Tema 2: Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

Prof. Rubén Vera Rodríguez
ruben.vera@uam.es
BiDA Lab, EPS
http://atvs.ii.uam.es/atvs/

Contenidos

Tema 2: Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

2.1 Respuesta en frecuencia de sistemas SLI

Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

- Las exponenciales complejas son *autofunciones* de los SLIs:
  - La salida de un SLI cuando la entrada es una exponencial compleja es la misma exponencial compleja salvo por un escalado en amplitud y una variación de fase introducidos por el sistema
- Por ello, la representación de señales mediante exponenciales complejas (es decir la *representación frecuencial* o de *Fourier*) resulta muy útil en el manejo de SLIs

Autofunciones de los SLI y respuesta en frecuencia (tiempo discreto)

- Dado un SLI con respuesta al impulso $h[n]$ al que se aplica una entrada exponencial compleja de la forma particular

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

- La salida del sistema se puede expresar como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} = H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}$$

- La exponencial compleja es una *autofunción* del SLI, y su *autovalor* asociado es la *respuesta en frecuencia del sistema*:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

- La respuesta en frecuencia de los sistemas LTI en tiempo discreto es siempre una función periódica de periodo 2π
  - Sólo es necesario especificarla en un intervalo de longitud 2π
  - Normalmente empleamos $[-\pi, \pi]$

Ejemplo: respuesta de un SLI a una sinusoide (tiempo discreto)

- Una sinusoidal se puede expresar como suma de dos exponenciales complejas:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

- De forma que la salida del sistema, empleando su respuesta en frecuencia es:

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j\omega_0 n} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 n}$$

- Si *h*[*n*] es real: $H\left(e^{j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$, por tanto:

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\theta}$$

$$H\left(e^{-j\omega_0}\right) = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{-j\theta}$$

- Siendo: $\theta = \arg\left(H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$, entonces:

$$y[n] = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\theta}\frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j\omega_0 n} + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{-j\theta}\frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 n} = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos(\omega_0 n + \varphi + \theta)$$

- La respuesta de un SLI con *h*[*n*] real a una sinusoide es una sinusoide:
  - Con amplitud multiplicada por el módulo de la respuesta en frecuencia en ω_0
  - Con fase adelantada en la fase de la respuesta en frecuencia en ω_0
- Utilidad: determinar la respuesta en frecuencia de un SLI desconocido [¿Cómo?]

Autofunciones de los SLI y respuesta en frecuencia (tiempo continuo)

- Dado un SLI con respuesta al impulso *h*(t) al que se aplica una entrada exponencial compleja de la forma particular

$$x(t) = e^{j\Omega t}$$

- La salida del sistema se puede expresar como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\Omega(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \right) e^{j\Omega t} = H(j\Omega) e^{j\Omega t}$$

- La exponencial compleja es una *autofunción* del sistema lineal e invariante, y su *autovalor* asociado es la *respuesta en frecuencia del sistema*:

$$H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

- La respuesta en frecuencia de los sistemas LTI en tiempo continuo no es una función periódica:
  - Es necesario especificarla en todo el rango real

Aplicación súbita de entradas exponenciales complejas: respuesta en estado estacionario y respuesta transitoria (tiempo discreto)

- A un SLI *causal*, *h*[*n*], se le aplica una entrada exponencial compleja súbitamente en el instante *n*=0: $x[n]=e^{j\omega n}u[n]$
- Salida del sistema para *n* ≥ 0: [Demostración detallada]

$$y[n]=\left(\sum_{k=0}^{n}h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}-\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$

- Los dos términos corresponden a:
  - *Respuesta en estado estacionario* (respuesta a la exponencial completa)

$$y_{ss}[n]=\left(\sum_{k=0}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

  - *Respuesta transitoria* (diferencia entre la respuesta del sistema y la anterior)

$$y_t[n]=-\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$

- Sistema *estable* → y_t decrece progresivamente cuando *n* → ∞
  - Pasado cierto tiempo sólo se aprecia la respuesta en estado estacionario

Aplicación súbita de entradas exponenciales complejas: respuesta en estado estacionario y respuesta transitoria (tiempo continuo)

- A un SLI *causal*, *h*(t), se le aplica una entrada exponencial compleja súbitamente en el instante *t*=0: $x(t) = e^{j\Omega t}u(t)$
- Salida del sistema para $t \geq 0$:

$$y(t) = \left(\int_0^t h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \right)e^{j\Omega t} = \left(\int_0^\infty h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \right)e^{j\Omega t} - \left(\int_t^\infty h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \right)e^{j\Omega t}$$

- Los dos términos corresponden a:
  - *Respuesta en estado estacionario* (respuesta a la exponencial completa)

$$y_{ss}(t) = \left(\int_0^\infty h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \right)e^{j\Omega t} = H(j\Omega)e^{j\Omega t}$$

