Teoría De Hodge

Juan Carlos
Sampedro Pascual

"La esencia de las matemáticas reside en su libertad" G. Cantor.

Índice

Objetivo del Trabajo:

El objetivo de este trabajo es presentar de manera detallada la demostración del Teorema de Hodge. El enfoque que utilizaremos será un enfoque variacional, es decir, utilizaremos el método directo del cálculo de Variaciones para atacar el problema. Finalmente, presentaremos algunas Consecuencias del mencionado Teorema.

Madrid, 13 de Diciembre del 2018

Es imposible ser matemático
sin ser un poeta del Alma.

Sofía Kovaléuskaya

(1850 - 1891)

I. PRELIMINARES

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita d. Recordemos que $\Lambda^p(V)$ denotaba es espacio de los p-tensores covariantes alternados. $(1 \leq p \leq d)$

$$\Lambda^p(V) := \{ T : V \times \overset{(p)}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ alternado} \}.$$

Además si fijamos una base de V, a saber, $\{v_1, \ldots, v_d\}$ y denotamos $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\}$ a la base dual asociada, entonces el conjunto

$$\mathcal{G} = \{ \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq d \}$$

donde $\wedge$ denota el producto exterior, era base de $\Lambda^p(V)$ y por tanto podíamos expresar

$$\Lambda^p(V) = \Big\{ \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq d} a_{i_1, \ldots, i_p} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_p} \;\Big|\; a_{i_1, \ldots, i_p} \in \mathbb{R}, \; 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq d \Big\}$$

Por tanto $\Lambda^p(V)$ es $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $\binom{d}{p}$.

Introducimos en V^* una estructura métrica dada por un producto escalar $<\cdot,\cdot>$.

Este producto escalar induce otro en $\Lambda^p(V)$ definido por

$$<\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_p},\varphi_{j_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{j_p}>:=$$

$$:=\det\begin{pmatrix} <\varphi_{i_1},\varphi_{j_1}> & \cdots & <\varphi_{i_1},\varphi_{j_p}> \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ <\varphi_{i_p},\varphi_{j_1}> & \cdots & <\varphi_{i_p},\varphi_{j_p}> \end{pmatrix} \quad (*)$$

y extendiéndolo a $\Lambda^p(V)$ por bilinealidad.

De esta definición se deduce rápidamente que $<\cdot,\cdot>_{\Lambda^p(V)}$ es un producto escalar en $\Lambda^p(V)$:

1) $<\cdot,\cdot>_{\Lambda^p(V)}$ bilineal por definición.

2) $<\cdot,\cdot>_{\Lambda^p(V)}$ simétrico por la simetría del producto escalar $<\cdot,\cdot>$ en V^*.

3) $<\cdot,\cdot>_{\Lambda^p(V)}$ definida positiva pues la matriz $(*)$ es la matriz de la forma bilineal $<\cdot,\cdot>$ en la

base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ de V^*, por tanto, como dicha matriz es definida positiva, $\underset{\substack{\uparrow \\ \det > 0}}{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda^p(V)}}$ es def. positiva.

<u>Proposición</u>: Si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\} \subset V^*$ es una base ortonormal del espacio vectorial V^*, entonces

$$\mathcal{G} = \{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d\}$$

es una base ortonormal de $\Lambda^p(V)$.

<u>Dem</u>: Ya sabemos que $\mathcal{G}$ es base de $\Lambda^p(V)$.

- $\langle \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}, \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \rangle =$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_{i_1}, \varphi_{i_1} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{i_1}, \varphi_{i_p} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_{i_p}, \varphi_{i_1} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{i_p}, \varphi_{i_p} \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- $\langle \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}, \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_p} \rangle$ con

$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \neq \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_p}$ como elementos de $\mathcal{G}$, entonces $\exists k \in \{1, \dots, d\}$ t.q. $i_k \neq j_r$ $\forall r \in \{1, \dots, d\}$.

$$\langle \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p}, \varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_p} \rangle =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle \varphi_{i_1}, \varphi_{j_1} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{i_1}, \varphi_{j_p} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_{i_p}, \varphi_{j_p} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{i_p}, \varphi_{j_p} \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{array}{cc} & \\ k \to & \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \\ & \uparrow \\ & k \end{array} = 0$$

$\square$

Definimos ahora en $(V^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una orientación.

Ya estamos en condiciones de introducir el operador estrella de Hodge:

<u>Def:</u> Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con dual V^*.

Tenemos un p. escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V^* y una orientación. Sea $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\} \subset V^*$ base ortonormal de V.

Se define

$$* : \Lambda^p(V) \longrightarrow \Lambda^{d-p}(V) \qquad (0 \leq p \leq d)$$

como el operador lineal con

$$*(\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p})=\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_{d-p}}$$

con $j_1,\ldots,j_{d-p}$ tales que $\{\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_p},\varphi_{j_1},\ldots,\varphi_{j_{d-p}}\}$ base positiva de V^*.
(orientada)

<u>Observación:</u> Sean $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\}$ y $\{\psi_1,\ldots,\psi_d\}$ bases ortonormales positivas de V^*. Si denotamos A la matriz de cambio de base de $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\}$ a $\{\psi_1,\ldots,\psi_d\}$ entonces

$$*(\psi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\psi_{i_p})=*(A\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge A\varphi_{i_p})=$$

$$=*((\det A)\,\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p})\overset{*\text{ lineal}}{=}(\det A)\cdot$$

$$\cdot\,*(\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p}).$$

Luego como las bases son ortonormales, $\det A=1$, entonces

$$*(\psi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\psi_{i_p})=*(\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_p}).$$

Luego, en efecto, $*$ no depende de la base ortonormal positiva elegida en V^*.

Observación: Supongamos que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \dots, \varphi_d\}$ $= W_1$ base ortonormal positiva elegida en V^*.

Si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{d-p}}\} = W_2$ positiva también, entonces

$$*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p) = \varphi_{p+1} \wedge \dots \wedge \varphi_d$$

$$*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p) = \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}}.$$

Pero como W_1 y W_2 positivas, $\exists A$ matriz c. base de W_1 a W_2 con $\det(A) = 1 \implies$
(det > 0 y como bases orto det A = 1)

$$\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}} = A\varphi_{p+1} \wedge \dots \wedge A\varphi_d.$$

Ahora como

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \det(A) = \det(\tilde{A}) = 1$$

entonces, abusando de la notación

$$\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}} = \tilde{A}\varphi_{p+1} \wedge \dots \wedge \tilde{A}\varphi_d =$$

$$= \det(\tilde{A})\, \varphi_{p+1} \wedge \dots \wedge \varphi_d$$

$$= \varphi_{p+1} \wedge \dots \wedge \varphi_d.$$

Lema: $$** : \Lambda^p(V) \longrightarrow \Lambda^p(V)$$

$$\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} \longmapsto (-1)^{p(d-p)} \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p}.$$

Dem: Observar antes de nada que

$$\begin{tikzcd} \Lambda^p(V) \arrow[r, "*"] \arrow[rr, bend right, "**"'] & \Lambda^{d-p}(V) \arrow[r, "*"] & \Lambda^{d-(d-p)}(V) = \Lambda^p(V) \end{tikzcd}$$

Supongamos que

$$* (\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p}) = \varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_{d-p}}$$

entonces

$$** (\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p}) = * (\varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_{d-p}}).$$

Por otro lado:

$$\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_{d-p}} =$$

$$= (-1)^p \varphi_{j_1} \wedge \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \varphi_{j_2} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_{d-p}}$$

$$= \underbrace{(-1)^p \cdots (-1)^p}_{d-p} \varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_{d-p}} \wedge \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p}$$

$$= (-1)^{p(d-p)} \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}} \wedge \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}.$$

Sea ahora A la matriz cambio de base de

$\{\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{d-p}}, \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_p}\}$ a $\{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_p}, \varphi_{j_1}, \dots$
$\dots, \varphi_{j_{d-p}}\}$, entonces

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}} =$$

$$= A\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge A\varphi_{j_{d-p}} \wedge A\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge A\varphi_{i_p} =$$

$$= \det(A)\, \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}} \wedge \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \qquad (*)$$

Luego por unicidad $\det(A) = (-1)^{p(d-p)}$.

Entonces

$$*(\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}}) = (-1)^{p(d-p)} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}$$

pues

$$\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}} \wedge \left((-1)^{p(d-p)} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}\right) =$$

$$\overset{\text{multilineal}}{=} (-1)^{p(d-p)} \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}} \wedge \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \overset{(*)}{=}$$

$= \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}}$.

Entonces si B es la matriz c. base de

$\{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_p}, \varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{d-p}}\}$ a $\{\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{d-p}}, \varphi_{k_1}, \dots, \varphi_{k_p}\}$ (con $\{\varphi_{k_1}, \dots, \varphi_{k_p}\}$ una reordenación de $\{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_p}\}$ tal que $\varphi_{k_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{k_p} =$

$= (-1)^{p(d-p)} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}$) entonces $\det(B) = 1$ y por tanto como $\{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{j_{d-p}}\}$ está positivamente orientada, $\{\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{d-p}}, \varphi_{k_1}, \dots, \varphi_{k_p}\}$ también.

En definitiva, hemos probado que

$$**(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}) = (-1)^{p(d-p)} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}.$$

$\square$

Lema: Sean $w_1, w_2 \in \Lambda^p(V)$ entonces

$$<w_1, w_2> = *(w_2 \wedge *(w_1)) = *(w_2 \wedge *(w_1)).$$

Dem: Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ base ortonormal positiva de V^*.

1) $<\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}, \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}> = 1$

$$*((\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}) \wedge *(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p})) =$$

$$= *((\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}) \wedge (\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}}))$$

$$= *(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{p-d}})$$

Ahora, como $* : \Lambda^d(V) \longrightarrow \Lambda^{d-d}(V) = \Lambda^0(V) = \mathbb{R}$

y $\{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_p}, \varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_{d-p}}\}$ es una base ortonormal positiva (pues $*(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}) = \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}}$) entonces

$$*(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{d-p}}) = 1.$$

Luego, en efecto,

$$<\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}, \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}> =$$

$$= *((\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}) \wedge *(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}))\ (=1).$$

α) Si $\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \neq \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_p}$ (en $\mathfrak{g}$) entonces $\exists k \in \{1, \dots, p\}$ con $\varphi_{i_k} \neq \varphi_{j_r}$, $\forall r \in \{1, \dots, p\}$. Entonces

$$< \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}, \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_p} > = 0.$$

$$* ((\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}) \wedge *(\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_p})) =$$

$$= * (\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \wedge (\varphi_{e_{p+1}} \wedge \dots \wedge \varphi_{e_{d-p}}))$$

pero como $\varphi_{i_k} \neq \varphi_{j_r}$, $\forall r \in \{1, \dots, p\}$ entonces $\exists s \in \{p+1, \dots, d-p\}$ tal que $\varphi_{e_s} = \varphi_{i_k}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow * (\underbrace{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \wedge (\varphi_{e_{p+1}} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \dots \wedge \varphi_{e_{d-p}})}_{= 0})$$

* lineal.

$$= *(0) = 0$$

$\square$

Lema: Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ una base positiva de V^*.

Entonces

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} <\varphi_1, \varphi_1> & \dots & <\varphi_1, \varphi_d> \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ <\varphi_d, \varphi_1> & \dots & <\varphi_d, \varphi_d> \end{pmatrix}$$

Dem: Sea $\{\psi_1, \dots, \psi_d\}$ una base ortonormal positiva.

Entonces

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d = B\psi_1 \wedge \dots \wedge B\psi_d =$$

$$= \det(B)\, \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_d,$$

donde B es la matriz cambio de base de $\{\psi_1, \dots, \psi_d\}$ a $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$. Luego si $B = (b_{ij})_{i,j}$ entonces

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{d} b_{ij} \varphi_i \quad ; \quad j = 1, \dots, d.$$

y $b_{ij} = <\psi_j, \varphi_i> = <\varphi_i, \psi_j>$.

