$$

Ahora, $(x^i - a^i)|_{x=a} = (a^i - a^i) = 0$, mientras que, como D es lineal, se comporta bien con los límites y

$$D(O((x^i - a^i)^2)) = O(D((x^i - a^i)^2)) = O(2(x^i - a^i)(x^i - a^i)|_{x=a}) = 0.$$

Eliminando los términos que son derivaciones de constantes, obtenemos

$$D(f) = \sum_i D(x^i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Por tanto, podemos escribir

$$D = \sum_i D(x^i)\partial_i|_a,$$

con lo que las derivaciones $\{\partial_1|_a, \dots, \partial_n|_a\}$ generan $T_a\mathbb{R}^n$. □

Tenemos entonces que el espacio tangente T_xM a un punto x en una variedad diferenciable M es un espacio vectorial real de dimensión $n = \dim M$.

§2.3. Derivada de una aplicación diferenciable

Veamos ahora cómo podemos definir la noción de derivada de una aplicación diferenciable entre dos variedades abstractas.

En primer lugar, consideremos el caso en que $M \subset \mathbb{R}^p$ es una variedad sumergida y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable. En tal caso la derivada de f en un punto $x \in M$ es simplemente

$$d_x f = d_{\varphi(x)}\tilde{f} \circ d_x\varphi : T_xM \to \mathbb{R},$$

donde (U, φ) es una carta en x y $\tilde{f}$ es la localización $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$. Ahora, un vector $\mathbf{u} \in T_xM$ es de la forma $\mathbf{u} = d_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(u^1, \dots, u^n)$. Por tanto, si $(x^1, \dots, x^n)$ son coordenadas en U tenemos que

$$d_x f(\mathbf{u}) = d_{\varphi(x)}\tilde{f} \circ d_x\varphi \circ d_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(u^1, \dots, u^n) = d_{\varphi(x)}\tilde{f}(u^1, \dots, u^n) = \sum_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(\varphi(x))u^i.$$

Podemos intentar imitar esta construcción en una variedad diferenciable abstracta M. En este caso, consideramos una carta (U, φ) en torno a un punto $x \in M$ y una función diferenciable $f \in C^\infty_M(U)$. Consideramos también la localización $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$. Si llamamos $a = \varphi(x)$ y tomamos D una derivación en x, entonces $\varphi_{*,x}D = \sum_i u^i\partial_i|_a \in T_a\mathbb{R}^n$ es una derivación en a y podemos definir, de manera análoga al caso de variedades sumergidas

$$d_x f(D) := \sum_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(a)u^i = \sum_i u^i\partial_i|_a(f \circ \varphi^{-1}) = \varphi_{*,x}D(f \circ \varphi^{-1}) = D(f).$$

En general, como ya vimos en la demostración de la Proposición 1.4.6, una aplicación diferenciable $f : M \to N$ entre dos variedades diferenciables M y N induce, para cada abierto $V \subset N$, una aplicación

$$\begin{aligned} f^*_V : C^\infty_N(V) &\longrightarrow C^\infty_M(f^{-1}(V)) \\ s &\longmapsto s \circ f. \end{aligned}$$

Esta aplicación desciende a las espigas y permite definir una aplicación lineal $f_{*,x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ de forma que, si $s \in C^\infty_{N,f(x)}$ y $D \in T_xM$,

$$(f_{*,x}D)(s) = D(s \circ f).$$

Definimos entonces la ***derivada de*** f ***en*** x simplemente como la aplicación lineal

$$d_xf = f_{*,x} : T_xM \to T_{f(x)}N.$$

Finalmente, es inmediato obtener una relación canónica entre el espacio tangente *abstracto* T_xM, es decir, el definido como espacio de derivaciones y el espacio tangente *sumergido*, definido como la imagen de la derivada de una parametrización. Por un momento denotaremos $\widetilde{T_xM}$ al espacio tangente sumergido. Podemos definir un isomorfismo entre T_xM y $\widetilde{T_xM}$ simplemente enviando los vectores $\varphi_{*,x}(\partial_i|_{\varphi(x)})$ a los vectores $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$, con $\psi = \varphi^{-1}$. Tenemos entonces, para cada aplicación diferenciable $f : M \to N$, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{T_xM} \arrow[r, "d_xf"] \arrow[d] & \widetilde{T_{f(x)}N} \arrow[d] \\ T_xM \arrow[r, "f_{*,x}"] & T_xN, \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales representan el isomorfismo canónico recién definido y d_xf se entiende como la diferencial en el caso sumergido.

Es inmediato comprobar que en ambos casos la regla de la cadena se sigue cumpliendo, es decir $d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_xf$. Por tanto, si consideramos la categoría $\mathbf{Diff}_*$ de las variedades diferenciables ***con punto base*** cuyos objetos son los pares (M, x), con M una variedad diferenciable y $x \in M$ y tal que los morfismos entre (M, x) y (N, y) son las aplicaciones diferenciables $f : M \to N$ tales que $f(x) = y$, entonces tenemos un funtor covariante

$$T : \mathbf{Diff}_* \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$$

que a cada par (M, x) le asigna el espacio vectorial T_xM y a cada aplicación diferenciable $f : (M, x) \to (N, f(x))$ le asigna la aplicación lineal $d_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$.

Capítulo 3

Fibrados vectoriales

Capítulo 4

Campos y flujos

Capítulo 5

Grupos y álgebras de Lie

§5.1. Grupos de Lie

§5.2. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

§5.3. La aplicación exponencial

Capítulo 6

Tensores

Capítulo 7

Formas diferenciales

§7.1. Determinantes

§7.2. Formas en variedades

§7.3. Diferencial exterior

§7.4. Fórmulas de Cartan

§7.5. Cohomología de de Rham

§7.6. Lema de Poincaré

§7.7. Cohomología de las esferas

Invariancia topológica de la dimensión y del borde.

Capítulo 8

Orientación

Capítulo 9

Integración

Capítulo 10

Introducción a la teoría del grado

Apéndice A

Topología de variedades