  - *Respuesta transitoria* (diferencia entre la respuesta del sistema y la anterior)

$$y_t(t) = -\left(\int_t^\infty h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \right)e^{j\Omega t}$$

- Sistema *estable* → y_t decrece progresivamente cuando $t \to \infty$
  - Pasado cierto tiempo sólo se aprecia la respuesta en estado estacionario

[Problemas: P2.13, P2.11, P2.33]

Tema 2: Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

2.2 Transformada de Fourier (FT) y Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

Transformada de Fourier (FT) y Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (DTFT)

- La *suma o integral de Fourier* permite representar muchas señales como combinación lineal de exponenciales complejas:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- Esta es la *ecuación de síntesis,* o *Transformada inversa de Fourier*
- Los coeficientes de la combinación lineal vienen dados por:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- Esta expresión (*ecuación de análisis)* es la *Transformada de Fourier*
- La Transformada de Fourier de una señal es una función compleja de *ω* u *Ω*, y también se denomina *espectro* de la señal:
  - Su módulo se denomina *amplitud del espectro* o *módulo del espectro*
  - Su fase se denomina *fase del espectro* o simplemente *fase*

Diferencias entre FT y DTFT

- En la transformada directa o ecuación de análisis:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

  - La FT no es periódica, pero la DTFT es periódica con periodo 2π
- En la transformada inversa o ecuación de síntesis:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

  - En la FT el intervalo de integración es infinito, pero en la DTFT es finito (puede ser cualquier intervalo de longitud 2π)
- Las diferencias se deben al hecho de que las exponenciales complejas con Ω y $\Omega+2k\pi$ son diferentes en tiempo continuo, mientras que las exponenciales complejas con ω y $\omega+2k\pi$ son idénticas en tiempo discreto

Relación entre la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso

- Definíamos la respuesta en frecuencia de un sistema como:

$$H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \qquad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

- Comparando con las definiciones de FT y DTFT:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \qquad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- Observamos que:
  - Respuesta en frecuencia = FT o DTFT de la respuesta al impulso
- Un sistema LTI queda completamente caracterizado por:
  - La respuesta al impulso, o
  - La respuesta en frecuencia (en caso de existir)

Convergencia de la FT

- Si la señal es de energía finita (cuadrado integrable):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

  - La FT existe y converge
    - Al aplicar la ecuación de análisis y síntesis, la señal recuperada puede diferir en puntos aislados de la señal original (pero la energía de la diferencia es nula)
- Condiciones de Dirichlet: Si la señal:
  - Tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito
  - Un número finito de discontinuidades finitas en cualquier intervalo finito
  - Y es absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

  - Entonces, la FT existe y converge
    - Al aplicar la ecuación de análisis y síntesis, la señal recuperada puede diferir en puntos aislados (los puntos de discontinuidad) de la señal original

FT de señales periódicas

- No son, en general, de energía finita ni absolutamente integrables
- A pesar de eso resulta muy útil considerar que tienen FT
  - Para ello se admite que la FT esté compuesta por un tren de deltas
- FT de exponencial compleja en t = delta en Ω_0 :

$$X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0)e^{j\Omega t}d\Omega = e^{j\Omega_0 t}$$

Convergencia de la DTFT

- Análisis más sencillo que para FT
  - Ec. de síntesis es una integral sobre intervalo finito
- Si la señal es absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

  - La DTFT existe, converge uniformemente, y es analítica
    - Al aplicar las ecuaciones de análisis y síntesis, la señal recuperada coincide exactamente con la señal original
- Si la señal es de energía finita (cuadrado sumable):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

  - La DTFT existe, converge, y puede no ser continua
    - Al aplicar las ecuaciones de análisis y síntesis, la señal recuperada coincide exactamente con la señal original

[Ejemplos: Convergencia uniforme y no uniforme]

DTFT de señales periódicas

- No son, en general, de energía finita ni absolutamente sumables
- A pesar de eso resulta muy útil considerar que tienen DTFT
  - Para ello se admite que la DTFT esté compuesta por un tren de impulsos
- DTFT de exponencial compleja en *t* = tren de impulsos en ω espaciados en 2π:

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) \leftrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

Tema 2: Representación en el dominio de la frecuencia de señales y sistemas

2.3 Propiedades y Tablas de FT y DTFT

Propiedades de la FT y la DTFT (1)