Luego

$$B = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, \psi_d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_d, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_d, \psi_d \rangle \end{pmatrix}.$$

Si denotamos $(b_{ij})^{-1} = (b^{ij})$ entonces

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \langle \sum_{i=1}^{d} b^{ik} \psi_i, \sum_{i=1}^{d} b^{il} \psi_i \rangle$$

$$= b^{1k} b^{1l} + \cdots + b^{dk} b^{dl} =$$

$$= \langle \psi_1, \varphi_k \rangle \langle \psi_1, \varphi_l \rangle + \cdots + \langle \psi_d, \varphi_k \rangle \langle \psi_d, \varphi_l \rangle$$

$$= \langle \varphi_k, \psi_1 \rangle \langle \varphi_l, \psi_1 \rangle + \cdots + \langle \varphi_k, \psi_d \rangle \langle \varphi_l, \psi_d \rangle$$

Luego si

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, \varphi_d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_d, \varphi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_d, \varphi_d \rangle \end{pmatrix} = (\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{i,j}$$

entonces

$$(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{i,j} =$$

traspuesta

$$= \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, \psi_d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_d, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_d, \psi_d \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, \psi_d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_d, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_d, \psi_d \rangle \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_1, \psi_d \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_d, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_d, \psi_d \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle & \cdots & \langle \varphi_d, \psi_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_1, \psi_d \rangle & \cdots & \langle \varphi_d, \psi_d \rangle \end{pmatrix}$$

$$= B \cdot B^T$$

Entonces

$$\det \left(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \right)_{i,j} = \det (B B^T) = \det (B^T) \det (B)$$
$$= \det (B) \det (B) = (\det (B))^2$$

Luego

$$\det (B) = \sqrt{\det \left(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \right)_{i,j}}$$

y por tanto

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d = \sqrt{\det \left(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \right)_{i,j}} \; \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_d .$$

Como $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\} \subset V^*$ es base $\det(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{i,j} \neq 0$ entonces

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_d = \frac{1}{\sqrt{\det(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{i,j}}} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d .$$

Luego

$$*(1) = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_d = \frac{1}{\sqrt{\det(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)_{i,j}}} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_d .$$

$\square$

II. OPERADOR DE LAPLACE - BELTRAMI

Sea (M, g) una variedad Riemanniana orientable de dimensión d. Como M es orientable elegimos una orientación en cada espacio tangente T_pM con $p \in M$ y por tanto una orientación en cada $(T_pM)^*$ con $p \in M$.

$\{v_1, \ldots, v_d\} \subset T_p(M)$ positiva $\iff$ $\{e_1, \ldots, e_d\} \subset T_p(M)$ positiva

Definimos en $(T_pM)^*$ la métrica:

Sean $\omega, \eta \in (T_pM)^*$, entonces

$$\langle \omega, \eta \rangle = \langle \sum_{i=1}^{d} \omega_i \, dx_i|_p , \sum_{i=1}^{d} \eta_i \, dx_i|_p \rangle =$$

$$= g_p^{ij} \, \omega_i \, \eta_j$$

donde (g_p^{ij}) es la matriz inversa de (g_{ij}^p) donde

$$(g_{ij}^p) := \begin{pmatrix} g_p(\partial x_1|_p, \partial x_1|_p) & \cdots & g_p(\partial x_1|_p, \partial x_d|_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_p(\partial x_d|_p, \partial x_1|_p) & \cdots & g_p(\partial x_d|_p, \partial x_d|_p) \end{pmatrix}$$

es la matriz de la forma bilineal asociada a g.

Definimos esta métrica en $(T_pM)^*$ pues de esta forma

$$\|\omega\| = \sup \{ \|\omega(X)\| \mid X \in T_pM \wedge \|X\| = 1 \}$$

Luego la matriz de la forma bilineal asociada a la métrica $\tilde{g}_p$ de $(T_pM)^*$ es $(g_{ij}^p)^{-1}$. Luego al tener una orientación y un producto escalar en $(T_pM)^*$ ya podemos definir $*$:

$$* : \Lambda^p(T_pM) \longrightarrow \Lambda^{d-p}(T_pM)$$

y por ende, tenemos

$$\begin{aligned} * : \Omega^p(M) &\longrightarrow \Omega^{d-p}(M) \\ \omega &\longmapsto *\omega \end{aligned}$$

definido por: $(*\omega)(p) = *(\omega(p))$ pues $\omega(p) \in$
$\in \Lambda^p(T_pM)$.

Por otro lado; como $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ son positivas:

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{\det(g^{ij})}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n =$$

$$= \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

<u>Obs:</u> Esta representación es local para $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta local.

<u>Nota:</u> De aquí en adelante supondremos M

<u>COMPACTA</u>

y por tanto $*(1)$ es la forma de volumen, luego

$$vol(M) := \int_M *(1). \qquad (vol(M) < \infty \text{ pues } M \text{ compacta})$$

Lema: $* : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{d-p}(M)$ es $C^\infty(M)$-lineal.

Dem: Sean $f, g \in C^\infty(M)$ y $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$, entonces

$$(*(f\alpha + g\beta))(p) = *(f(p)\,\alpha(p) + g(p)\,\beta(p)) =$$

$*$ lineal

$$= f(p) * (\alpha(p)) + g(p) * (\beta(p)) =$$

$$= (f * (\alpha))(p) + (g * (\beta))(p) =$$

$$= (f * (\alpha) + g * (\beta))(p)$$

$$\Longrightarrow \quad *(f\alpha + g\beta) = f * (\alpha) + g * (\beta).$$

$\square$

Def: Se define en $\Omega^p(M)$ el producto L^2 como

$$(\alpha, \beta) := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle *(1)$$

$$= \int_M \alpha \wedge * \beta \qquad (< \infty \text{ pues } M \text{ compacta})$$

con $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$.

Lema: $(\Omega^p(M), (\cdot,\cdot))$ es espacio pre-Hilbert.

Dem: Es claro que $\Omega^p(M)$ es $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Falta ver que $(\cdot,\cdot)$ es producto escalar.

1) $(\alpha,\alpha) := \int_M \langle\alpha,\alpha\rangle *(1) \geq 0$ pues $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es producto escalar en $\Lambda^p(T_p(M))$.

2) $(\alpha,\alpha)=0 \iff \int_M \langle\alpha,\alpha\rangle *(1) = 0 \iff \langle\alpha,\alpha\rangle = 0$ $\iff \alpha = 0$

3) $(\alpha,\beta) = \int_M \langle\alpha,\beta\rangle *(1) = \int_M \langle\beta,\alpha\rangle *(1) =$
$= (\beta,\alpha)$

4) $(a\alpha+b\beta,\gamma) = \int_M \langle a\alpha+b\beta,\gamma\rangle *(1) =$

$= \int_M (a\langle\alpha,\gamma\rangle + b\langle\beta,\gamma\rangle) *(1) =$

$= a\int_M \langle\alpha,\gamma\rangle *(1) + b\int_M \langle\beta,\gamma\rangle *(1) =$

$= a(\alpha,\gamma) + b(\beta,\gamma)$

$\square$

Observación: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ NO es producto escalar en $\Omega^p(M)$, pero $(\cdot,\cdot)$ SI.

Observación: Como M compacta, $(\alpha,\beta)<\infty$, $\forall \alpha,\beta\in\Omega^p(M)$.

Sea V espacio vectorial con $(V^*, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ su dual. Si considerabamos el producto escalar inducido en $\Lambda^p(V)$, teníamos $(\Lambda^p(V), \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Consideramos ahora el álgebra graduada

$$\Lambda(V) := \bigoplus_{p=0}^{d} \Lambda^p(V).$$

Entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se puede inducir a $\Lambda(V)$, considerando $\Lambda^p(V) \perp \Lambda^q(V)$ para $p \neq q$.

De la misma forma, se considera el producto L^2 $(\cdot,\cdot)$ en $\Omega(M)$

$$\Omega(M) := \bigoplus_{p=0}^{d} \Omega^p(M).$$

De esta forma $(\Omega(M), (\cdot,\cdot))$ es espacio pre-Hilbert.

<u>Def:</u> Definimos el operador $d^* : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M)$ como el operador adjunto de d en $\bigoplus_{p=0}^{d} \Omega^p(M) = \Omega(M)$, es decir, el operador d^* que cumple

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta)$$

para cada $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ y $\beta \in \Omega^p(M)$.

Lema: $d^*: \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M)$ satisface

$$d^* = (-1)^{d(p+1)+1} * d * .$$

Dem: Sean $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ y $\beta \in \Omega^p(M)$, entonces

$$d(\alpha \wedge *\beta) \overset{\text{antiderivada}}{=} d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d(*\beta)$$

$$= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1} (-1)^{(p-1)(d-p+1)} \alpha \wedge **(d*\beta)$$

pues $**(d*\beta) = (-1)^{(p-1)(d-p+1)} (d*\beta)$

$(*\beta \in \Omega^{d-p}(M) \Rightarrow d*\beta \in \Omega^{d-p+1}(M))$

entonces $(d*\beta) = (-1)^{(p-1)(d-p+1)} **(d*\beta)$.

Por tanto

$$d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta - (-1)^{d(p+1)+1} \alpha \wedge **(d*\beta).$$

Por otro lado, si $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Lambda^p(V)$:

$$\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle = *(\tilde{\alpha} \wedge *\tilde{\beta})$$

$$\Rightarrow *(\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle) = **(\tilde{\alpha} \wedge *\tilde{\beta}) =$$

$$= (\pm 1)(\tilde{\alpha} \wedge *\tilde{\beta}) \Rightarrow \pm *(\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle) = \tilde{\alpha} \wedge *\tilde{\beta}$$

luego

$$d(\alpha \wedge *\beta) = \pm * \left(\langle d\alpha, \beta \rangle - (-1)^{d(p+1)+1} \langle \alpha, *d*\beta \rangle \right).$$

Integrando:

$$\int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \pm \int_M * \left(\langle d\alpha, \beta \rangle - (-1)^{d(p+1)+1} \langle \alpha, *d*\beta \rangle \right)$$

Por el teorema de Stokes:

$$\int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_{\underset{\emptyset}{\overset{\|}{\partial M}}} \alpha \wedge *\beta = 0$$

Luego

$$\int_M * \underbrace{\left(\langle d\alpha, \beta \rangle - (-1)^{d(p+1)+1} \langle \alpha, *d*\beta \rangle \right)}_{\in C^\infty(M)} = 0$$

$*$ C^∞-lineal

$$\Rightarrow \int_M \left(\langle d\alpha, \beta \rangle - (-1)^{d(p+1)+1} \langle \alpha, *d*\beta \rangle \right) *(1) = 0$$

$$\Rightarrow \int_M \left(\langle d\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, (-1)^{d(p+1)+1} *d*\beta \rangle \right) *(1) = 0$$

$$\Rightarrow \int_M \langle d\alpha, \beta \rangle *(1) = \int_M \langle \alpha, (-1)^{d(p+1)+1} *d*\beta \rangle *(1)$$

$$\Rightarrow (d\alpha, \beta) = (\alpha, (-1)^{d(p+1)+1} *d*\beta)$$

Como $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ y $\beta \in \Omega^p(M)$ son arbitrarias se cumple que

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, (-1)^{d(p+1)+1} * d * \beta)$$

$\forall \alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ y $\forall \beta \in \Omega^p(M)$.

Por tanto

$$d^* = (-1)^{d(p+1)+1} * d * .$$

$\square$

Ya estamos en condiciones de definir el operador de Laplace-Beltrami:

<u>Def</u>: Se define el operador de Laplace-Beltrami en $\Omega^p(M)$ por

$$\Delta := dd^* + d^*d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M).$$

<u>Def</u>: Se dice que $\omega \in \Omega^p(M)$ es armónica si

$$\Delta \omega = 0.$$

<u>Lema:</u> El operador de Laplace - Beltrami Δ es autoadjunto, es decir

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \Omega^p(M).$$

<u>Dem:</u> Sean $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$, entonces

$$(\Delta\alpha, \beta) = ((dd^* + d^*d)(\alpha), \beta) =$$

$$= (dd^*\alpha + d^*d\alpha, \beta) =$$

$$= (dd^*\alpha, \beta) + (d^*d\alpha, \beta) =$$

$$= (d^*\alpha, d^*\beta) + (d\alpha, d\beta) =$$

$$= (\alpha, dd^*\beta) + (\alpha, d^*d\beta) =$$

$$= (\alpha, (dd^* + d^*d)\beta) = (\alpha, \Delta\beta).$$

$\square$

Lema: $\Delta\alpha = 0 \iff d\alpha = 0 \wedge d^*\alpha = 0.$

Dem: $\Leftarrow)$ Si $d\alpha = 0 \wedge d^*\alpha = 0 \Rightarrow$

$$\Delta\alpha = dd^*\alpha + d^*d\alpha = d0 + d^*0 = 0.$$

$\uparrow$ d y d^* lineales

$\Rightarrow)$ $\Delta\alpha = 0$; observar que

$$(\Delta\alpha, \alpha) = ((dd^* + d^*d)\alpha, \alpha) =$$

$$= (dd^*\alpha, \alpha) + (d^*d\alpha, \alpha) =$$

$$= (d^*\alpha, d^*\alpha) + (d\alpha, d\alpha).$$

Entonces si $\Delta\alpha = 0 \Rightarrow (\Delta\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(d^*\alpha, d^*\alpha)}_{\geq 0} + \underbrace{(d\alpha, d\alpha)}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (d^*(\alpha), d^*\alpha) = 0 \Rightarrow d^*\alpha = 0$

$(d\alpha, d\alpha) = 0$ $\quad$ $(\cdot,\cdot)$ p. escalar en $\Omega^p(M)$ $\quad$ $d\alpha = 0.$

$\square$

Lema: $*\Delta = \Delta *$.

