Introducción a los fibrados principales

Guillermo Gallego Sánchez

Geometría de superficies topológicas

17 de diciembre de 2018

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Fibrados

Un ***fibrado*** (E, B, p, F)

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\
 & B
\end{tikzcd}
$$

Fibrados

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \Big\downarrow p \\ & & B \end{array}$$

Un ***fibrado*** (E, B, p, F) consta de:

- ***base***: B

Fibrados

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Un ***fibrado*** (E, B, p, F) consta de:

- ***base***: B
- ***espacio total***: E

Fibrados

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Un ***fibrado*** (E, B, p, F) consta de:

- ***base***: B
- ***espacio total***: E
- ***fibra***: F

Fibrados

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Un ***fibrado*** (E, B, p, F) consta de:

- ***base***: B
- ***espacio total***: E
- ***fibra***: F
- $p : E \to B$ aplicación continua

Fibrados

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \Big\downarrow p \\ & & B \end{array}$$

Un ***fibrado*** (E, B, p, F) consta de:

- ***base***: B
- ***espacio total***: E
- ***fibra***: F
- $p : E \to B$ aplicación continua tal que $\forall x \in B\ \exists U^x$ y una ***trivialización***

Fibrados

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Un ***fibrado*** (E, B, p, F) consta de:

- ***base***: B
- ***espacio total***: E
- ***fibra***: F
- $p : E \to B$ aplicación continua tal que $\forall x \in B\ \exists U^x$ y una ***trivialización***

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Ejemplos

- El ***fibrado trivial***:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & B \times F \arrow[d, "\mathsf{pr}_1"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Ejemplos

- El ***fibrado trivial***:

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & B \times F \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ & & B \end{array}$$

- La ***cinta de Moebius***:

$$\begin{array}{ccc} (0,1) & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ & & \mathbb{S}^1, \end{array}$$

con $E = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in (0,1)\}/(x,y) \sim (x+1, 1-y)$ y $p : E \to \mathbb{S}^1$, viendo la base como $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}\}/x \sim x+1$.

Funciones de transición

$E \to B$ fibrado, $x \in B$, U^x, V^x.

Funciones de transición

$E \to B$ fibrado, $x \in B$, U^x, V^x.

$$
\begin{tikzcd}
U \cap V \times F \arrow[r, "\varphi_U^{-1}"] \arrow[dr, "\mathsf{pr}_1"'] & p^{-1}(U \cap V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "p"] & U \cap V \times F \arrow[dl, "\mathsf{pr}_1"] \\
& U \cap V &
\end{tikzcd}
$$

Funciones de transición

$E \to B$ fibrado, $x \in B$, U^x, V^x.

$$\begin{tikzcd} U \cap V \times F \arrow[r, "\varphi_U^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & p^{-1}(U \cap V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "p"] & U \cap V \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U \cap V & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (U \cap V) \times F &\longrightarrow (U \cap V) \times F \\ (x, y) &\longmapsto (x, \psi_{UV}(x, y)) \end{aligned}$$

Funciones de transición

$E \to B$ fibrado, $x \in B$, U^x, V^x.

$$
\begin{tikzcd}
U \cap V \times F \arrow[r, "\varphi_U^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & p^{-1}(U \cap V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "p"] & U \cap V \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U \cap V &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (U \cap V) \times F &\longrightarrow (U \cap V) \times F \\
(x, y) &\longmapsto (x, \psi_{UV}(x, y))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{UV,x} : F &\longrightarrow F \\
y &\longmapsto \psi_{UV}(x, y)
\end{aligned}
$$

Funciones de transición

- ***Función de transición*** entre U y V:

$$\begin{aligned} g_{UV} : U \cap V &\longrightarrow \mathrm{Homeo}(F) \\ x &\longmapsto \psi_{UV,x}. \end{aligned}$$

- Las funciones de transición cumplen la ***condición de cociclo***

$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV}.$$

  En particular, $g_{UU} = \mathrm{id}$ y $g_{UV} = g_{VU}^{-1}$.

- Con estructura adicional en las funciones de transición obtenemos otro tipo de fibrados (por ejemplo, fibrados vectoriales $\rightsquigarrow$ matrices de transición).

Isomorfismo de fibrados

$p : E \to B$, $p' : E \to B'$ fibrados con fibra F.

Isomorfismo de fibrados

$p : E \to B$, $p' : E \to B'$ fibrados con fibra F.
Un ***isomorfismo de fibrados*** entre $p : E \to B$ y $p : E' \to B'$ es un par de homeomorfismos $(f, \tilde{f})$ tales que

Isomorfismo de fibrados

$p : E \to B$, $p' : E \to B'$ fibrados con fibra F.
Un ***isomorfismo de fibrados*** entre $p : E \to B$ y $p : E' \to B'$ es un par de homeomorfismos $(f, \tilde{f})$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Isomorfismo de fibrados

$p : E \to B$, $p' : E \to B'$ fibrados con fibra F.
Un ***isomorfismo de fibrados*** entre $p : E \to B$ y $p : E' \to B'$ es un par de homeomorfismos $(f, \tilde{f})$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.
Las funciones de transición se relacionan por

$$g'_{U'V'} = f_{VV'}^{-1} \circ g_{UV} \circ f_{UU'},$$

con $f_{UU'} : U' \to \mathrm{Homeo}(F)$.