- 1. Periodicidad:
  - FT: No periódica.
  - DTFT: Periódica de periodo 2π: $X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega})$
- 2. Linealidad:
  - FT: $ax(t)+by(t) \leftrightarrow aX(j\Omega)+bY(j\Omega)$
  - DTFT: $ax[n]+by[n] \leftrightarrow aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
- 3. Desplazamiento en el tiempo:
  - FT: $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_0}X(j\Omega)$
  - DTFT: $x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
- 4. Desplazamiento en la frecuencia:
  - FT: $e^{j\Omega_0 t}x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega-\Omega_0))$
  - DTFT: $e^{j\omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
- 5. Inversión en el tiempo y en la frecuencia:
  - FT: $x(-t) \leftrightarrow X(-j\Omega)$
  - DTFT: $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

Propiedades de la FT y la DTFT (2)

- 6. Conjugación:
  - FT: $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\Omega); \quad x^*(-t) \leftrightarrow X^*(j\Omega)$
  - DTFT: $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega}); \quad x^*[-n] \leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$
- 7. Simetría conjugada de la transformada de ***señales reales***:
  - FT: $X(j\Omega) = X^*(-j\Omega)$
  - DTFT: $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- 8. Diferenciación en el dominio del tiempo:
  - FT: $\dfrac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$
  - DTFT: $x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
- 9. Integración / Acumulación en el dominio del tiempo:
  - FT: $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega}X(j\Omega) + \pi X(j0)\delta(\Omega)$
  - DTFT: $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0})\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - 2\pi r)$

Propiedades de la FT y la DTFT (3)

- 10. Diferenciación en la frecuencia:
  - FT: $$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$$
  - DTFT: $$-jnx[n] \leftrightarrow \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

- 11. Compresión / Expansión en el tiempo y en la frecuencia:
  - FT: $$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\Omega}{a}\right)$$
  - DTFT: La compresión / expansión en el tiempo y la frecuencia no tienen las mismas propiedades que en tiempo continuo (lo estudiamos en el siguiente tema)
    - La compresión en el tiempo da lugar a pérdida de muestras
    - La expansión en el tiempo requiere la generación de nuevas muestras

Propiedades de la FT y la DTFT (4)

- 12. Teorema de convolución y consecuencias prácticas:
  - FT: $x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\Omega)H(j\Omega)$
  - DTFT: $x[n] * h[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
  - Consecuencias prácticas:
    - FT o DTFT salida sistema = FT o DTFT entrada por respuesta en frecuencia
      - Recordar: Respuesta en frecuencia = FT o DTFT respuesta al impulso
    - Respuesta frecuencia asociación serie = Multiplicación respuestas frecuencia
    - Convolución en dominio tiempo ←→ Multiplicación en dominio frecuencia
      - Recordar: Multiplicación compleja =
        - Suma de amplitudes en unidades logarítmicas, y
        - Suma de fases

Propiedades de la FT y la DTFT (5)

- 13. Teorema de multiplicación, modulación o enventanado:
  - FT: $$x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\Omega-\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * Y(j\Omega)$$
  - DTFT: $$x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$
  - En el caso continuo existe una dualidad completa:
    - Convolución en el tiempo ←→ Multiplicación en frecuencia
    - Multiplicación en el tiempo ←→ Convolución en frecuencia
  - En el caso discreto existe una dualidad con matices:
    - Convolución en el tiempo ←→ Multiplicación en frecuencia
    - Multiplicación en el tiempo ←→ *Convolución periódica* en frecuencia
      - Los límites de integración se extienden a sólo un periodo de la señal

Tabla de FTs básicas (1)

$$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_0}$$

$$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$$

$$e^{-at}u(t), \mathrm{Re}\{a\}>0 \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \mathrm{Re}\{a\}>0 \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\Omega)^n}$$

(Se obtiene de la anterior derivando en Ω)

Tabla de FTs básicas (2)

$$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

(Se obtienen pasando a exponenciales complejas)

$$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi\left(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right)$$

$$\operatorname{sen}(\Omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\left(\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\operatorname{sen}(\Omega T)}{\Omega}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$

Tabla de DTFTs básicas (1)

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$\delta[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$$

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega-2\pi r)$$

$$a^n u[n], |a|<1 \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], |a|<1 \leftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$$

(Se obtiene de la anterior derivando en ω)

Tabla de DTFTs básicas (2)

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kT] \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

(Se obtienen pasando a exponenciales complejas)

$$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\left(\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi r)\right)$$

$$\text{sen}(\omega_0 n) \leftrightarrow \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-\omega_0-2\pi r)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi r)\right)$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le T \\ 0, & |n| > T \end{cases} \leftrightarrow \frac{\text{sen}\left(\omega(T+\frac{1}{2})\right)}{\text{sen}(\omega/2)}$$

$$\frac{\text{sen}(Wn)}{\pi n} \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le W \\ 0, & W < |\omega| \le \pi \end{cases} \quad \textit{periódica}$$

[Ejemplos Tablas: E2.26, E2.27] [Problemas: P2.57, P2.8, P2.14, P2.44, P2.17]