Dem: sea $\alpha \in \Omega^p(M)$, entonces $\Delta\alpha \in \Omega^p(M)$ y $*(\Delta\alpha) \in \Omega^{d-p}(M)$. Luego

$$*\Delta : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{d-p}(M)$$

Análogamente si $\alpha \in \Omega^p(M)$, entonces $*\alpha \in \Omega^{d-p}(M)$ y $\Delta * \alpha \in \Omega^{d-p}(M)$, luego

$$\Delta * : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{d-p}(M).$$

Por otro lado, sea $\alpha \in \Omega^p(M)$

$$*\Delta\alpha = *((dd^* + d^*d)\alpha) =$$

$$= *dd^*\alpha + *d^*d\alpha =$$

$$= *d(-1)^{d(p+1)+1} * d * \alpha +$$

$$+ *(-1)^{d(p+1)+1} * d * d\alpha =$$

$$= (-1)^{d(p+1)+1}\Big(*d*d*\alpha +$$

$$+ **d*d\alpha\Big) =$$

$$= (-1)^{d(p+1)+1}(-1)^{p(d-p)}(*d*d*\alpha +$$

$$+ d*d\alpha)$$

$$\Delta * \alpha = (dd^* + d^*d)(*\alpha) =$$

$$= (-1)^{d(p+1)+1} \left(d*d**\alpha + *d*d*\alpha \right)$$

$$= (-1)^{d(p+1)+1} (-1)^{p(d-p)} \left(d*d\alpha + *d*d*\alpha \right)$$

$\square$.

Ejemplos:

1) Empecemos con $(\mathbb{R}^d, g)$ siendo g la métrica estander y con orientación positiva ($\{e_1, \dots, e_d\}+$).

Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad \text{Calculemos} \quad \Delta f \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Sea $\varphi = \varphi_i dx_i \in \Omega^1(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto, entonces

$$*(\varphi) = *\left(\sum_{i=1}^d \varphi_i dx_i\right) \overset{\uparrow}{\underset{C^\infty\text{-lineal}}{=}} \sum_{i=1}^d \varphi_i *(dx_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^d \varphi_i (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_d$$

no aparece.

pues

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_d =$$

$$= (-1)^{i-1} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_d$$

Luego $\det(A_i) = (-1)^{i-1}$ donde A_i es la matriz de cambio de base de $\{dx_i, \dots, dx_d\}$ a $\{dx_1, \dots, dx_d\}$.

Por tanto como $df, \varphi \in \Omega^1(\mathbb{R}^d)$

$$(df, \varphi) = \int_{M=\mathbb{R}^d} \langle df, \varphi \rangle * (1) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i,j=1}^{d} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \varphi_j \right) \sqrt{\det(g^{ij})}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

Como $(g_{ij}) = (\delta_{ij}) \Rightarrow (g^{ij}) = (\delta_{ij}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(g^{ij}) = 1.$

Luego

$$(df, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i,j=1}^{d} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi_j \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

es decir

$$(df, \varphi) = \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

$$(df,\varphi) = \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

Observar que

$$d(f \varphi_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_d)$$

$$= d\Big(\sum_{i=1}^{d} f \varphi_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_d \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} d(f\varphi_i) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_d$$

antiderivada

$$= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi_i \, dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_d$$

$$+ (-1)^0 \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} f \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_d$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} f \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d .$$

Entonces por el teorema de Stokes:

$$\int_M d\left(f\varphi_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_d\right) =$$

$$= \int_M \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d + \sum_{i=1}^{d} f\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\, dx_1\wedge\cdots$$

$$\cdots\wedge dx_d =$$

$$= \int_M \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d +$$

$$+ \int_M \sum_{i=1}^{d} f\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d .$$

y $\int_M d\left(f\varphi_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_d\right) =$

$$= \int_{\partial M} f\varphi_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_d =$$

$=0$

$\uparrow$

φ_i sop. disjunto.

Luego

$$\sum_{i=1}^{d}\int_M \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d = -\int_M \sum_{i=1}^{d} f\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_d$$

$$(df, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d =$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} f \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d .$$

y por tanto

$$(df, \varphi) = - \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} f \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \langle \underset{\Omega^0(M)}{\underset{\Uparrow}{f}} , \underset{\Omega^0(M)}{\underset{\Uparrow}{\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}}} \rangle \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \langle f, - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \rangle * (1)$$

$$= \left(f, - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right) \quad \left(= (f, d^* \varphi) \right)$$

Luego si $\varphi \in \Omega^1(M)$,

$$d^* \varphi = - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$$

Por tanto si $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^d) = C^\infty(\mathbb{R}^d)$

$d^*: \Omega^p \to \Omega^{p-1}$ 0

$$\Delta f = \cancel{dd^* f} + d^* d f =$$

$$= d^* \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) =$$

$$\boxed{= - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}}$$

2) Sea (M, g) una variedad Riemanniana, orientable. Sea $f: M \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$. Calculemos $\Delta f \in C^\infty(M)$ en coordenadas locales.

Sea $\varphi: M \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^\infty(M)$ arbitraria, entonces

$$\int_M \Delta f \cdot \varphi \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n =$$

$$= \int_M \Delta f \cdot \varphi \ * (1) = \int_M \langle \Delta f, \varphi \rangle * (1)$$

$$= (\Delta f, \varphi) = (\cancel{dd^* f} + d^* d f, \varphi) =$$

$$= (d^* d f, \varphi) = (df, d\varphi),$$

Por otro lado

$$(df, d\varphi) = \int_M \langle df, d\varphi \rangle * (1)$$

$$= \int_M \left\langle \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i , \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j \right\rangle * (1)$$

$$= \int_M \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

Stokes (φ sop. comp.)

$$= - \int_M \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi \sqrt{g}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

$g := \sqrt{\det(g_{ij})}$

y por tanto

$$\int_M \Delta f \, \varphi \sqrt{g}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n =$$

$$= \int_M - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi \sqrt{g}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

$\forall \varphi \in C_0(M; \mathbb{R}) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \Delta f = - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

III. TEOREMA DE HODGE

Recordar que dada una variedad diferenciable M, podemos considerar un invariante homotópico (y por tanto topológico) de la misma, a saber, los p-grupos de Cohomología de De Rham, que se denotan por

$$H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$$

y que se definen por

$$H^p_{dR}(M;\mathbb{R}) := \frac{\operatorname{Ker}\{d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)\}}{\operatorname{Im}\{d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)\}}$$

El celebre teorema de Hodge, afirma que si M es además Riemanniana y compacta, de cada clase de equivalencia de $H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$ se puede extraer exactamente un representante armónico de la misma.

Teorema (Hodge): Sea M una variedad riemanniana compacta y orientable. Entonces cada clase de cohomología de $H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$ con $0 \leq p \leq d = \dim M$ existe una única forma armónica.

Dem (Unicidad): Sean $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(M)$ con ω_1 y ω_2 cohomologas ($\Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = d\eta$ con $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$) y armónicas ($\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0$).

Si $p=0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = d\eta = 0$ $(\eta \in \Omega^{0-1}(M) = \{0\})$

$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2$.

Si $p \neq 0$, entonces consideramos

$$(\omega_1 - \omega_2, \omega_1 - \omega_2) = (\omega_1 - \omega_2, d\eta) =$$

$$= (d^*(\omega_1 - \omega_2), \eta) = (d^*\omega_1 - d^*\omega_2, \eta)$$

Como $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0$, por un lema anterior,

$d^*\omega_1 = d^*\omega_2 = 0$, luego

$$(\omega_1 - \omega_2, \omega_1 - \omega_2) = 0$$

por tanto $\omega_1 - \omega_2 = 0 \implies \omega_1 = \omega_2$ $\square$

Para atacar la existencia, necesitamos un poco de maquinaria previa.

Para empezar, definimos en $\Omega^p(M)$ un nuevo producto escalar: si $\omega, \eta \in \Omega^p(M)$ se define

$$((\omega, \eta)) := (d\omega, d\eta) + (d^*\omega, d^*\eta) + (\omega, \eta).$$

Entonces $(\Omega^p(M), ((\cdot,\cdot)))$ es un espacio pre-Hilbert, es fácil comprobar los axiomas de producto escalar, pues $(\cdot,\cdot)$ lo es.

Se define la norma $H_p^{1,2}(M)$ como la norma que induce $((\cdot,\cdot))$ en $\Omega^p(M)$:

$$\|\omega\|_{H_p^{1,2}(M)} := ((\omega, \omega))^{1/2}$$

Luego $(\Omega^p(M), \|\cdot\|_{H_p^{1,2}(M)})$ es un espacio pre-Hilbert.

Gracias al teorema de compleción para espacios pre-Hilbert, podemos considerar la compleción de

$$(\Omega^p(M), \|\cdot\|_{H_p^{1,2}(M)}).$$

Denotaremos a dicha compleción como

$$\left(H_p^{1,2}(M), \ \|\cdot\|_{H_p^{1,2}(M)} \right).$$

Es claro que, por construcción, dicho espacio es de Hilbert.

<u>Nota:</u> Antes de seguir, recordemos los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m)$ con $\mathcal{U} \underset{abto}{\subseteq} \mathbb{R}^n$.

$$W^{k,p}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m) := \{ f \in L^p(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m) \mid D^\alpha f \in L^p(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m) \text{ con } |\alpha| \leq k \}$$

donde $D^\alpha f$ se refiere a la derivada débil de f para el multiíndice α.

Se tiene que $W^{k,p}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m)$ son espacios de Banach para la norma:

$$\|f\|_{W^{k,p}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_{\mathcal{U}} \|D^\alpha f\|^p \, dm \right) \right)^{1/p}$$

Además $W^{1,p}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$.

Un resultado fundamental de los espacios de Sobolev y muy útil por sus aplicaciones es el teorema de Rellich-Kondrachov:

<u>Teorema</u>: Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado con $\partial \mathcal{U}$ de clase C^1. Suponer $1 \leq p < n$, entonces

$$W^{1,p}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m) \underset{\text{compact.}}{\hookrightarrow} L^q(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m)$$

para cada $1 \leq q < p^*$, con $p^* = \dfrac{np}{n-p}$.

<u>Observación</u>: Esto quiere decir que la inclusión

$$i : W^{1,p}(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m) \longrightarrow L^q(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m)$$

es un operador compacto.

La idea ahora, es trasladar estas ideas a variedades riemannianas compactas.

