

## Tema 3: Diseño de Filtros FIR y Muestreo y Reconstrucción

Prof. Rubén Vera Rodríguez

ruben.vera@uam.es

BiDA Lab, EPS

<http://atvs.ii.uam.es/atvs/>

# Contenidos

---

3.1 Muestreo de Señales y Reconstrucción

3.2 Diseño de Filtros FIR

---

# **Tema 3: Diseño de Filtros FIR y Muestreo y Reconstrucción**

## **3.1 Muestreo de Señales y Reconstrucción**

# Muestreo y reconstrucción:

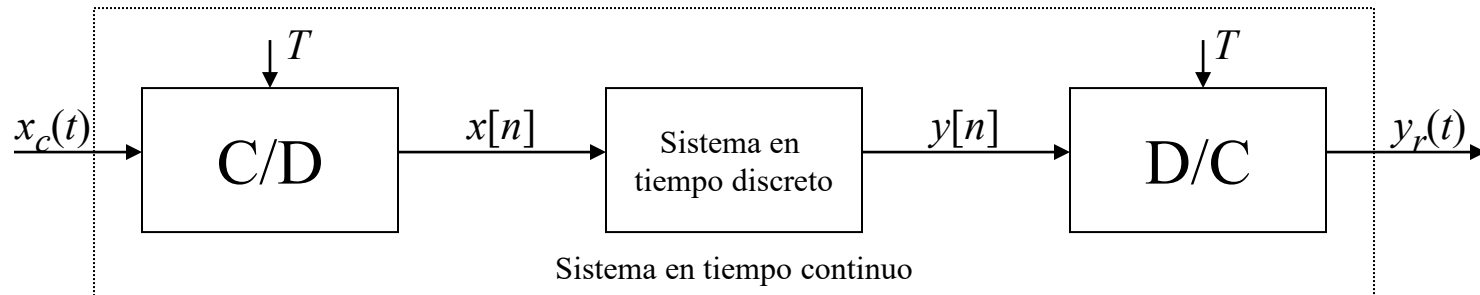
## Teorema de muestreo o de Nyquist

---

- Si una señal analógica se muestrea uniformemente cumpliendo las siguientes condiciones:
  - Señal analógica de ancho de banda limitado a  $\Omega_M$
  - Frecuencia de muestreo mayor que el doble del ancho de banda de la señal analógica:  $\Omega_s > 2\Omega_M$  (*=pulsación de Nyquist*)
- Entonces la señal analógica se puede reconstruir perfectamente a partir de sus muestras

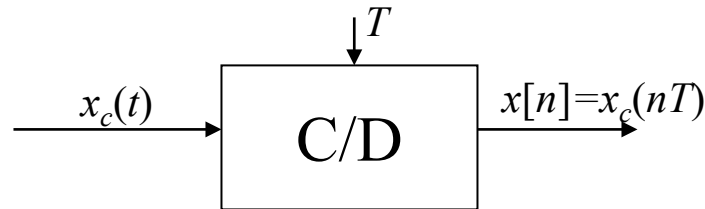
# Muestreo y reconstrucción: Teorema de muestreo o de Nyquist

- Importancia del teorema de muestreo:
  - Puente señales analógicas  $\leftrightarrow$  en tiempo discreto (digitales)
  - Permite procesar señales analógicas con procesamiento digital



# Muestreo periódico o uniforme: Conversor ideal de tiempo continuo a tiempo discreto

- *Conversor ideal de tiempo continuo a tiempo discreto (C/D):*

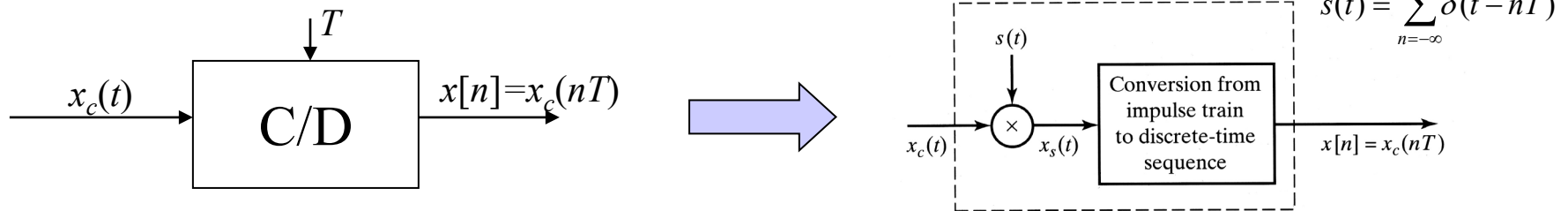


- Realiza el muestreo periódico o uniforme:
  - $x_c(t)$  es una señal analógica
  - $x[n]$  es la señal de tiempo discreto obtenida por muestreo de  $x_c(t)$
  - $T$  es el *periodo de muestreo* (s)
  - $f_s = 1/T$  es la *frecuencia de muestreo* (Hz)
  - $\Omega_s = 2\pi f_s$  es la *pulsación de muestreo* (rad/s)
- El conversor C/D ideal es una aproximación del *Conversor Analógico/Digital (A/D)*
  - El A/D es un dispositivo físico real
  - Realiza muestreo **y cuantificación** a la vez

# Muestreo periódico o uniforme:

## Descomposición matemática del C/D

- Para analizar matemáticamente el muestreo conviene descomponerlo en dos etapas:



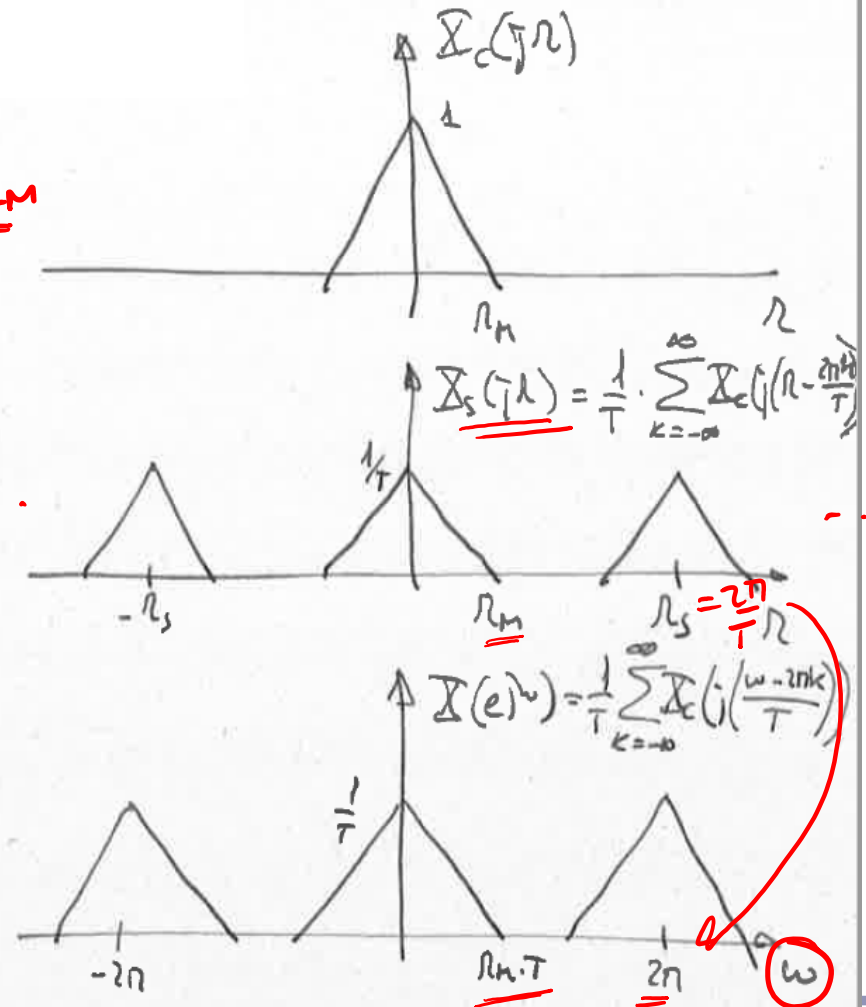
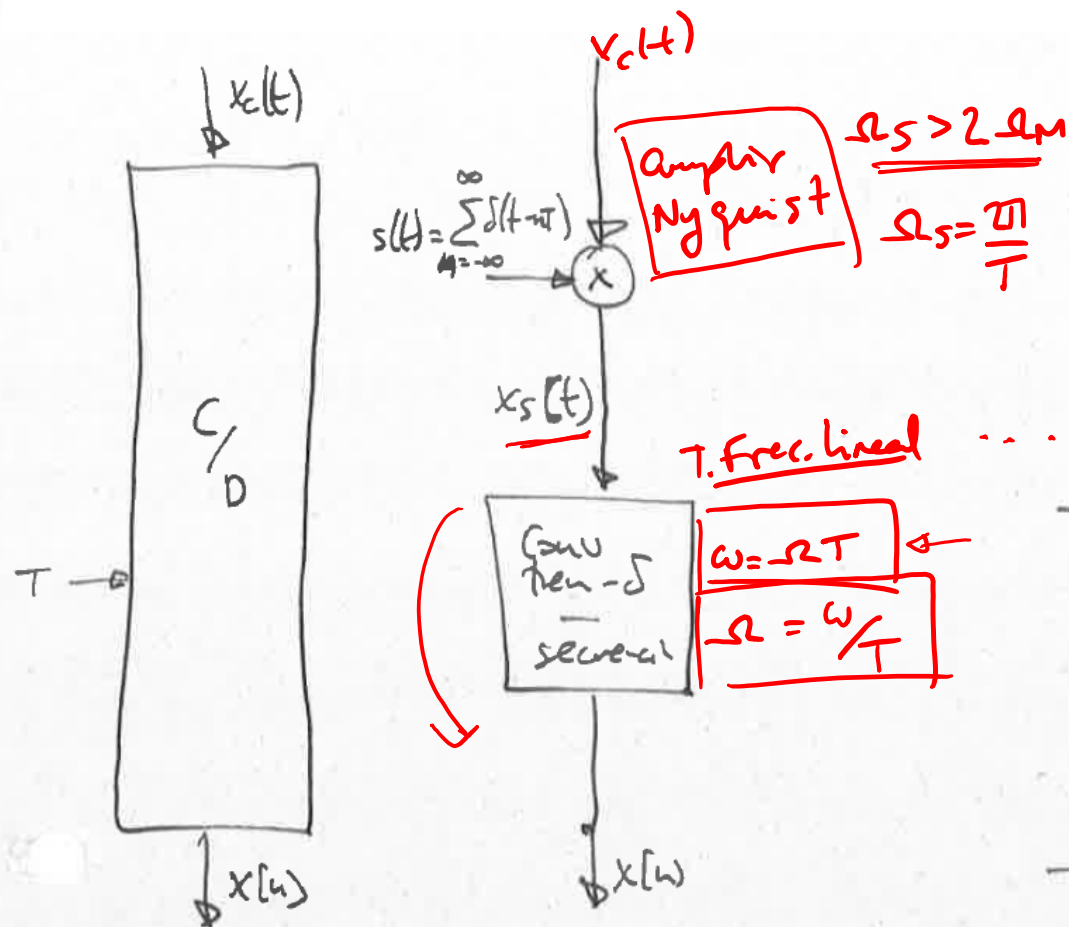
- Muestreo (multiplicación) con tren de impulsos:

