Introducción a la geometría simpléctica y los sistemas integrables

Guillermo Gallego Sánchez

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología

12 de julio de 2018

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Geometría simpléctica

- Una *variedad simpléctica* es un par (M, ω), donde M es una variedad diferenciable y ω es una 2-forma diferencial no degenerada y cerrada, es decir, tal que $d\omega = 0$.
- El *teorema de Darboux* garantiza que localmente es posible encontrar unas coordenadas (q, p) (llamadas *de Darboux*) en las que la forma toma el aspecto $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$.
- Sea una función $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Se define el *campo hamiltoniano asociado a* H, como el campo X^H tal que $i_{X^H}\omega = -dH$. En coordenadas de Darboux el campo X^H se expresa

$$X^H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Corchete de Poisson

Sea (M, ω) una variedad simpléctcia y $F, G \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Se define el *corchete de Poisson de* F *y* G como la función

$$\{F, G\} = X^F G.$$

Propiedades:

- $\{F, G\} = dG(X^F) = \omega(X^F, X^G)$.
- $\left[X^F, X^G\right] = X^{\{F,G\}}$.
- $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\bullet, \bullet\})$ es un álgebra de Lie.
- Regla de Leibniz: $\{F, \bullet\}$ es una derivación.
- En coordenadas de Darboux se expresa

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right)$$

Mecánica hamiltoniana

Un *sistema mecánico hamiltoniano* (M, H) con n grados de libertad consiste en:

- **Estados**: Una variedad simpléctica M de dimensión $2n$. M se le suele llamar *espacio de fases*. Los puntos de M se llaman *estados* del sistema.
- **Observables**: Las funciones del álgebra de Poisson $\mathcal{C}^\infty(M)$.
- **Evolución temporal**: Viene dictada por el *hamiltoniano* $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$. La evolución temporal de los estados que vendrá dada por las curvas integrales del campo hamiltoniano X^H. En coordenadas de Darboux, siguen las *ecuaciones de Hamilton*

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Sistemas integrables

Sea (M, H) un sistema hamiltoniano con n grados de libertad. Diremos que (M, H) es *integrable en el sentido de Liouville* si existen $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$ que

1. son funcionalmente independientes ($dF_{1,x} \wedge \cdots \wedge dF_{n,x} \neq 0$), y
2. están en involución ($\{F_i, F_j\} = 0$ para cada $i, j = 1, \ldots, n$).

Ejemplos:

- Sistemas con 1 grado de libertad.
- Sistemas con 2 grados de libertad y una cantidad conservada independiente de H (e.g. el momento angular).
- El potencial central.
- El trompo simétrico.

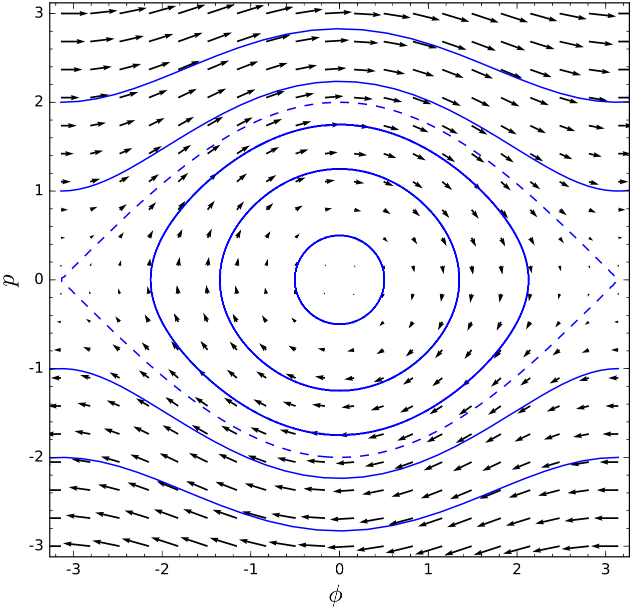
Teorema de Arnold-Liouville

Teorema

Sea (M, H) *un sistema integrable en el sentido de Liouville con* $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$ *las integrales en involución y* $F = (F_1, \dots, F_n) : M \to \mathbb{R}$*. Sea* a *un valor regular de* F *y el conjunto de nivel* $M_a = F^{-1}(a)$*. Entonces:*

