Procesamiento de Señal y Transformadas

Tema 2: Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

Prof. Rubén Vera Rodríguez ruben.vera@uam.es
BiDA Lab, EPS
http://atvs.ii.uam.es/atvs/





Contenidos

- 2.1 Respuesta en frecuencia de sistemas SLI
- 2.2 Transformada de Fourier (FT) y Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)
- 2.3 Propiedades y Tablas de FT y DTFT



Tema 2: Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

2.1 Respuesta en frecuencia de sistemas SLI





Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

- Las exponenciales complejas son autofunciones de los SLIs:
 - La salida de un SLI cuando la entrada es una exponencial compleja es la misma exponencial compleja salvo por un escalado en amplitud y una variación de fase introducidos por el sistema
- Por ello, la representación de señales mediante exponenciales complejas (es decir la representación frecuencial o de Fourier) resulta muy útil en el manejo de SLIs



Autofunciones de los SLI y respuesta en frecuencia (tiempo discreto)

 Dado un SLI con respuesta al impulso h[n] al que se aplica una entrada exponencial compleja de la forma particular

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

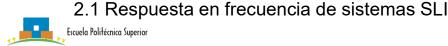
La salida del sistema se puede expresar como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

 La exponencial compleja es una autofunción del SLI, y su autovalor asociado es la respuesta en frecuencia del sistema:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

- La respuesta en frecuencia de los sistemas LTI en tiempo discreto es siempre una función periódica de periodo 2π
 - ullet Sólo es necesario especificarla en un intervalo de longitud 2π
 - Normalmente empleamos $[-\pi, \pi]$





Ejemplo: respuesta de un SLI a una sinusoide (tiempo discreto)

Una sinusoidal se puede expresar como suma de dos exponenciales complejas:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

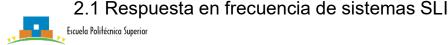
De forma que la salida del sistema, empleando su respuesta en frecuencia es:

$$y[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$$

- $H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})|e^{j\theta}$ Si h[n] es real: $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$, por tanto:
- Siendo: $\theta = \arg(H(e^{j\omega_0}))$, entonces:

$$y[n] = \left| H(e^{j\omega_0}) \right| e^{j\theta} \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \left| H(e^{j\omega_0}) \right| e^{-j\theta} \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n} = A \left| H(e^{j\omega_0}) \right| \cos(\omega_0 n + \varphi + \theta)$$

- La respuesta de un SLI con h[n] real a una sinusoide es una sinusoide:
 - Con amplitud multiplicada por el módulo de la respuesta en frecuencia en ω_0
 - Con fase adelantada en la fase de la respuesta en frecuencia en ω_0
- Utilidad: determinar la respuesta en frecuencia de un SLI desconocido [¿Cómo?]





 $H(e^{-j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})|e^{-j\theta}$



Autofunciones de los SLI y respuesta en frecuencia (tiempo continuo)

 Dado un SLI con respuesta al impulso h(t) al que se aplica una entrada exponencial compleja de la forma particular

$$x(t) = e^{j\Omega t}$$

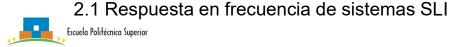
La salida del sistema se puede expresar como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\Omega(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \right) e^{j\Omega t} = H(j\Omega) e^{j\Omega t}$$

 La exponencial compleja es una autofunción del sistema lineal e invariante, y su autovalor asociado es la respuesta en frecuencia del sistema:

$$H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

- La respuesta en frecuencia de los sistemas LTI en tiempo continuo no es una función periódica:
 - Es necesario especificarla en todo el rango real





Aplicación súbita de entradas exponenciales complejas: respuesta en estado estacionario y respuesta transitoria (tiempo discreto)

- A un SLI *causal*, h[n], se le aplica una entrada exponencial compleja súbitamente en el instante n=0: $x[n] = e^{j\omega n}u[n]$
- Salida del sistema para n ≥ 0: [Demostración detallada]

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$

- Los dos términos corresponden a:
 - Respuesta en estado estacionario (respuesta a la exponencial completa)

$$y_{ss}[n] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

Respuesta transitoria (diferencia entre la respuesta del sistema y la anterior)

$$y_{t}[n] = -\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$

- Sistema estable → y_t decrece progresivamente cuando n → ∞
 - Pasado cierto tiempo sólo se aprecia la respuesta en estado estacionario
- 2.1 Respuesta en frecuencia de sistemas SLI





Aplicación súbita de entradas exponenciales complejas: respuesta en estado estacionario y respuesta transitoria (tiempo continuo)

- A un SLI *causal*, h(t), se le aplica una entrada exponencial compleja súbitamente en el instante t=0: $\chi(t) = e^{j\Omega t} u(t)$
- Salida del sistema para t ≥ 0:

$$y(t) = \left(\int_{0}^{t} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau\right)e^{j\Omega t} = \left(\int_{0}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau\right)e^{j\Omega t} - \left(\int_{t}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau\right)e^{j\Omega t}$$