Consideramos el fibrado

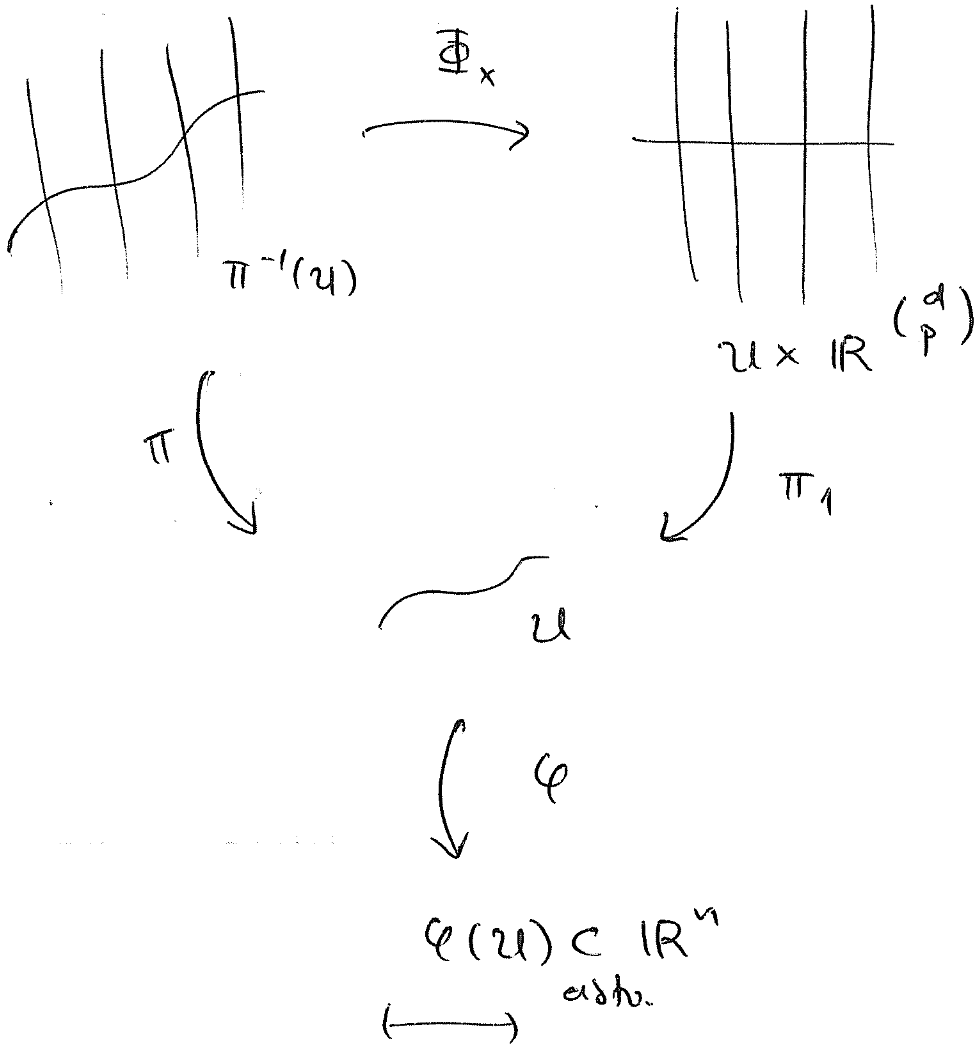
$$\Lambda^p(M) := \coprod_{x \in M} \Lambda^p(T_x M).$$

Sea $x \in M$, entonces existe $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta coordenada con $x \in \mathcal{U}$. A su vez existe Φ_x trivialización del fibrado con

dim de las fibras.

$$\Phi_x : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{\binom{d}{p}} \quad \text{difeomorfismo,}$$

y $\pi : \Lambda^p(M) \longrightarrow M$ la proyección.



Entonces

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\Phi_x"] \arrow[rr, bend right] & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{\binom{d}{p} = r} \arrow[r, "\varphi \times 1_{\mathbb{R}^r}"] & \varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^r
\end{tikzcd}$$

$$\Psi := (\varphi \times 1_{\mathbb{R}^r}) \circ \Phi_x$$

con

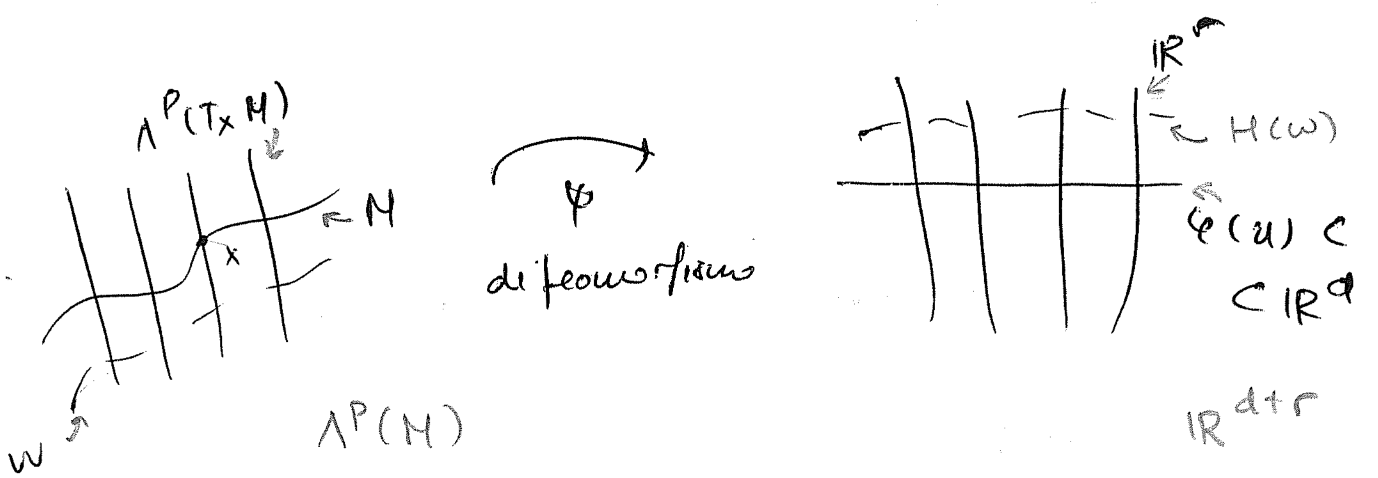
$$\Psi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \underset{\text{abto}}{\subset} \Lambda^p(M) \longrightarrow \varphi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^r \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^{d+r}$$

difeomorfismo

Sea $\omega \in \Omega^p(\mathcal{U})$, entonces definimos

$$H(\omega) := \Psi \circ \omega \circ \varphi^{-1}$$

Luego $\quad H(\omega) : \varphi(\mathcal{U}) \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d+r}$



Observación: Al tratarse H de composición de funciones diferenciables, se sigue que $H(\omega) \in C^\infty(\varphi(\mathcal{U}); \mathbb{R}^{d+r})$

<u>Lema:</u> Sea $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ $(\subset M)$ un abierto con $\overline{\mathcal{U}'} \subset \mathcal{U}$.

Entonces existen M y $N > 0$ tales que

$$N \|\omega\|_{H_p^{1,2}(\mathcal{U}')} \leq \|H(\omega)\|_{W^{1,2}(\varphi(\mathcal{U}');\mathbb{R}^{d+r})} \leq$$

$$\leq M \|\omega\|_{H_p^{1,2}(\mathcal{U}')} \quad , \quad \forall \omega \in \Omega^p(M).$$

Luego las normas $\|\cdot\|_{H_p^{1,2}(\mathcal{U}')}$ y $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\varphi(\mathcal{U}');\mathbb{R}^{d+r})}$ son "equivalentes".

Esto implica, en particular, que $\omega \in H_p^{1,2}(\mathcal{U}') \iff$

$\iff H(\omega) \in W_1^{1,2}(\varphi(\mathcal{U}');\mathbb{R}^{d+r})$.

Como (M,g) es compacta, recurrimos a una partición diferenciable de la unidad (finita) y eligiendo $N = \min\{N_1, \dots, N_s\}$ y $M = \max\{M_1, \dots, M_s\}$ con s número de abiertos de la partición, se llega a que

$$N \|\omega\|_{H_p^{1,2}(M)} \leq \|H(\omega)\|_{W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^{d+r})} \leq$$

$$\leq M \|\omega\|_{H_p^{1,2}(M)}.$$

Luego $\omega \in H_p^{1,2}(M) \iff H(\omega) \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^{d+r})$

con $\Omega \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^d$.

Por tanto si definimos

$$T: H_p^{1,2}(M) \longrightarrow W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^{d+r})$$
$$\omega \longmapsto H(\omega)$$

entonces T es un homeomorfismo.

<u>Observación</u>: Notar que en nuestra definición H depende de $\mathcal{U}$, para generalizarla tenemos que tener cuidado con la partición de la unidad.

<u>Observación</u>: Como $(\Omega^p(M), ((\cdot,\cdot)))$ es denso en $H_p^{1,2}(M)$, no hay problema para generalizar la equivalencia de normas de $\Omega^p(M)$ a $H_p^{1,2}(M)$.

Una consecuencia de estas definiciones es aplicar Rellich - Kondrachov a $H_p^{1,2}(M)$:

<u>Teorema</u> (Rellich - Kondrachov): Sea $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_p^{1,2}(M)$ acotado, es decir,

$$\|\omega_n\|_{H^{1,2}(M)} \leq K \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe una subsucesión de $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge respecto de la norma $\|\omega\|_{L^2} = (\omega,\omega)^{1/2}$ a algún $\omega \in H_p^{1,2}(M)$.

En resumen, tenemos:

1)

$$\Lambda^p(T_x(M))$$

$$\langle \cdot , \cdot \rangle$$

$$\Big\downarrow$$

$$\Omega^p(M)$$

$$(\cdot,\cdot) := \int_M \langle \cdot , \cdot \rangle \, *(1)$$

$(\Omega^p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ pre-Hilbert

$$\Big\downarrow$$

$$\Omega^p(M)$$

$$((\cdot,\cdot)) := (d\cdot, d\cdot) + (d^*\cdot, d^*\cdot) + (\cdot,\cdot)$$

$(\Omega^p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}_p})$ pre-Hilbert

$$\Big\downarrow \text{ Teorema Compleción}$$

$$H^{1,2}_p(M)$$

$(H^{1,2}_p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}_p})$ Hilbert

$$\updownarrow \text{ HOMEOMORFO}$$

$$(W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^{d+r}), \|\cdot\|_{W^{1,2}})$$

Ahora consideramos la compleción del espacio pre-Hilbert $(\Omega^p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ para formar el espacio de Hilbert:

$$(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2}).$$

Luego

$$(\Omega^p(M), \|\cdot\|_{L^2}) \underset{\text{denso}}{\hookrightarrow} (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2}).$$

Además como

$$\|\omega\|_{L^2_p} = (\omega,\omega)^{1/2}$$

$$\|\omega\|_{H^{1,2}_p} = ((\omega,\omega))^{1/2} =$$

$$= \left((d\omega, d\omega) + (d^*\omega, d^*\omega) + (\omega,\omega)\right)^{1/2}$$

Entonces $\|\omega\|_{L^2} \leq \|\omega\|_{H^{1,2}_p}$ $\forall \omega \in \Omega^p(M)$, luego por densidad, se extiende y se obtiene

$$(H^{1,2}_p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \hookrightarrow (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2}).$$

Entonces;

2)

$\Lambda^p(T_x M)$

$\langle \cdot , \cdot \rangle$

$\downarrow$

$L^2_p(M)$ $\xleftarrow{\text{Teorema Compleción}}$ $\Omega^p(M)$

$(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2_p})$ $\qquad$ $(\cdot,\cdot) := \int_M \langle \cdot , \cdot \rangle *(1)$

Hilbert $\xleftarrow{\text{denso}}$ $(\Omega^p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ pre-Hilbert

$\updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

$H^{1,2}_p(M)$ $\xleftarrow{\text{Teorema compleción}}$ $\Omega^p(M)$

$(H^{1,2}_p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}_p})$ $\qquad$ $((\cdot,\cdot)) := (d\cdot, d\cdot) + (d^*\cdot, d^*\cdot) + (\cdot,\cdot)$

Hilbert. $\xleftarrow{\text{denso}}$ $(\Omega^p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}_p})$ pre-Hilbert

$\updownarrow$ Homeomorfo

$(W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^{d+r}), \|\cdot\|_{W^{1,2}})$ Hilbert.

Observación: la notación se justifica rápidamente viendo la semejanza:

$\Omega^p(M) \rightsquigarrow C^\infty(K)$ $\qquad$ $L^2_p(M) \rightsquigarrow L^2(K)$

K compacto en $\mathbb{R}^d$ $\qquad$ $H^{1,2}_p(M) \rightsquigarrow W^{1,2}(K)$

Observar:

$C^\infty(K) \hookrightarrow$

$\xhookrightarrow[\text{denso}]{} L^2_p(H)$

<u>Observación</u>: El teorema de Rellich - Kondrachov nos indica que el operador inclusión

$$i : (H^{1,2}_p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \longrightarrow (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

es compacto.

