## Introducción a los fibrados principales

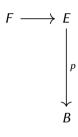
Guillermo Gallego Sánchez

Geometría de superficies topológicas

17 de diciembre de 2018



### **Fibrados**



Un *fibrado* (E, B, p, F) consta de:

- **base**: *B*
- espacio total: E
- ▶ fibra: F
- ▶  $p: E \rightarrow B$  aplicación continua tal que  $\forall x \in B \exists U^x$  y una *trivialización*

$$p^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi_U} U \times F$$

# Ejemplos

► El fibrado trivial:

$$F \longrightarrow B \times F$$

$$\downarrow_{\operatorname{pr}_{1}}$$

$$B$$

La cinta de Moebius:

$$(0,1) \longrightarrow E$$

$$\downarrow_{\text{pr}}$$

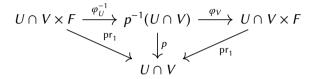
$$\mathbb{S}^1$$

con  $E = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1)\} / (x, y) \sim (x + 1, 1 - y) \text{ y } p : E \to \mathbb{S}^1, \text{ viendo la base como } \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}\} / x \sim x + 1.$ 



#### Funciones de transición

 $E \rightarrow B$  fibrado,  $x \in B$ ,  $U^x$ ,  $V^x$ .



$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (U \cap V) \times F \longrightarrow (U \cap V) \times F$$
  
 $(x, y) \longmapsto (x, \psi_{UV}(x, y))$ 

$$\psi_{UV,x}: F \longrightarrow F$$

$$y \longmapsto \psi_{UV}(x,y)$$



#### Funciones de transición

► Función de transición entre U y V:

$$g_{UV}: U \cap V \longrightarrow \mathsf{Homeo}(F)$$
  
 $x \longmapsto \psi_{UV,x}.$ 

Las funciones de transición cumplen la condición de cociclo

$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV}$$
.

En particular,  $g_{UU} = \text{id y } g_{UV} = g_{VU}^{-1}$ .

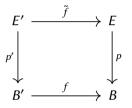
► Con estructura adicional en las funciones de transición obtenemos otro tipo de fibrados (por ejemplo, fibrados vectoriales → matrices de transición).



### Isomorfismo de fibrados

 $p: E \to B, p': E \to B'$  fibrados con fibra F.

Un *isomorfismo de fibrados* entre  $p:E\to B$  y  $p:E'\to B'$  es un par de homeomorfismos  $(f,\tilde{f})$  tales que el diagrama



conmuta.

Las funciones de transición se relacionan por

$$g'_{U'V'}=f_{VV'}^{-1}\circ g_{UV}\circ f_{UU'},$$

 $\operatorname{con} f_{UU'}: U' \to \operatorname{Homeo}(F).$ 



### Obtención del fibrado desde las funciones de transición

 $\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $B, G < \operatorname{Homeo}(F)$  y  $\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$  conjunto de funciones de transición de un fibrado  $E \to B$ . Entonces  $E \to B$  es isomorfo al fibrado  $E' \to B$  con

espacio total

$$E' = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} (U \times F)/(x, y) \sim (x, g_{UV}(x)(y))$$

la proyección

$$p: E' \longrightarrow B$$
$$(x, y) \longrightarrow x$$



# Fibrados y cohomología de Čech

 $\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de B. G < Homeo(F).

▶ Un conjunto de funciones  $\{g_{UV}: U \cap V \to G: U, V \in \mathcal{U}\}$  es: un 1-cociclo de Čech subordinado a  $\mathcal{U}$  con coeficientes en G si

$$g_{UW}=g_{VW}\circ g_{UV},$$

► Se llama primer grupo de cohomología de Čech subordinado a U con coeficientes en G al cociente

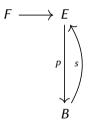
$$\check{H}(\mathcal{U}, G) = \{1\text{-cociclos}\}/g_{UV} \sim (f_{VV'}^{-1} \circ g_{UV} \circ f_{UU'}).$$

► Tomando el límite directo por refinamiento del recubrimiento, tenemos el **primer** grupo de cohomología de Čech con coeficientes en G

$$\check{H}^1(B,G) = \lim_{\stackrel{\longrightarrow}{\mathcal{U}}} \check{H}^1(\mathcal{U},G).$$



#### Secciones



Una **sección** de un fibrado  $p: E \rightarrow B$  es una aplicación continua  $s: B \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = \mathrm{id}_B$ .

Una sección local es una sección definida en un abierto  $U \subset B$ .

Denotamos  $\Gamma(E)$  al conjunto de las secciones de  $E \to B$  y  $\Gamma(U, E)$  al conjunto de las secciones locales definidas en un abierto  $U \subset B$ .