- Los dos términos corresponden a:
 - Respuesta en estado estacionario (respuesta a la exponencial completa)

$$y_{ss}(t) = \left(\int_{0}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau\right)e^{j\Omega t} = H(j\Omega)e^{j\Omega t}$$

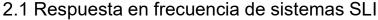
Respuesta transitoria (diferencia entre la respuesta del sistema y la anterior)

$$y_t(t) = -\left(\int_{t}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau\right)e^{j\Omega t}$$

- Sistema estable $\rightarrow y_t$ decrece progresivamente cuando $t \rightarrow \infty$
 - Pasado cierto tiempo sólo se aprecia la respuesta en estado estacionario

[Problemas: P2.13, P2.11, P2.33]





Tema 2: Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

2.2 Transformada de Fourier (FT) y Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)







Transformada de Fourier (FT) y Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

 La suma o integral de Fourier permite representar muchas señales como combinación lineal de exponenciales complejas:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- Esta es la ecuación de síntesis, o Transformada inversa de Fourier
- Los coeficientes de la combinación lineal vienen dados por:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Esta expresión (ecuación de análisis) es la Transformada de Fourier
- La Transformada de Fourier de una señal es una función compleja de ω u Ω , y también se denomina *espectro* de la señal:
 - Su módulo se denomina amplitud del espectro o módulo del espectro
 - Su fase se denomina fase del espectro o simplemente fase





Diferencias entre FT y DTFT

En la transformada directa o ecuación de análisis:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

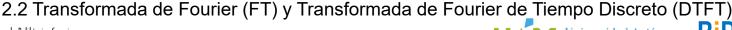
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- La FT no es periódica, pero la DTFT es periódica con periodo 2π
- En la transformada inversa o ecuación de síntesis:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- En la FT el intervalo de integración es infinito, pero en la DTFT es finito (puede ser cualquier intervalo de longitud 2π)
- Las diferencias se deben al hecho de que las exponenciales complejas con Ω y Ω +2 $k\pi$ son diferentes en tiempo continuo, mientras que las exponenciales complejas con ω y ω +2 $k\pi$ son idénticas en tiempo discreto



Relación entre la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso

Definíamos la respuesta en frecuencia de un sistema como:

$$H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \qquad \qquad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

Comparando con las definiciones de FT y DTFT:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Observamos que:
 - Respuesta en frecuencia = FT o DTFT de la respuesta al impulso
- Un sistema LTI queda completamente caracterizado por:
 - La respuesta al impulso, o
 - La respuesta en frecuencia (en caso de existir)





Convergencia de la FT

Si la señal es de energía finita (cuadrado integrable):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt < \infty$$

- La FT existe y converge
 - Al aplicar la ecuación de análisis y síntesis, la señal recuperada puede diferir en puntos aislados de la señal original (pero la energía de la diferencia es nula)
- Condiciones de Dirichlet: Si la señal:
 - Tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito
 - Un número finito de discontinuidades finitas en cualquier intervalo finito
 - Y es absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- Entonces, la FT existe y converge
 - Al aplicar la ecuación de análisis y síntesis, la señal recuperada puede diferir en puntos aislados (los puntos de discontinuidad) de la señal original

Escuela Politécnica Superior



FT de señales periódicas

- No son, en general, de energía finita ni absolutamente integrables
- A pesar de eso resulta muy útil considerar que tienen FT
 - Para ello se admite que la FT esté compuesta por un tren de deltas
- FT de exponencial compleja en t = delta en Ω_0 :

$$X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0)e^{j\Omega t} d\Omega = e^{j\Omega_0 t}$$

Convergencia de la DTFT

- Análisis más sencillo que para FT
 - Ec. de síntesis es una integral sobre intervalo finito
- Si la señal es absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- La DTFT existe, converge uniformemente, y es analítica
 - Al aplicar las ecuaciones de análisis y síntesis, la señal recuperada coincide exactamente con la señal original
- Si la señal es de energía finita (cuadrado sumable):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2 < \infty$$

- La DTFT existe, converge, y puede no ser continua
 - Al aplicar las ecuaciones de análisis y síntesis, la señal recuperada coincide exactamente con la señal original

[Ejemplos: Convergencia uniforme v no uniforme]

DTFT de señales periódicas

- No son, en general, de energía finita ni absolutamente sumables
- A pesar de eso resulta muy útil considerar que tienen DTFT
 - Para ello se admite que la DTFT esté compuesta por un tren de impulsos

• DTFT de exponencial compleja en t = tren de impulsos en ω espaciados en 2π :

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) \leftrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

Tema 2: Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

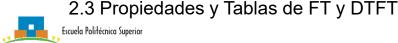
2.3 Propiedades y Tablas de FT y DTFT





Propiedades de la FT y la DTFT (1)

