

VARIEDADES DIFERENCIABLES

Guillermo Gallego Sánchez

Última versión: 11 de noviembre de 2018

Índice general

1. Variedades diferenciables	5
1.1. El modelo local	5
1.2. El concepto. Definición y ejemplos	7
1.3. Aplicaciones diferenciables	10
1.4. Haces y C^∞ -variedades	11
1.5. Variedades sumergidas	13
1.6. Variedades con borde	16
2. El espacio tangente	17
2.1. Espacio tangente a una variedad sumergida	17
2.2. Espacio tangente como velocidades de curvas	17
2.3. Derivaciones	17
2.4. El funtor tangente	17
3. Fibrados vectoriales	19
3.1. La categoría de los fibrados vectoriales	19
3.2. Secciones de un fibrado vectorial	19
3.3. El fibrado tangente y el fibrado cotangente	19
4. Campos y flujos	21
4.1. Campos en variedades?	21
4.2. Flujos completos	21
4.3. Flujos	21
4.4. Integración de campos	21
4.5. Derivada de Lie	21
4.6. Campos coordenados	21
5. Grupos y álgebras de Lie	23
5.1. Grupos de Lie	23
5.2. El álgebra de Lie de un grupo de Lie	23
5.3. La aplicación exponencial	23
6. Tensores	25
6.1. Producto tensorial	25
6.2. El álgebra de tensores de un espacio vectorial	25
6.3. Tensores en variedades	25
6.4. Derivada de Lie de un tensor	25
6.5. Tensores simétricos y antisimétricos	25

7. Formas diferenciales	27
7.1. Determinantes	27
7.2. Formas en variedades	27
7.3. Diferencial exterior	27
7.4. Cohomología de de Rham	27
7.5. Lema de Poincaré	27
7.6. Cohomología de las esferas	27
8. Orientación	29
8.1. Orientación de un espacio vectorial	29
8.2. Orientación de variedades	29
8.3. Orientación de hipersuperficies	29
9. Integración	31
9.1. Integral de una forma diferencial	31
9.2. Teorema de Stokes	31
9.3. Los teoremas clásicos	31
10. Introducción a la teoría del grado	33
10.1. Cohomología con soportes compactos	33
10.2. Cohomología de grado máximo	33
10.3. Grado de una aplicación diferenciable	33
10.4. Dos teoremas de Brouwer	33

Capítulo 1

Variedades diferenciables

§1.1. El modelo local

El propósito principal de la noción de variedad diferenciable consiste en *generalizar el cálculo diferencial* a un espacio topológico. Para realizar esta tarea, es preciso recordar qué es el cálculo diferencial, y en qué categoría se realiza.

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos y una aplicación $f : U \rightarrow V$. Decimos que f es una **aplicación (C^∞ -) diferenciable** si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en U . La regla de la cadena garantiza que, si $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ y $W \subset \mathbb{R}^p$ son abiertos y $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ es diferenciable, entonces su composición

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g \circ f} & W \\ \downarrow f & \nearrow g & \\ V, & & \end{array}$$

es una aplicación diferenciable. Así, tenemos una categoría, que denotaremos **CartSp** y llamaremos **espacios cartesianos** o **espacios de coordenadas abstractos** cuyos objetos son los abiertos de los espacios afines y sus morfismos son las aplicaciones diferenciables entre ellos. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, denotamos por $C^\infty(U)$ a las funciones diferenciables $U \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, $C^\infty(U) = \mathbf{CartSp}(U, \mathbb{R})$.

Sea $V \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Se definen las **funciones coordenadas** como las funciones

$$\begin{aligned} \text{pr}_i : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^m) &\longmapsto x^i. \end{aligned}$$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \rightarrow V$. Se definen las **componentes de f** como las funciones $f^i = \text{pr}_i \circ f$, que son diferenciables por la regla de la cadena y denotamos $f = (f^1, \dots, f^m)$. Recíprocamente, si todas las componentes son diferenciables, entonces la aplicación es diferenciable.

