

# Introducción a los fibrados principales

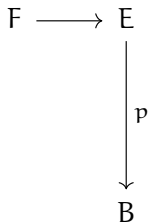
Guillermo Gallego Sánchez

Geometría de superficies topológicas

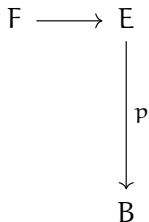
17 de diciembre de 2018

# Fibrados

Un **fibrado**  $(E, B, p, F)$



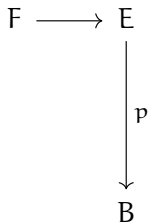
# Fibrados



Un **fibrado**  $(E, B, p, F)$  consta de:

► **base**:  $B$

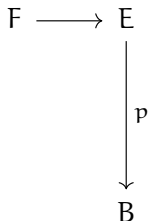
# Fibrados



Un **fibrado**  $(E, B, p, F)$  consta de:

- ▶ **base**:  $B$
- ▶ **espacio total**:  $E$

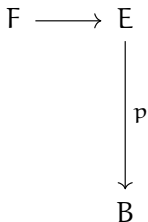
# Fibrados



Un **fibrado**  $(E, B, p, F)$  consta de:

- ▶ **base**:  $B$
- ▶ **espacio total**:  $E$
- ▶ **fibra**:  $F$

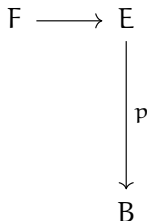
# Fibrados



Un **fibrado**  $(E, B, p, F)$  consta de:

- ▶ **base**:  $B$
- ▶ **espacio total**:  $E$
- ▶ **fibra**:  $F$
- ▶  $p : E \rightarrow B$  aplicación continua

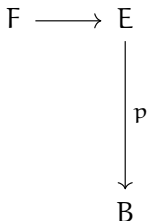
# Fibrados



Un **fibrado**  $(E, B, p, F)$  consta de:

- ▶ **base**:  $B$
- ▶ **espacio total**:  $E$
- ▶ **fibra**:  $F$
- ▶  $p : E \rightarrow B$  aplicación continua tal que  $\forall x \in B \exists U^x$  y una **trivialización**

# Fibrados



Un **fibrado**  $(E, B, p, F)$  consta de:

- ▶ **base**:  $B$
- ▶ **espacio total**:  $E$
- ▶ **fibra**:  $F$
- ▶  $p : E \rightarrow B$  aplicación continua tal que  $\forall x \in B \exists U^x$  y una **trivialización**

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times F \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{pr}_1 & \\ & U & \end{array}$$



# Ejemplos

- El ***fibrado trivial***:

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & B \times F \\ & & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & B \end{array}$$

# Ejemplos

- El ***fibrado trivial***:

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & B \times F \\ & & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & B \end{array}$$

- La ***cinta de Moebius***:

$$\begin{array}{ccc} (0, 1) & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & \mathbb{S}^1, \end{array}$$

con  $E = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1)\} / (x, y) \sim (x + 1, 1 - y)$  y  
 $p : E \rightarrow \mathbb{S}^1$ , viendo la base como  $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}\} / x \sim x + 1$ .

# Funciones de transición

$E \rightarrow B$  fibrado,  $x \in B$ ,  $U^x, V^x$ .

# Funciones de transición

$E \rightarrow B$  fibrado,  $x \in B$ ,  $U^x, V^x$ .

$$\begin{array}{ccccc} U \cap V \times F & \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} & p^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi_V} & U \cap V \times F \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow p & \swarrow \text{pr}_1 & \\ & & U \cap V & & \end{array}$$

# Funciones de transición

$E \rightarrow B$  fibrado,  $x \in B$ ,  $U^x, V^x$ .

$$\begin{array}{ccccc} U \cap V \times F & \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} & p^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi_V} & U \cap V \times F \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow p & \swarrow \text{pr}_1 & \\ & & U \cap V & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (U \cap V) \times F &\longrightarrow (U \cap V) \times F \\ (x, y) &\longmapsto (x, \psi_{UV}(x, y)) \end{aligned}$$

# Funciones de transición

$E \rightarrow B$  fibrado,  $x \in B$ ,  $U^x, V^x$ .

$$\begin{array}{ccccc} U \cap V \times F & \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} & p^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi_V} & U \cap V \times F \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow p & \swarrow \text{pr}_1 & \\ & & U \cap V & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (U \cap V) \times F &\longrightarrow (U \cap V) \times F \\ (x, y) &\longmapsto (x, \psi_{UV}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{UV,x} : F &\longrightarrow F \\ y &\longmapsto \psi_{UV}(x, y) \end{aligned}$$

# Funciones de transición

- **Función de transición** entre  $U$  y  $V$ :

$$\begin{aligned} g_{UV} : U \cap V &\longrightarrow \text{Homeo}(F) \\ x &\longmapsto \psi_{UV,x}. \end{aligned}$$

- Las funciones de transición cumplen la **condición de cociclo**

$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV}.$$

En particular,  $g_{UU} = \text{id}$  y  $g_{UV} = g_{VU}^{-1}$ .

