Procesamiento de Señal y Transformadas

Tema 1: Sistemas Lineales y Convolución

Prof. Rubén Vera Rodríguez
ruben.vera@uam.es
BiDA Lab, EPS
http://atvs.ii.uam.es/atvs/

Contenidos

1.1 Señales en tiempo continuo y en tiempo discreto

1.2 Sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto

1.3 Sistemas Lineales e Invariantes con el tiempo. Convolución

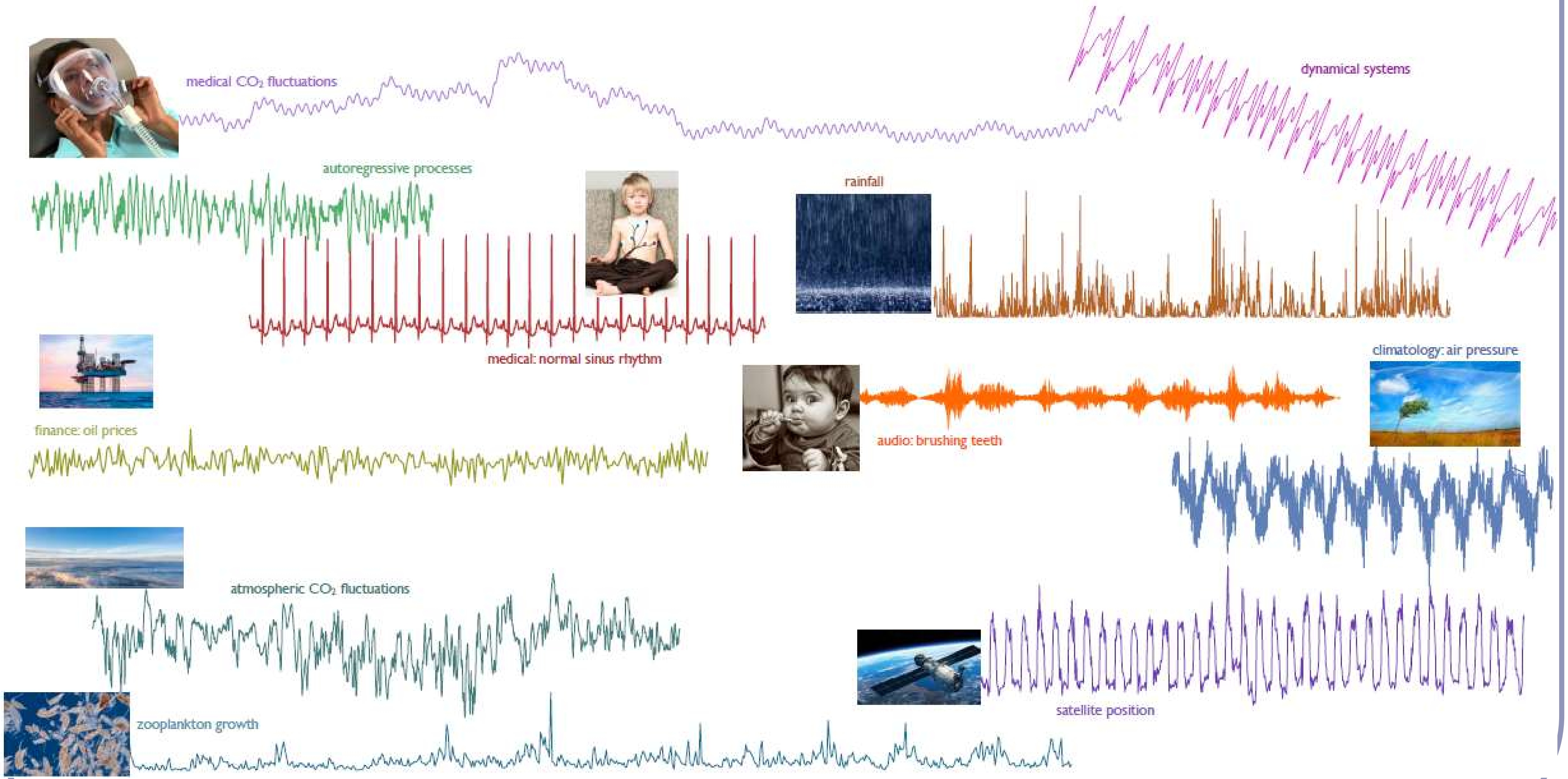
Tema 1: Sistemas Lineales y Convolución

1.1 Señales en tiempo continuo y en tiempo discreto

Definición de señal y ejemplos

- ***Señal***: Representación de la variación de una magnitud en función de una o varias variables independientes. Transportan información.
- Ejemplos:
  - Corrientes o tensiones en un circuito eléctrico en función del tiempo
  - Voz: presión acústica en función del tiempo
  - Imagen monocromática: nivel de gris en función de dos variables espaciales
  - Índice IBEX 35 al cierre de cada sesión

Definición de señal y ejemplos

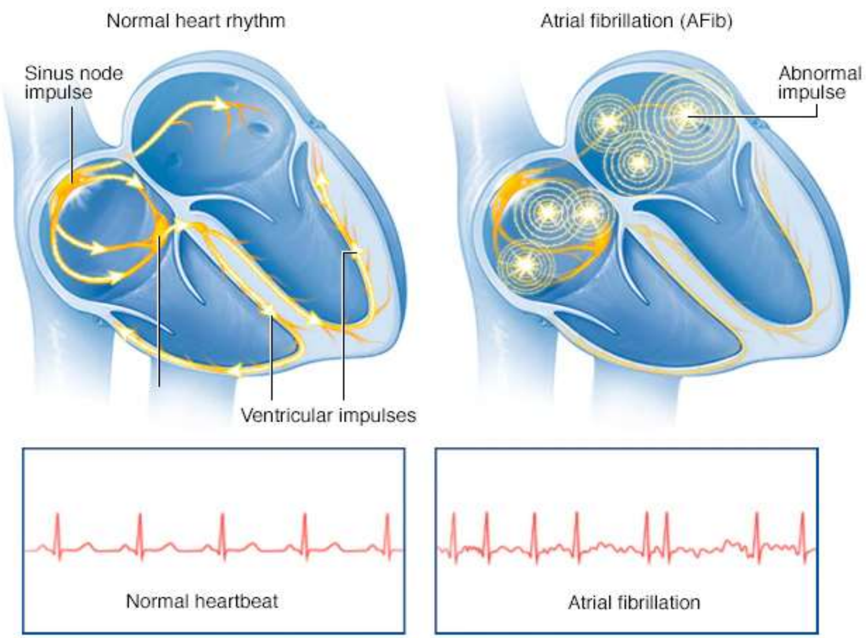


Definición de señal y ejemplos

Definición de señal y ejemplos

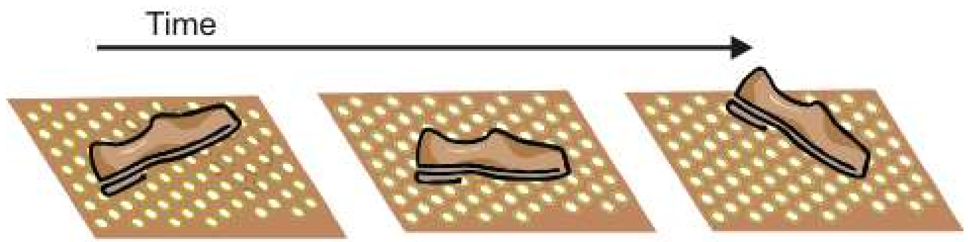
Señal biomédica: electrocardiograma (ECG)

- Un periodo representa un ciclo del polarización y despolarización en el corazón
- Permite el diagnóstico de arritmias.