Ahora, nos gustaría extender el operador

$$d : (\Omega^p(M), \|\cdot\|_{L^2}) \longrightarrow (\Omega^{p+1}(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

a $(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ pero como d no es acotado, no es continuo y por tanto no lo podemos extender por densidad. Ahora, podemos considerar

$$d : (\Omega^p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \longrightarrow (\Omega^{p+1}(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

y en este caso, si $\omega \in \Omega^p(M)$

$$\|d\omega\|^2_{L^2} = \underset{\geq 0}{(d\omega, d\omega)} \leq$$

$$\leq \underset{\geq 0}{(d\omega, d\omega)} + \underset{\geq 0}{(d^*\omega, d^*\omega)} + \underset{\geq 0}{(\omega, \omega)} = \|\omega\|_{H^{1,2}}$$

Luego

$$\|d\omega\|_{L^2} \leq \|\omega\|_{H^{1,2}}, \quad \forall \omega \in \Omega^p(M).$$

por tanto $\quad d : (\Omega^p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \longrightarrow (\Omega^{p+1}(M), \|\cdot\|_{L^2})$

es acotado con $\|d\| \leq 1$ y podemos extenderlo a

$$d : (H^{1,2}_p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \longrightarrow (L^2_{p+1}(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

pues $\quad (\Omega^p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \underset{\text{denso}}{\hookrightarrow} (H^{1,2}_p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}})$.

y $\quad (\Omega^{p+1}(M), \|\cdot\|_{L^2}) \underset{\text{denso}}{\hookrightarrow} (L^2_{p+1}(M), \|\cdot\|_{L^2})$

Análogamente, tenemos

$$d^* : (H^{1,2}_p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \longrightarrow (L^2_{p-1}(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

y como $\quad (d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta) \quad \forall \alpha, \beta$ con $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ y $\beta \in \Omega^p(M)$, entonces por densidad y la continuidad de $(\cdot,\cdot) \Rightarrow$

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta) \quad \forall \alpha \in H^{1,2}_{p-1} \text{ y } \beta \in H^{1,2}_p.$$

Estas son las definiciones que necesitaremos, ahora, veamos un par de lemas que también necesitaremos.

<u>Lema</u>: Existe una constante C, dependiendo solo de la métrica riemanniana de M, con la propiedad de que para toda forma cerrada $\beta \in H_p^{1,2}(M)$ ortogonal al $\ker\{d^*: H_p^{1,2}(M) \to L_{p-1}^2(M)\}$, (en $H_p^{1,2}(M)$) se cumple

$$(\beta,\beta) \leq C\,(d^*\beta, d^*\beta).$$

<u>Dem</u>: Supongamos por reducción al absurdo que no existe dicha C, entonces existe una sucesión $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de formas cerradas y ortogonales a $\ker(d^*)$ tales que

$$(\beta_n,\beta_n) \geq n\,(d^*\beta_n, d^*\beta_n).$$

Sea

$$\lambda_n := (\beta_n,\beta_n)^{-1/2}$$

<u>Observación</u>: (β_n,β_n) tiene sentido pues $\{\beta_n\} \subset H^{1,2} \subset L_p^2$.

Entonces como

$$(\beta_n,\beta_n) \geq n\,(d^*\beta_n, d^*\beta_n)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_n^2(\beta_n,\beta_n) \geq \lambda_n^2\, n\,(d^*\beta_n, d^*\beta_n)$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda_n\beta_n, \lambda_n\beta_n) \geq n\,(d^*(\lambda_n\beta_n), d^*(\lambda_n\beta_n))$$

Se sigue que como $(\lambda_n\beta_n, \lambda_n\beta_n) = \lambda_n^2(\beta_n,\beta_n)$ $= \dfrac{1}{(\beta_n,\beta_n)}(\beta_n,\beta_n) = 1$, entonces

$$1 \geq n\,(d^*(\lambda_n\beta_n), d^*(\lambda_n\beta_n))$$

$$\Rightarrow \quad (d^*(\lambda_n\beta_n), d^*(\lambda_n\beta_n)) \leq \frac{1}{n}.$$

Luego; considerando: $\left(\beta_n \in (H_p^{1,2}(M)\,;\,\|\cdot\|_{H^{1,2}})\right)$

$$\|\lambda_n\beta_n\|^2_{H^{1,2}} =$$

$$= (d(\lambda_n\beta_n), d(\lambda_n\beta_n)) + (d^*(\lambda_n\beta_n), d^*(\lambda_n\beta_n)) + (\lambda_n\beta_n, \lambda_n\beta_n).$$

$$\|\lambda_n \beta_n\|^2_{H^{1,2}} = (d(\lambda_n\beta_n), d(\lambda_n\beta_n)) +$$

$$+ (d^*(\lambda_n\beta_n), d^*(\lambda_n\beta_n)) + (\lambda_n\beta_n, \lambda_n\beta_n)$$

$$\leq \lambda_n^2 (\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{d\beta_n}, \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{d\beta_n}) + \frac{1}{n} + \lambda_n^2 \underbrace{(\beta_n, \beta_n)}_{\overset{\shortparallel}{1}} =$$

β_n cerradas

$$= 1 + \frac{1}{n}.$$

Luego

$$\|\lambda_n \beta_n\|^2_{H^{1,2}} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \|\lambda_n\beta_n\|_{H^{1,2}} \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

Por tanto

$$\|\lambda_n\beta_n\|_{H^{1,2}} \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por Rellich - Kondrachov, como $\{\lambda_n\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset$ $\subset (H^{1,2}_p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}})$ está acotada, existe una subsucesión, que la seguiremos denotando como $\{\lambda_n\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\lambda_n \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi \quad \text{en} \quad (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

con $\psi \in (H^{1,2}(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \hookrightarrow (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$.

Ahora, como $(d^*(\lambda_n \beta_n), d^*(\lambda_n \beta_n)) \leq 1/n$,

entonces

$$\| d^*(\lambda_n \beta_n) \|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

y por tanto $d^*(\lambda_n \beta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ en $(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$.

Sea $\varphi \in (H^{1,2}_p(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \hookrightarrow (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ arbitraria pero fija,

entonces

$$0 = (0, \varphi) = (\lim_{\substack{n\to\infty \\ L^2}} d^*(\lambda_n \beta_n), \varphi) =$$

$$\underset{\substack{(\cdot,\cdot) \\ \text{continua}}}{=} (\lim_{\substack{n\to\infty \\ L^2}} d^*(\lambda_n \beta_n), \lim_{\substack{n\to\infty \\ L^2}} \varphi) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (d^*(\lambda_n \beta_n), \varphi) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\lambda_n \beta_n, d\varphi)$$

$$= \left(\lim_{\substack{n\to\infty \\ L^2}} \lambda_n \beta_n, \lim_{\substack{n\to\infty \\ L^2}} d\varphi \right) =$$

$$= (\psi, d\varphi) = (d^*\psi, \varphi).$$

Por tanto

$$(d^*\psi, \varphi) = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in H_p^{1,2}(M)$$

<u>Observación</u>: Necesariamente $\varphi \in H_p^{1,2}(M)$ y no en $L_p^2(M)$ pues sino $d\varphi$ no está definida, en general.

---

y por tanto, como $\Omega^p(M) \hookrightarrow H_p^{1,2}(M)$

$$(d^*\psi, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \Omega^p(M)$$

Finalmente, como $\Omega^p(M) \underset{\text{denso}}{\hookrightarrow} L_p^2$, se sigue que

$$(d^*\psi, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in L_p^2(M)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d^*\psi = 0}$$

$(\cdot|\cdot)$ p. escalar en L_p^2.

Ahora, como $d^*\Psi = 0$ y $\beta_n \perp \ker(d^*)$, se tiene que como $\Psi \in \ker(d^*)$,

$$(\Psi, \lambda_n \beta_n) = \lambda_n (\Psi, \beta_n) = 0.$$

<u>Observación</u>: Hay que tener cuidado, no es todo, tan directo:

1) $\ker(d^*) \subset (H_p^{1,2}(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}})$

2) $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_p^{1,2}(M)$

y $\beta_n \perp \ker(d^*)$
$\downarrow$
en $H_p^{1,2}(M)$

3) $\Psi \in H_p^{1,2}(M)$ y $\Psi \in \ker(d^*) \hookrightarrow H_p^{1,2}(M)$.

Luego como $\beta_n \perp \Psi$ en $H_p^{1,2}(M) \Rightarrow$

$$\Rightarrow ((\beta_n, \Psi)) = 0$$

pero

$$((\beta_n, \Psi)) = (\beta_n, \Psi) + \cancel{(d\beta_n, d\Psi)}^{0} + \cancel{(d^*\beta_n, d^*\Psi)}^{0} = 0$$

$\Rightarrow (\beta_n, \Psi) = 0.$

Por otro lado, como $(\lambda_n \beta_n, \lambda_n \beta_n) = 1$ y $\lambda_n \beta_n \xrightarrow[L^2]{} \psi$, entonces

$$1 = \lim_{n\to\infty} (\lambda_n \beta_n, \lambda_n \beta_n) = (\psi, \psi)$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n \beta_n, \psi) = \lim_{n\to\infty} (\psi, \lambda_n \beta_n) =$$

$$= (\underset{\substack{n\to\infty \\ L^2}}{\lim} \psi, \underset{\substack{n\to\infty \\ L^2}}{\lim} \lambda_n \beta_n) =$$

$$= (\psi, \psi) = 1$$

pero $(\lambda_n \beta_n, \psi) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego hemos llegado a contradicción.

$\square$

Ya estamos en condiciones de dar la prueba de la existencia de un representante armónico en cada clase de equivalencia de $H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$.

<u>Dem</u>: (Existencia): La prueba se basa en el método directo del cálculo de variaciones. Sea $\mathcal{D} = [\omega_0] \in H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$ entonces consideramos el funcional

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto J_{\mathcal{D}}(\omega) := (\omega, \omega) \end{aligned}$$

Luego

$$J_{\mathcal{D}}(\omega) := (\omega,\omega) = \int_M \langle \omega, \omega \rangle * (1).$$

Probaremos que, en efecto, $J_{\mathcal{D}}$ tiene un mínimo, y que dicho mínimo es el representante armónico de la clase $\mathcal{D}$.

Sea

$$K := \inf_{\omega \in \mathcal{D}} J_{\mathcal{D}}(\omega)$$

<u>Observación</u>: $\mathcal{D} = [\omega_0] \subset \Omega^p(M)$.

Consideramos un representante $\omega_0 \in \mathcal{D}$, luego si $\omega \in \mathcal{D} \Rightarrow \omega = \omega_0 + d\alpha$ para alguna $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$.

Sea $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D} \subset \Omega^p(M)$ una sucesión minimizadora, es decir,

$$J_{\mathcal{D}}(\omega_n) \longrightarrow k.$$

Entonces $\omega_n = \omega_0 + d\alpha_n$, con $\alpha_n \in \Omega^{p-1}(M)$.

De aquí en adelante utilizaremos el espacio $(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2}) \hookleftarrow (\Omega^p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ para poder utilizar las técnicas para espacios de Hilbert.

Como $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega^p(M) \hookrightarrow L^2_p(M)$,

$$(\omega_n, \omega_n) = J_{\mathcal{D}}(\omega_n) \leq k+1$$

para todo $n \geq N$ con $N \in \mathbb{N}$ determinado.

Entonces

$$\|\omega_n\|_{L^2}^2 = (\omega_n, \omega_n) \leq K+1, \ \forall n \geq N$$

$$\Longrightarrow \|\omega_n\|_{L^2} \leq \sqrt{K+1}, \quad \forall n \geq N.$$

Por tanto

$$\|\omega_n\|_{L^2} \leq \max\{\|\omega_1\|_{L^2}, \dots, \|\omega_{N-1}\|_{L^2}, \sqrt{K+1}\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ es acotado.

Ahora, $(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ es espacio de Hilbert, luego por el teorema de representación de Riesz

$$(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})^* = \{T_\omega(\eta) := (\omega, \eta) \mid \omega \in L^2_p(M)\}$$

y por tanto $(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})^* \underset{\text{ISOMÉTRICAMENTE ISOMORFO}}{\simeq}$

$$\simeq (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

$$\Longrightarrow (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})^{**} \simeq (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

¡ISOMORFISMO CANÓNICO!

Sabemos que todo espacio de Hilbert es reflexivo, luego $(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ lo es.

Como $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ acotado y $(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$ reflexivo, existe una subsucesión $\{\omega_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a $\omega \in L^2_p(M)$:

$$\omega_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \omega \quad \text{en} \quad (L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

Sea ahora $\varphi \in H^{1,2}_p(M)$ con $d^*\varphi = 0$, entonces

$$(\omega_{n_k} - \omega_0, \varphi) = (\omega_0 + d\alpha_{n_k} - \omega_0, \varphi) =$$

$$= (d\alpha_{n_k}, \varphi) = (\alpha_{n_k}, d^*\varphi) = (\alpha_{n_k}, 0) = 0$$

Luego

$$(\omega_{n_k} - \omega_0, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M) \text{ con } d^*\varphi = 0.$$

Ahora como $\omega_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \omega$ en $(L^2_p(M), \|\cdot\|_{L^2})$,

(recordemos que

$$(L^2_p(M))^* \underset{T.R.R.}{=} \{T_\omega(\eta) := (\omega, \eta) \mid \omega \in L^2_p(M)\}$$)

entonces

$$(\omega_{n_k}, \eta) \longrightarrow (\omega, \eta) \quad \forall \eta \in L^2_p(M).$$

Luego como

$$(\omega_{n_k} - \omega_0, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M)$$
$$\text{con } d^*\varphi = 0$$

se tiene ahora que

$$(\omega_{n_k}, \varphi) - (\omega_0, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M)$$
$$\text{con } d^*\varphi = 0.$$

Entonces si $n_k \to \infty$, como $(\cdot, \cdot)$ es continua en $L^2_p(M)$:

$$(\omega, \varphi) - (\omega_0, \varphi) = 0$$

y en conclusión:

$$(\omega - \omega_0, \varphi) = 0, \qquad \forall \varphi \in H_p^{1,2}(M) \text{ con } d^*\varphi = 0.$$

¡No se nos olvide que estamos en $L_p^2(M)$ y que vemos a $H_p^{1,2}(M)$ como subespacio de $L_p^2(M)$!