- 1. Periodicidad:
 - FT: No periódica.
 - DTFT: Periódica de periodo 2π : $X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega})$
- 2. Linealidad:
 - $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\Omega) + bY(j\Omega)$ FT:
 - $ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$ DTFT:
- 3. Desplazamiento en el tiempo:
 - FT: $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)$
 - DTFT: $x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
- 4. Desplazamiento en la frecuencia:
 - $e^{j\Omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega \Omega_0))$ FT:
 - DTFT: $e^{j\omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- 5. Inversión en el tiempo y en la frecuencia:
 - FT: $x(-t) \leftrightarrow X(-j\Omega)$
 - DTFT: $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

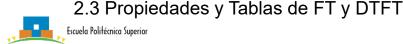






Propiedades de la FT y la DTFT (2)

- 6. Conjugación:
 - FT: $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\Omega); \quad x^*(-t) \leftrightarrow X^*(j\Omega)$ DTFT: $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega}); \quad x^*[-n] \leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$
- 7. Simetría conjugada de la transformada de **señales reales**:
 - FT: $X(i\Omega) = X^*(-i\Omega)$
 - DTFT: $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- 8. Diferenciación en el dominio del tiempo:
 - $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$ FT:
 - $x[n]-x[n-1] \leftrightarrow (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$ DTFT:
- 9. Integración / Acumulación en el dominio del tiempo:
 - FT: $\int_{-\infty}^{\tau} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega}X(j\Omega) + \pi X(j0)\delta(\Omega)$
 - DTFT: $\sum_{n=0}^{\infty} x[m] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\omega 2\pi r)$







Propiedades de la FT y la DTFT (3)

10. Diferenciación en la frecuencia:

• FT:
$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$$
• DTFT:
$$-jnx[n] \leftrightarrow \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

- 11. Compresión / Expansión en el tiempo y en la frecuencia:
 - FT: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X \left(\frac{j\Omega}{a} \right)$
 - DTFT: La compresión / expansión en el tiempo y la frecuencia no tienen las mismas propiedades que en tiempo continuo (lo estudiamos en el siguiente tema)
 - La compresión en el tiempo da lugar a pérdida de muestras
 - La expansión en el tiempo requiere la generación de nuevas muestras



Propiedades de la FT y la DTFT (4)

- 12. Teorema de convolución y consecuencias prácticas:
 - $x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\Omega)H(j\Omega)$ FT:
 - DTFT: $x[n]*h[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
 - Consecuencias prácticas:
 - FT o DTFT salida sistema = FT o DTFT entrada por respuesta en frecuencia
 - Recordar: Respuesta en frecuencia = FT o DTFT respuesta al impulso
 - Respuesta frecuencia asociación serie = Multiplicación respuestas frecuencia
 - Convolución en dominio tiempo ←→ Multiplicación en dominio frecuencia
 - Recordar: Multiplicación compleja =
 - Suma de amplitudes en unidades logarítmicas, y
 - Suma de fases







Propiedades de la FT y la DTFT (5)

13. Teorema de multiplicación, modulación o enventanado:

• FT:
$$x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\Omega - \theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * Y(j\Omega)$$

• DTFT:
$$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- En el caso continuo existe una dualidad completa:
 - Convolución en el tiempo ←→ Multiplicación en frecuencia
 - Multiplicación en el tiempo ←→ Convolución en frecuencia
- En el caso discreto existe una dualidad con matices:
 - Convolución en el tiempo ←→ Multiplicación en frecuencia
 - Multiplicación en el tiempo ←→ Convolución periódica en frecuencia
 - Los límites de integración se extienden a sólo un periodo de la señal



Tabla de FTs básicas (1)

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\Omega)$$

$$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\Omega t_0}$$

$$e^{j\Omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

$$e^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0 \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\Omega)^n} \quad \text{(Se obtiene de la anterior derivando en } \Omega\text{)}$$





Tabla de FTs básicas (2)

$$\chi(t) \longleftrightarrow X(j\Omega)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

(Se obtienen pasando a exponenciales complejas)

$$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi \left(\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0) \right)$$

$$\operatorname{sen}(\Omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{j} \left(\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0) \right)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\operatorname{sen}(\Omega T)}{\Omega}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(Wt)}{\pi t} \longleftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$



Tabla de DTFTs básicas (1)

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$\delta[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$$

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi r)$$

$$a^n u[n], |a| < 1 \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^nu[n], |a| < 1 \leftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$$
 (Se obtiene de la anterior derivando en ω)





Tabla de DTFTs básicas (2)

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kT] \longleftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

(Se obtienen pasando a exponenciales complejas)

$$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \pi \left(\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r) \right)$$

$$\operatorname{sen}(\omega_0 n) \longleftrightarrow \sum_{r=-\infty}^{r=-\infty} \frac{\pi}{j} \left(\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r) \right)$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le T \\ 0, & |n| > T \end{cases} \longleftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\left(\omega(T + \frac{1}{2})\right)}{\operatorname{sen}(\omega/2)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(Wn)}{\pi n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le W \\ 0, & W < |\omega| \le \pi \end{cases} \quad periodica$$

[Ejemplos Tablas: E2.26, E2.27] [Problemas: P2.57, P2.8, P2.14, P2.44, P2.17]