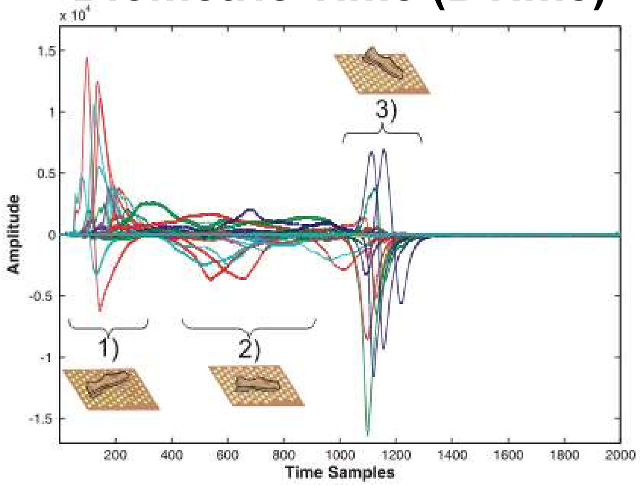


Definición de señal y ejemplos

Reconocimiento biométrico por la forma de andar

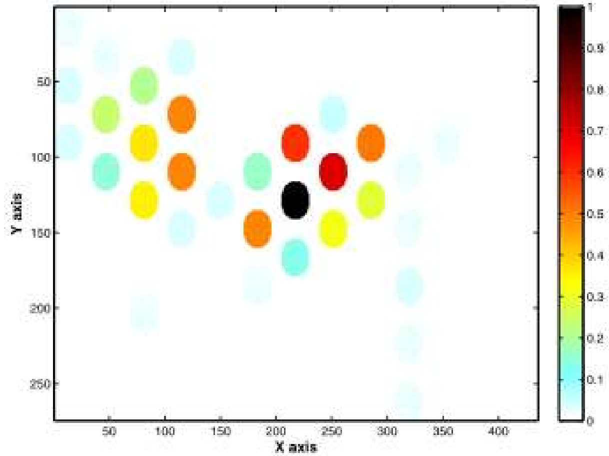


Biometric Time (BTime)



Behavioural

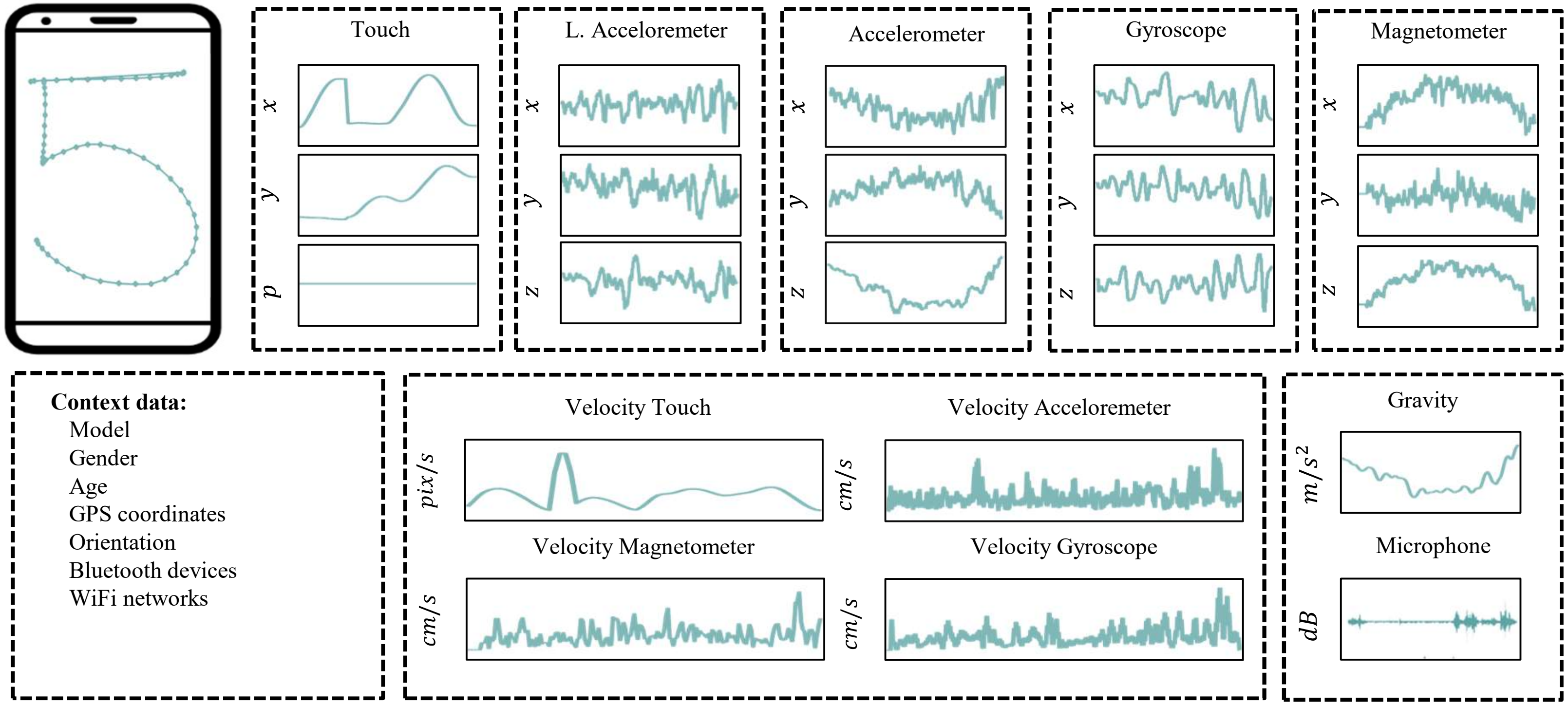
Biometric Space (BSpace)



Physiological

Definición de señal y ejemplos

Interacción con dispositivos móviles



HuMiDB

Representación matemática de señales

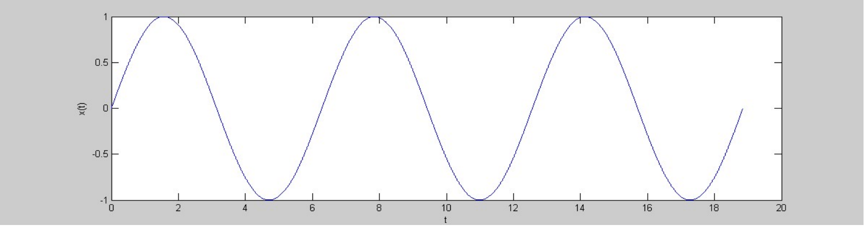
- Se representan como funciones o secuencias que expresan la variación de la amplitud de la señal en función de la(s) variable(s) independiente(s)
- Ejemplos:
  - Corrientes o Tensiones en un circuito eléctrico en función del tiempo: $i(t)$, $v(t)$
  - Voz - presión acústica en función del tiempo: $p(t)$
  - Imagen (b/n) - nivel de gris en función de dos variables espaciales: $g(x,y)$
  - Índice IBEX 35 al cierre de cada sesión: $i[n]$
- En muchos casos la variable independiente es el tiempo
  - Generalización: la variable independiente se suele denominar *tiempo* aunque no lo sea
- Notación empleada:
  - Señales de tiempo continuo: $x(t)$
  - Señales de tiempo discreto: $x[n]$

Clasificación de señales

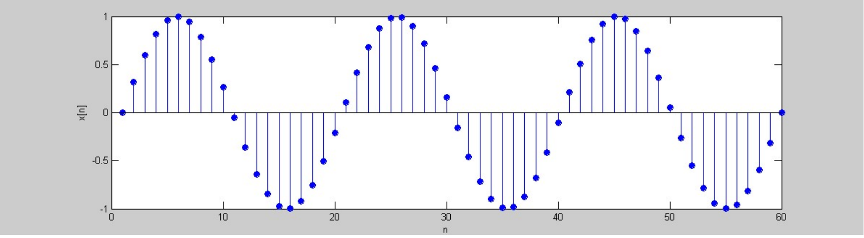
- En función de si *tiempo* y *amplitud* son continuas o discretas:
- ***Señal analógica o en tiempo continuo***: amplitud y tiempo continuos
- ***Señal en tiempo discreto***: tiempo discreto, amplitud continua
- ***Señal digital***: amplitud y tiempo discretos
- Notación y representación matemática:
  - Señales analógicas o en tiempo continuo: $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$
    - Función de los números reales en los números reales
  - Señales en tiempo discreto: $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$
    - Función de los números enteros en los reales (*secuencia*)
  - Señales digitales: $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$
    - Función de los números enteros en un subconjunto finito de números reales