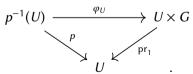
### Fibrados principales

Un *fibrado principal* (*P*, *B*, *p*, *G*) consta de:

- una variedad diferenciable P,
- ▶ un grupo de Lie *G* actuando libremente por la derecha sobre *P*:

$$P \times G \longrightarrow P$$
$$(p, g) \longmapsto p \cdot g,$$

▶ B = P/G con una sumersión  $p : P \to P/G$ , que es la proyección canónica al cociente y tal que  $\forall x \in B \exists U^x$  y una trivialización



Además,  $\varphi_U(y) = (p(y), g_U(y))$  para cierta  $g_U : p^{-1}(U) \to G$  con  $g_U(y \cdot g) = g_U(y) \cdot g$ .



#### Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie. En efecto, para cada sección local  $s_U: U \to P$  y para cada  $y \in p^{-1}(x)$  existe un único elemento  $g_U(y) \in G$  con  $y = s_U(x)g_U(y)$ .
- Las funciones de transición son de la forma

$$U \cap V \times G \longrightarrow U \cap V \times G$$
  
 $(x, h) \longmapsto (x, g_{UV}(x)h).$ 

▶ Un fibrado principal admite una sección global si y sólo si es trivial.



# **Ejemplos**

▶ 
$$P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$$
 y

$$p: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$
$$z \longmapsto z^2.$$

Fibra  $\mathbb{Z}_2$  con la acción

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$
$$(z, \pm 1) \longmapsto \pm z.$$

▶  $p: \tilde{M} \to M$  recubridor universal. Fibra  $\pi_1(M)$  con la acción de monodromía:

$$\tilde{M} \times \pi_1(M) \longrightarrow \tilde{M}$$
  
 $(y, g) \longmapsto \tilde{\gamma}_g^{\gamma}(1).$ 



### Fibrado de referencias

El *fibrado de referencias* sobre una variedad diferenciable *M* tiene por espacio total

$$L(M) = \{ \psi_x : \mathbb{R}^n \to T_x M : x \in M, \ \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal} \}$$

con la aplicación

$$p: L(M) \longrightarrow M$$
$$\psi_x \longmapsto x.$$

Su fibra es  $GL(n, \mathbb{R})$ , con la acción

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi_x} T_x M.$$



# Conexiones en fibrados principales

- $p: P \to B$  con fibra  $G. x \in B y \in p^{-1}(x)$ .
  - ▶ Subespacio vertical:  $V_v = \ker p_* \subset T_v Y$ .
  - ▶ *Campo vertical*:  $X_y \in V_y \ \forall y \in P$ . El corchete de Lie de campos verticales es vertical.
  - ▶  $V \subset TP$  es G-invariante:  $\forall g \in G, R_{g,*}V_y = V_{y\cdot g}$ .
  - ▶ Una *conexión* en P es  $H \subset V$ , G-invariante y tal que  $TP = V \oplus H$ .



# El campo fundamental

$$\sigma: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$$
$$\xi \longmapsto \sigma(\xi).$$

Este  $\sigma(\xi)$  se llama *campo fundamental* y su valor es

$$\sigma_{y}(\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (y \cdot \exp(t\xi)).$$

- $p_*\sigma_y(\xi) = 0$ , luego  $\sigma(\xi)$  es un campo vertical.
- $\xi \mapsto \sigma_{\nu}(\xi)$  es un isomorfismo.



### La 1-forma de conexión

La 1-**forma de conexión** de una conexión  $H \subset TP$  es  $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$  definida por

$$\omega(Y) = \begin{cases} \xi & \text{si } Y = \sigma(\xi), \\ 0 & \text{si } Y \text{ es horizontal.} \end{cases}$$

#### Propiedades:

- $\rightarrow$   $H = \ker \omega$
- $R_g^* \omega = \mathrm{ad}_{g^{-1}} \circ \omega.$