1. M_a *es una subvariedad de* M *invariante bajo el flujo* φ^H *de* X^H*.*
2. *Si* M_a *es compacta y conexa:*
   - 2.1 $M_a \cong \mathbb{T}^n$*. (Toro de Liouville)*
   - 2.2 *Para cada* $x \in M_a$ *se puede dar una parametrización* ψ *de* M_a *y unas frecuencias constantes* ν *tales que* $\varphi_t^H(x) = \psi(\nu t)$*.*

Ejemplo: El péndulo



Demostración (1)

- $F_1, \dots, F_n$ funcionalmente independientes $\implies M_a$ subvariedad regular de M.
- $\{F_i, F_j\} = 0 \implies \omega(X^{F_i}, X^{F_j}) = 0$.

Por tanto:

- $dF_j(X^{F_i}) = 0 \implies$ Campos tangentes a $M_a \implies M_a$ invariante.
- Además, $\left[X^{F_i}, X^{F_j}\right] = 0$.

Teorema de Arnold-Liouville

Teorema

Sea (M, H) *un sistema integrable en el sentido de Liouville con* $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$ *las integrales en involución y* $F = (F_1, \ldots, F_n) : M \to \mathbb{R}$*. Sea* a *un valor regular de* F *y el conjunto de nivel* $M_a = F^{-1}(a)$*. Entonces:*

1. M_a *es una subvariedad de* M *invariante bajo el flujo* φ^H *de* X^H*.*
2. *Si* M_a *es compacta y conexa:*
   2.1 $M_a \cong \mathbb{T}^n$*. (Toro de Liouville)*
   2.2 *Para cada* $x \in M_a$ *se puede dar una parametrización* ψ *de* M_a *y unas frecuencias constantes* ν *tales que* $\varphi_t^H(x) = \psi(\nu t)$*.*

Demostración (2.1)

Vamos a aplicar el siguiente lema con $N = M_a$, $X_i = X^{F_i}$.

Lema

Sea N *una variedad diferenciable de dimensión* n *conexa y compacta tal que existen campos* $X_1, \ldots, X_n$ *linealmente independientes y* $\left[X_i, X_j\right] = 0$*. Entonces* $N \cong \mathbb{T}^n$*.*

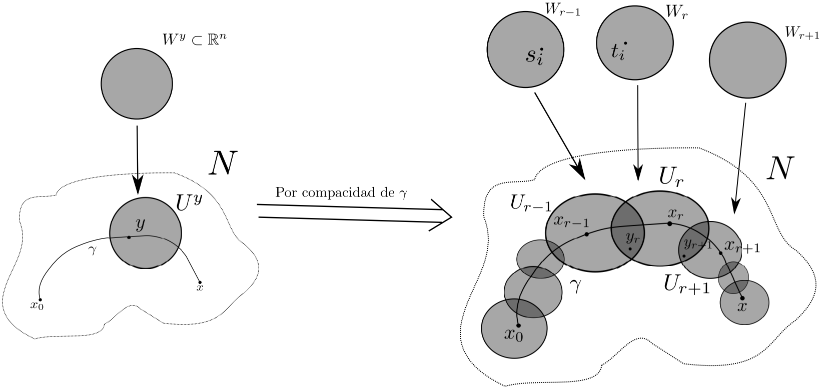
Demostración del Lema (1)

- Fijo $x_0 \in N$.
- $X_i \rightsquigarrow$ flujo g_i.
- $\left[X_i, X_j\right] \implies$ flujos conmutan.
- Puedo definir

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow N \\ t = (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto g_t(x_0) = g_{1,t_1} \circ g_{2,t_2} \circ \cdots \circ g_{n,t_n}(x_0). \end{aligned}$$

- g es un difeomorfismo local sobreyectivo.