Señales analógicas y señales en tiempo discreto: Muestreo

- Existen señales que son naturalmente de tiempo discreto. ¿ejemplos?
- Más frecuentemente se obtienen a partir de señales analógicas
- Mediante ***muestreo*** de la señal de tiempo continuo
  - El muestreo más habitual es el uniforme: $x[n] = x(nT)$
    - T es el *periodo de muestreo* y su inversa, f_s la *frecuencia de muestreo*
- *Señal en tiempo continuo*
  - Representación gráfica:

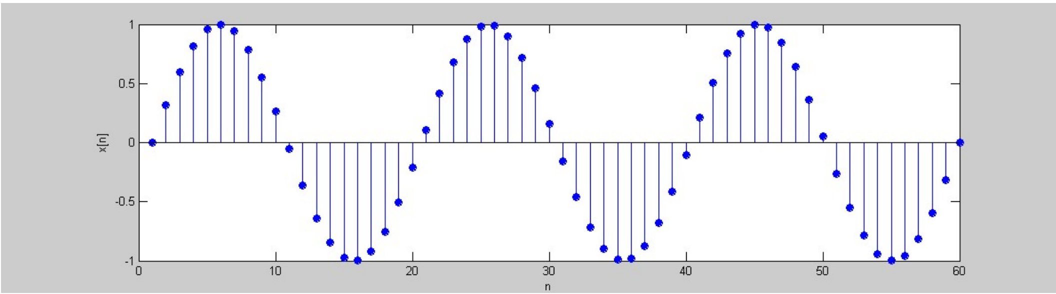


- *Señal en tiempo discreto* obtenida por muestreo uniforme
  - Representación gráfica:

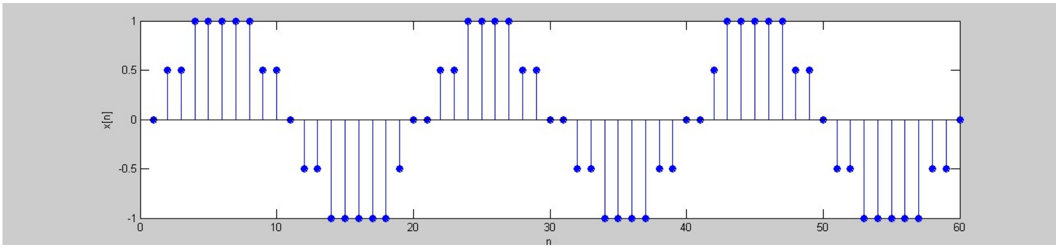


Señales en tiempo discreto y señales digitales: Cuantificación

- ***Cuantificación***: aproximar la amplitud de la señal por el valor discreto permitido más próximo a la amplitud original
- Transforma señales en tiempo discreto en señales digitales que se pueden codificar con un número de bits.
- *Señal de tiempo discreto:*



- *Señal digital* obtenida por cuantificación en 5 niveles:



Tratamiento digital de señales y tratamiento de señales en tiempo discreto

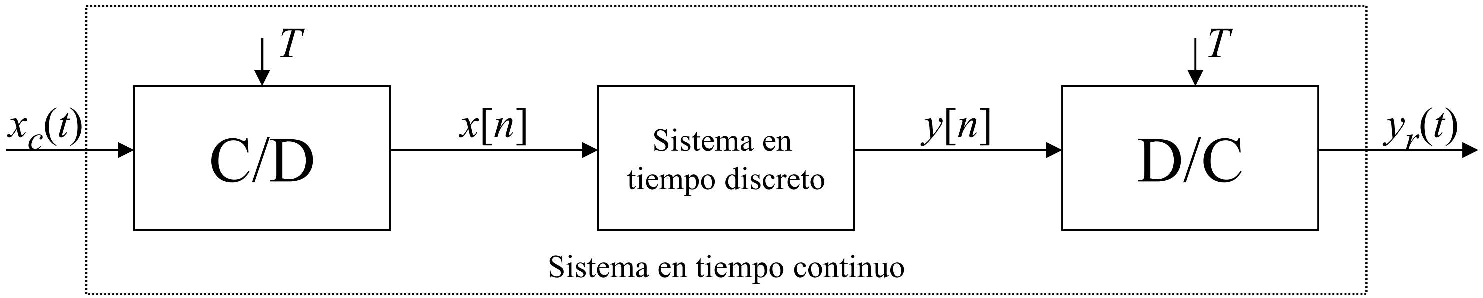
- *Tratamiento digital de señales:* transformación de señales digitales (discretas en tiempo y amplitud)

- *Tratamiento de señales en tiempo discreto:* señales discretas en tiempo pero continuas en amplitud

- En este curso vemos casi exclusivamente *tratamiento de señales en tiempo discreto*, ya que:
  - Si la cuantificación es suficientemente fina, sus efectos pueden considerarse despreciables
  - Efectos de la cuantificación:
    - Se estudian de forma independiente
    - Se modelan como ruido aditivo de cuantificación

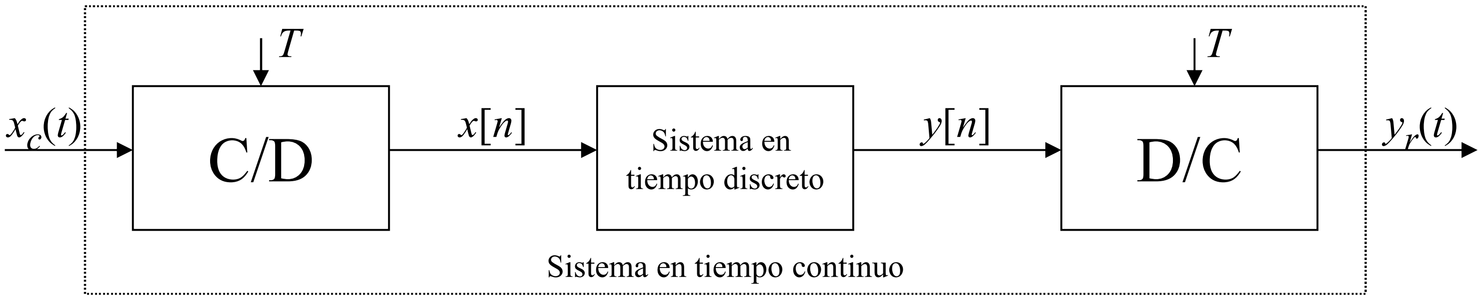
Tratamiento digital de señales y tratamiento analógico de señales

- Las señales analógicas admiten tratamiento analógico o digital
- Pasos para el tratamiento digital de señales analógicas:
  - Transformar señal analógica en señal de tiempo discreto (muestreo)
    - *Teorema de muestreo:* Condición para no perder información en muestreo
  - Transformar señal de tiempo discreto en señal digital (cuantificación)
    - Si la cuantificación es suficientemente fina, sus efectos son despreciables
  - Procesamiento de la señal digital
  - Transformar señal digital procesada en señal analógica procesada (reconstrucción)



Tratamiento digital de señales y tratamiento analógico de señales

- Ventajas del tratamiento digital de señales analógicas:
  - Procesado más flexible y sofisticado
  - Muchas veces también más económico