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

- Conversión tren de impulsos  $\rightarrow$  secuencia tiempo discreto:

$$x[n] = x_c(nT)$$

# Muestreo periódico o uniforme: Representación en frecuencia (1)





# Muestreo periódico o uniforme: Representación en frecuencia (2)

- Espectro de  $x_s(t)$ ,  $X_s(j\Omega)$ :

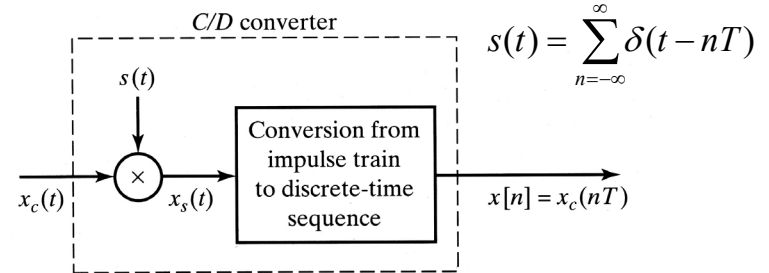
$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

- Espectro  $X_s(j\Omega)$  = copias repetidas de  $X_c(j\Omega)$ :
  - Separadas entre sí  $\Omega_s$
  - Escaladas por  $1/T$
- $x_c(t)$  de banda limitada a  $\Omega_M$  ( $X_c(j\Omega)=0$  para todo  $|\Omega| \geq \Omega_M$ ):
  - Si  $\Omega_s \geq 2 \Omega_M$  (Nyquist)  $\rightarrow$  las copias no se superponen:
    - Filtro paso bajo con pulsación corte  $\Omega_M$  recupera espectro y señal originales
  - Si  $\Omega_s < 2 \Omega_M$  (No Nyquist)  $\rightarrow$  las copias se pueden superponer:
    - El fenómeno se denomina *aliasing* o solapamiento
    - No es posible (en general) recuperar espectro y señal originales

[Ejemplos de Aliasing y No Aliasing]

# Muestreo periódico o uniforme: Representación en frecuencia (3)



- Espectro de  $x[n]$ ,  $X(e^{j\omega})$ :
- Es una conversión de frecuencias de tiempo continuo a tiempo discreto:  $\omega = \Omega T$

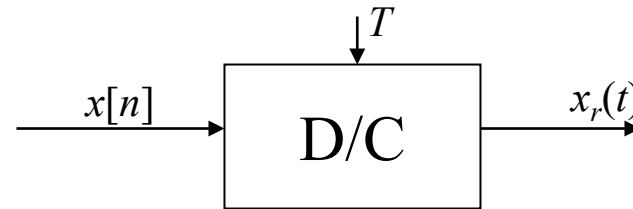
$$X(e^{j\omega}) = X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - k\Omega_s\right)\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)\right)$$

- Espectro  $X(e^{j\omega})$  = Versión comprimida en frecuencia de  $X_s(j\Omega)$ :
  - Siempre  $\Omega_s$  se transforma en  $2\pi$  en tiempo discreto
  - Para que las copias de  $X_c(j\Omega)$  se repitan cada  $2\pi$

[Ejemplos E4.1, E4.2, E4.3, P4.2]

# Reconstrucción de una señal: Conversor ideal de tiempo discreto a tiempo continuo

- *Conversor ideal de tiempo discreto a tiempo continuo (D/C):*

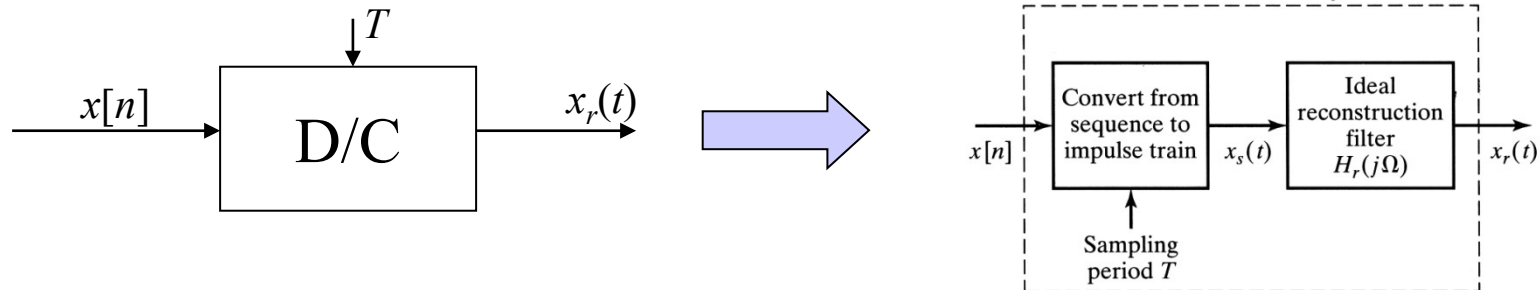


- Realiza el proceso de reconstrucción ideal (inv. muestreo ideal)
  - $x[n]$  es una señal de tiempo discreto
  - $x_r(t)$  es una señal analógica reconstruida a partir de  $x[n]$
  - $T$  es el *periodo de muestreo* (s)
  - $f_s = 1/T$  es la *frecuencia de muestreo* (Hz)
  - $\Omega_s = 2\pi f_s$  es la *pulsación de muestreo* (rad/s)
- El conversor D/C ideal es una aproximación del *Conversor Digital/Analógico (D/A)*
  - El D/A es un dispositivo físico real
  - Realiza una aproximación al proceso de reconstrucción ideal

# Reconstrucción de una señal:

## Descomposición matemática del D/C

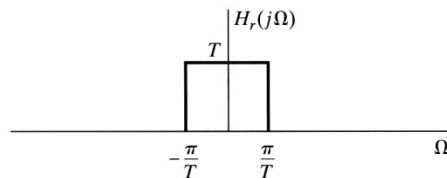
- Para analizar matemáticamente la reconstrucción conviene descomponerla en dos etapas:



- Conversión secuencia de tiempo discreto  $\rightarrow$  tren de impulsos:
  - Coincide con tren de impulsos,  $x_s(t)$ , obtenido de la señal original,  $x_c(t)$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT)$$

- En frecuencia es deshacer el cambio de frecuencia:  $\omega = \Omega T$
- Filtrado paso bajo con filtro de reconstrucción ideal,  $h_r(t)$  o  $H_r(j\Omega)$