Sea ahora $\eta := \omega - \omega_0 \in L_p^2(M)$, entonces definimos el funcional

$$\begin{aligned} \xi : d^*(H_p^{1,2}(M)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ d^*\varphi &\longmapsto (\eta, \varphi) := \\ &= (\omega - \omega_0, \varphi). \end{aligned}$$

1) ξ bien definido: Si $d^*\varphi_1 = d^*\varphi_2$, entonces como

$$\xi(d^*\varphi_1) := (\eta, \varphi_1) \quad y \quad \xi(d^*\varphi_2) = (\eta, \varphi_2)$$

y

$$(\eta, \varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad \text{pues} \quad d^*(\varphi_1 - d\varphi_2) = = d^*(\varphi_1) - d^*(\varphi_2) = 0,$$

entonces $(\eta, \varphi_1) = (\eta, \varphi_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \xi(d^*\varphi_1) = \xi(d^*\varphi_2).$$

2) ξ lineal: Sean $d^*\varphi_1, d^*\varphi_2 \in d^*(H_p^{1,2}(M))$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\xi(\lambda d^*\varphi_1 + \mu d^*\varphi_2) \overset{d^* \text{ lineal}}{=}$$

$$= \xi(d^*(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2)) =$$

$$= (\eta, \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda(\eta, \varphi_1) + \mu(\eta, \varphi_2)$$

$$= \lambda\xi(d^*(\varphi_1)) + \mu\xi(d^*(\varphi_2)).$$

3) ξ acotado: Para ver que ξ es acotado y por tanto continuo, vamos a necesitar otra técnica y usar el lema. Consideramos

$$d^* : (H_p^{1,2}(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \longrightarrow (L^2_{p-1}(M), \|\cdot\|_{L^2})$$

d^* es acotado, luego $\ker(d^*) \underset{\text{cerrado}}{\hookrightarrow} H_p^{1,2}(M)$.

Como $\ker(d^*) \underset{\text{cerrado}}{\hookrightarrow} (H_p^{1,2}(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}})$

podemos considerar la proyección orthogonal

$$\pi : (H_p^{1,2}(M), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \longrightarrow (\ker(d^*), \|\cdot\|_{H^{1,2}})$$

por el teorema de la proyección para espacios de Hilbert. Consideramos $\varphi \in H_p^{1,2}(M)$ fija pero arbitraria y definimos $\psi := \varphi - \pi(\varphi)$. Entonces $\psi \in H_p^{1,2}(M)$ y

$$d^*\psi = d^*(\varphi - \pi(\varphi)) = d^*\varphi - \underbrace{d^*(\pi(\varphi))}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$= d^*\varphi$$

pues $\pi(\varphi) \in$
$\in \ker(d^*)$)

luego

$$\xi(d^*\varphi) = \xi(d^*\psi) = (\eta, \psi).$$

Por otro lado, por el teorema de la proyección para espacios de Hilbert

$$\psi := \varphi - \pi(\varphi) \underset{H_p^{1,2}(M)}{\perp} \ker(d^*).$$

y además, como $d^* d^* \alpha = 0$ $\forall \alpha \in \Omega^{p+2}(M)$ pues

$$(d^* d^* \alpha, \beta) = (d^* \alpha, d\beta) = (\alpha, dd\beta) =$$

$$= (\alpha, 0) = 0$$

$$\forall \beta \in \Omega^p(M) \underset{\substack{(\cdot,\cdot) \\ \text{prod.} \\ \text{escalar en } \Omega^p(M)}}{\Longrightarrow} d^* d^* \alpha = 0;$$

se tiene que $d^* \alpha \in \ker(d^*)$, $\forall \alpha \in \Omega^{p+1}(M)$,

luego

$$0 = (\psi, d^* \alpha) = (d\psi, \alpha) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (d\psi, \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \Omega^{p+1}(M).$$

Como $(\Omega^{p+1}(M), \|\cdot\|_{L^2}) \underset{\text{denso}}{\hookrightarrow} (L^2_{p+1}(M), \|\cdot\|_{L^2})$

entonces

$$(d\psi, \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in L^2_{p+1}(M)$$

$$\underset{\substack{(\cdot,\cdot) \\ \text{producto} \\ \text{escalar en } L^2_{p+1}(M)}}{\Longrightarrow} d\psi = 0.$$

Finalmente usando el lema, se deduce que $\exists\, C>0$ tal que

$$(\psi,\psi) \leq C\,(d^*\psi, d^*\psi)$$

$$\Rightarrow \quad \|\psi\|_{L^2} \leq C\,\|d^*\psi\|_{L^2} = C\,\|d^*\varphi\|_{L^2}.$$

Por tanto,

$$|\xi(d^*\varphi)| = |(\eta,\psi)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \|\eta\|_{L^2}\,\|\psi\|_{L^2} \leq$$

$$\leq C\,\|\eta\|_{L^2}\,\|d^*\varphi\|_{L^2}$$

y como $\varphi \in H^{1,2}_p(M)$ era arbitraria

$$|\xi(d^*\varphi)| \leq C\,\|\eta\|_{L^2}\,\|d^*\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M)$$

Luego $\xi : \left(d^*(H^{1,2}_p(M)),\, \|\cdot\|_{H^{1,2}_p}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

es un funcional lineal y acotado con $\|\xi\| \leq$
$\leq C\,\|\eta\|_{L^2}$.

<u>Observación</u>: Como $\eta := \omega - \omega_0 \in L^2_p(M) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|\eta\|_{L^2} = M \in \mathbb{R}.$$

Utilizamos ahora uno de los pilares del análisis funcional, el teorema de Hahn-Banach para extender $\xi : (d^*(H_p^{1,2}(M)), \|\cdot\|_{H^{1,2}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ a todo el espacio $(L^2_{p-1}(M), \|\cdot\|_{L^2})$. Observar que $d^*(H_p^{1,2}(M)) \subset L^2_{p-1}(M)$. Esta extensión será continua y conservará la norma. Por tanto tenemos

$$\hat{\xi} : (L^2_{p-1}(M), \|\cdot\|_{L^2}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

lineal y acotado y $\hat{\xi}\big|_{d^*(H_p^{1,2}(M))} = \xi$.

Por el teorema de Representación de Riesz, como $\hat{\xi} \in (L^2_{p-1}(M), \|\cdot\|_{L^2})^*$, entonces existe un $\alpha \in L^2_{p-1}(M)$ tal que

$$\hat{\xi}(\tilde{\varphi}) = (\alpha, \tilde{\varphi}), \quad \forall \tilde{\varphi} \in L^2_{p-1}(M).$$

En particular si $\tilde{\varphi} = d^*\varphi$ con $\varphi \in H_p^{1,2}(M)$, entonces

$$(\alpha, d^*\varphi) = \hat{\xi}(d^*\varphi) = \xi(d^*\varphi) = (\eta, \varphi).$$

Luego, existe $\alpha \in L^2_{p-1}(M)$ tal que

$$(\alpha, d^*\varphi) = (\eta, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M).$$

<u>Observación</u>: Si $\alpha \in H^{1,2}_p(M)$

$$(\alpha, d^*\varphi) = (\eta, \varphi) \Rightarrow (d\alpha, \varphi) = (\eta, \varphi)$$

$$\Rightarrow (d\alpha - \eta, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow (d\alpha - \eta, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in \Omega^p(M) \quad \text{y como}$$

$$\underset{\text{denso}}{\Omega^p(M) \hookrightarrow L^2_p(M)}$$

$$\Rightarrow (d\alpha - \eta, \varphi) = 0, \ \forall \varphi \in L^2_p(M)$$

$$\underset{\substack{(\cdot,\cdot) \\ \text{producto} \\ \text{escalar} \\ \text{en } L^2_p(M)}}{\Rightarrow} d\alpha = \eta \ \text{ en } L^2_p(M).$$

Entonces $d\alpha = \omega - \omega_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } \alpha \in \Omega^p(M) \\ \omega, \omega_0 \in \Omega^p(M)}}{\Longrightarrow} \omega \sim \omega_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega, \omega_0 \in \mathcal{D}$.

Pero esta sería la situación ideal, en general, $\alpha \notin H^{1,2}_p(M)$.

Entonces, solamente tenemos que $\exists \alpha \in L^2_{p-1}(M)$ tal que

$$(\alpha, d^*\varphi) = (\eta, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M).$$

Def: Sean $\omega_1 \in L^2_{p-1}(M)$, $\omega_2 \in L^2_p(M)$, entonces decimos que

$$d\omega_1 = \omega_2 \quad \text{débilmente}$$

si

$$(\omega_1, d^*\varphi) = (\omega_2, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M).$$

Para nuestros intereses, es mejor considerar

$\overline{\mathcal{D}}^{L^2_p(M)}$ en vez de $\mathcal{D}$ y

por tanto, el funcional

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{D}} : \overline{\mathcal{D}}^{L^2_p(M)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto (\omega, \omega). \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\overline{\mathcal{D}}^{L^2_p(M)} :=$$

$$:= \{ \omega \in L^2_p(M) \mid \exists \alpha \in L^2_{p-1}(M) \text{ t.q. } (\alpha, d^*\varphi) =$$
$$= (\omega - \omega_0, \varphi), \ \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M) \}. \quad (1)$$

pues se puede ver que

$$\mathcal{D} := \{ \omega \in \Omega^p(M) \mid \exists \alpha \in \Omega^{p-1}(M) \text{ t.q.}$$
$$(\alpha, d^*\varphi) = (\omega - \omega_0, \varphi), \ \forall \varphi \in \Omega^p(M) \}$$

pues

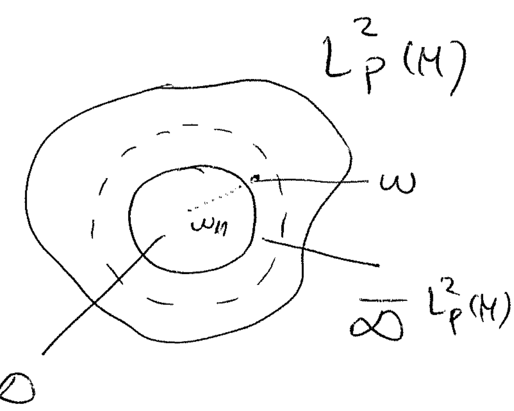
$$\omega - \omega_0 = d\alpha \iff (d\alpha, \varphi) = (\omega - \omega_0, \varphi) \ \forall \varphi \in$$
$$\in \Omega^p(M) \iff (\alpha, d^*\varphi) = (\omega - \omega_0, \varphi) \ \forall \varphi \in \Omega^p(M).$$

y tomando límites se obtiene (1).

Ahora, como

$$(\alpha, d^*\varphi) = (\omega - \omega_0, \varphi), \ \forall \varphi \in H^{1,2}_p(M)$$

entonces el límite débil de la sucesión minimizadora $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}^{L^2_p(M)}$, ω cumple que



$$\omega \in \overline{\mathcal{D}}^{L^2_p(M)} .$$

Por otro lado, viendo el funcional

$$\begin{aligned} J : L^2_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{\omega} &\longmapsto (\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad J_{\mathcal{D}} := J|_{\mathcal{D}}$$

donde $J(\tilde{\omega}) = \int_M \langle \tilde{\omega}, \tilde{\omega} \rangle * (1)$, localmente el Lagrangiano $L(\tilde{\omega}) = \langle \tilde{\omega}, \tilde{\omega} \rangle \sqrt{g}$ es diferenciable y convexo, luego por el cálculo de variaciones en $\mathbb{R}^d$, se sigue que, en particular, J es débilmente semicontinuo por abajo. Esto significa que si $y_n \rightharpoonup y$ en $L^2_p(M) \Rightarrow$

$$J(y) \leq \liminf_{n\to\infty} J(y_n) .$$

Luego como $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión minimizadora,

$$\lim_{n\to\infty} J_{\mathcal{D}}(w_n) = k.$$

Como $w_{n_k} \longrightarrow w$ en $L^2_p(M)$ $\Longrightarrow$

$$J(w) \leq \liminf_{k\to\infty} J(w_{n_k}) =$$

$$\underset{\{w_{n_k}\}\subset\mathcal{D}}{=} \liminf_{k\to\infty} J_{\mathcal{D}}(w_{n_k}) = k.$$

Si probamos ahora que $w\in\mathcal{D}$ $\Longrightarrow$

$$k \leq J_{\mathcal{D}}(w) \leq k \Rightarrow J_{\mathcal{D}}(w) = k$$

y $w\in\mathcal{D}$ sería el mínimo de $J_{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{D}$.