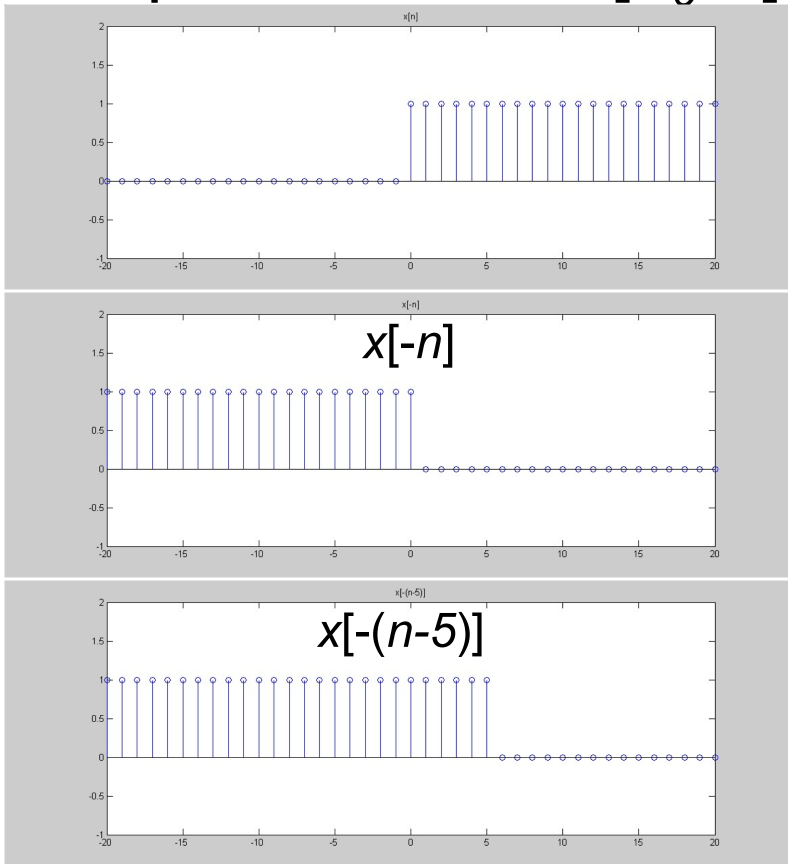
Operaciones básicas con Señales

- Suma de señales: $x(t)+y(t)$, $x[n]+y[n]$
- Producto de señales: $x(t)y(t)$, $x[n]y[n]$
- Producto de una señal por un escalar: $\alpha x(t)$, $\alpha x[n]$
- Transformaciones de la variable independiente:
  - Desplazamiento en el tiempo: $x(t-t_0)$, $x[n-n_0]$
  - Inversión de tiempo: $x(-t)$, $x[-n]$
  - Escalado del tiempo:
    - Compresión en tiempo continuo: $x(\alpha t)$, $\alpha > 1$
    - Expansión en tiempo continuo: $x(\alpha t)$, $\alpha < 1$
    - En tiempo discreto las operaciones equivalentes son las operaciones de cambio de frecuencia de muestreo
      - Son más complejas y las vemos al final de este tema

      [Ver en Pizarra]

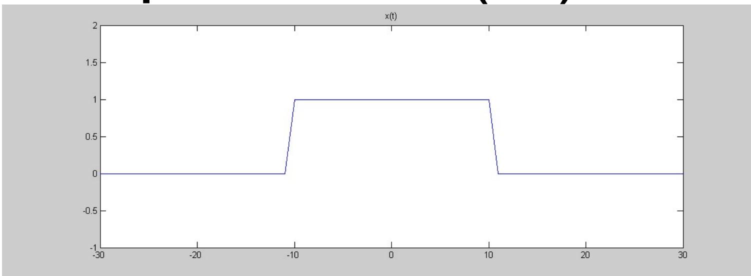
Operaciones básicas con señales: Ejemplo I

- Reflexión + desplazamiento: $x[n_0-n]=x[-(n-n_0)]$

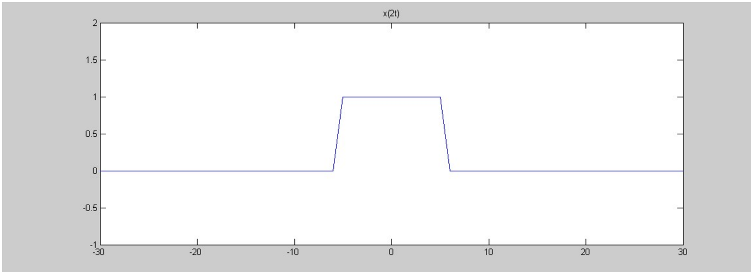


Operaciones básicas con Señales: Ejemplo II

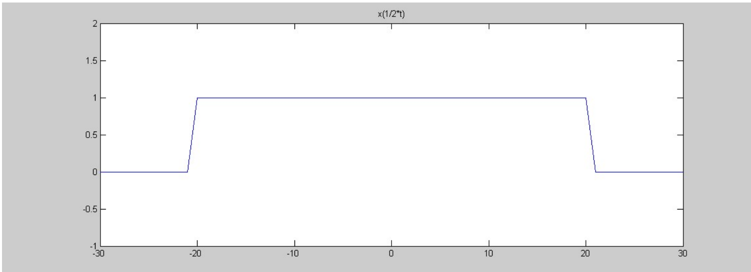
- Compresión/Expansión: $x(\alpha t)$



- $\alpha = 2$



- $\alpha = 1/2$

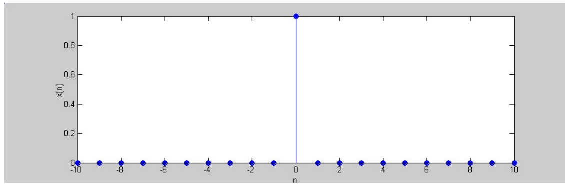


Señal Impulso Unidad y Escalón Unidad

Tiempo discreto

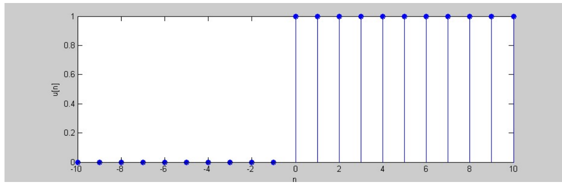
Impulso Unidad

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Escalón Unidad

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Relaciones:

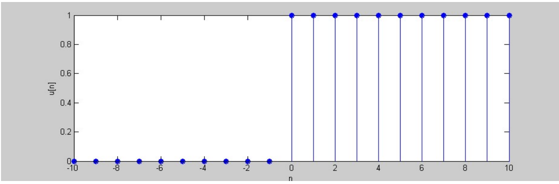
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

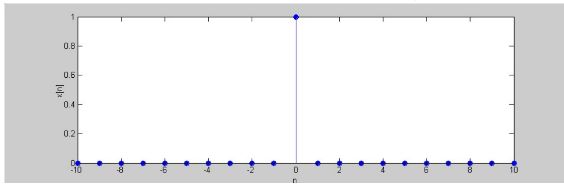
Escalón unidad e impulso unidad

Tiempo discreto

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

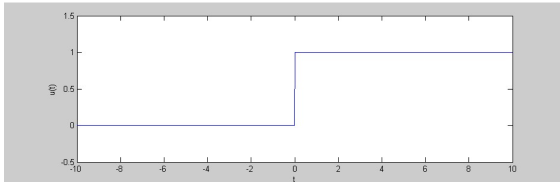


$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

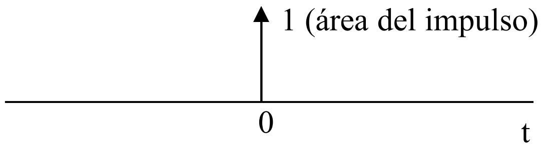


Tiempo continuo

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}=\lim_{\Delta\to 0}\delta_{\Delta}(t)\quad siendo\quad \delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta\\ 0 & resto\end{cases}$$