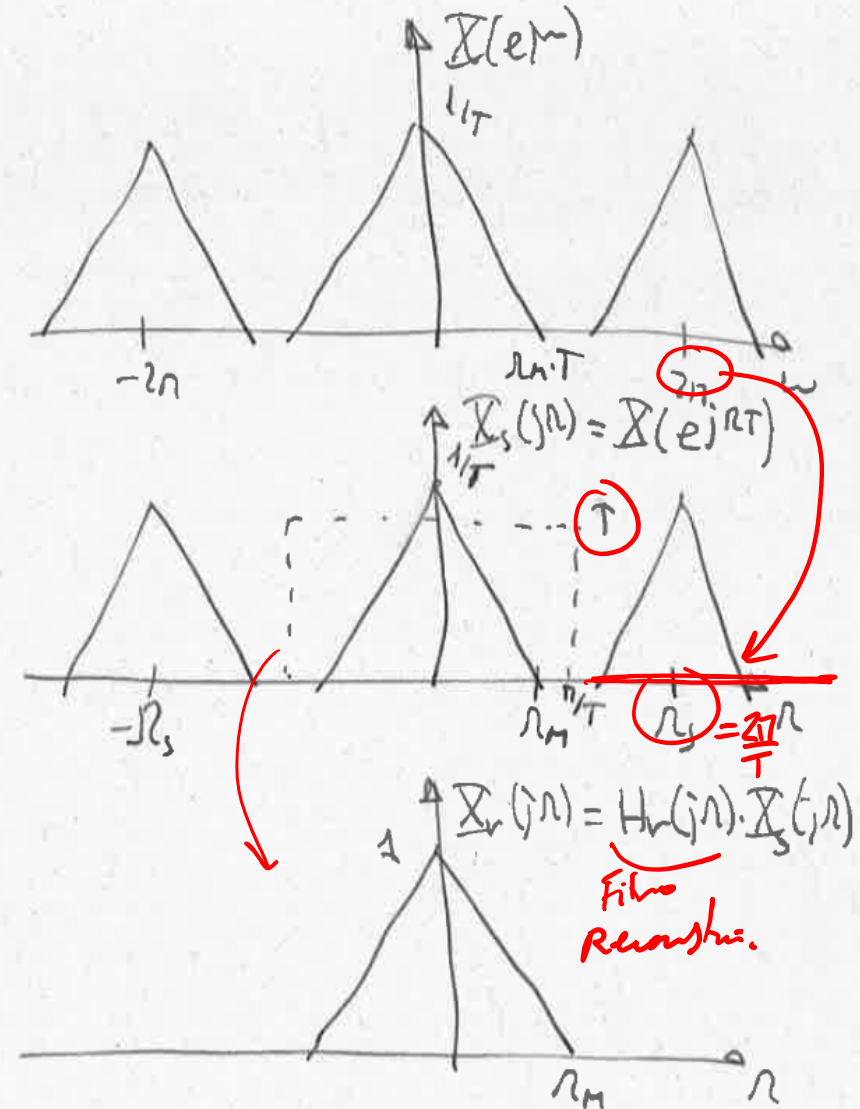
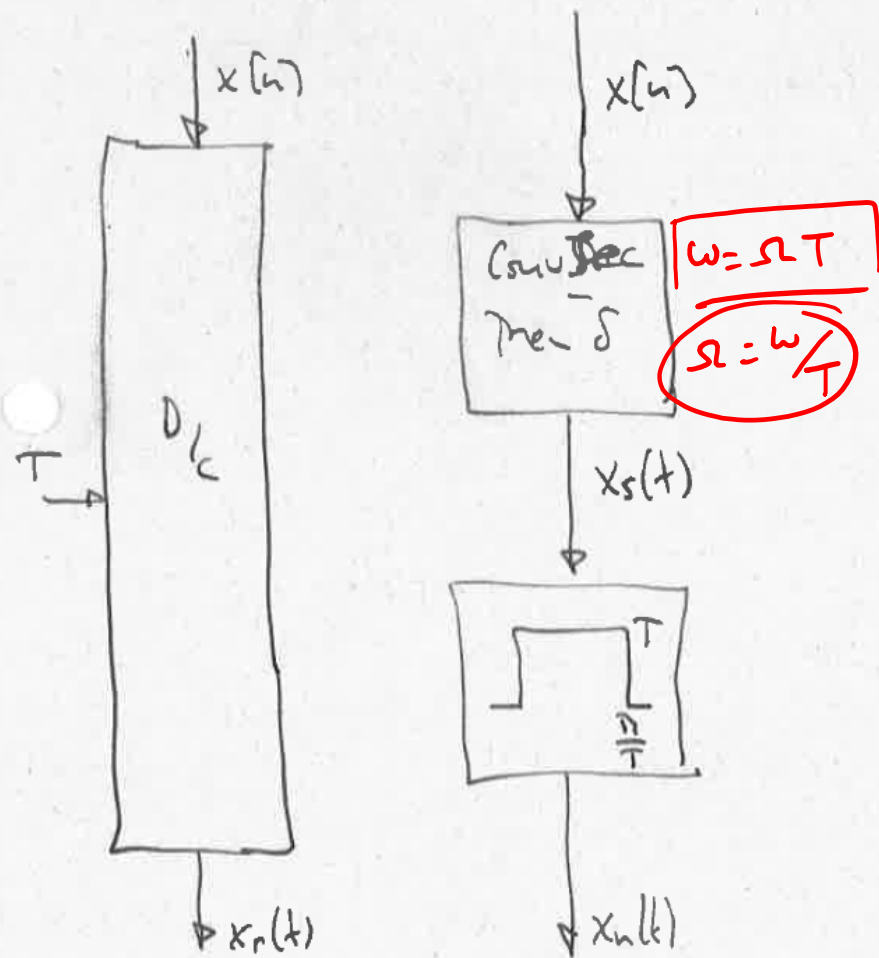


$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

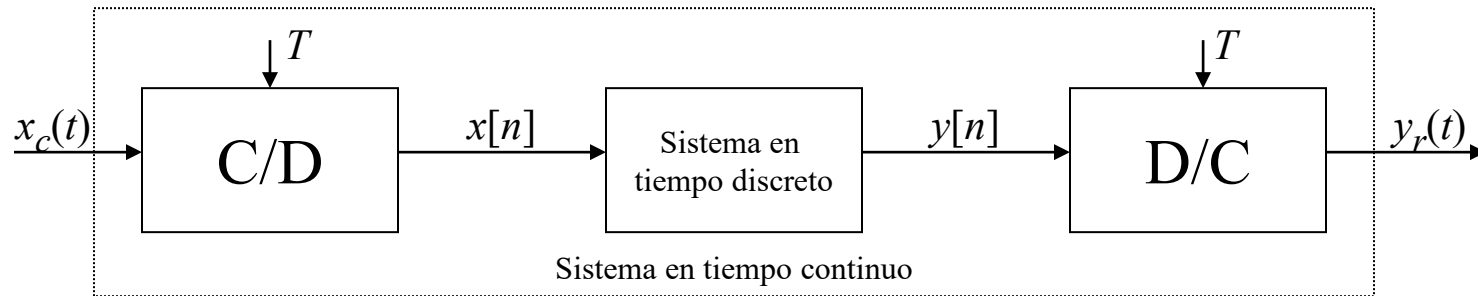
[Ejemplo completo muestreo y reconstrucción en frecuencia, P4.19]

# Reconstrucción de una señal:

## Descomposición matemática del D/C



# Procesado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo (1)



- Hemos analizado el comportamiento de los módulos C/D y D/C ideales:

$$x[n] = x_c(nT) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)\right)$$

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\text{sen}(\pi(t - nT)/T)}{\pi(t - nT)/T} \leftrightarrow Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{jT\Omega}) = \begin{cases} TY(e^{jT\Omega}), & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- Sistema en tiempo discreto lineal e invariante,  $h[n] \rightarrow$  salida del sistema completo:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{jT\Omega}) = H_r(j\Omega)H(e^{jT\Omega})X(e^{jT\Omega}) = H_r(j\Omega)H(e^{jT\Omega})\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

# Procesado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo (2)

- Si el sistema en tiempo discreto es lineal e invariante y además se cumple el criterio de Nyquist en el C/D ( $\Omega_s > 2\Omega_M$ ):
  - El filtro reconstructor ideal,  $H_r(j\Omega)$ , selecciona sólo el término con  $k = 0$  en la suma de la expresión anterior y se cancela la división entre el periodo de muestreo,  $T$ , quedando:

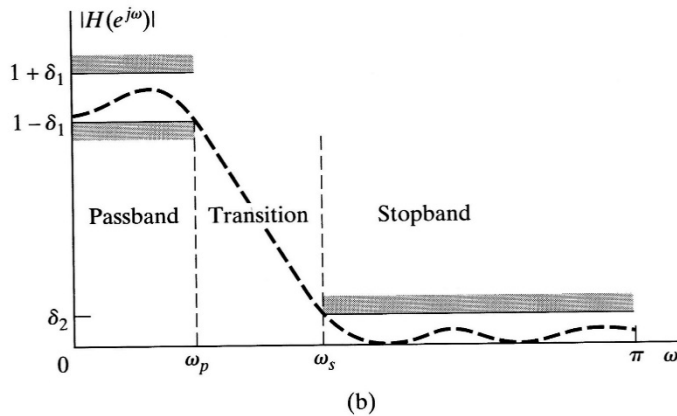
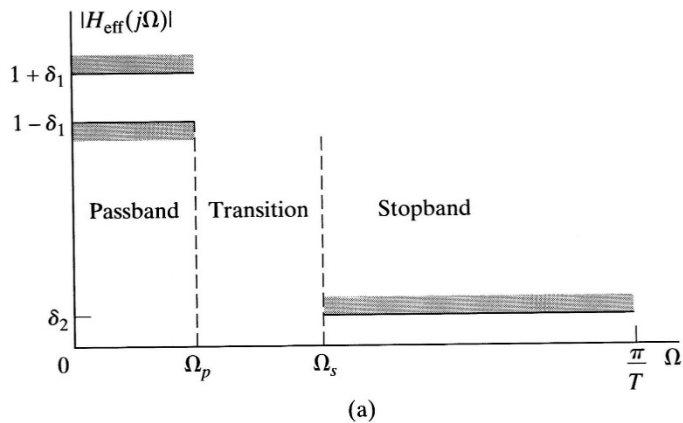
$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{jT\Omega})\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) = \begin{cases} H(e^{jT\Omega})X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

- Con lo que el sistema completo se comporta como un sistema lineal e invariante en tiempo continuo con respuesta en frecuencia efectiva,  $H_{eff}(j\Omega)$ , dada por:

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{jT\Omega}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

[P4.5, P4.8]

# Especificaciones para filtros analógicos y digitales



Reproducción del libro "Discrete-Time Signal Processing", 2ª Edición, Oppenheim, Schaffer y Buck, Prentice-Hall.

- Al diseñar filtros digitales para procesar señales analógicas partimos de especificaciones para el filtro analógico
- Relación respuestas en frecuencia de los filtros analógico equivalente y en tiempo discreto → nos permiten pasar de las especificaciones del filtro en tiempo continuo a las especificaciones para el filtro en tiempo discreto y viceversa
- Hay que aplicar la conversión de frecuencias:  $\omega = \Omega T$

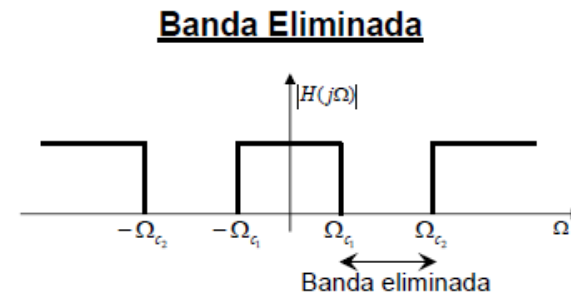
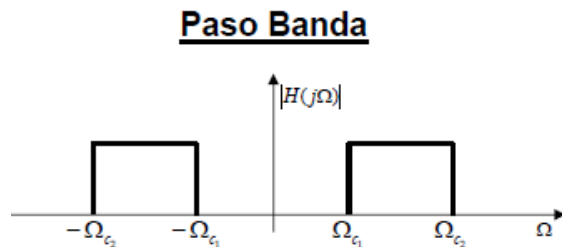
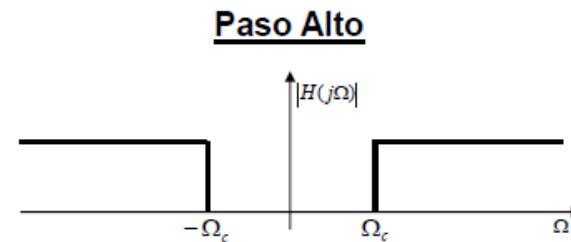
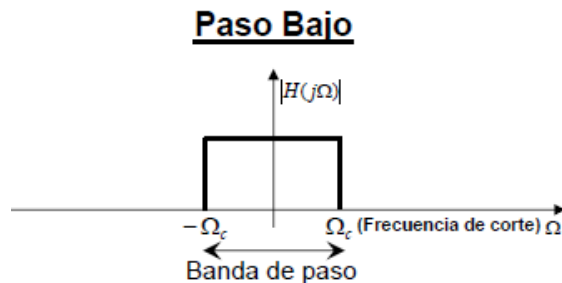


# Tema 3: Diseño de Filtros FIR y Muestreo y Reconstrucción

## 3.2 Diseño de Filtros FIR

# Introducción a las técnicas de diseño de filtros digitales

- Filtro = sistema que modifica unas frecuencias de forma distinta a otras
  - Casi cualquier SLI se puede denominar filtro
- Principales tipos de filtros:



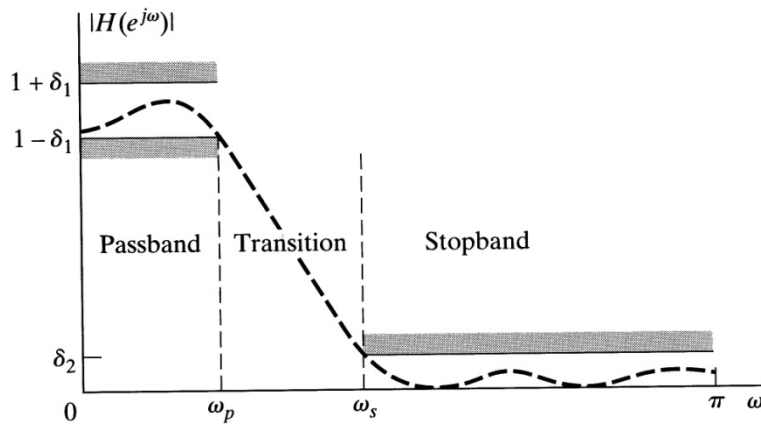
# Introducción a las técnicas de diseño de filtros digitales

---

- El diseño de filtros se realiza en tres etapas:
  - Especificación de las propiedades del sistema
  - Aproximación a las especificaciones empleando un SLI causal
    - Normalmente sólo usamos filtros causales
  - Realización del sistema
    - Normalmente se realiza utilizando medios de computación digitales
    - Por eso se llaman filtros digitales, pero las técnicas de diseño son aplicables a todo tipo de filtros en tiempo discreto

# Especificación del comportamiento de un filtro digital

- Las especificaciones del filtro se dan con un esquema de tolerancias para la respuesta en amplitud como el de la figura:
  - Ancho máximo de la banda de transición
  - Atenuación mínima en banda de corte
  - Rizado máximo en banda de paso
- Condiciones adicionales:
  - Se suele imponer causalidad y estabilidad
  - A veces se impone como condición que la fase sea lineal

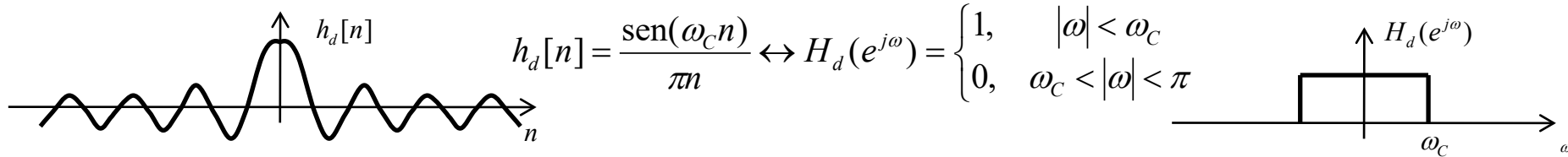


Reproducción del libro "Discrete-Time Signal Processing", 2ª Edición, Oppenheim, Schaffer y Buck, Prentice-Hall.

# Diseño de filtros FIR por enventanado

- *Método del enventanado:*

- Partimos de la respuesta en frecuencia y respuesta al impulso deseadas (ej. filtro paso bajo ideal)

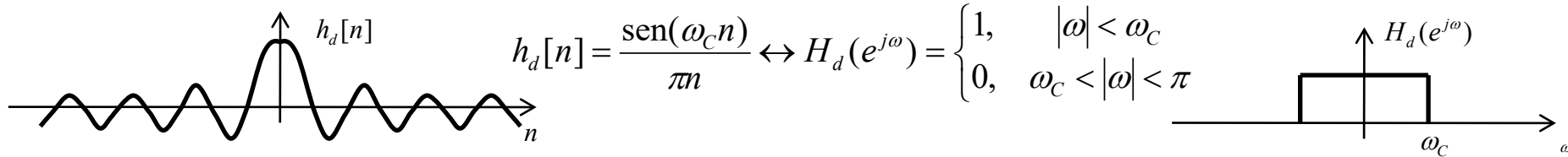


- Muchas de las respuestas en frecuencia deseadas son constantes a tramos con discontinuidades entre tramos (ej. filtro paso bajo ideal y filtros selectivos en frecuencia ideales) → Respuesta al impulso  $h_d[n]$  no causal y de duración infinita