De manera análoga a $\mathbb{R}^d$, pero no por ello sencillo, usando cocientes diferenciales, se prueba que $w\in\mathcal{D}$.

Finalmente, existe $w\in\mathcal{D}$, mínimo de

$$J_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto (w,w).$$

Por último, veamos que el mínimo, $\omega \in \mathcal{D}$, cumple $\Delta\omega = 0$, es decir, que es armónica.

Consideramos, de manera calcada al cálculo de variaciones ($1^{\underline{ra}}$ variación), la función

$$\begin{aligned} j : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto J_{\mathcal{D}}(\omega + t\eta) \end{aligned}$$

con $\eta = d\beta$ para $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$.

<u>Observación:</u> $\omega + t d\beta \in \mathcal{D}$, $\forall \beta \in \Omega^{p-1}(M)$ pues $\omega = \omega_0 + d\alpha$ para $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$, luego

$$\omega + t d\beta = \omega_0 + d\alpha + t d\beta \underset{d \text{ lineal}}{=}$$

$$= \omega_0 + d(\alpha + t\beta) \quad \text{con} \quad \alpha + t\beta \in \Omega^{p-1}(M).$$

por tanto $\omega + t d\beta \sim \omega_0 \Rightarrow \omega + t d\beta \in \mathcal{D}$.

Como ω es el mínimo de $J_\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}$:

$$J_\mathcal{D}(\omega) \leq J(\omega + t d\beta), \quad \forall \beta \in \Omega^{p-1}(M)$$

$$\Rightarrow \quad j(0) \leq j(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, j alcanza un mínimo (global) en $t=0$.

Observar que

$$j(t) := (\omega + t d\beta, \omega + t d\beta) =$$

$$= \underbrace{(\omega,\omega)}_{\in \mathbb{R}} + 2t\underbrace{(\omega, d\beta)}_{\in \mathbb{R}} + t^2\underbrace{(d\beta, d\beta)}_{\in \mathbb{R}}$$

luego $j \in C^\infty(\mathbb{R}) \underset{t=0 \text{ mínimo.}}{\Longrightarrow} j'(0) = 0$.

Por tanto, como

$$j'(t) = 2(\omega, d\beta) + 2t(d\beta, d\beta)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = j'(0) = 2(\omega, d\beta).$$

y en definitiva

$$(\omega, d\beta) = 0 .$$

Como $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$ es arbitrario $\Longrightarrow$

$$(\omega, d\beta) = 0 , \quad \forall \beta \in \Omega^{p-1}(M) .$$

Finalmente

$$0 = (\omega, d\beta) = (d^*\omega, \beta) \qquad \forall \beta \in \Omega^{p-1}(M)$$

y como $(\cdot,\cdot)$ es producto escalar en $\Omega^{p-1}(M) \Longrightarrow d^*\omega = 0$.

Ahora como $\omega \in \mathcal{D}$, $d\omega = 0$; entonces ω cumple

$$\begin{matrix} d^*\omega = 0 \\ d\omega = 0 \end{matrix} \iff \Delta\omega = 0.$$

Luego, hemos probado que en $\mathcal{D}$, existe una forma ω, con $\Delta\omega = 0$!!!

$\square$

Para terminar, esbozaremos un esquema de la prueba de existencia para fijar ideas:

Consideramos el p-grupo de Cohomología de De Rham: $H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$. Elegimos una clase $[w_0] \in H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$. (Si $\alpha = [w_0]$)

(1) Se define el funcional

$$\begin{aligned} J : \alpha &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto (w, w) \end{aligned}$$

y se elije una sucesión minimizadora, i.e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \alpha$, tal que

$$J(w_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k := \inf_{w\in\alpha} J[w].$$

(2) Como $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega^p(M) \hookrightarrow L^2_p(M)$ y $\{\|w_n\|_{L^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, por la reflexividad de $L^2_p(M)$: $w_{n_k} \rightharpoonup \underset{L^2_p(M)}{\underset{\cap}{w}}$, en $L^2_p(M)$.

(3) Se define el funcional

$$\xi : d^*(H_p^{1,2}(M)) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$d^*\varphi \longmapsto (\omega - \omega_0, \varphi)$$

ξ es lineal y acotado.

Como $d^*(H_p^{1,2}(M)) \subset L_{p-1}^2(M)$

$$\xi \xrightarrow[\text{Hahn-Banach}]{\text{extiendo}} \hat{\xi} : L_{p-1}^2(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\hat{\xi}$ lineal y acotado.

(4) $\hat{\xi} \in (L_{p-1}^2(M))^* \longrightarrow \hat{\xi}(\tilde{\varphi}) = (\alpha, \tilde{\varphi})$

Teorema de representación de Riesz.

$\forall \tilde{\varphi} \in L_{p-1}^2(M)$

$(\alpha \in L_{p-1}^2(M))$

Luego si $\tilde{\varphi} = d^*\varphi$, $\varphi \in H_p^{1,2}(M)$,

$$(\alpha, d^*\varphi) = \hat{\xi}(d^*\varphi) = \xi(d^*\varphi) = (\omega - \omega_0, \varphi)$$

$$\Rightarrow (\alpha, d^*\varphi) = (\omega - \omega_0, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_p^{1,2}(M).$$

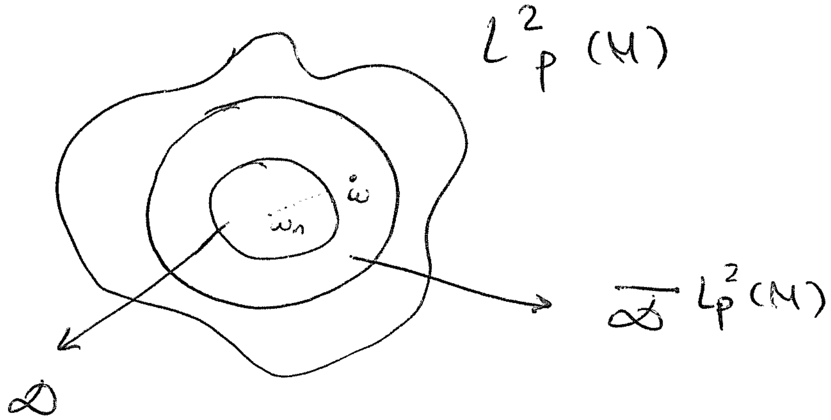
(*)

(5) Extendemos J:

$$J : \overline{\mathcal{D}}^{L^2_p(M)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto (\omega, \omega).$$

De $(*)$, se deduce que $\omega \in \overline{\mathcal{D}}^{L^2_p(M)}$.



(6) Se deduce que J como operador de $L^2_p(M)$ a $\mathbb{R}$, es debilmente semicontinuo inferiormente, luego como $\omega_{n_k} \rightharpoonup \omega$ en $L^2_p(M)$

$$J(\omega) \leq \liminf_{k \to \infty} J(\omega_{n_k}) = K$$

(7) Se prueba que $w \in \mathcal{D}$

(8) De (6) y de (7) se deduce que

$$K \leq J(w) \leq K$$

$$\Rightarrow \quad J(w) = K$$

Luego $\exists\, w \in \mathcal{D}$ mínimo de $J : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(9) Se prueba mediante el principio de Dirichlet (1° variación) que, en efecto,

$$\Delta w = 0 .$$

Sobre el Teorema de existencia:

En retrospectiva, es claro que las dificultades técnicas en el teorema de existencia no requerían la introducción de nuevas ideas, si no que simplemente una extensión razonable de los métodos analíticos clásicos.

La verdadera novedad, que fue la contribución magistral de W. V. D. Hodge, fue la introducción de las técnicas analíticas al campo de la geometría algebraica, tales como las integrales armónicas.

Este triunfo de la intuición y el concepto ante las dificulta técnicas esta presente en un episodio anterior en el trabajo del eminente predecesor de Hodge, Bernhard Riemann.

Michael Atiyah,
"William Vallance Douglas Hodge"
17 Junio 1903 - 7 Julio 1975
Biogr. Mems Fell. R. Soc. 1976 Vol 22 p. 179

IV. CONSECUENCIAS

Hemos probado que si (M,g) es una variedad riemanniana compacta, entonces para cada $0 \leq p \leq d$ con $d = \dim M$, cada clase de $H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$ contiene una única forma armónica. Veamos consecuencias de esto:

<u>Def:</u> Denotaremos por $\mathcal{H}^p(M)$ al espacio de p-formas armónicas, es decir:

$$\mathcal{H}^p(M) := \{ \omega \in \Omega^p(M) : \Delta\omega = 0 \}$$

<u>Teorema:</u> (Isomorfismo de Hodge) El espacio $\mathcal{H}^p(M)$ para $0 \leq p \leq d$, tiene dimensión finita en $\Omega^p(M)$ y se tiene que el operador

$$\mathcal{F} : H^p_{dR}(M;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}^p(M)$$
$$[\omega_0] \longmapsto \omega$$

donde ω es su representante armónico, es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. ($H^p_{dR}(M;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$)

Dem: Supongamos que $\mathcal{H}^p(M) \subset \Omega^p(M) \hookrightarrow L^2_p(M)$ es infinito dimensional. Entonces elegimos un conjunto numerable de vectores $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^p(M)$ linealmente independiente.

Por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt obtenemos un conjunto $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^p(M)$ linealmente independiente y ortonormal, i.e.

$$(\eta_n, \eta_m) = \delta_{nm} \qquad \forall n,m \in \mathbb{N}.$$

Ahora $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^p(M)$ son armónicas, luego

$$d\eta_n = 0 \;\wedge\; d^*\eta_n = 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(observar que $\mathcal{H}^p(M) \subset \Omega^p(M)$, luego los η_n son regulares)

Más aún, $\mathcal{H}^p(M) \subset \Omega^p(M) \hookrightarrow H^{1,2}(M)$. Además

$$\|\eta_n\|^2_{H^{1,2}} = (\eta_n, \eta_n) + \overbrace{\cancel{(d\eta_n, d\eta_n)}}^{0} + \overbrace{\cancel{(d^*\eta_n, d^*\eta_n)}}^{0} = 1$$

Luego $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset H^{1,2}(M)$ es acotado, como

$$i : H^{1,2}(M) \longrightarrow L^2_p(M)$$

es compacto $\Longrightarrow$ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_p(M)$ tiene una subsucesión convergente.

Pero si $n,m\in\mathbb{N}$, $n\neq m$ arbitrarios:

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|^2_{L^2} = (\varphi_n-\varphi_m,\varphi_n-\varphi_m) =$$
$$= (\varphi_n,\varphi_n) - 2\cancelto{0}{(\varphi_n,\varphi_m)} + (\varphi_m,\varphi_m) = 2$$

Luego

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|_{L^2} = \sqrt{2}, \quad \forall n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m.$$

Contradiciendo el hecho de que alguna subsucesión puede converger.

Luego ya hemos probado que $H^p(M)$ es finito dimensional.

Por otro lado, tenemos

$$F : H^p_{dR}(M; \mathbb{R}) \longrightarrow H^p(M)$$
$$[\omega_0] \longmapsto \omega \quad .$$

1) F está bien definida por el teorema de Hodge, pues a cada $[\omega_0]$, existe un <u>único</u> representante armónico.

2) Se define

$$\hat{F} : H^p(M) \longrightarrow H^p_{dR}(M; \mathbb{R})$$
$$\omega \longmapsto [\omega] \quad .$$

Si $\omega \in H^p(M) \Rightarrow \Delta\omega = 0 \Longrightarrow d\omega = 0 \wedge d^*\omega = 0$

Luego $d\omega = 0$ (ω cerrada) y por tanto $[\omega] \in$ $\in H^p_{dR}(M; \mathbb{R})$.