Sean ahora U y V abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente y $f : U \rightarrow V$ una aplicación diferenciable entre ellos. Dado un punto $x \in U$, se define la **derivada de f en x** como la aplicación lineal $d_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ cuya matriz asociada es la matriz jacobiana de f en x , es decir

$$J_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}.$$

De nuevo, la regla de la cadena garantiza que $d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_xf$. Por tanto, si consideramos la categoría **CartSp**_{*} de los espacios cartesianos *con punto base* cuyos objetos son los pares (U, x) , con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in U$ y tal que los morfismos entre (U, x) y (V, y) son las aplicaciones diferenciables $f : U \rightarrow V$ tales que $f(x) = y$, entonces tenemos un funtor covariante

$$d : \mathbf{CartSp}_* \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$$

que a cada par (U, x) , con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto le asigna el espacio vectorial \mathbb{R}^n y a cada morfismo $f : (U, x) \rightarrow (V, f(x))$, con $V \subset \mathbb{R}^m$ abierto, le asigna la aplicación lineal $d_xf : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Un isomorfismo en la categoría **CartSp** se llama un **difeomorfismo**. Es decir, un difeomorfismo es una aplicación diferenciable $f : U \rightarrow V$ tal que existe una aplicación diferenciable $f^{-1} : V \rightarrow U$, llamada *inversa de f* tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ & \searrow \text{id}_U & \downarrow f^{-1} \\ & & U \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & V \\ & \nearrow \text{id}_V & \downarrow f \\ & & V \end{array}$$

Dos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ se dicen **difeomorfos** si existe un difeomorfismo entre ellos.

Proposición 1.1.1. Si dos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ son difeomorfos entonces $n = m$.

Demostración. En efecto, si existe un difeomorfismo $f : U \rightarrow V$, entonces existe una aplicación diferenciable $f^{-1} : V \rightarrow U$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ & \searrow \text{id}_U & \downarrow f^{-1} \\ & & U \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & V \\ & \nearrow \text{id}_V & \downarrow f \\ & & V \end{array}$$

Ahora, si consideramos un punto $x \in U$ e $y = f(x)$, la imagen del diagrama anterior por el funtor d es

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d_xf} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow \text{id}_{\mathbb{R}^n} & \downarrow d_y(f^{-1}) \\ & & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^m \\ & \nearrow \text{id}_{\mathbb{R}^m} & \downarrow d_xf \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Tenemos entonces que d_xf es un isomorfismo lineal, luego $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ y por tanto sus dimensiones coinciden, es decir, $n = m$. Más aún, hemos probado que $d_y(f^{-1}) = (d_xf)^{-1}$. \square

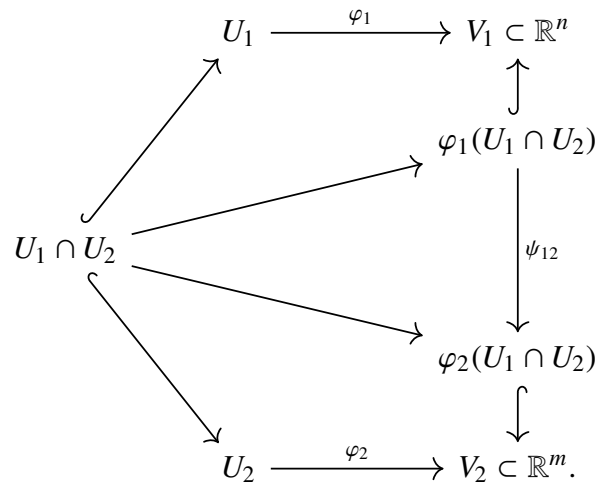
El recíproco de este resultado es cierto *localmente*. En efecto, el teorema de la función inversa garantiza que si $f : U \rightarrow V$ es una aplicación diferenciable tal que d_xU es un isomorfismo lineal, para cierto $x \in U$, entonces existe un entorno abierto $W \subset U$ de x tal que $f|_W : W \rightarrow f(W)$ es un difeomorfismo. Decimos entonces que f es un **difeomorfismo local**.

§1.2. El concepto. Definición y ejemplos

Definición 1.2.1. Un *espacio localmente afín* es un espacio topológico M localmente homeomorfo a un abierto de un espacio afín. Es decir, para todo $x \in M$ existe un entorno abierto $U \subset M$ de x , un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$. El abierto U se llama *dominio de coordenadas* y el difeomorfismo φ , *sistema local de coordenadas* en x . El par (U, φ) se llama una *carta* de M en x .

Un espacio localmente afín que además es Hausdorff y segundo axioma de numerabilidad se llama una *variedad topológica*.

Definición 1.2.2. Sea M una variedad topológica y $x \in M$ un punto. Dadas dos cartas (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) , se define el *cambio de coordenadas* como la aplicación ψ_{12} que cierra el siguiente diagrama



Es decir, $\psi_{12} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$.

Nótese que por ser φ_1 y φ_2 homeomorfismos, el cambio de coordenadas ψ_{12} es un homeomorfismo entre $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ y $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$, que son ambos abiertos de algún espacio afín. El caso que a nosotros nos incumbe es aquel en el que estos cambios de coordenadas son difeomorfismos, ya que queremos que nuestro modelo local sea la categoría **CartSp** cuyos morfismos eran las aplicaciones diferenciables.