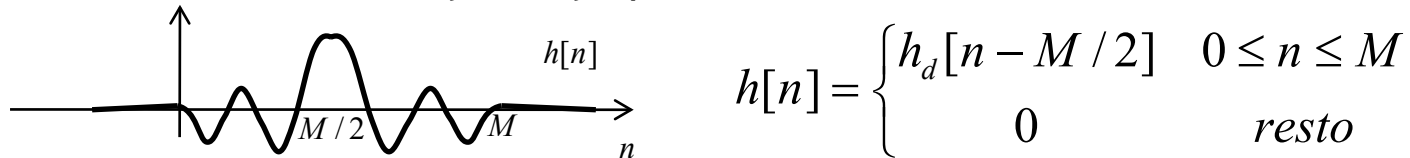
# Diseño de filtros FIR por enventanado

- *Método del enventanado:*

- Partimos de la respuesta en frecuencia y respuesta al impulso deseadas (ej. filtro paso bajo ideal)



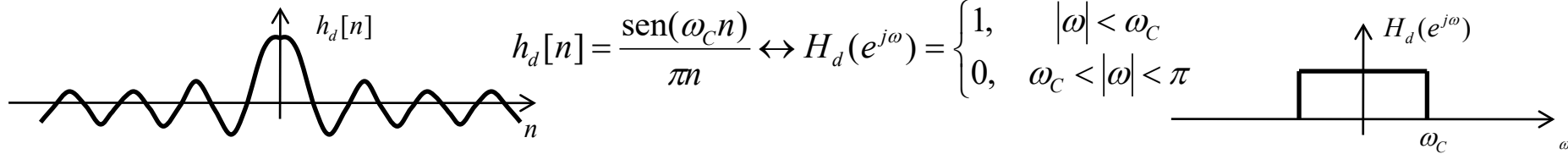
- Muchas de las respuestas en frecuencia deseadas son constantes a tramos con discontinuidades entre tramos (ej. filtro paso bajo ideal y filtros selectivos en frecuencia ideales)  $\rightarrow$  Respuesta al impulso  $h_d[n]$  no causal y de duración infinita
- Para obtener un filtro FIR causal a partir de una respuesta al impulso infinita, la truncamos entre  $-M/2$  y  $M/2$  y aplicamos un retardo de  $M/2$ :



- O de forma más general, multiplicamos por una ventana de duración finita entre  $-M/2$  y  $M/2$  y posteriormente aplicamos un retardo de  $M/2$ :

$$h[n] = w[n - M/2]h_d[n - M/2]$$

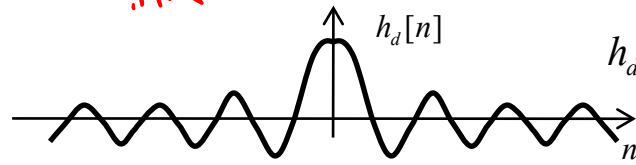
# Diseño de filtros FIR por enventanado



# Diseño de filtros FIR por enventanado

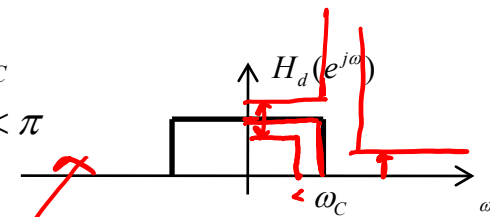
T. discrete

IIR

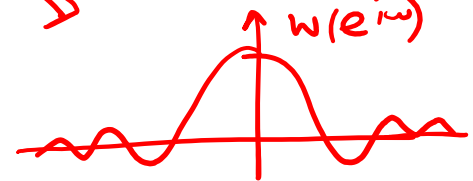


$$h_d[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \leftrightarrow H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Frecuencia DTFT



Convolución

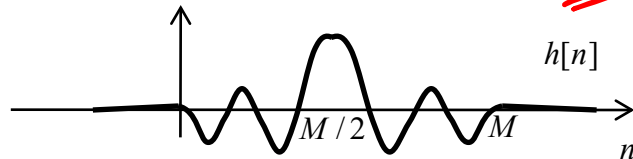


Multiplicación por ventana

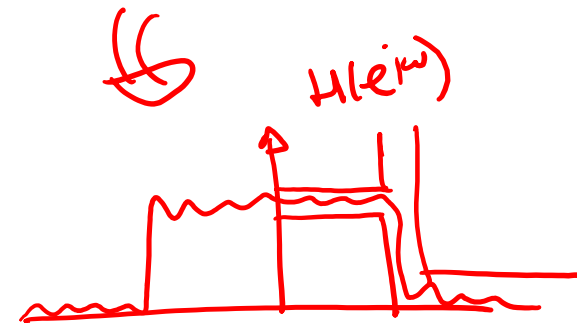
DTFT

Desplazamiento

FIR



DTFT





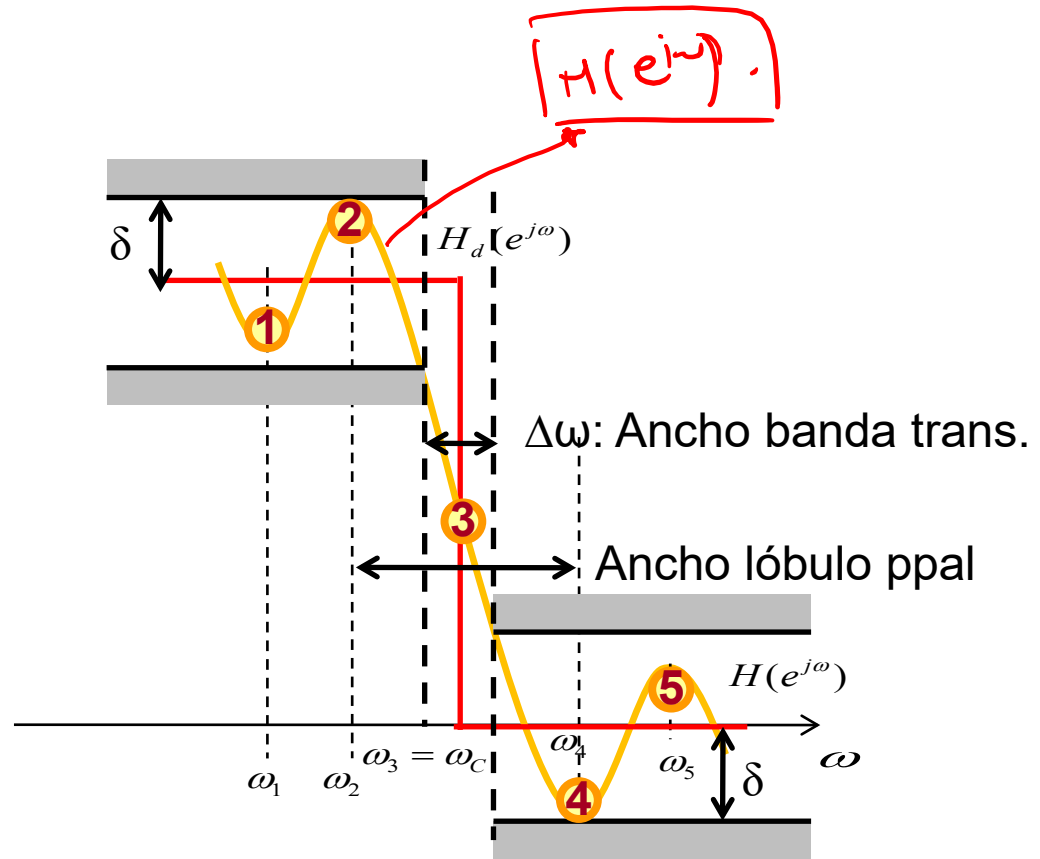
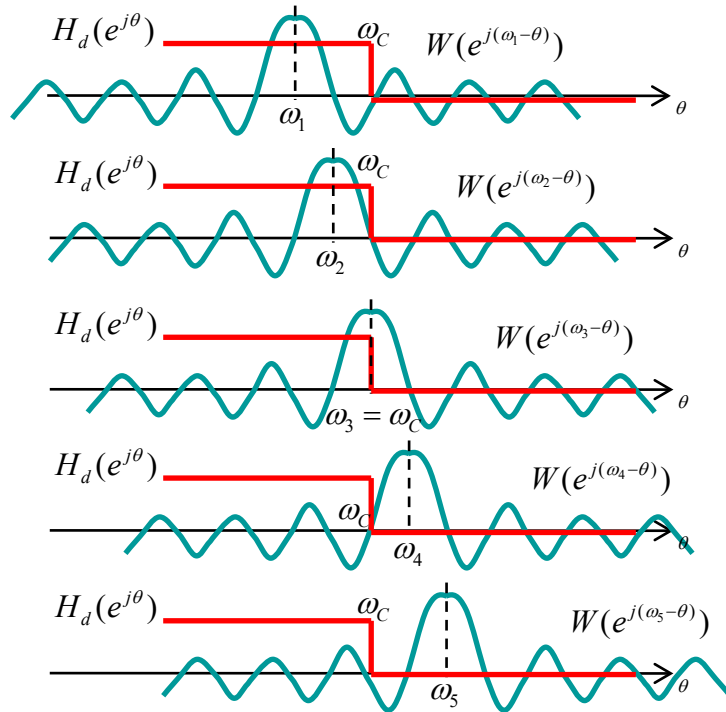
# Diseño de filtros FIR por enventanado: Interpretación en frecuencia