- Con estructura adicional en las funciones de transición obtenemos otro tipo de fibrados (por ejemplo, fibrados vectoriales  $\rightsquigarrow$  matrices de transición).

# Isomorfismo de fibrados

$p : E \rightarrow B, p' : E \rightarrow B'$  fibrados con fibra  $F$ .



# Isomorfismo de fibrados

$p : E \rightarrow B, p' : E \rightarrow B'$  fibrados con fibra  $F$ .

Un **isomorfismo de fibrados** entre  $p : E \rightarrow B$  y  $p' : E' \rightarrow B'$  es un par de homeomorfismos  $(f, \tilde{f})$  tales que

# Isomorfismo de fibrados

$p : E \rightarrow B$ ,  $p' : E' \rightarrow B'$  fibrados con fibra  $F$ .

Un **isomorfismo de fibrados** entre  $p : E \rightarrow B$  y  $p' : E' \rightarrow B'$  es un par de homeomorfismos  $(f, \tilde{f})$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta.

# Isomorfismo de fibrados

$p : E \rightarrow B$ ,  $p' : E' \rightarrow B'$  fibrados con fibra  $F$ .

Un **isomorfismo de fibrados** entre  $p : E \rightarrow B$  y  $p' : E' \rightarrow B'$  es un par de homeomorfismos  $(f, \tilde{f})$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta.

Las funciones de transición se relacionan por

$$g'_{U'V'} = f_{VV'}^{-1} \circ g_{UV} \circ f_{UU'},$$

con  $f_{UU'} : U' \rightarrow \text{Homeo}(F)$ .

# Obtención del fibrado desde las funciones de transición

$\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $B$ ,  $G < \text{Homeo}(F)$  y

$\{g_{UV} : U \cap V \rightarrow G : U, V \in \mathcal{U}\}$  conjunto de funciones de transición de un fibrado  $E \rightarrow B$ .

# Obtención del fibrado desde las funciones de transición

$\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $B$ ,  $G < \text{Homeo}(F)$  y

$\{g_{UV} : U \cap V \rightarrow G : U, V \in \mathcal{U}\}$  conjunto de funciones de transición de un fibrado  $E \rightarrow B$ .

Entonces  $E \rightarrow B$  es isomorfo al fibrado  $E' \rightarrow B$  con

# Obtención del fibrado desde las funciones de transición

$\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $B$ ,  $G < \text{Homeo}(F)$  y

$\{g_{UV} : U \cap V \rightarrow G : U, V \in \mathcal{U}\}$  conjunto de funciones de transición de un fibrado  $E \rightarrow B$ .

Entonces  $E \rightarrow B$  es isomorfo al fibrado  $E' \rightarrow B$  con

- espacio total

$$E' = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} (U \times F) / (x, y) \sim (x, g_{UV}(x)(y))$$

# Obtención del fibrado desde las funciones de transición

$\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $B$ ,  $G < \text{Homeo}(F)$  y

$\{g_{UV} : U \cap V \rightarrow G : U, V \in \mathcal{U}\}$  conjunto de funciones de transición de un fibrado  $E \rightarrow B$ .

Entonces  $E \rightarrow B$  es isomorfo al fibrado  $E' \rightarrow B$  con

- ▶ espacio total

$$E' = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} (U \times F) / (x, y) \sim (x, g_{UV}(x)(y))$$

- ▶ la proyección

$$\begin{aligned} p : E' &\longrightarrow B \\ [(x, y)] &\longmapsto x. \end{aligned}$$

# Fibrados y cohomología de Čech

$\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $B$ .  $G < \text{Homeo}(F)$ .



# Fibrados y cohomología de Čech

$\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $B$ .  $G < \text{Homeo}(F)$ .