Definición 1.2.3. Una variedad topológica se dice que es una *variedad diferenciable* si, para todo punto $x \in M$ y para cualesquiera dos cartas (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) , el cambio de coordenadas ψ_{12} es un difeomorfismo.

Una consecuencia inmediata de la definición de variedad diferenciable y de la Proposición 1.1.1, es que todos los dominios de coordenadas en un punto $x \in M$ de una variedad diferenciable M son abiertos del mismo \mathbb{R}^n . Este n se denomina *dimensión de M en x* y se denota $\dim_x M$. Nótese además que, de hecho, si U_1 y U_2 son dominios de coordenadas en x , todos los puntos de $U_1 \cap U_2$ tienen la misma dimensión, luego, si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned}
 \dim : M &\longrightarrow \mathbb{N} \\
 x &\longmapsto \dim_x M,
 \end{aligned}$$

y consideramos en \mathbb{N} la topología discreta, la aplicación \dim es continua, ya que el conjunto $\dim^{-1}(\dim_x M)$ contiene a $U_1 \cap U_2$. Más aún, como la imagen continua de un conexo es un conexo, la dimensión es constante en cada componente conexa de M . Así, si M es una variedad diferenciable conexa podemos hablar con propiedad de la **dimensión** de M , $\dim M$, que será el número $\dim_x M$ para cualquier $x \in M$. Las variedades diferenciables de dimensión 1 se llaman **curvas** y las de dimensión 2, **superficies**.

Ejemplo 1.2.4. Un primer ejemplo trivial es el propio \mathbb{R}^n con la topología usual, con la carta

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

De la misma forma, cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es también una variedad diferenciable de dimensión n . \square

Ejemplo 1.2.5. Consideramos la **esfera n -dimensional**

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

Podemos considerar los abiertos $U_1 = \mathbb{S}^n - \{p_N\}$ y $U_2 = \mathbb{S}^n - \{p_S\}$, con $p_N = (0, \dots, 0, 1)$ y $p_S = (0, \dots, 0, -1)$ los polos norte y sur de la esfera. Estos abiertos son homeomorfos a \mathbb{R}^n mediante las aplicaciones $\varphi_S : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección estereográfica centrada en el polo sur y $\varphi_N : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección estereográfica centrada en el polo norte. No es difícil comprobar que el cambio de coordenadas $(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})|_{\varphi_S(\mathbb{S}^n - \{p_N, p_S\})}$ es un difeomorfismo, de modo que \mathbb{S}^n es una variedad diferenciable. \square

Ejemplo 1.2.6. Consideramos el espacio proyectivo real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$. Los conjuntos de la forma

$$D(x_i) = \{(x_0 : \dots : x_n) : x_i \neq 0\}$$

son abiertos homeomorfos a \mathbb{R}^n por medio de

$$\begin{aligned} \varphi_i : D(x_i) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Los cambios de coordenadas vienen dados por

$$\psi_{ij} = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})|_{\varphi_i(D(x_i) \cap D(x_j))},$$

que son de la forma

$$\psi \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right)$$

y son claramente difeomorfismos. \square

Regresando a la definición de variedad diferenciable. Nótese que esencialmente lo que pedimos a una variedad topológica M para que sea variedad diferenciable es que admita un conjunto de cartas \mathcal{U} tal que

- los dominios de coordenadas recubran M , es decir, $M = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ y,
- los cambios de coordenadas sean difeomorfismos.

Un conjunto de cartas de estas características se denomina un **atlas** de M . Así, dotar a M de la estructura de variedad diferenciable es simplemente dar un atlas de M . Cabría preguntarse entonces si la elección de las cartas influirá en la estructura de variedad diferenciable que estamos dando. Dos cartas se dicen **compatibles** si el cambio de coordenadas entre ellas es un difeomorfismo. Dos atlas se dicen **compatibles** si todas las cartas de uno lo son con las del otro, es decir, si su unión es de nuevo un atlas. No es difícil comprobar que la compatibilidad entre atlas es una relación de equivalencia. De aquí se deduce que todo atlas es compatible con (es decir, está contenido en) un atlas maximal único, aquel que tiene todas las cartas compatibles con las del primero. Así, en vez de dar un atlas cualquiera, podemos considerar el atlas maximal correspondiente, de forma que tiene sentido decir que un atlas maximal es una **estructura diferenciable**. Podemos entonces redefinir variedad diferenciable de la siguiente forma:

Definición 1.2.7. Una variedad diferenciable es un par (M, \mathcal{U}_M) , donde M es una variedad topológica y \mathcal{U}_M es una estructura diferenciable (es decir, un atlas maximal) en M .