- Teorema de modulación o enventanado  $\rightarrow$  multiplicar  $h_d[n]$  por una ventana  $w[n]$  es equivalente a realizar la convolución periódica de sus espectros:

$$h[n] = h_d[n]w[n] \xleftrightarrow{DTFT} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- Si  $w[n]$  es tal que  $W(e^{j\omega})$  está concentrada alrededor de 0  $\rightarrow H(e^{j\omega})$  se parecerá bastante a  $H_d(e^{j\omega})$ , excepto en las transiciones bruscas de  $H_d(e^{j\omega})$
- Las transiciones bruscas se convertirán en transiciones más suaves y con oscilaciones, según el siguiente esquema

## Diseño de filtros FIR por enventanado: Interpretación en frecuencia (2)



# Diseño de filtros FIR por enventanado: Interpretación en frecuencia (3)

- La elección de la ventana se basa en dos requisitos:
  - Duración temporal mínima (para realización poco costosa computacionalmente)  $w[n]$   $\downarrow M$
  - Que esté muy concentrada en frecuencias alrededor de  $\omega = 0$   $\rightarrow \Delta\omega \downarrow$
- Ambos requisitos son contrapuestos, ya que una señal de duración corta será extensa en frecuencia y viceversa
  - Un ejemplo de esto lo proporciona la ventana rectangular

# Diseño de filtros FIR por enventanado:

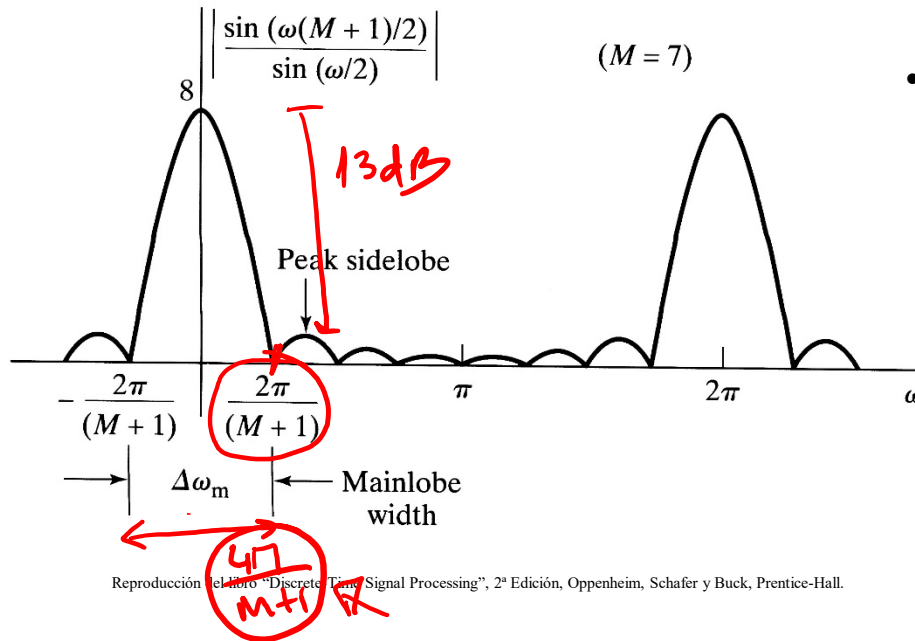
## La ventana rectangular



- La ventana rectangular (causal) y su DTFT vienen definidas por:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n} = e^{-j\omega M/2} \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

- La amplitud de  $W(e^{j\omega})$  queda representada en la siguiente figura:



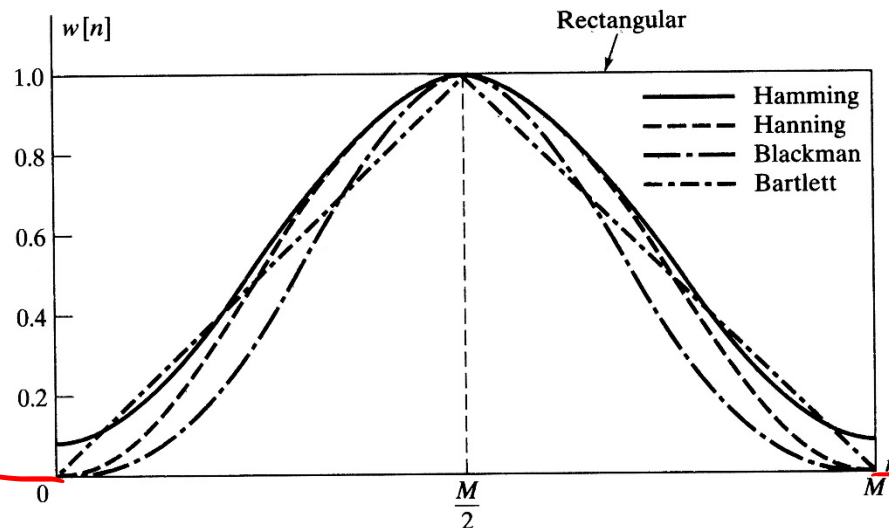
- Al aumentar longitud ventana ( $M$ ):
  - Lóbulo principal: anchura  $\downarrow$  (+), altura  $\uparrow$  (+)
  - Lóbulos secundarios: anchura  $\downarrow$  (=), altura  $\uparrow$  lo mismo que el lóbulo principal (-)
  - Área de los lóbulos constante  $\rightarrow$  oscilaciones en proximidades transiciones bruscas  $H_d(e^{j\omega})$  mantienen amplitud (Gibbs)
  - Amplitud mayor lóbulo secundario sólo 13 dB inferior a la del principal

# Diseño de filtros FIR por enventanado: La ventana rectangular y otras ventanas

mucho  
ritado

- Problema ventana rectangular: lóbulos secundarios demasiado grandes
- Este problema se puede reducir suavizando las transiciones bruscas de la ventana rectangular, en las que se pasa de 0 a 1 y de 1 a 0 bruscamente
  - Esto reduce los lóbulos secundarios, pero aumenta la anchura del lóbulo principal  
↳ Reducir el ritado
- La siguiente figura muestra las ventanas más comúnmente empleadas:
  - Salvo la rectangular, las demás presentan un comportamiento más suavizado

Amplitud  
BW  
menor  
AW

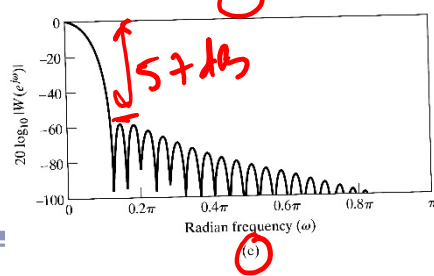
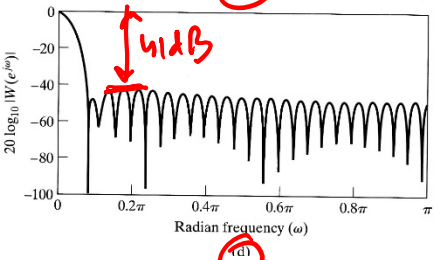
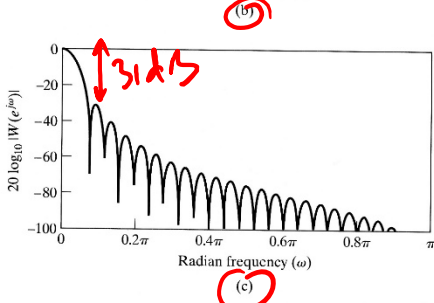
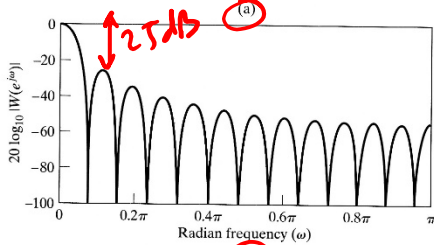
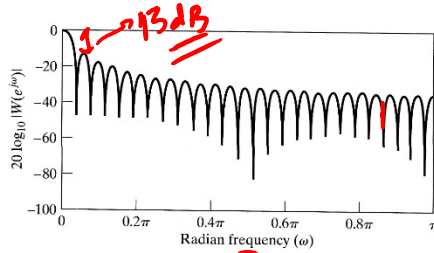


Reproducción del libro  
"Discrete-Time Signal  
Processing", 2ª Edición,  
Oppenheim, Schaffer y  
Buck, Prentice-Hall.