Propiedades del impulso unidad

$\delta[n]$

- Propiedad de muestreo:

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

- Expresión de una señal cualquiera como una suma de impulsos escalados y desplazados:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$\delta(t)$

- Propiedad de muestreo:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

- Expresión de una señal cualquiera como una integral de impulsos escalados y desplazados:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Señales exponenciales en tiempo continuo

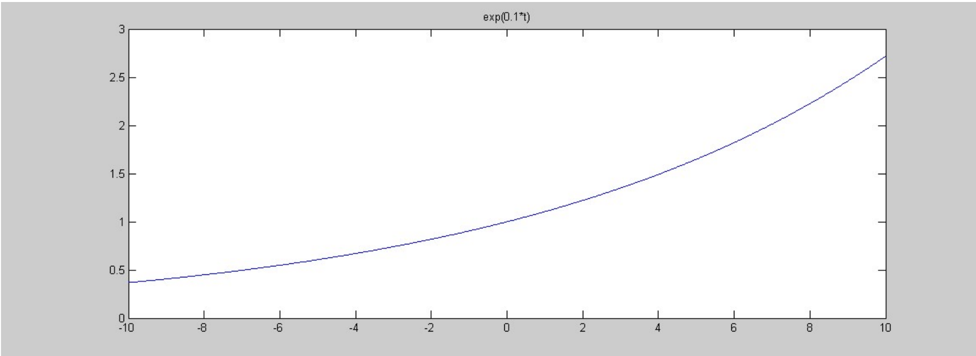
- Señal exponencial general: $x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\phi}e^{rt}e^{j\Omega_0 t}$
- Casos:
  - 1. Exponenciales reales (*C* y *a*=*r* reales) $x(t) = Ce^{at} = Ce^{rt}$
    - Exponenciales crecientes o decrecientes en función del valor de *a*=*r*

Señales exponenciales en tiempo continuo: Ejemplos I

- Exponenciales reales (*C=1*)

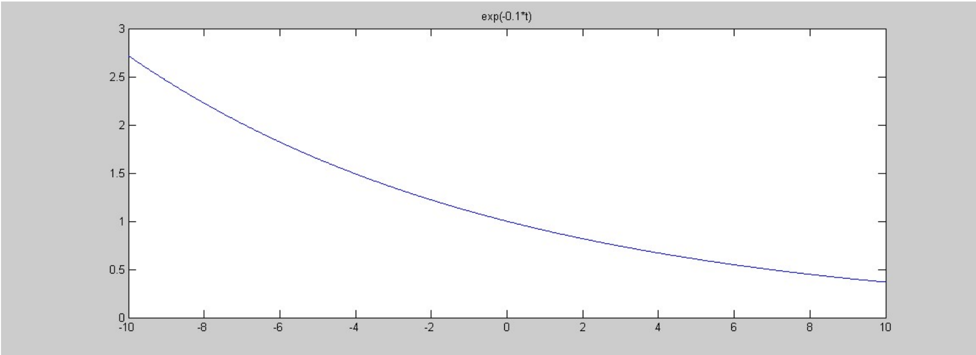
$$x(t) = Ce^{at} = Ce^{rt}$$

- *a*=*r*=0.1



$$x(t) = e^{0.1t}$$

- *a*=*r*=-0.1



$$x(t) = e^{-0.1t}$$

Señales exponenciales en tiempo continuo

- Señal exponencial general: $x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\phi}e^{rt}e^{j\Omega_0 t}$
- Casos:
  - 2. Exponenciales complejas periódicas (*a* imaginario puro)

$$x(t) = |C|e^{j\phi}e^{j\Omega_0 t} = |C|\cos(\Omega_0 t + \phi) + j|C|sen(\Omega_0 t + \phi)$$

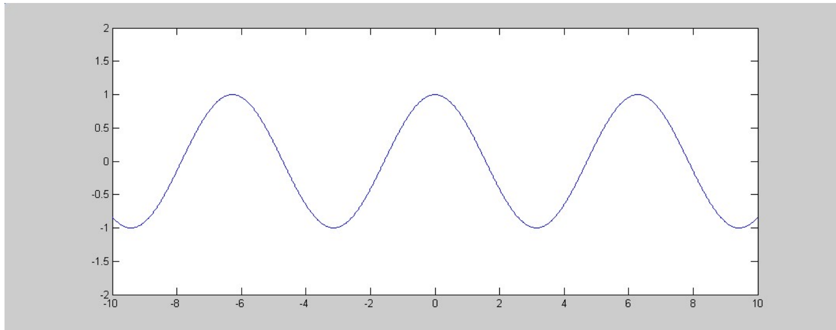
Relación Euler: $e^{jx} = \cos(x) + jsen(x)$

$$A\cos(\Omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\Omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\Omega_0 t}$$

- Parte real e imaginaria: sinusoidales con periodo fundamental $T_0 = \frac{2\pi}{|\Omega_0|}$

Señales exponenciales en tiempo continuo: Ejemplos II

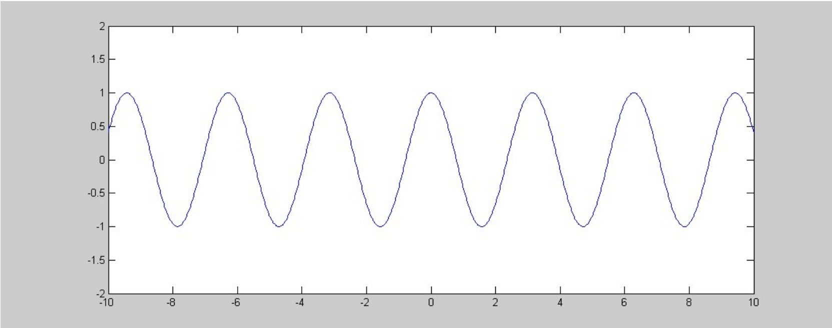
- Exponenciales complejas periódicas: *a* imaginario puro (*C=1*)
- *a=j*



$$x(t) = e^{jt} = \cos(t) + jsen(t)$$

En las figuras sólo aparece la parte real

- *a=2j*



$$x(t) = e^{j2t} = \cos(2t) + jsen(2t)$$

Señales exponenciales en tiempo continuo

- Señal exponencial general: $x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\phi}e^{rt}e^{j\Omega_0 t}$
- Casos:
  - 3. Exponenciales complejas genéricas

$$x(t) = |C|e^{j\phi}e^{rt}e^{j\Omega_0 t} = |C|e^{rt}\cos(\Omega_0 t + \phi) + j|C|e^{rt}sen(\Omega_0 t + \phi)$$

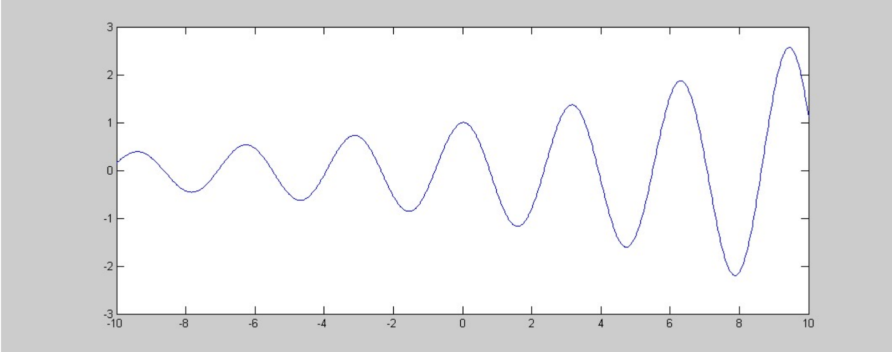
    - Parte real e imaginaria: sinusoidales crecientes o amortiguadas en función del valor de *r*

Señales exponenciales en tiempo continuo: Ejemplos III

- Exponenciales complejas genéricas (*C=1*)