Observación. En ninguno de los ejemplos anteriores los atlas considerados eran maximales.

Ejemplo 1.2.8. En el caso del espacio proyectivo real $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ cabría preguntarse si el atlas definido $\{(D(x_i), \varphi_i)\}$ depende de la elección de coordenadas homogéneas. Esto no es así, ya que para cualquier hiperplano

$$H = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0\},$$

con $F \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_n]_1$ un polinomio homogéneo de grado 1, podemos considerar la carta $(D(H), \varphi_H)$, con $D(H) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n - H$ un abierto homeomorfo a un espacio afín

$$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid F(x_0, \dots, x_1) = 1\}$$

por

$$\begin{aligned} \varphi_H : D(H) &\longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\longmapsto \frac{1}{F(x_0, \dots, x_n)}(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Observación. Cabe preguntarse ahora si será posible dotar a una misma variedad topológica de estructuras diferenciables diferentes. En efecto, esto puede hacerse: basta considerar dos atlas que no sean compatibles. Por ejemplo, consideramos en \mathbb{R} los homeomorfismos

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^3. \end{aligned}$$

Cada una de estas cartas define un atlas por sí sola, es decir, $\mathcal{U}_1 = \{(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})\}$ y $\mathcal{U}_2 = \{(\mathbb{R}, \varphi)\}$. Pero estos atlas no son compatibles, ya que el cambio de coordenadas es

$$\psi(t) = \varphi \circ \text{id}_{\mathbb{R}}^{-1}(t) = t^3,$$

que no es un difeomorfismo, ya que su inversa

$$\psi^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$$

no es diferenciable en $t = 0$. Por tanto, \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 darán dos estructuras diferenciables diferentes.

§1.3. Aplicaciones diferenciables

Definición 1.3.1. Sean dos variedades topológicas M y N y una aplicación continua $f : M \rightarrow N$. Sean $x \in M$, (U, φ) una carta en x y (V, ψ) una carta en $f(x)$. Se llama **localización** de f a las cartas (U, φ) , (V, ψ) a la aplicación \tilde{f} que cierra el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{f}} & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Es decir, $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

Definición 1.3.2. Una aplicación $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades diferenciables M y N es **diferenciable** si, para todo $x \in M$ y para cualesquiera dos cartas (U, φ) , (V, ψ) en x y $f(x)$, respectivamente, su localización $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ es diferenciable. Es decir, si $\tilde{f} \in \mathbf{CartSp}(\varphi(U), \psi(V))$.

Si M , N y P son variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son aplicaciones diferenciables, entonces la localización de $(g \circ f)$ a unas cartas (U, φ) , (W, η) es la aplicación $\widetilde{(g \circ f)}$ dada por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N & \xrightarrow{g} & W \subset P \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \eta \\ \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{f}} & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{g}} & \eta(W) \subset \mathbb{R}^p. \\ & \nearrow & & \searrow & \\ & & \widetilde{(g \circ f)} & & \end{array}$$

La regla de la cadena garantiza que, si \tilde{f} y \tilde{g} son diferenciables, entonces $\widetilde{(g \circ f)} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ es diferenciable, luego $g \circ f$ es diferenciable.

Podemos por tanto definir la categoría de las variedades diferenciables, que denotamos **Diff**, cuyos objetos son las variedades diferenciables y sus morfismos son las aplicaciones diferenciables entre ellas.

Ejemplo 1.3.3. Una homografía $h : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m$ es una aplicación diferenciable. Basta tomar un hiperplano $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, de modo que su imagen $h(H) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m$ es también un hiperplano, y considerar la localización a las cartas $(D(H), \varphi_H)$, $(D(h(H)), \varphi_{h(H)})$

$$\begin{array}{ccc} D(H) & \xrightarrow{h} & D(h(H)) \\ \varphi_H \downarrow & & \downarrow \varphi_{h(H)} \\ \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n & \xrightarrow{\tilde{h}} & \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^m. \end{array}$$

Por ser h una homografía, su localización \tilde{h} es una aplicación afín, luego es diferenciable. Por tanto, h es diferenciable.

Ejemplo 1.3.4. Estructuras diferenciables distintas son difeomorfas □

§1.4. Haces y C^∞ -variedades

Sea X un espacio topológico. Denotamos por $\mathbf{Op}(X)$ a la categoría cuyos objetos son los subconjuntos abiertos $U \subset X$ y tal que, si $U \subset X$ y $V \subset X$ son abiertos de X , entonces el conjunto de morfismos de U a V , $\mathbf{Op}(X)(U, V)$ consta de:

- la inclusión $U \hookrightarrow V$ si $U \subset V$ y,
- es vacío en caso contrario.