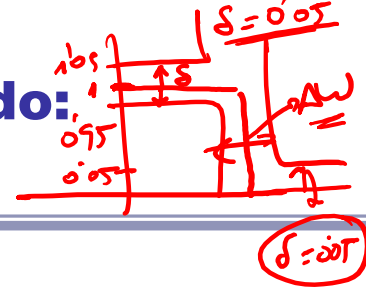
# Diseño de filtros FIR por enventanado:

## Expresiones de otras ventanas

- Bartlett (triangular) 
$$w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M & M/2 + 1 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$
- Hanning 
$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n / M) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$
- Hamming 
$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / M) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$
- Blackman 
$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n / M) + 0.08 \cos(4\pi n / M) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



# Diseño de filtros FIR por enventanado: Comparación de ventanas



- (a) Rectangular
  - Tiene el lóbulo principal más estrecho →  $\Delta W$  mas. + estrecho.
  - Pero los lóbulos secundarios más altos
- (b) Bartlett (triangular)
- (c) Hanning
- (d) Hamming
- (e) Blackman
  - Tienen los lóbulos secundarios más bajos →  $\Delta W$  mas. + ancho.
  - Pero el lóbulo principal más ancho

misma  
valor de  
 $M$

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, $\beta$	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi / (M + 1)$	-21	0	$1.81\pi / M$
Bartlett	-25	$8\pi / M$	-25	1.33	$2.37\pi / M$
Hanning	-31	$8\pi / M$	-44	3.86	$5.01\pi / M$
Hamming	-41	$8\pi / M$	-53	4.86	$6.27\pi / M$
Blackman	-57	$12\pi / M$	-74	7.04	$9.19\pi / M$

Reproducción del libro  
"Discrete-Time Signal  
Processing", 2<sup>a</sup>  
Edición, Oppenheim,  
Schafer y Buck,  
Prentice-Hall.

Problema 7.15. Queremos diseñar un filtro FIR paso bajo que satisface las siguientes especificaciones:

$$0.95 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.05 \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.25\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.1 \quad 0.35\pi \leq |\omega| \leq \pi$$

Utilizamos el método del enventanado aplicando una ventana  $w[n]$  a la respuesta al impulso  $h_d[n]$  del filtro paso bajo ideal con  $w_c = 0.3\pi$ .

¿Cuál de los filtros correspondientes a las distintas ventanas cumpliría las especificaciones? Para los que las cumplirían, indique la longitud de la ventana  $M+1$  mínima necesaria.

Solución:

**TABLE 7.1** COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, $\beta$	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

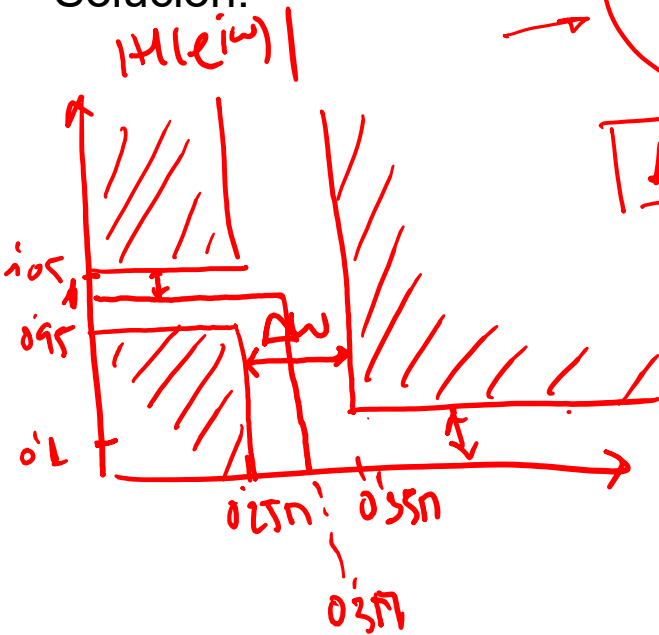


$$\begin{array}{ll} 0.95 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.05 & 0 \leq |\omega| \leq 0.25\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.1 & 0.35\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{array}$$

¿Cuál de los filtros correspondientes a las distintas ventanas cumpliría las especificaciones? Para los que las cumplirían, indique la longitud de la ventana mínima necesaria. M+1

$\delta_1 = 0.05$  b.p.no,  $\delta_{2p.redux} = 0.1$   
 $\Delta W = 0.1 \pi$

$$\Rightarrow \underline{Z_{in}^{OIS}} = \underline{\underline{-26dB.}}$$



Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, $\beta$	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

Problema 7.15. Queremos diseñar un filtro FIR paso bajo que satisface las siguientes especificaciones:

$$0.95 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.05 \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.25\pi$$
$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.1 \quad 0.35\pi \leq |\omega| \leq \pi$$

Utilizamos el método del enventanado aplicando una ventana  $w[n]$  a la respuesta al impulso  $h_d[n]$  del filtro paso bajo ideal con  $w_c = 0.3\pi$ .

¿Cuál de los filtros correspondientes a las distintas ventanas cumpliría las especificaciones? Para los que las cumplirían, indique la longitud de la ventana  $M+1$  mínima necesaria.

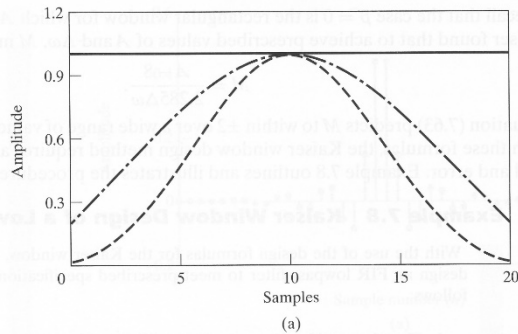
Solución:

V. Hanning  $\rightarrow 0.1\pi = 5.08\pi/M \rightarrow M = \frac{5.08}{0.1} = 50.8 \rightarrow M=51$   
 $M+1=52$

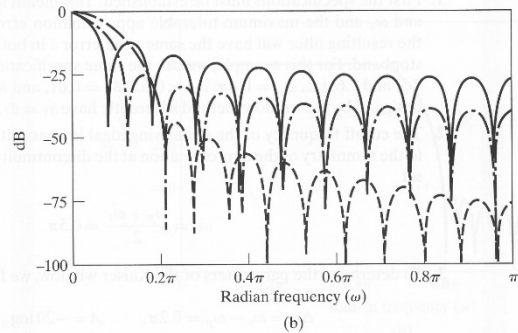
Hamming  $\rightarrow 0.1\pi = 6.27\pi/M \rightarrow M = \frac{6.27}{0.1} = 62.7 \rightarrow M=63$   
 $M+1=64$

Blackman  $\rightarrow 0.1\pi = 9.19\pi/M \rightarrow M = \frac{9.19}{0.1} = 91.9 \rightarrow M=92$   
 $M+1=93$

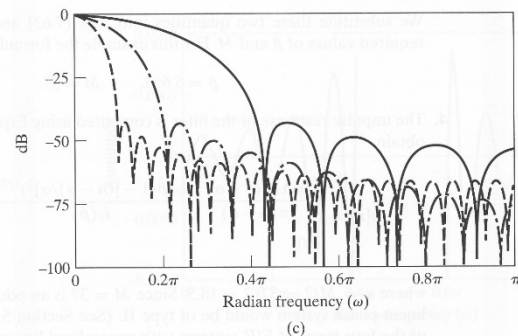
# Diseño de filtros FIR por enventanado: El método de la ventana de Kaiser



$M=20$



$\beta=C$



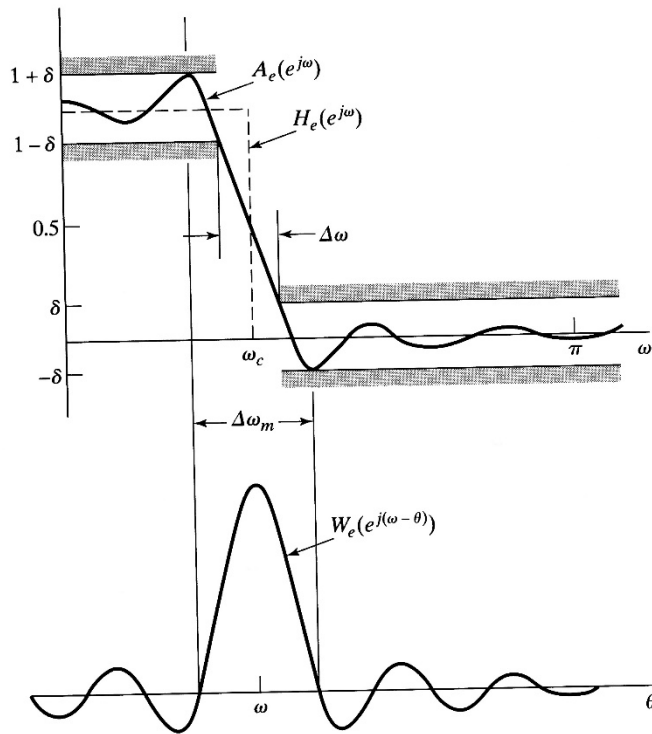
Reproducción del libro  
"Discrete-Time Signal  
Processing", 2ª Edición,  
Oppenheim, Schaffer y  
Buck, Prentice-Hall.