Idea de que g es sobreyectiva



Demostración del Lema (2)

Sea

$$\Gamma = \{t \in \mathbb{R}^n | g_t(x_0) = x_0\}.$$

- Γ es un subgrupo cerrado y discreto de $(\mathbb{R}^n, +)$.
- La aplicación $\tilde{g}$ dada por el siguiente diagrama es un difeomorfismo

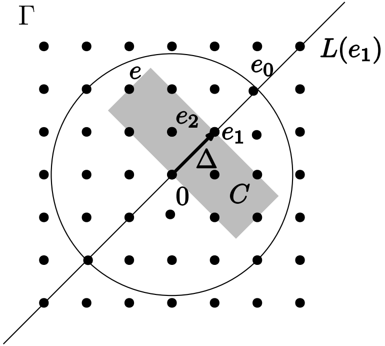
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\
\mathbb{R}^n/\Gamma. \arrow[ur, "\tilde{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

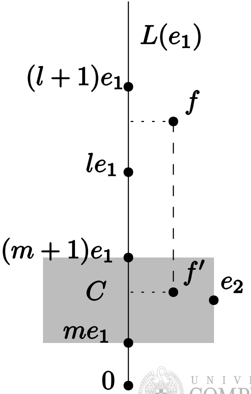
Demostración del Lema (3)

Lema

Existen $e_1, \ldots, e_k \in \Gamma$ *linealmente independientes tales que*

$$\Gamma = \{n_1 e_1 + \cdots + n_k e_k | n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^k.$$





Demostración del Lema (4)

Sea

$$\begin{aligned} \varpi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (\theta, y) &\longmapsto (\exp(\theta), y), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{T}^k = \mathbb{S}^1 \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{S}^1 \\ (\theta_1, \dots, \theta_k) &\longmapsto (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k}). \end{aligned}$$

Y sea el isomorfismo lineal

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\theta, 0) &\longmapsto \frac{\theta_1}{2\pi} e_1 + \cdots + \frac{\theta_k}{2\pi} e_k. \end{aligned}$$

Demostración del Lema (5 y última)

$$
\begin{tikzcd}
 & 2\pi\mathbb{Z}^k \arrow[r, "\zeta|"] \arrow[d, hook] & \Gamma \arrow[d, hook] & \\
 & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\varpi=(\exp,\mathrm{id})"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[r, equal] \arrow[rrr, bend right, "\cong"'] & \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^k \arrow[r, "\tilde{\zeta}"] & \mathbb{R}^n/\Gamma \arrow[r, "\tilde{g}"] & N.
\end{tikzcd}
$$

Teorema de Arnold-Liouville

Teorema

Sea (M, H) *un sistema integrable en el sentido de Liouville con* $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$ *las integrales en involución y* $F = (F_1, \ldots, F_n) : M \to \mathbb{R}$*. Sea* a *un valor regular de* F *y el conjunto de nivel* $M_a = F^{-1}(a)$*. Entonces:*

1. M_a *es una subvariedad de* M *invariante bajo el flujo* φ^H *de* X^H*.*
2. *Si* M_a *es compacta y conexa:*
   2.1 $M_a \cong \mathbb{T}^n$*. (Toro de Liouville)*
   2.2 *Para cada* $x \in M_a$ *se puede dar una parametrización* ψ *de* M_a *y unas frecuencias constantes* ν *tales que* $\varphi_t^H(x) = \psi(\nu t)$*.*

Demostración (2.2)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\exp"] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi^F_\bullet"] & \\
\mathbb{T}^n \arrow[r, "\tilde{\zeta}"] & \mathbb{R}^n/\Gamma \arrow[r, "\tilde{\varphi}^F_\bullet"] & M_a.
\end{tikzcd}$$