Definición 1.4.1. Un *prehaz* sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante

$$\mathcal{F} : \mathbf{Op}(X) \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Es decir, un prehaz \mathcal{F} asigna a cada abierto $U \subset X$ un conjunto $\mathcal{F}(U)$ y a cada par de abiertos U y V con $U \subset V$ le asigna una función

$$\begin{aligned} \text{res}_U^V : \mathcal{F}(V) &\longrightarrow \mathcal{F}(U) \\ s &\longmapsto s|_U. \end{aligned}$$

Esta función se denomina *restricción* de V a U . Nótese que aquí la expresión $s|_U$ es simplemente una notación, pero que será consistente con los ejemplos que consideremos a continuación. Además, la funtorialidad asegura que, si $U \subset V \subset W$, entonces, para todo $s \in \mathcal{F}(W)$, $(s|_V)|_U = s|_W$. Los elementos de $\mathcal{F}(U)$ se denominan *secciones* de U .

Definición 1.4.2. Un *haz* sobre un espacio topológico X es un prehaz sobre X que satisface las siguientes propiedades

- **localidad:** si tenemos un recubrimiento abierto \mathcal{U} de un abierto $U \subset X$ y dos secciones $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ tales que $s_1|_V = s_2|_V$ para todo $V \in \mathcal{U}$, entonces $s_1 = s_2$.
- **pegado:** si tenemos un recubrimiento abierto \mathcal{U} de un abierto $U \subset X$ y, para cada $V \in \mathcal{U}$ tenemos una sección $s_V \in \mathcal{F}(V)$ tal que

$$s_V|_{V \cap W} = s_W|_{V \cap W},$$

para cualesquiera $V, W \in \mathcal{U}$, entonces existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_V = s_V$ para todo $V \in \mathcal{U}$.

Definición 1.4.3. Un *subhaz* de un haz \mathcal{F} sobre un espacio topológico es un haz \mathcal{G} tal que $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ para todo U abierto de X .

Definición 1.4.4. Una C^∞ -*variedad* es un par (M, C_M^∞) , donde M es una variedad topológica y C_M^∞ es un subhaz del haz $C(M)$ de forma que, para todo punto $x \in M$ existe una carta (U, φ) en x tal que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_* : C_M^\infty(U) &\longrightarrow C^\infty(\varphi(U)) \\ s &\longmapsto s \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

es biyectiva.

$$\begin{array}{ccc}
 M \supset U & \xrightarrow{s} & \mathbb{R} \\
 \downarrow \varphi & \nearrow s \circ \varphi^{-1} & \\
 \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) & &
 \end{array}$$

El haz C_M^∞ se denomina **haz de funciones diferenciables** o **haz de estructura** de M .

Definición 1.4.5. Un C^∞ -**morfismo** entre dos C^∞ -variedades (M, C_M^∞) y (N, C_N^∞) es una aplicación continua $f : M \rightarrow N$ tal que, si $V \subset N$, es un abierto, entonces existe una aplicación

$$\begin{aligned}
 f_V^* : C_N^\infty(V) &\longrightarrow C_M^\infty(f^{-1}(V)) \\
 s &\longmapsto s \circ f.
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 M \supset f^{-1}(V) & \xrightarrow{s \circ f} & \mathbb{R} \\
 \downarrow f & \nearrow s & \\
 N \supset V & &
 \end{array}$$

Estas definiciones nos permiten considerar una nueva categoría $C^\infty\text{-Man}$ cuyos objetos son las C^∞ -variedades y sus morfismos son los C^∞ -morfismos.

Proposición 1.4.6. *Existe una equivalencia de categorías*

$$\mathbf{Diff} \longrightarrow C^\infty\text{-Man}.$$

Demostración. En primer lugar, debemos definir el funtor que nos dará la equivalencia de categorías. A cada variedad diferenciable (M, \mathcal{U}_M) es necesario asignarle una C^∞ -variedad (M, \mathcal{F}_M) . Claramente, a la variedad topológica le asociaremos ella misma. Podemos definir un prehaz a partir de \mathcal{U}_M de la siguiente manera. Para cada $U \subset M$ tal que existe un sistema de coordenadas φ tal que $(U, \varphi) \in \mathcal{U}_M$ consideramos el conjunto

$$C_M^\infty(U) = \{f \circ \varphi : f \in C^\infty(\varphi(U))\}.$$

Si U no es un dominio de coordenadas del atlas \mathcal{U}_M , entonces existe un conjunto de dominios de coordenadas $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_M$ tal que $U = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ y puedo considerar

$$C_M^\infty(U) = \{f \in C(U) : f|_V \in C_M^\infty(V) \text{ para todo } V \in \mathcal{V}\}.$$

Es inmediato que esta asignación C_M^∞ así definida es, de hecho un haz sobre M .