- La ventana de Kaiser se define como:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0 \left[ \beta \left( 1 - \left[ \frac{n - \alpha}{\alpha} \right]^2 \right)^{1/2} \right]}{I_0(\beta)} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Donde  $\alpha = M/2$  e  $I_0(\cdot)$  representa la función de Bessel tipo I modificada de orden 0
- La ventana de Kaiser depende de 2 parámetros:
  - La longitud de la ventana:  $(M+1)$
  - El parámetro de forma:  $\beta$
- Variando estos dos parámetros se puede ajustar el compromiso entre la amplitud de los lóbulos secundarios y la anchura del lóbulo principal
  - La figura muestra distintas formas de la ventana de Kaiser (arriba) así como la variación de su DTFT en función de los parámetros que la definen (abajo)

# Diseño de filtros FIR por enventanado: El método de la ventana de Kaiser (2)



Reproducción del libro "Discrete-Time Signal Processing", 2ª Edición, Oppenheim, Schaffer y Buck, Prentice-Hall.

- Lo mejor del método de la ventana de Kaiser es que Kaiser obtuvo un par de fórmulas empíricas para obtener los valores de  $M$  y  $\beta$  para cumplir las especificaciones de un filtro selectivo en frecuencia
- Si las tolerancias del filtro vienen dadas como el esquema de la figura, entonces definiendo

$$A = -20\log_{10}\delta$$

- El  $\beta$  requerido para cumplir especificaciones es:

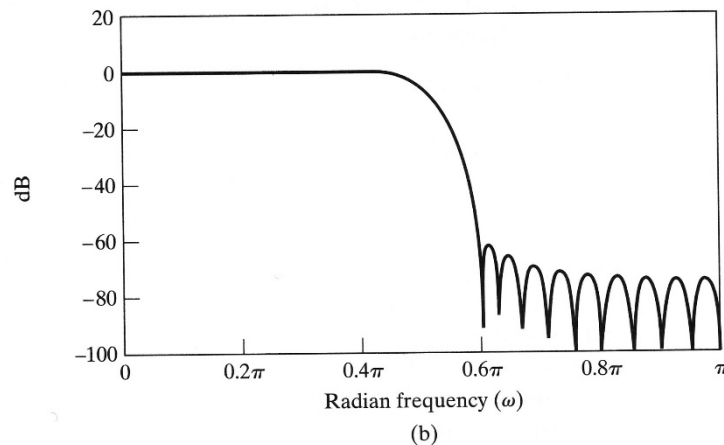
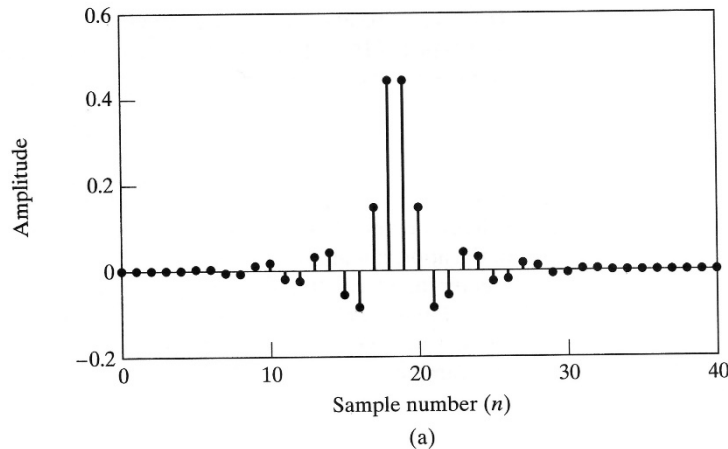
$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7) & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0.0 & A < 21 \end{cases}$$

- Y el valor de  $M$  requerido es

$$M = \frac{A-8}{2.285\Delta\omega}$$

- Con estas fórmulas este método de diseño no requiere apenas iteraciones ni prueba y error

# Diseño de filtros FIR por enventanado: Ejemplo método ventana de Kaiser

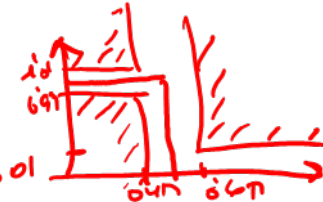


•Reproducción del libro "Discrete-Time Signal Processing", 2ª Edición, Oppenheim, Schaffer y Buck, Prentice-Hall.

- Diseñamos filtro FIR con especificaciones:

$$0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01 \quad |\omega| \leq 0.4\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.001 \quad 0.6\pi \leq |\omega| \leq \pi$$



- Simetría método ventana Kaiser  $\rightarrow$  frecuencia corte filtro paso bajo ideal = mitad banda de transición ( $0.5\pi$ ).  
Anchura banda de transición:  $\Delta\omega = 0.2\pi$
- Error de pico,  $\delta$ , con ventana de Kaiser igual en banda de paso y de corte  $\rightarrow$  debemos tomar  $\delta = 0.001$ ,  $A = 60$  dB
- Con esto y fórmulas Kaiser  $\rightarrow \beta = 5.653$ ,  $M = 37$
- Respuesta al impulso = respuesta al impulso filtro paso bajo ideal enventanada con ventana de Kaiser obtenida:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin 0.5\pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \frac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha^2])^{1/2}]}{I_0(\beta)} & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- La figura representa: respuesta al impulso obtenida y respuesta en amplitud del filtro obtenido

# Relación entre la ventana de Kaiser y otras ventanas

- Al aproximar un filtro paso bajo ideal con el método del enventanado:
  - Ancho de la banda de transición determinado por el ancho del lóbulo principal
  - Rizado en banda de paso y en banda de corte (atenuación mínima banda de corte) determinados por área lóbulos secundarios (idénticas en ambas bandas por simetría)
- Área lóbulos secundarios = f (forma ventana) → Rizado = f (forma ventana)
- Dos últimas columnas tabla: valores para la ventana de Kaiser equivalente
  - 5ª columna: valor de  $\beta$  que da el mismo error de aproximación de pico ( $\delta$ )
  - 6ª columna: anchura banda de transición de la ventana de Kaiser equivalente ( $\Delta\omega$ )
    - Mejor medida anchura banda de transición obtenida que anchura del lóbulo principal

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, $\beta$	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

reproduccion del libro Discrete-time Signal Processing, 2ª Edicion, Oppenheim, Schaefer y Buck, Prentice-Hall.

Problema 7.6. Queremos utilizar el método de diseño de la ventana de Kaiser para diseñar un filtro FIR que cumpla las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} 0.9 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.1 & \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.06 & \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq 0.475\pi \\ 1.9 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 2.1 & \quad 0.525 \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

Esto se va conseguir aplicando la ventana de Kaiser al filtro cuya respuesta en frecuencia es:

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq 0.25\pi \\ 0, & 0.25\pi \leq |\omega| \leq 0.5\pi \\ 2, & 0.5 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el mayor valor de  $\delta$  que se puede utilizar para cumplir esta especificación? ¿Cuál es el correspondiente valor de  $\beta$ ?

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

Type of Window	Peak Side-Lobe Amplitude (Relative)	Approximate Width of Main Lobe	Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB)	Equivalent Kaiser Window, $\beta$	Transition Width of Equivalent Kaiser Window
Rectangular	-13	$4\pi/(M+1)$	-21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	-25	$8\pi/M$	-25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	-31	$8\pi/M$	-44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$	-53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$	-74	7.04	$9.19\pi/M$

Problema 7.6. Queremos utilizar el método de diseño de la ventana de Kaiser para diseñar un filtro FIR que cumpla las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} 0.9 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.1 & \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.06 & \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq 0.475\pi \\ 1.9 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 2.1 & \quad 0.525\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

a) ¿Cuál es el mayor valor de  $\delta$  que se puede utilizar para cumplir esta especificación? ¿Cuál es el correspondiente valor de  $\beta$ ?



$T_1$

$$\delta_1 = 0.1$$

$$\delta_2 = 0.06$$

$T_2$

$$\delta_3 = 0.06/2 = 0.03$$

$$\delta_4 = 0.1/2 = 0.05$$

$$A = -20 \log_{10}(0.03) = 30.45$$

$$\beta = 2.181$$



Problema 7.6. Queremos utilizar el método de diseño de la ventana de Kaiser para diseñar un filtro FIR que cumpla las siguientes especificaciones:

$$\begin{aligned} 0.9 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.1 & \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.06 & \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq 0.475\pi \\ 1.9 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 2.1 & \quad 0.525\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{aligned}$$

b) ¿Cuál es el máximo valor de  $\Delta\omega$  que se puede emplear para cumplir esta especificación? ¿Cuál es el correspondiente valor de  $M$ ?

(T1)

$$\Delta\omega = 0.1\pi$$

(T2)

$$\Delta\omega = 0.05\pi$$

$$M = \frac{A - 8}{2.285 \Delta\omega} = \frac{30.47 - 8}{2.285 \cdot 0.05\pi} = 62.56$$

$$M = 63, \quad \boxed{M+1 = 64.}$$