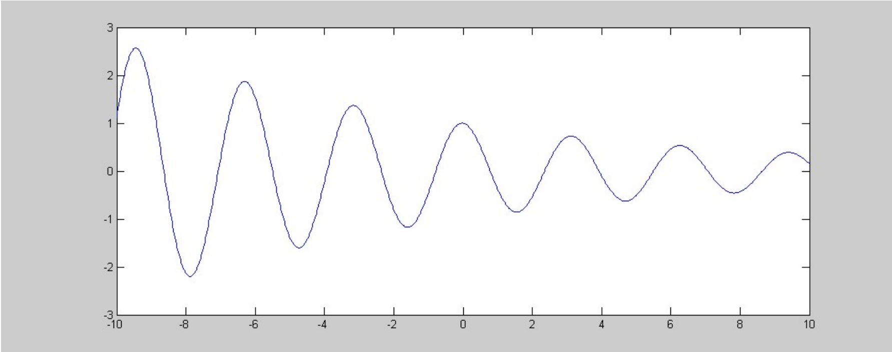
$$x(t) = e^{0.1t}e^{j2t} = e^{0.1t}\cos(2t) + je^{0.1t}sen(2t)$$

- *a*=0.1+2*j*



$$x(t) = e^{-0.1t}e^{j2t} = e^{-0.1t}\cos(2t) + je^{-0.1t}sen(2t)$$

- *a*=-0.1+2*j*



En las figuras sólo aparece la parte real

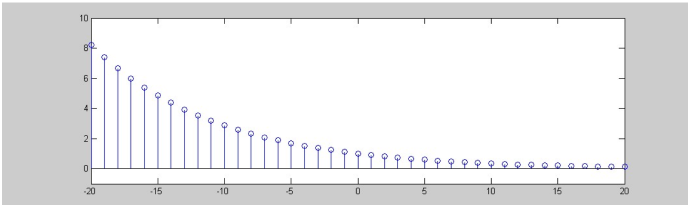
Señales exponenciales en tiempo discreto

- Señal exponencial general: $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n} = |C|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n}$
- Casos:
  - 1. Exponencial real (C y α reales) $x[n] = C\alpha^n$
    - Exponencial creciente o decreciente en módulo en función de $|\alpha|$ mayor o menor que 1
    - Signo positivo y negativo alterno si α negativo

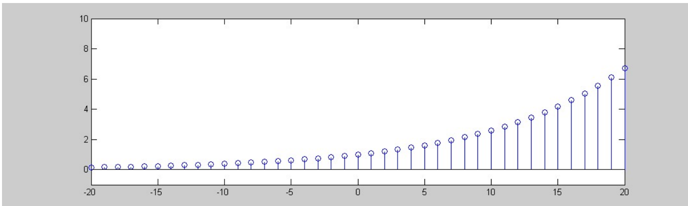
Señales exponenciales en tiempo discreto: Ejemplos I

$$x[n] = C\alpha^n$$

- Exponenciales reales (*C=1)*
- α =0.9 (<1)

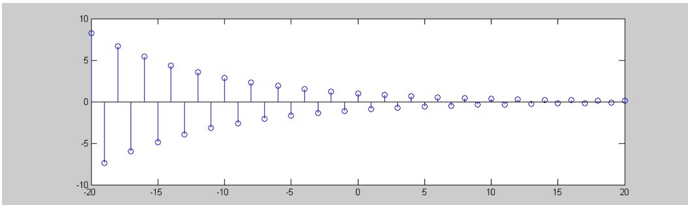


- α =1.1 (>1)



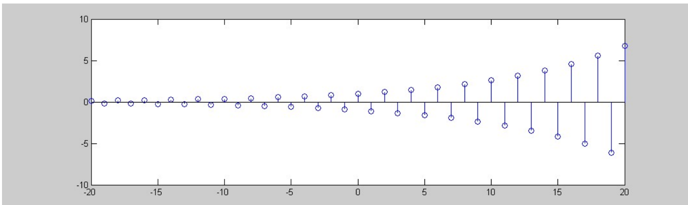
- α =-0.9

(-1< α <0)



- α =-1.1

(α <-1)



Señales exponenciales en tiempo discreto

- Señal exponencial general: $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n} = |C|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n}$
- Casos:
  - 2. Exponenciales complejas con $|\alpha|$=1, β imaginario puro

$$x[n] = |C|e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} = |C|\cos(\omega_0 n + \phi) + j|C|sen(\omega_0 n + \phi)$$

- Relación Euler: $e^{jx} = \cos(x) + jsen(x)$

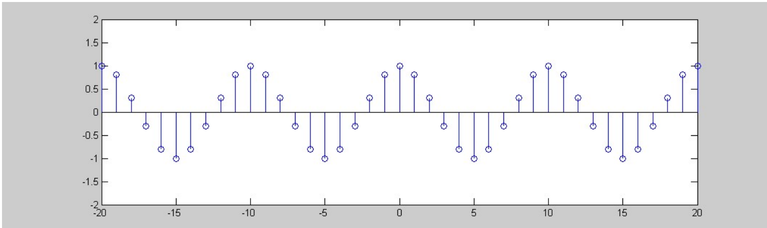
$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

- Periódicas o aperiódicas dependiendo de si $f_0 = \omega_0/2\pi$ es o no un número racional k/N
- k y N deben ser números enteros
- [Demostrar: Problema 1.35(Signals & Systems)]

Señales exponenciales en tiempo discreto: Ejemplos II

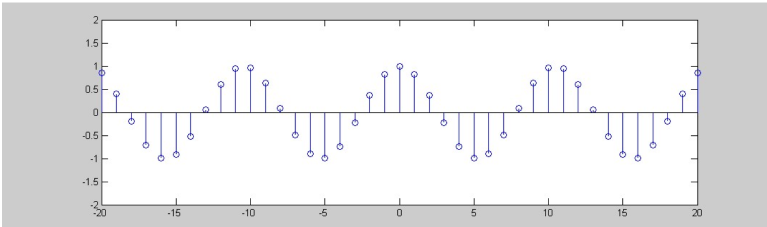
- Exponenciales complejas con $|\alpha| = 1$, β imaginario puro

- $\omega_0 = 2\pi/10 + 2\pi k$: Periódica

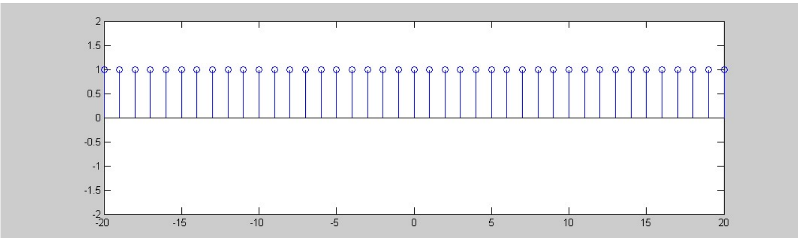


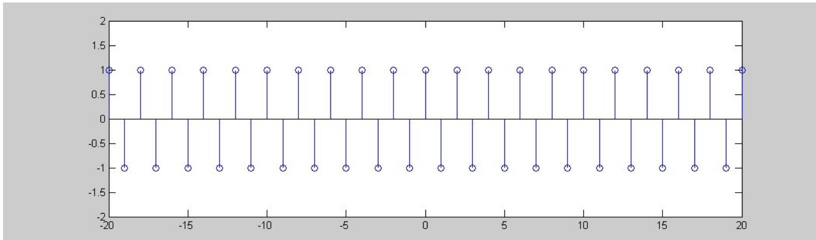
En las figuras sólo aparece la parte real

- $\omega_0 = 0.6 + 2\pi k$: No periódica



- $\omega_0 = 0 + 2\pi k$ (mínima frec.), $\omega_0 = \pi + 2\pi k$ (máxima frec.)