Obtención del fibrado desde las funciones de transición

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B, $G < \mathrm{Homeo}(F)$ y $\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$ conjunto de funciones de transición de un fibrado $E \to B$.

Obtención del fibrado desde las funciones de transición

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B, $G < \mathrm{Homeo}(F)$ y $\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$ conjunto de funciones de transición de un fibrado $E \to B$.
Entonces $E \to B$ es isomorfo al fibrado $E' \to B$ con

Obtención del fibrado desde las funciones de transición

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B, $G < \mathrm{Homeo}(F)$ y $\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$ conjunto de funciones de transición de un fibrado $E \to B$.
Entonces $E \to B$ es isomorfo al fibrado $E' \to B$ con

- espacio total

$$E' = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} (U \times F)/(x, y) \sim (x, g_{UV}(x)(y))$$

Obtención del fibrado desde las funciones de transición

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B, $G < \text{Homeo}(F)$ y
$\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$ conjunto de funciones de transición de un fibrado $E \to B$.
Entonces $E \to B$ es isomorfo al fibrado $E' \to B$ con

- espacio total

$$E' = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} (U \times F)/(x, y) \sim (x, g_{UV}(x)(y))$$

- la proyección

$$\begin{aligned} p : E' &\longrightarrow B \\ [(x, y)] &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Fibrados y cohomología de Čech

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B. $G < \mathrm{Homeo}(F)$.

Fibrados y cohomología de Čech

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B. $G < \mathrm{Homeo}(F)$.

- Un conjunto de funciones $\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$ es: un 1***-cociclo de Čech subordinado a*** $\mathcal{U}$ ***con coeficientes en*** G si
$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV},$$

Fibrados y cohomología de Čech

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B. $G < \mathrm{Homeo}(F)$.

- Un conjunto de funciones $\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$ es: un 1***-cociclo de Čech subordinado a*** $\mathcal{U}$ ***con coeficientes en*** G si

$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV},$$

- Se llama ***primer grupo de cohomología de Čech subordinado a*** $\mathcal{U}$ ***con coeficientes en*** G al cociente

$$\check{H}(\mathcal{U}, G) = \{\text{1-cociclos}\} / g_{UV} \sim (f_{VV'}^{-1} \circ g_{UV} \circ f_{UU'}).$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Fibrados y cohomología de Čech

$\mathcal{U}$ recubrimiento abierto de B. $G < \text{Homeo}(F)$.

- Un conjunto de funciones $\{g_{UV} : U \cap V \to G : U, V \in \mathcal{U}\}$ es: un 1***-cociclo de Čech subordinado a*** $\mathcal{U}$ ***con coeficientes en*** G si
$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV},$$
- Se llama ***primer grupo de cohomología de Čech subordinado a*** $\mathcal{U}$ ***con coeficientes en*** G al cociente
$$\check{H}(\mathcal{U}, G) = \{\text{1-cociclos}\} / g_{UV} \sim (f_{VV'}^{-1} \circ g_{UV} \circ f_{UU'}).$$
- Tomando el límite directo por refinamiento del recubrimiento, tenemos el ***primer grupo de cohomología de Čech con coeficientes en*** G
$$\check{H}^1(B, G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, G).$$

Secciones

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"'] \\
& B \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}
$$

Una ***sección*** de un fibrado $p : E \to B$ es una aplicación continua $s : B \to E$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_B$.

Secciones

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"'] \\ & B \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

Una ***sección*** de un fibrado $p : E \to B$ es una aplicación continua $s : B \to E$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_B$.

Una sección local es una sección definida en un abierto $U \subset B$.

Secciones

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & E \arrow[d, "p"'] \\
& B \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}
$$

Una ***sección*** de un fibrado $p : E \to B$ es una aplicación continua $s : B \to E$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_B$.
Una sección local es una sección definida en un abierto $U \subset B$.
Denotamos $\Gamma(E)$ al conjunto de las secciones de $E \to B$ y $\Gamma(U, E)$ al conjunto de las secciones locales definidas en un abierto $U \subset B$.