Sea $\nu \in \mathbb{R}^n$ tal que $\zeta(\nu) = (1, 0, \ldots, 0)$. Entonces

$$\psi(\nu t) = \varphi^F_{\zeta(\nu t)}(x) = \varphi^F_{(t,0,\ldots,0)}(x) = \varphi^{F_1}_t(x) = \varphi^H_t(x).$$

Variables de acción-ángulo

Teorema

En torno a cada toro de Liouville hay un entorno $U \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ *y un sistema de coordenadas de Darboux* (ϕ, J) *en* U *tales que en cada toro de* U *las* ϕ_i *son coordenadas angulares y las* J_i *son constantes.*

Integrabilidad por cuadraturas (1)

En el entorno U con las coordenadas (ϕ, J) las ecuaciones de Hamilton quedan resueltas. En efecto,

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = \dfrac{\partial H}{\partial J_i}, \\ \dot{J}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial \phi_i}. \end{cases}$$

J_i constantes en cada toro de Liouville $\Longrightarrow$ $\dot{J}_i = 0$ $\Longrightarrow$ $\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = 0$ $\Longrightarrow$ el hamiltoniano no depende de las ϕ $\Longrightarrow$ las frecuencias $\nu_i = \dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$ sólo dependen de las coordenadas J $\Longrightarrow$ ν_i son constantes en cada toro.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

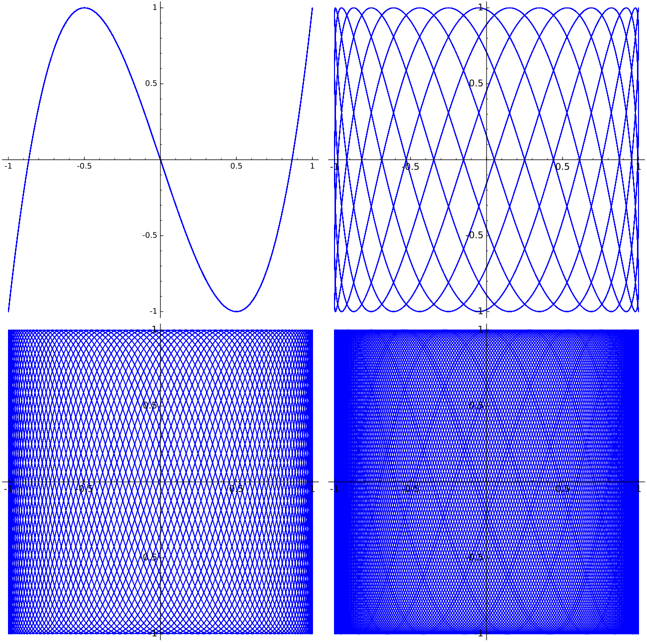
Integrabilidad por cuadraturas (2)

Las ecuaciones quedan integradas en la forma

$$\begin{cases} J_i(t) = J_i(0) \\ \phi_i(t) = \phi_i(0) + \nu_i(J(0))t. \end{cases}$$

Este tipo de flujo en el toro se conoce como *movimiento condicionalmente periódico*. En particular, las trayectorias son densas en el toro si y sólo si las frecuencias $\nu_1, \ldots, \nu_n$ son inconmesurables.

Figuras de Lissajous



Referencias

R. Abraham and J. E. Marsden.
Foundations of Mechanics.
Benjamin/Cummings, 1978.

V. I. Arnold.
Mathematical Methods of Classical Mechanics.
Springer-Verlag, 1989.

Michèle Audin.
Torus actions on Symplectic Manifolds.
Birkhäuser, 2012.

John M. Lee.
Introduction to Smooth Manifolds.
Springer, 2003.

Michael Spivak.
Physics for Mathematicians: Mechanics I.
Publish or Perish, 2010.

¿PREGUNTAS?