En cuanto a los morfismos, si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, su C^∞ -morfismo asociado es simplemente la propia aplicación f , que claramente induce una aplicación de la forma

$$\begin{aligned}
 f_V^* : C_N^\infty(V) &\longrightarrow C_M^\infty(f^{-1}(V)) \\
 s &\longmapsto s \circ f,
 \end{aligned}$$

con $V \subset N$ abierto.

Tenemos que probar entonces

1. que el funtor es esencialmente sobreyectivo, es decir, que toda C^∞ -variedad puede obtenerse de esta manera, y
2. que el funtor es plenamente fiel, es decir, que, dadas dos variedades diferenciables M y N , existe una biyección entre las aplicaciones diferenciables entre M y N y los C^∞ -morfismos entre las C^∞ -variedades asociadas.

Veamos 1. Sea (M, C_M^∞) una C^∞ -variedad. Para cada punto $x \in M$ consideremos la carta (U_x, φ_x) que aparece en la definición de C^∞ -variedad y definimos el conjunto

$$\mathcal{U}_M = \{(U_x, \varphi_x) : x \in M\}.$$

Veamos que \mathcal{U}_M es un atlas en M . Dadas dos cartas $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{U}_M$, con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, tenemos que ver que $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es un difeomorfismo. La biyectividad está clara, así que basta ver que tanto ella como su inversa son diferenciables. Tan solo probaremos la diferenciabilidad de ella, ya que para la de su inversa la demostración es análoga. Para ver esto, basta considerar las funciones coordenadas

$$\begin{aligned} \text{pr}_i : \varphi_2(U_2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y^1, \dots, y^n) &\longmapsto y^i, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \dots, n$, con $n = \dim M$ (en la componente conexa que corresponda). Estas aplicaciones son claramente diferenciables, es decir, $\text{pr}_i \in C^\infty(\varphi_2(U_2))$. Pero $\text{pr}_i = \text{pr}_i \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, luego $\text{pr}_i \circ \varphi_2 \in C_M^\infty(U_2)$ y, por ser prehaz, $\text{pr}_i \circ \varphi_2|_{U_1 \cap U_2} \in C_M^\infty(U_1 \cap U_2)$. Pero, de nuevo, por la definición de C^∞ -variedad, $\text{pr}_i \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in C_M^\infty(\varphi_1(U_1 \cap U_2))$. Por tanto, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable coordenada a coordenada, luego es diferenciable. Tenemos entonces que \mathcal{U}_M es un atlas en M y, tomando el maximal que lo contiene, dotamos a M de una estructura diferenciable.

Finalmente, veamos 2. La inyectividad está clara ya que aplicaciones diferenciables distintas $M \rightarrow N$ inducen C^∞ -morfismos distintos. Basta ver entonces que, si $f : M \rightarrow N$ es un C^∞ -morfismo, entonces es una aplicación diferenciable respecto de la estructura diferenciable que acabamos de construir. En efecto, si $x \in M$ es un punto y (V, ψ) es una carta de N en $f(x)$ como la de la definición de C^∞ -variedad, entonces, para $i = 1, \dots, n$, con $n = \dim N$, $\text{pr}_i = (\text{pr}_i \circ \psi) \circ \psi^{-1}$ es una función diferenciable en $\psi(V)$, es decir $\text{pr}_i \in C^\infty(\psi(V))$, luego $\text{pr}_i \circ \psi \in C_N^\infty(V)$. Ahora, por ser f un C^∞ -morfismo, $f_V^*(\text{pr}_i \circ \psi) = \text{pr}_i \circ \psi \circ f \in C_M^\infty(f^{-1}(V))$. Si tomamos ahora una carta (U, φ) de M en x como la de la definición de C^∞ -variedad y tal que $U \subset f^{-1}(V)$, entonces $\text{pr}_i \circ \psi \circ f \in C_M^\infty(U)$, luego $\text{pr}_i \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U))$. Hemos visto entonces que, para cada punto $x \in M$ existen cartas (U, φ) y (V, ψ) en M y N respectivamente, con $f(U) \subset V$ y tales que cada componente de la localización (y por tanto, la localización) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable, luego, por la definición de aplicación diferenciable, f es diferenciable. \square

§1.5. Variedades sumergidas

Definición 1.5.1. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ dos conjuntos. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se dice **diferenciable** si existen dos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$, con $X \subset U$ e $Y \subset V$ y una aplicación diferenciable $F : U \rightarrow V$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & V \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Análogamente, decimos que f es un difeomorfismo si es biyectiva y su inversa es diferenciable (en el mismo sentido que acabamos de definir).