Fibrados principales

Un ***fibrado principal*** (P, B, p, G) consta de:

- una variedad diferenciable P,

Fibrados principales

Un ***fibrado principal*** (P, B, p, G) consta de:

- una variedad diferenciable P,
- un grupo de Lie G actuando libremente por la derecha sobre P:

$$\begin{aligned} P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto p \cdot g, \end{aligned}$$

Fibrados principales

Un ***fibrado principal*** (P, B, p, G) consta de:

- una variedad diferenciable P,
- un grupo de Lie G actuando libremente por la derecha sobre P:

$$\begin{aligned} P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto p \cdot g, \end{aligned}$$

- $B = P/G$ con una sumersión $p : P \to P/G$, que es la proyección canónica al cociente

Fibrados principales

Un ***fibrado principal*** (P, B, p, G) consta de:

- una variedad diferenciable P,
- un grupo de Lie G actuando libremente por la derecha sobre P:

$$\begin{aligned} P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto p \cdot g, \end{aligned}$$

- $B = P/G$ con una sumersión $p : P \to P/G$, que es la proyección canónica al cociente y tal que $\forall x \in B\ \exists U^x$ y una trivialización

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times G \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd} .$$

Fibrados principales

Un ***fibrado principal*** (P, B, p, G) consta de:

- una variedad diferenciable P,
- un grupo de Lie G actuando libremente por la derecha sobre P:

$$\begin{aligned} P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto p \cdot g, \end{aligned}$$

- $B = P/G$ con una sumersión $p : P \to P/G$, que es la proyección canónica al cociente y tal que $\forall x \in B \ \exists U^x$ y una trivialización

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times G \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd} .$$

Además, $\varphi_U(y) = (p(y), g_U(y))$ para cierta $g_U : p^{-1}(U) \to G$ con $g_U(y \cdot g) = g_U(y) \cdot g$.

Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie.

Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie. En efecto, para cada sección local $s_U : U \to P$ y para cada $y \in p^{-1}(x)$ existe un único elemento $g_U(y) \in G$ con $y = s_U(x)g_U(y)$.

Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie. En efecto, para cada sección local $s_U : U \to P$ y para cada $y \in p^{-1}(x)$ existe un único elemento $g_U(y) \in G$ con $y = s_U(x)g_U(y)$.
- Las funciones de transición son de la forma

$$\begin{aligned} U \cap V \times G &\longrightarrow U \cap V \times G \\ (x, h) &\longmapsto (x, g_{UV}(x)h). \end{aligned}$$

Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie. En efecto, para cada sección local $s_U : U \to P$ y para cada $y \in p^{-1}(x)$ existe un único elemento $g_U(y) \in G$ con $y = s_U(x)g_U(y)$.
- Las funciones de transición son de la forma

$$\begin{aligned} U \cap V \times G &\longrightarrow U \cap V \times G \\ (x, h) &\longmapsto (x, g_{UV}(x)h). \end{aligned}$$

- Un fibrado principal admite una sección global si y sólo si es trivial.

Ejemplos

- $P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

Ejemplos

- $P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

  Fibra $\mathbb{Z}_2$ con la acción

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, \pm 1) &\longmapsto \pm z. \end{aligned}$$

Ejemplos

- $P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y
$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$
Fibra $\mathbb{Z}_2$ con la acción
$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, \pm 1) &\longmapsto \pm z. \end{aligned}$$
- $p : \tilde{M} \to M$ recubridor universal.

Ejemplos

- $P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ y

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

  Fibra $\mathbb{Z}_2$ con la acción

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, \pm 1) &\longmapsto \pm z. \end{aligned}$$

- $p : \tilde{M} \to M$ recubridor universal.
  Fibra $\pi_1(M)$ con la acción de monodromía:

$$\begin{aligned} \tilde{M} \times \pi_1(M) &\longrightarrow \tilde{M} \\ (y, g) &\longmapsto \tilde{\gamma}_g^y(1). \end{aligned}$$

Fibrado de referencias

El ***fibrado de referencias*** sobre una variedad diferenciable M tiene por espacio total

$$L(M) = \{\psi_x : \mathbb{R}^n \to T_x M : x \in M,\ \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

Fibrado de referencias

El ***fibrado de referencias*** sobre una variedad diferenciable M tiene por espacio total

$$L(M) = \{\psi_x : \mathbb{R}^n \to T_x M : x \in M,\ \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

con la aplicación

$$\begin{aligned} p : L(M) &\longrightarrow M \\ \psi_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Fibrado de referencias

El ***fibrado de referencias*** sobre una variedad diferenciable M tiene por espacio total

$$L(M) = \{\psi_x : \mathbb{R}^n \to T_x M : x \in M,\ \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

con la aplicación

$$\begin{aligned} p : L(M) &\longrightarrow M \\ \psi_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Su fibra es $GL(n, \mathbb{R})$

Fibrado de referencias

El ***fibrado de referencias*** sobre una variedad diferenciable M tiene por espacio total

$$L(M) = \{\psi_x : \mathbb{R}^n \to T_x M : x \in M,\ \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

con la aplicación

$$\begin{aligned} p : L(M) &\longrightarrow M \\ \psi_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Su fibra es $GL(n, \mathbb{R})$ con la acción

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi_x} T_x M.$$

¡++¿