- Un conjunto de funciones  $\{g_{UV} : U \cap V \rightarrow G : U, V \in \mathcal{U}\}$  es: un **1-cociclo de Čech subordinado a  $\mathcal{U}$  con coeficientes en  $G$**  si

$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV},$$

# Fibrados y cohomología de Čech

$\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $B$ .  $G < \text{Homeo}(F)$ .

- Un conjunto de funciones  $\{g_{UV} : U \cap V \rightarrow G : U, V \in \mathcal{U}\}$  es: un **1-cociclo de Čech subordinado a  $\mathcal{U}$  con coeficientes en  $G$**  si

$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV},$$

- Se llama **primer grupo de cohomología de Čech subordinado a  $\mathcal{U}$  con coeficientes en  $G$**  al cociente

$$\check{H}(\mathcal{U}, G) = \{1\text{-cociclos}\} / g_{UV} \sim (f_{VV'}^{-1} \circ g_{UV} \circ f_{UU'}).$$

# Fibrados y cohomología de Čech

$\mathcal{U}$  recubrimiento abierto de  $B$ .  $G < \text{Homeo}(F)$ .

- Un conjunto de funciones  $\{g_{UV} : U \cap V \rightarrow G : U, V \in \mathcal{U}\}$  es: un **1-cociclo de Čech subordinado a  $\mathcal{U}$  con coeficientes en  $G$**  si

$$g_{UW} = g_{VW} \circ g_{UV},$$

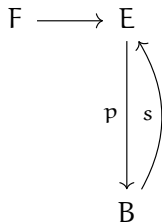
- Se llama **primer grupo de cohomología de Čech subordinado a  $\mathcal{U}$  con coeficientes en  $G$**  al cociente

$$\check{H}(\mathcal{U}, G) = \{1\text{-cociclos}\} / g_{UV} \sim (f_{VV'}^{-1} \circ g_{UV} \circ f_{UU'}).$$

- Tomando el límite directo por refinamiento del recubrimiento, tenemos el **primer grupo de cohomología de Čech con coeficientes en  $G$**

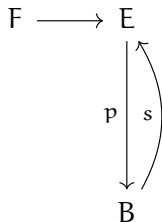
$$\check{H}^1(B, G) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, G).$$

# Secciones



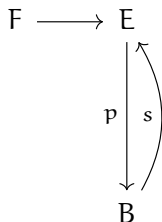
Una **sección** de un fibrado  $p : E \rightarrow B$  es una aplicación continua  $s : B \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = \text{id}_B$ .

# Secciones



Una **sección** de un fibrado  $p : E \rightarrow B$  es una aplicación continua  $s : B \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = \text{id}_B$ .

Una sección local es una sección definida en un abierto  $U \subset B$ .



Una **sección** de un fibrado  $p : E \rightarrow B$  es una aplicación continua  $s : B \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = \text{id}_B$ .

Una sección local es una sección definida en un abierto  $U \subset B$ .

Denotamos  $\Gamma(E)$  al conjunto de las secciones de  $E \rightarrow B$  y

$\Gamma(U, E)$  al conjunto de las secciones locales definidas en un abierto  $U \subset B$ .

# Fibrados principales

Un **fibrado principal**  $(P, B, p, G)$  consta de:

- una variedad diferenciable  $P$ ,

# Fibrados principales

Un **fibrado principal**  $(P, B, p, G)$  consta de:

- ▶ una variedad diferenciable  $P$ ,
- ▶ un grupo de Lie  $G$  actuando libremente por la derecha sobre  $P$ :

$$P \times G \longrightarrow P$$

$$(p, g) \longmapsto p \cdot g,$$



# Fibrados principales

Un **fibrado principal**  $(P, B, p, G)$  consta de:

- ▶ una variedad diferenciable  $P$ ,
- ▶ un grupo de Lie  $G$  actuando libremente por la derecha sobre  $P$ :

$$P \times G \longrightarrow P$$

$$(p, g) \longmapsto p \cdot g,$$

- ▶  $B = P/G$  con una sumersión  $p : P \rightarrow P/G$ , que es la proyección canónica al cociente

# Fibrados principales

Un **fibrado principal**  $(P, B, p, G)$  consta de:

- ▶ una variedad diferenciable  $P$ ,
- ▶ un grupo de Lie  $G$  actuando libremente por la derecha sobre  $P$ :

$$P \times G \longrightarrow P$$

$$(p, g) \longmapsto p \cdot g,$$

- ▶  $B = P/G$  con una sumersión  $p : P \rightarrow P/G$ , que es la proyección canónica al cociente y tal que  $\forall x \in B \exists U^x$  y una trivialización