# Conexiones como campos gauge

 $\mathcal{U}$  recubrimiento de B por abiertos trivializantes y  $\{s_U: U \to p^{-1}(U): U \in \mathcal{U}\}$  familia de secciones locales. El **campo gauge** asociado a una 1-forma de conexión  $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$  es

$$\left\{A_U=s_U^*\omega\in\Omega^1(U;\mathfrak{g}):U\in\mathcal{U}\right\}.$$

Se cumple:

$$\omega|_{p^{-1}(U)} = \operatorname{ad}_{g_U^{-1}} \circ p^* A_U + g_U^* \theta,$$

con  $\theta \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$  la 1-**forma de Maurer-Cartan**, definida por  $\theta_g = (L_{g^{-1}})_*$ . Además,

$$A_U = \operatorname{ad}_{g_{UV}} \circ A_V + g_{VU}^* \theta.$$



#### Curvatura

 $p: P \to B$  fibrado principal,  $\omega$  1-forma de conexión. Cualquier vector  $Y_y \in T_y P$  se descompone como  $Y_y = Y_y^v + Y_y^h$ . La **curvatura** de la conexión definida por  $\omega$  es la 2-forma  $\Omega \in \Omega^2(P;\mathfrak{g})$  definida por

$$\Omega(Y_y, Z_y) = d\omega(Y_y^h, Z_y^h).$$

Interpretación geométrica:

$$\Omega(Y,Z) = Y^h \omega(Z^h) - Z^h \omega(Y^h) - \omega([Y^h, Z^h]) = -\omega([Y^h, Z^h]),$$

luego  $\Omega$  se anula  $\Leftrightarrow [Y^h, Z^h]$  es horizontal.

### Propiedades:

- $\Omega = d\omega + [\omega, \omega]$  (Ecuación de estructura)
- ►  $d\Omega(Y^h, Z^h, W^h) = 0$  (Identidad de Bianchi)



# Curvatura como fuerza de campo gauge

 $\mathcal{U}$  recubrimiento de B por abiertos trivializantes y  $\{s_U: U \to p^{-1}(U): U \in \mathcal{U}\}$  familia de secciones locales. La **fuerza de campo gauge** asociada a la curvatura  $\Omega \in \Omega^2(P;\mathfrak{g})$  de una 1-forma de conexión  $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$  es

$$\left\{F_U=s_U^*\Omega\in\Omega^2(U;\mathfrak{g}):U\in\mathcal{U}\right\}.$$

### Propiedades:

- $F_U = dA_U + [A_U, A_U]$  (de la ecuación de estructura)
- $ightharpoonup F_U = \operatorname{ad}_{g_{UV}} \circ F_V.$



#### Fibrados asociados

 $p: P \to B$  fibrado principal con fibra G que actúa sobre F por la izquierda. Se define el **fibrado asociado**  $P \times_G F$  como el cociente  $(P \times F)/G$  por la acción

$$(P \times F) \times G \longrightarrow P \times F$$
  
 $((y, f), g) \longmapsto (y \cdot g, g^{-1} \cdot f),$ 

con la aplicación

$$p_F: P \times_G F \longrightarrow B$$
  
 $[(y,f)] \longmapsto p(y).$ 



# Ejemplos

- ▶  $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ . Se obtiene la banda de Moebius con la acción  $(f, \pm 1) \mapsto \pm f$  y el cilindro con la acción trivial.
- ► M variedad diferenciable y  $L(M) \rightarrow M$  el fibrado de referencias. Hay un isomorfismo

$$L(\mathcal{M}) \times_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathcal{M}$$
$$[(\psi, \mathbf{v})] \longmapsto \psi(\mathbf{v}).$$

 $\triangleright$   $E \leadsto P(E), E \cong P(E) \times_G F.$ 



## Fibrado adjunto y curvatura

- ► Se llama *fibrado adjunto* de un *G*-fibrado principal  $P \to B$  al fibrado ad  $P = P \times_G g$ , donde el cociente se realiza por la acción dada por la representación adjunta ad :  $G \to Aut(g)$ .
- ► El fibrado adjunto permite ver la curvatura de una conexión como una 2-forma definida sobre la base: Si tenemos una conexión en P con curvatura Ω podemos definir  $\tilde{Ω} ∈ Ω(B, ad P)$  como

$$\tilde{\Omega}_{x}(X_{x}, Y_{x}) = [(y, \Omega_{y}(X_{y}^{h}, Y_{y}^{h}))],$$

con  $X_y^h$ ,  $Y_y^h$  los levantamientos horizontales:  $X_y^h \in H_y$  único tal que  $p_*(X_y^h) = X_x$ , x = p(y).



Buscamos una generalización del teorema de Gauss-Bonnet:

$$\int_{\mathcal{M}} K v_g = 2\pi \chi(\mathcal{M}).$$

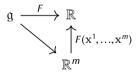
$$\underbrace{\int_{\mathcal{M}} K v_g}_{\text{Geometria}} = \underbrace{2\pi \chi(\mathcal{M})}_{\text{Topologia}}.$$

En primer lugar buscamos algo que se pueda integrar en toda la variedad:

- 1. Fijamos un fibrado principal  $P \to M$  y una conexión en P. Consideramos la curvatura  $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(M; \text{ad } P)$ .
- 2. Si n = 2k podemos tomar  $\Omega \wedge \stackrel{(k)}{\cdots} \wedge \Omega$ , que se podría integrar en M si tuviera valores reales.
- 3. Por tanto, vamos a buscar funciones f: ad  $P \to \mathbb{R}$ .