Señales exponenciales en tiempo discreto

- Señal exponencial general: $x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n} = |C|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n}$
- Casos:
  - Exponenciales complejas genéricas

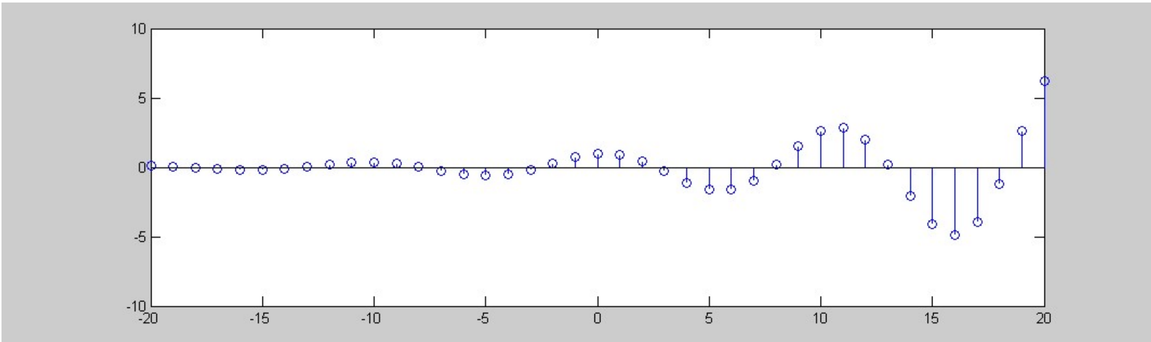
$$x[n] = |C|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|C||\alpha|^n sen(\omega_0 n + \phi)$$

    - Sinusoidales crecientes o amortiguadas en función de si $|\alpha|$ es mayor o menor que 1

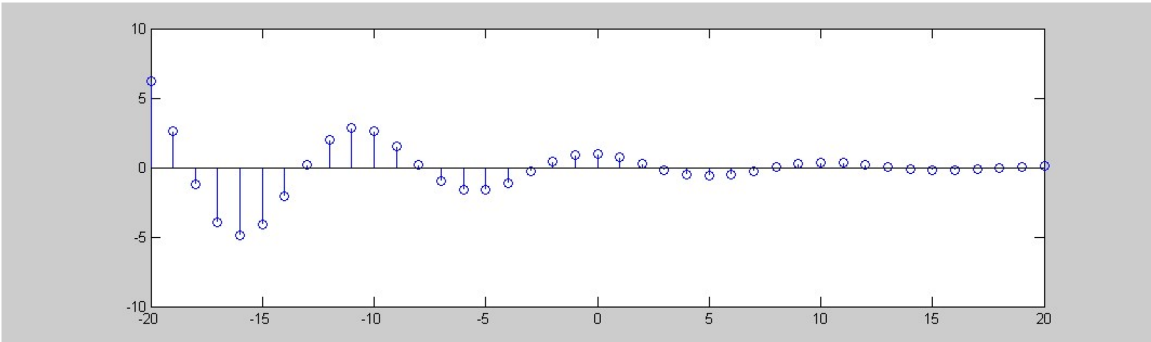
Señales exponenciales en tiempo discreto: Ejemplos III

- Exponenciales complejas genéricas (*C*=1)

- β=0.1+*0.6j*



- β =-0.1+*0.6j*



En las figuras sólo aparece la parte real

Comparación de propiedades de las exponenciales complejas en tiempo discreto y en tiempo continuo

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

- Señales idénticas para valores de ω_0 separados por múltiplos de 2π:
  - Frecuencia mínima: $\omega_0 = 0 \pm 2\pi r$
  - Frecuencia máxima: $\omega_0 = \pi \pm 2\pi r$
- Periódica sólo si $f_0 = \omega_0/2\pi$ es un número racional k/N
- En caso de ser periódica, periodo fundamental T_0 = MCM(k,N)/k, donde MCM(x,y) denota el mínimo común múltiplo de x e y

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t}$$

- Señales distintas para valores distintos de Ω_0:
  - Frecuencia mínima: $\Omega_0 = 0$
  - Frecuencia máxima: ilimitada
- Periódica para cualquier Ω_0
- Periodo fundamental $T_0 = 2\pi/|\Omega_0|$

[Problemas Señales Exponenciales: P2.7, P1.11(Signals & Systems)]

Tema 1: Sistemas Lineales y Convolución

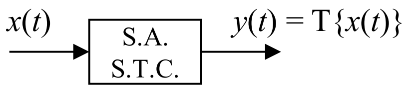
1.2 Sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto

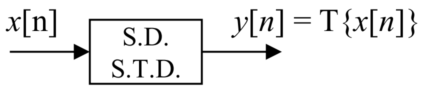
Definición de sistema y ejemplos

- ***Sistema***: proceso que transforma señales de entrada en señales de salida
  - Trabajaremos con sistemas con una única entrada y una única salida
- Ejemplos de sistemas:
  - Un amplificador que aumenta la amplitud de la señal de entrada
  - El ecualizador de un equipo de sonido, que transforma las características de la señal de audio de entrada para generar una señal de audio de salida mejorada
  - Un coche considerado como un sistema que transforma una presión en el acelerador en la aceleración del coche
  - Un programa de ordenador que toma como entrada el valor del IBEX 35 del día actual y calcula el valor medio del IBEX 35 en los últimos 30 días

Clasificación de Sistemas

- En función del tipo de la señal de entrada y de salida:
- ***Sistemas analógicos o en tiempo continuo***: las señales de entrada y salida son analógicas o en tiempo continuo
- ***Sistemas en tiempo discreto***: las señales de entrada y salida son en tiempo discreto
- ***Sistemas digitales***: las señales de entrada y salida son digitales
- Representación de sistemas mediante diagramas de bloques:





- Interconexión de sistemas en serie o cascada, en paralelo y con realimentación [Dibujar]

Ejemplos de sistemas (discretos)

- Sistema de retardo ideal:

$$y[n]=x[n-n_d]$$

La salida es un desplazamiento de la entrada

- Sistema de promedio móvil:

$$y[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}x[n-k]$$

La salida es un promedio móvil de la señal de entrada

Propiedades de los sistemas

- ***Sistemas con y sin memoria***
  - Sistema *sin memoria* ←→ su salida en un instante de tiempo no depende de valores de la entrada en otros instantes de tiempo. En caso contrario, se dice que es *con memoria*
    - Ejemplo de sistema sin memoria: $y[n]=x^2[n]$ [Demostrar]
    - Ejemplo de sistema con memoria: Los anteriores sistemas de retardo ideal y de promedio móvil [Demostrar]

- ***Sistemas invertibles***
  - Se dice que un sistema es *invertible* si existe otro sistema (el *sistema inverso*) tal que conectado en serie tras el sistema original produce como salida la entrada del sistema original, sea cual sea ésta
    - Ejemplo de sistema invertible: El retardo ideal: $y[n]=x[n-n_d]$ [Demostar]
    - Ejemplo de sistema no invertible: $y[n]=x^2[n]$ [Demostrar]

Propiedades de los sistemas (2)

- ***Sistemas causales***
  - Se dice que un sistema es *causal* si la salida del sistema en un instante dado no depende de las entradas al sistema posteriores al instante de tiempo actual
  - En otras palabras, el sistema es causal si para producir la salida en un instante de tiempo no requiere conocer el valor de las entradas en el futuro
    - Ejemplo de sistema causal: el sistema acumulador [Demostrar]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

    - Ejemplo de sistema no causal: el sistema de promedio móvil [Demostrar]

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

Propiedades de los sistemas (3)

- ***Sistemas estables***
  - Se dice que un sistema es *estable* si para toda señal de entrada limitada (acotada) en amplitud (que no crece indefinidamente) la señal de salida está también limitada (acotada) en amplitud (no crece indefinidamente)
  - Esta es la definición BIBO (*bounded-input bounded-output*) de estabilidad
    - Ejemplo de sistema estable [Demostrar]:

$$y[n]=x^2[n]$$

    - Ejemplo de sistemas inestables [Demostrar]:

$$y[n]=\log(|x[n]|)$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Propiedades de los sistemas (4)