Definición 1.5.2. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se llama una **subvariedad regular** de \mathbb{R}^p o una **variedad diferenciable sumergida** en \mathbb{R}^p si es localmente difeomorfo a un abierto de un espacio afín. Es decir, para todo $x \in M$ existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^p$ de x , un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, para cierto $n \in \mathbb{N}$ y un difeomorfismo $\varphi : U \cap M \rightarrow V$.

Nótese que todo subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se puede dotar de la topología relativa: los abiertos de M son los conjuntos de la forma $U \cap M$, con $U \subset \mathbb{R}^p$ abierto de \mathbb{R}^p . Por tanto, si M es una subvariedad regular de \mathbb{R}^p , entonces es una variedad topológica con la topología relativa y, para cada $x \in M$ tenemos una carta $\varphi_x : U_x \cap M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$. De hecho, como las cartas φ son difeomorfismos, los cambios de coordenadas $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ también son difeomorfismos, luego las cartas son compatibles y forman un atlas. Tenemos entonces que toda subvariedad regular es una variedad diferenciable.

Los ejemplos no triviales más simples de variedades sumergidas vienen dados por el teorema de la función implícita:

Proposición 1.5.3 (Teorema de la función implícita). Sean $U \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto y $F : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ una aplicación diferenciable. Supongamos que existe un punto $a \in U$ en el que $d_a F$ es sobreyectiva. Entonces existe un entorno abierto $B \subset U$ de a tal que

$$M = \{x \in B : F(x) = F(a)\},$$

es una subvariedad regular de \mathbb{R}^p de dimensión $p - q$.

Demostración. Como $d_a F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ es sobreyectiva, $p > q$ y $\dim \ker d_a F = p - q$, luego existe un isomorfismo lineal $\psi : \ker d_a F \rightarrow \mathbb{R}^{p-q}$ que nos permite definir una aplicación lineal sobreyectiva $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p-q}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in \ker d_a F \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Definimos entonces

$$\begin{aligned} h : U &\longrightarrow \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p-q} \\ x &\longmapsto (F(x), g(x)). \end{aligned}$$

Ahora, $d_a h = (d_a F, g) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ es inyectiva ya que si $d_a h(\mathbf{u}) = 0$ entonces $d_a F(\mathbf{u}) = 0$, luego $\mathbf{u} \in \ker d_a F$. Pero entonces $g(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{u}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = 0$, ya que ψ es un isomorfismo lineal. Por tanto, $d_a h$ es un isomorfismo lineal y, por el teorema de la función inversa, existen un entorno $B \subset U$ de a y un entorno $V \subset \mathbb{R}^p$ de $h(a) = (F(a), g(a))$ tales que $h : B \rightarrow V$ es un difeomorfismo. Finalmente, M es difeomorfo a $h(M) = (\{f(a)\} \times \mathbb{R}^{p-q}) \cap V \subset \mathbb{R}^p$, que es claramente una subvariedad regular de dimensión $p - q$. \square

Ejemplo 1.5.4. Un ejemplo muy sencillo de subvariedad regular dada por el teorema de la función implícita es la esfera. En efecto, consideramos la función

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &\longmapsto (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2. \end{aligned}$$

La derivada de F en un punto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es

$$\begin{aligned} d_a F : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\longmapsto 2\langle a, \mathbf{u} \rangle, \end{aligned}$$

que es sobreyectiva si $a \neq 0$. Por tanto, la *esfera n -dimensional de radio $\sqrt{F(a)}$* ,

$$\mathbb{S}_{\sqrt{F(a)}}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : F(x) = F(a)\},$$

es una subvariedad regular de \mathbb{R}^p de dimensión n . En el caso que $F(a) = 1$ (es decir, si $\|a\| = 1$) la denotamos \mathbb{S}^n y la llamamos simplemente *esfera n -dimensional*. Claramente, todas las esferas de la misma dimensión son difeomorfas, basta considerar la homotecia

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_r^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

□

Las aplicaciones diferenciables entre dos subvariedades regulares $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ son simplemente aplicaciones diferenciables $M \rightarrow N$ en el sentido de la Definición 1.5.1. Así, podemos considerar una nueva categoría, que llamaremos **RegMan** cuyos objetos son las subvariedades regulares y sus morfismos, las aplicaciones diferenciables entre ellas.