Sea $\omega \in H^p(M)$:

$$F(\hat{F}(\omega)) = F([\omega]) \overset{\substack{\omega \text{ armónico (unicidad} \\ \text{Tma. Hodge)}}}{=} \omega$$

$$\Rightarrow F \circ \hat{F} = Id.$$

Sea $[\omega] \in H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$:

$$\hat{F}(F([\omega_0])) = \hat{F}(\omega) = [\omega]$$

pero $\omega \in [\omega_0] \Rightarrow \omega \sim \omega_0 \Rightarrow [\omega] = [\omega_0]$

$$\Rightarrow \hat{F}(F([\omega_0])) = [\omega_0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{F} \circ F = Id.$$

Por tanto $\hat{F} \equiv F^{-1}$ y F es biyectiva.

3) F es lineal:

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $[\omega_0], [\omega_1] \in H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$, entonces

- $F(\lambda[\omega_0] + \mu[\omega_1]) = ?$

- Sea $\omega^0, \omega^1 \in H^p(M)$, los representantes armónicos de $[\omega_0]$ y $[\omega_1]$ respectivamente. Entonces tenemos

$$\Delta(\lambda\omega^0 + \mu\omega^1) \overset{\Delta \text{ lineal}}{=} \lambda\Delta\omega^0 + \mu\Delta\omega^1 = 0$$

$$y \quad \lambda\omega^0 + \mu\omega^1 \in \lambda[\omega^0] + \mu[\omega^1] =$$
$$= [\lambda\omega^0 + \mu\omega^1].$$

Luego por unicidad del teorema de Hodge al ser $\lambda\omega^0+\mu\omega^1$ armónica y pertenecer a $[\lambda\omega^0+\mu\omega^1] \Rightarrow$

$$F([\lambda\omega^0+\mu\omega^1]) = \lambda\omega^0+\mu\omega^1$$
$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ F(\lambda \underset{\overset{\|}{[\omega_0]}}{[\omega^0]} + \mu \underset{\overset{\|}{[\omega_1]}}{[\omega^1]}) & = & \lambda F([\omega_0]) + \mu F([\omega_1]) \end{array}$$

Esto concluye la prueba. $\square$

<u>Corolario</u>: Sea M una variedad diferenciable compacta y orientable, entonces los p-grupos de Cohomología de De Rham $H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$ son finito dimensionales. $(0 \le p \le \underset{\overset{\|}{\dim M}}{d})$

Dem: Sabemos que toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana, luego sea g una de ellas. De esta forma, (M, g) es una variedad riemanniana compacta y orientable. Entonces por el teorema del isomorfismo de Hodge:

$$H^p_{dR}(M; \mathbb{R}) \simeq H^p(M) \simeq \mathbb{R}^n$$

ISOMORFISMOS LINEALES.

para algún $n \in \mathbb{N}$.

Esto finaliza la prueba. $\square$

Sea M una variedad diferenciable compacta y orientable de dimensión d. Se define la forma bilineal:

$$\theta : H^p_{dR}(M; \mathbb{R}) \times H^{d-p}_{dR}(M; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$([\omega], [\eta]) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

1) θ bien definida:

1.1.) Como $\alpha \in \Omega^p(M)$ y $\eta \in \Omega^{d-p}(M)$, entonces

$$\alpha \wedge \eta \in \Omega^d(M)$$

y como M es compacta

$$\int_M \omega \wedge \eta < \infty .$$

1.2.) Sean $\omega' \in [\omega]$ y $\eta' \in [\eta] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega' = \omega + d\alpha \quad \wedge \quad \eta' = \eta + d\beta .$$

$$\int_M \omega' \wedge \eta' = \int_M (\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_M \omega \wedge \eta + \int_M \omega \wedge d\beta + \int_M d\alpha \wedge \eta +$$

$\wedge$ distributiva

$$+ \int_M d\alpha \wedge d\beta .$$

Ahora, como

$$d(\alpha\wedge\eta) = d\alpha\wedge\eta + (-1)^p\,\alpha\wedge \cancel{d\eta}^{\,0}$$ (η es representante de $[\eta]$)

por el teorema de Stokes:

$$\int_M d(\alpha\wedge\eta) = \int_{\underset{\emptyset}{\partial M}} \alpha\wedge\eta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_M d\alpha\wedge\eta = 0.$$

Análogamente

$$\int_M \alpha\wedge d\eta = 0.$$

Por último:

$$\int_M \underbrace{d\alpha}_{\in\Omega^{p+1}(M)}\wedge \underbrace{d\beta}_{\Omega^{d-p+1}(M)} =$$

$$= \int_M d(\alpha\wedge d\beta) - (-1)^p(\alpha\wedge \cancel{d^2\beta}^{\,0}) =$$

$$= \int_M d(\alpha\wedge d\beta) \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\underset{\emptyset}{\partial M}} \alpha\wedge d\beta = 0$$

Luego, en efecto:

$$\int_M \omega' \wedge \eta' = \int_M \omega \wedge \eta .$$

y θ está bien definida.

2) θ bilineal: Se sigue de la linealidad de la integral y de la propiedad distributiva de wedge $\wedge$.

Observación: Sean V y W, $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita y sea

$$(\cdot,\cdot) : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$$

una forma bilineal tal que $\forall v \in V \setminus \{0\}$, $\exists w \in W$ t.q. $(v,w) \neq 0$ y $\forall w \in W \setminus \{0\}$, $\exists v \in V$ t.q. $(v,w) \neq 0$. Esto quiere decir que la forma bilineal $(\cdot,\cdot)$ es no degenerada.

Entonces:

$$
\begin{aligned}
i_1 : V &\longrightarrow W^* \\
v &\longmapsto i_1^v : W \longrightarrow \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad w \longmapsto (v, w)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
i_2 : W &\longrightarrow V^* \\
w &\longmapsto i_2^w : V \longrightarrow \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad v \longmapsto (v, w)
\end{aligned}
$$

son isomorfismos lineales. La inyectividad se sigue de que $(\cdot,\cdot)$ es no degenerada pues de esta forma si $v \in V \setminus \{0\}$, entonces $\exists\, w \in W$ t.q.

$$0 \neq (v, w) = i_1^v \neq 0.$$

Análogo para i_2.

Por otro lado i_1 e i_2 son lineales por ser $(\cdot,\cdot)$ bilineal.

Por último i_1 e i_2 son sobreyectivos pues al ser lineales, inyectivos $\Longrightarrow$

$$\dim(V) \leq \dim(W^*) \underset{\text{finito dimensional}}{=} \dim(W)$$

$$\dim(W) \leq \dim(V^*) \overset{\downarrow}{=} \dim(V)$$

$\Longrightarrow \dim(V) = \dim(W) \Longrightarrow i_1$ e i_2 son isomorfismos.

(pues i_1 e i_2 lineales e inyectivos)

Gracias a esta observación, obtenemos el siguiente teorema de dualidad en cohomología:

<u>Teorema</u> (Dualidad): Sea M una variedad compacta y orientable de dimensión d. Entonces la forma bilineal

$$\theta : H^p_{dR}(M;\mathbb{R}) \times H^{d-p}_{dR}(M;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$([\omega],[\eta]) \longmapsto \int_M \omega\wedge\eta$$

es no degenerada y además

$$H^p_{dR}(M;\mathbb{R}) \underset{\substack{\text{ISOMORFO}\\ \text{LINEALMENTE}}}{\simeq} \left(H^{d-p}_{dR}(M;\mathbb{R})\right)^*.$$

<u>Dem:</u> Empecemos viendo que θ es no degenerada, para ello si $0\neq[\omega]\in H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$, tenemos que encontrar una forma η, tal que $[\eta]\in H^{d-p}(M;\mathbb{R})$ y

$$\theta([\omega],[\eta]) = \int_M \omega\wedge\eta \neq 0.$$

y viceversa.

Para este propósito, elegimos una métrica g en M de forma que (M, g) es una variedad Riemanniana compacta y orientable.

Elegimos, por el teorema de Hodge, $\omega \in [\omega] \in$
$\in H^p_{dR}(M; \mathbb{R})$ armónica. Entonces por un lema de la sección II:

$$\Delta * \omega = * \Delta \omega \qquad (\omega \in \Omega^p(M))$$

por tanto

$$\Delta * \omega = * \Delta \omega = * 0 \overset{*\ \text{lineal}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $*\omega$ es armónica.

$\Rightarrow$ $*\omega \in \mathcal{H}^{d-p}(M)$.

Ahora, como $*\omega \in \mathcal{H}^{d-p}(M) \Rightarrow \Delta * \omega = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow d(*\omega) = 0 \wedge d^*(*\omega) = 0$, por tanto,
$[*\omega] \in H^{d-p}_{dR}(M; \mathbb{R})$. Por último

$$\theta([\omega], [*\omega]) = \int_M \omega \wedge * \omega = (\omega, \omega) \neq 0$$

pues $\omega \neq 0$. $([\omega] \neq 0)$.

Análogamente si $0 \neq [\eta] \in H^{d-p}_{dR}(M;\mathbb{R})$, elegimos $\eta \in [\eta] \in H^{d-p}_{dR}(M;\mathbb{R})$ representante armónico de $[\eta]$. Entonces

$$\Delta * \eta = * \Delta \eta = 0$$

$\Rightarrow$ $*\eta \in \mathcal{H}^p(M)$, pues $*\eta \in \Omega^{d-(d-p)}(M) = \Omega^p(M)$ y es armónica.

$\Rightarrow$ $d(*\eta) = 0 \Rightarrow [*\eta] \in H^p_{dR}(M;\mathbb{R})$ y $\wedge$ $d^*(*\eta) = 0$

además

$$\theta([*\eta],[\eta]) = \int_M *\eta \wedge \eta = (\eta,\eta) \neq 0$$

pues $\eta \neq 0$ $([\eta] \neq 0)$.

Luego en efecto θ es no degenerada.

Por último, por el corolario del teorema del isomorfismo de Hodge:

$$H^p_{dR}(M;\mathbb{R}) \text{ y } H^{d-p}_{dR}(M;\mathbb{R}) \text{ finito dim.}$$

Por tanto, por la observación anterior

$$H^p_{dR}(M;\mathbb{R}) \simeq \left(H^{d-p}_{dR}(M;\mathbb{R})\right)^*$$

$\wedge$

$$H^{d-p}_{dR}(M;\mathbb{R}) \simeq \left(H^p_{dR}(M;\mathbb{R})\right)^*$$

Esto concluye la prueba.

$\square$

Este teorema es un caso particular del teorema de <u>dualidad de Poincaré</u>.

Finalmente, para concluir, demos un ejemplo de aplicación:

<u>Ejemplo:</u> (Cohomología de $\mathbb{S}^1$). Empecemos viendo el caso $p=0$.

$$d : \overbrace{\Omega^{-1}(\mathbb{S}^1)}^{=\{0\}} \longrightarrow \Omega^0(\mathbb{S}^1) = C^\infty(\mathbb{S}^1)$$
$$0 \longmapsto 0$$

(d lineal)

y

$$d : \Omega^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{S}^1)$$
$$f \longmapsto df$$

Luego

$$\cdot \quad \operatorname{Im}\{d : \Omega^{-1}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \Omega^0(\mathbb{S}^1)\} =$$

$$= \{0\}$$

y por tanto:

$$H^0_{dR}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) = \ker\{d : \Omega^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{S}^1)\}$$

Pero si $f \in \Omega^0(M) \equiv C^\infty(M)$ y $df = 0$, entonces $f \equiv cte$, en cada componente conexa de $\mathbb{S}^1$.

Pero $\mathbb{S}^1$ es conexo, luego

$$H^0_{dR}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ISOMORFISMO LINEAL.}}}{\cong} \mathbb{R}$$

Por el teorema de dualidad de Poincaré

$$H^0_{dR}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) \simeq \left(H^1_{dR}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})\right)^*$$

$$\Rightarrow \left(H^1_{dR}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})\right)^* \simeq \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fin de la dem}}}{\Rightarrow} \quad H^1_{dR}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$$

De esta forma, como

$$\Omega^p(\mathbb{S}^1) = \{0\} \qquad \forall p \geq 2$$

entonces

$$H^p_{dR}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad p = 0, 1 \\ 0 & \text{si} \quad p \geq 2 . \end{cases}$$

Por el teorema de De Rham,

$$H^p_{sing.}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad p = 0, 1 \\ 0 & \text{si} \quad p \geq 2 . \end{cases}$$

Referencias

[1] Jürgen Jost. Riemannian Geometry and Geometrical analysis. 6th ed. Berlin: Springer (2011).

[2] R. O. Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, (1983).