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times G \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{pr}_1 & \\ & U & \end{array} .$$

# Fibrados principales

Un **fibrado principal**  $(P, B, p, G)$  consta de:

- ▶ una variedad diferenciable  $P$ ,
- ▶ un grupo de Lie  $G$  actuando libremente por la derecha sobre  $P$ :

$$P \times G \longrightarrow P$$

$$(p, g) \longmapsto p \cdot g,$$

- ▶  $B = P/G$  con una sumersión  $p : P \rightarrow P/G$ , que es la proyección canónica al cociente y tal que  $\forall x \in B \exists U^x$  y una trivialización

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times G \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{pr}_1 & \\ & U & \end{array} .$$

Además,  $\varphi_U(y) = (p(y), g_U(y))$  para cierta  $g_U : p^{-1}(U) \rightarrow G$  con  $g_U(y \cdot g) = g_U(y) \cdot g$ .

# Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie.

# Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie. En efecto, para cada sección local  $s_U : U \rightarrow P$  y para cada  $y \in p^{-1}(x)$  existe un único elemento  $g_U(y) \in G$  con  $y = s_U(x)g_U(y)$ .

# Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie. En efecto, para cada sección local  $s_U : U \rightarrow P$  y para cada  $y \in p^{-1}(x)$  existe un único elemento  $g_U(y) \in G$  con  $y = s_U(x)g_U(y)$ .
- Las funciones de transición son de la forma

$$\begin{aligned} U \cap V \times G &\longrightarrow U \cap V \times G \\ (x, h) &\longmapsto (x, g_{UV}(x)h). \end{aligned}$$

# Observaciones

- Podemos pensar en un fibrado principal como en un fibrado sobre una variedad diferenciable cuya fibra es un grupo de Lie. En efecto, para cada sección local  $s_U : U \rightarrow P$  y para cada  $y \in p^{-1}(x)$  existe un único elemento  $g_U(y) \in G$  con  $y = s_U(x)g_U(y)$ .
- Las funciones de transición son de la forma

$$\begin{aligned} U \cap V \times G &\longrightarrow U \cap V \times G \\ (x, h) &\longmapsto (x, g_{UV}(x)h). \end{aligned}$$

- Un fibrado principal admite una sección global si y sólo si es trivial.

# Ejemplos

►  $P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \text{ y}$

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$



# Ejemplos

►  $P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  y

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

Fibra  $\mathbb{Z}_2$  con la acción

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, \pm 1) &\longmapsto \pm z. \end{aligned}$$

# Ejemplos

- $P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  y

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

Fibra  $\mathbb{Z}_2$  con la acción

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, \pm 1) &\longmapsto \pm z. \end{aligned}$$

- $p : \tilde{M} \rightarrow M$  recubridor universal.

# Ejemplos

- $P = B = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  y

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

Fibra  $\mathbb{Z}_2$  con la acción

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, \pm 1) &\longmapsto \pm z. \end{aligned}$$

- $p : \tilde{M} \rightarrow M$  recubridor universal.  
Fibra  $\pi_1(M)$  con la acción de monodromía:

$$\begin{aligned} \tilde{M} \times \pi_1(M) &\longrightarrow \tilde{M} \\ (y, g) &\longmapsto \tilde{\gamma}_g^y(1). \end{aligned}$$

# Fibrado de referencias

El **fibrado de referencias** sobre una variedad diferenciable  $M$  tiene por espacio total

$$L(M) = \{\psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M : x \in M, \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

# Fibrado de referencias

El **fibrado de referencias** sobre una variedad diferenciable  $M$  tiene por espacio total

$$L(M) = \{\psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M : x \in M, \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

con la aplicación

$$\begin{aligned} p : L(M) &\longrightarrow M \\ \psi_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

# Fibrado de referencias

El **fibrado de referencias** sobre una variedad diferenciable  $M$  tiene por espacio total

$$L(M) = \{\psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M : x \in M, \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

con la aplicación

$$\begin{aligned} p : L(M) &\longrightarrow M \\ \psi_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Su fibra es  $GL(n, \mathbb{R})$

# Fibrado de referencias

El **fibrado de referencias** sobre una variedad diferenciable  $M$  tiene por espacio total

$$L(M) = \{\psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M : x \in M, \psi_x \text{ es un isomorfismo lineal}\}$$

con la aplicación

$$\begin{aligned} p : L(M) &\longrightarrow M \\ \psi_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Su fibra es  $GL(n, \mathbb{R})$  con la acción

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi_x} T_x M.$$

i++i