- ***Sistemas invariantes con el tiempo***
  - Se dice que un sistema es *invariante con el tiempo* si sus características de entrada-salida no cambian con el tiempo
  - De otro modo, un sistema es *invariante con el tiempo* si para cualquier señal de entrada y su correspondiente señal de salida, un desplazamiento en el tiempo de la señal de entrada resulta en la misma señal de salida con idéntico desplazamiento en el tiempo
    - Ejemplo de sistema invariante con el tiempo: todos los anteriores
    - Ejemplo de sistema no invariante con el tiempo: [Demostrar]

      Sistema compresor: $y[n]=x[Mn]$

Propiedades de los sistemas (5)

- ***Sistemas lineales.***
  - Un sistema es *lineal* si cumple las dos siguientes propiedades:
    - *Propiedad de aditividad*: la salida del sistema cuando la entrada es la suma de dos señales es la suma de las salidas del sistema cuando la entrada es cada una de las señales de entrada de forma independiente
    - *Propiedad de homogeneidad o escalado*: la salida del sistema cuando la entrada se multiplica por un factor es la misma salida que producía la entrada original multiplicada exactamente por el mismo factor
  - Estas dos propiedades se pueden combinar en una única propiedad:
    - *Propiedad de superposición:* dados varios pares de entradas a un sistema y sus correspondientes salidas, la salida del sistema correspondiente a una combinación lineal de entradas es exactamente la misma combinación lineal de las salidas correspondientes
  - Ejemplo de sistema lineal [Demostrar]: El sistema acumulador $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$
  - Ejemplos de sistemas no lineales [Demostrar]: $y[n]=x^2[n]$, $y[n]=\log(|x[n]|)$

[Problemas Propiedades Sistemas: P2.1, P1.30(S&S) y P1.31(S&S)]

Tema 1: Sistemas Lineales y Convolución

1.3 Sistemas Lineales e Invariantes con el tiempo. Convolución

Sistemas lineales e invariantes con el tiempo (SLI, LTI)

- ¿Cuál es su interés?
  - Muchos sistemas reales se pueden modelar como sistemas lineales e invariantes con el tiempo
  - Los sistemas lineales e invariantes con el tiempo se pueden analizar con más detalle que otros sistemas:
    - Las propiedades de *superposición* y de *invarianza con el tiempo* permiten caracterizar completamente un SLI mediante su ***respuesta al impulso unidad***
    - La respuesta del sistema a cualquier entrada se puede calcular como la ***convolución*** de la entrada y la respuesta al impulso unidad

La suma de convolución y la respuesta al impulso unitario (tiempo discreto)

- Cualquier señal se puede escribir como: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
- Para sistemas lineales e invariantes con el tiempo:
  - Aplicando superposición e invarianza con el tiempo,
  - y siendo $h[n]$ la respuesta del sistema al impulso unitario $\delta[n]$,
  - la salida $y[n]$ ante la entrada $x[n]$ se puede escribir como la suma de convolución de $x[n]$ y $h[n]$, que se representa como $x[n]*h[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \equiv x[n] * h[n]$$

- La respuesta del sistema al impulso unitario, $h[n]$, caracteriza completamente al sistema lineal e invariante

[Demostración detallada] [Cálculo práctico suma convolución]

La integral de convolución y la respuesta al impulso unitario (tiempo continuo)

- Cualquier señal se puede escribir como: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- Para sistemas lineales e invariantes con el tiempo:
  - Aplicando superposición e invarianza con el tiempo,
  - y siendo *h*(*t*) la respuesta del sistema al impulso unitario $\delta(t)$,
  - la salida *y*(*t*) ante la entrada *x*(*t*) se puede escribir como la integral de convolución de *x*(*t*) y *h*(*t*), que se representa como *x*(*t*) **h*(*t*)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \equiv x(t) * h(t)$$

- La respuesta del sistema al impulso unitario, *h*(*t*), caracteriza completamente al sistema lineal e invariante

Utilidad práctica de la suma y la integral de convolución

- La integral de convolución:
  - Papel teórico en sistemas lineales de tiempo continuo
    - A veces se puede obtener de forma analítica la salida de un sistema dado a una entrada dada, pero esto no resulta especialmente útil en la práctica
- La suma de convolución:
  - El mismo papel teórico en sistemas lineales en tiempo discreto
    - A veces se puede obtener de forma analítica la salida de un sistema dado a una entrada dada, cosa que no resulta especialmente útil en la práctica
  - Si la respuesta al impulso es de longitud finita, la suma de convolución es una suma finita que se puede calcular numéricamente (con un ordenador):
    - En este caso, la suma de convolución es una forma de implementar el sistema lineal e invariante
      - La suma de convolución es una fórmula matemática para calcular la salida del sistema en un instante dado en función de la entrada y la respuesta al impulso

Ejemplos de respuesta al impulso

- Sistema de retardo ideal: $y[n]=x[n-n_d] \rightarrow h[n]=\delta[n-n_d]$
- Sistema de promedio móvil:

$$y[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] \rightarrow h[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]$$

- Sistema acumulador:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]=u[n]$$

- Sistema $y[n]=x^2[n]$

Propiedades de la convolución y de los sistemas lineales e invariantes

- Propiedad conmutativa (intercambio *x*[*n*] y *h*[*n*])

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t), \quad x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

- Propiedad distributiva respecto a la suma (asoc. paralelo)

$$x(t)*(h_1(t)+h_2(t))=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

- Propiedad asociativa (asoc. serie)

$$x(t)*\big(h_1(t)*h_2(t)\big)=\big(x(t)*h_1(t)\big)*h_2(t)=x(t)*h_1(t)*h_2(t)$$

$$x[n]*\big(h_1[n]*h_2[n]\big)=\big(x[n]*h_1[n]\big)*h_2[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]$$

[Aplicación propiedades convolución a Sistemas Lineales e Invariantes]

Propiedades de los SLI (LTI) en función de la respuesta al impulso

- Un sistema LTI con respuesta al impulso unitario *h*(*t*), *h*[*n*]
  - Es *sin memoria* si y solo si:

$$h(t) = K\delta(t), \quad h[n] = K\delta[n]$$

  - Es *invertible* si y solo si:

$$\exists g(t): \quad h(t) * g(t) = \delta(t), \quad \exists g[n]: \quad h[n] * g[n] = \delta[n]$$

  - Es *causal* si y solo si:

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0, \quad h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

  - Es *estable* si y solo si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Ejemplos de propiedades de SLI en función de la respuesta al impulso

- Analizar las propiedades de los siguientes SLI:
  - Sistema de retardo ideal:

$$y[n]=x[n-n_d] \rightarrow h[n]=\delta[n-n_d]$$

  - Sistema acumulador:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]=u[n]$$

  - Sistema de promedio móvil:

$$y[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] \rightarrow h[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]$$

Sistemas FIR y sistemas IIR

- Sistemas FIR (Finite Impulse Response):
  - Tienen respuesta al impulso de duración finita
    - La suma de convolución se puede calcular directamente con un ordenador [Dem]
    - Son estables siempre que ningún valor de la respuesta al impulso sea infinito [Dem]
  - Ejemplos: el retardo ideal, el promedio móvil [Dem]

- Sistemas IIR (Infinite Impulse Response):
  - Tienen respuesta la impulso de duración infinita
    - La suma de convolución no se puede calcular directamente [Dem]. Hay que buscar otra forma de realizar estos sistemas
    - Pueden ser estables o inestables
  - Ejemplos: el sistema acumulador [Dem]

[Problemas Convolución: P2.24, P2.2] [Problemas Propiedades SLIs: P2.18, P2.19]