Nótese también que, en el caso de las subvariedades regulares, podemos dotar a $M \subset \mathbb{R}^p$ de un haz de funciones diferenciables de manera trivial: como los abiertos de M son de la forma $U \cap M$, con $U \subset \mathbb{R}^p$ abierto, consideramos simplemente

$$C_M^\infty(U \cap M) = \{U \cap M \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciables}\},$$

donde la diferenciabilidad se entiende en el sentido de la definición 1.5.1. Claramente, como M es una subvariedad regular, para todo punto $x \in M$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^p$ y un difeomorfismo $\varphi : U \cap M \rightarrow V$, con $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto, para cierto $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_* : C_M^\infty(U \cap M) &\longrightarrow C^\infty(V) \\ s &\longmapsto s \circ \varphi^{-1}, \end{aligned}$$

es biyectiva y (M, C_M^∞) es una C^∞ -variedad.

Hemos visto que toda subvariedad regular es una variedad diferenciable, pero el recíproco también es cierto. El teorema de inmersión de variedades abstractas garantiza que toda variedad diferenciable M es difeomorfa a alguna subvariedad regular $\hat{M} \subset \mathbb{R}^p$, para algún $p \in \mathbb{N}$. Esto nos permite demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.5.5. *Existe una equivalencia de categorías*

$$\mathbf{Diff} \longrightarrow \mathbf{RegMan}.$$

Demostración. Si M es una variedad diferenciable denotamos $\hat{M} \subset \mathbb{R}^p$ y $\varphi_M : M \rightarrow \hat{M}$ la subvariedad regular y el difeomorfismo dados por el teorema de inmersión de variedades abstractas. Podemos definir un funtor que asigne, a cada variedad diferenciable M , la subvariedad regular \hat{M} y, a cada aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$, la aplicación $\hat{f} : \hat{M} \rightarrow \hat{N}$ que cierra el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \varphi_M \downarrow & & \downarrow \varphi_N \\
 \hat{M} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{N}.
 \end{array}$$

La funtorialidad es inmediata y la asignación entre morfismos es claramente biyectiva por ser φ_M y φ_N difeomorfismos. Por tanto, el funtor es plenamente fiel. Que es esencialmente sobreyectivo es inmediato también porque toda subvariedad regular M es ya una variedad diferenciable, es decir $M = \hat{M}$. Por tanto, tenemos una equivalencia de categorías. \square

En resumen, a lo largo de este capítulo hemos definido tres categorías: **Diff**, C^∞ -**Man** y **RegMan**, que han resultado ser equivalentes. Es decir, las tres categorías representan el mismo concepto matemático: espacios localmente modelados por **CartSp**, o sea, espacios donde se puede hacer cálculo diferencial. A la vista de esto, a lo largo del texto, trabajaremos con las tres categorías indistintamente: una variedad diferenciable significará para nosotros un objeto de alguna de estas tres categorías, según nos sea conveniente.

§1.6. Variedades con borde

Capítulo 2

El espacio tangente

§2.1. Espacio tangente a una variedad sumergida

§2.2. Espacio tangente como velocidades de curvas

§2.3. Derivaciones

§2.4. El funtor tangente

Capítulo 3

Fibrados vectoriales

§3.1. La categoría de los fibrados vectoriales

§3.2. Secciones de un fibrado vectorial

§3.3. El fibrado tangente y el fibrado cotangente

Capítulo 4

Campos y flujos

§4.1. Campos en variedades?

§4.2. Flujos completos

§4.3. Flujos

§4.4. Integración de campos

§4.5. Derivada de Lie

§4.6. Campos coordenados

Capítulo 5

Grupos y álgebras de Lie

§5.1. Grupos de Lie

§5.2. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

§5.3. La aplicación exponencial

Capítulo 6

Tensores

§6.1. Producto tensorial

§6.2. El álgebra de tensores de un espacio vectorial

§6.3. Tensores en variedades

§6.4. Derivada de Lie de un tensor

§6.5. Tensores simétricos y antisimétricos

Capítulo 7

Formas diferenciales

§7.1. Determinantes

§7.2. Formas en variedades

§7.3. Diferencial exterior

§7.4. Cohomología de de Rham

§7.5. Lema de Poincaré

§7.6. Cohomología de las esferas

Capítulo 8

Orientación

§8.1. Orientación de un espacio vectorial

§8.2. Orientación de variedades

§8.3. Orientación de hipersuperficies

Capítulo 9

Integración

§9.1. Integral de una forma diferencial

§9.2. Teorema de Stokes

§9.3. Los teoremas clásicos

Capítulo 10

Introducción a la teoría del grado

§10.1. Cohomología con soportes compactos

§10.2. Cohomología de grado máximo

§10.3. Grado de una aplicación diferenciable

§10.4. Dos teoremas de Brouwer