- ►  $S^k(\mathfrak{g}) = \{ f : \mathfrak{g} \times \stackrel{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \text{ multilineales y simétricas.} \}$
- ► Llamo  $\mathbb{R}[\mathfrak{g}]_k$ , **polinomios homogéneos** a funciones  $F : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$  tales que, fijado un isomorfismo  $\mathfrak{g} \to \mathbb{R}^m$ , el polinomio  $F(\mathfrak{X}^1, \dots, \mathfrak{X}^m)$  dado por



es homogéneo. Hay una biyección  $S^k(\mathfrak{g}) \leftrightarrow \mathbb{R}[\mathfrak{g}]_k$ .

▶ Llamo  $I^k(\mathfrak{g}) \subset S^k(\mathfrak{g})$ , **polinomios invariantes** a las  $f \in S^k(\mathfrak{g})$  tales que

$$f(\operatorname{ad}_g \xi_1, \ldots, \operatorname{ad}_g \xi_k) = f(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$



### Teorema (Construcción de Weil de las clases características)

Sea  $p: P \to B$  un fibrado principal con fibra  $G, \omega$  una 1-forma de conexión en P con curvatura  $\Omega$  y  $f \in I^k(\mathfrak{g})$ . La 2k-forma  $f(\Omega \wedge \overset{(k)}{\dots} \wedge \Omega)$  en P definida por

$$f(\Omega \wedge \stackrel{(k)}{\dots} \wedge \Omega)(Y_1, \dots, Y_{2k}) =$$

$$= \frac{1}{2k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} (-1)^{\sigma} f(\Omega(Y_{\sigma(1)}, Y_{\sigma(2)}), \dots, \Omega(Y_{\sigma(2k-1)}, Y_{\sigma(2k)}))$$

tiene las siguientes propiedades:

- 1. Se puede proyectar (es la pullback por p de una 2k-forma en B).
- 2. Es cerrada.
- 3. La clase de cohomología de su proyección en B no depende de la elección de la conexión  $\omega$ . Esta clase se llama la **clase característica del fibrado**  $P \to B$  **asociada a**  $f_{s, y, y, y, z}$

# Ejemplo: Fibrados U(1)

 $\mathbb{S}^2$  y  $U_N$ ,  $U_S$  los hemisferios norte y sur.

Consideramos un fibrado principal U(1) dado por la función de transición

$$U_{N} \cap U_{S} \xrightarrow{\psi} U(1)$$

$$U_{N} \cap U_{S} \xrightarrow{\psi} U(1)$$

$$\downarrow^{\sim} \qquad \downarrow^{\sim}$$

$$\mathbb{S}^{1} \longrightarrow \mathbb{S}^{1}$$

$$\downarrow^{N} \cap U_{S} \xrightarrow{\psi} U(1)$$

$$\downarrow^{\sim} \qquad \downarrow^{\sim}$$

$$\mathbb{S}^{1} \longrightarrow \mathbb{S}^{1}$$



# Ejemplo: Fibrados U(1)

Consideramos la conexión definida por un campo gauge A de la forma

- en  $U_N$ ,  $A_N = 0$ ,
- en  $U_N \cap U_S$ ,  $A_S = \psi A_N + \psi d\psi = \psi d\psi$  y lo extendemos de cualquier manera a todo  $U_S$ .

La curvatura es F = dA + [A, A] = dA. Como U(1) es abeliano, todos los polinomios son invariantes y puedo escoger  $p(x) = \frac{1}{2\pi}x$ . Finalmente,

$$\int_{\mathbb{S}^2} p(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{U_S} dA_S = \frac{1}{2\pi} \int_{U_N \cap U_S} A_S |_{U_N \cap U_S}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{U_N \cap U_S} \psi d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k \phi d\phi = k.$$



#### Referencias



M. Castrillón and V. Muñoz.

"Bundles", 2011.

Lecture notes at Universidad Complutense de Madrid.



J. M. Figueroa-O'Farrill.

"Gauge Theory", 2006. Lecture notes at University of Edinburgh.



S. Kobayashi and K. Nomizu.

Foundations of differential geometry, volume 2.

Interscience Publishers New York, 1963.



J. M. Lee.

*Introduction to Smooth Manifolds.* 

Springer, 2003.



M. Nakahara.

Geometry, topology and physics. CRC Press. 2003.

