MAE ejercicios

Iker Terán

25 de Octubre de 2021

1 Ejercicios Bootstrap

2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de n observaciones iid de una distribución F con esperanza μ y varianza σ^2, y sea $X_1^*, \ldots, X_n^*$ n una muestra de n observaciones iid de la distribución empírica de la muestra original F_n. Calcula las siguientes cantidades:

a) $E_{F_n}[\overline{X}_n^*] := E[\overline{X}_n^* | X_1, \ldots, X_n]$

Usaremos el siguiente resultado obtenido en clase:

$E_{Fn}[X^*] := E[X^*|X_1, \ldots, X_n] = \sum_{i=1}^n X_i P(X^* = X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}$

También definimos $\overline{X}_n^*$ de la siguiente manera; $\overline{X}_n^* = \frac{X_1^* + \ldots + X_n^*}{n}$.

$$\begin{aligned} E_{F_n}[\overline{X}_n^*] &:= E[\overline{X}_n^*|X_1, \ldots, X_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i^*] \\ &= \frac{1}{n} n E[X_1^*] = \overline{X} \end{aligned}$$

b) $E_F[\overline{X}_n^*]$

Recordemos la definición de la esperanza iterada: $E[Y] = E[E[Y|X]]$

$$\begin{aligned} E_F[\overline{X}_n^*] &= E_F[E[\overline{X}_n^*|X_1, \ldots, X_n]] = E_F[\overline{X}] = E_F\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n}E_F[X_1 + \ldots + X_n] = \frac{1}{n} n E_F[X_1] = \mu \end{aligned}$$

ya que, por definicióm, $E_F(X_i) = \mu, \forall i$.

c) $Var_{Fn}[\overline{X}_n^*] := Var[\overline{X}_n^*|X_1, \ldots, X_n]$

Utilizaremos la siguiente propiedad: $Var[X] = E[X^2] + (E[X])^2$, donde $E[X^2] = \sum_{i=1}^n X_i^2 P(X = X_i)$, para calcular $Var[X^*]$.

$$\begin{aligned} Var_{F_n}[X^*] &= E_{F_n}[(X^*)^2] - (E_{F_n}[X^*])^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 P(X^* = X_i) - \overline{X}^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = S_n^2 \end{aligned}$$

Nota: La demostración de la penúltima igualdad aparece en el apartado d).

$$\begin{aligned} Var_{F_n}[\overline{X}_n^*] &= Var_{F_n}[\overline{X}_n^*] = Var_{F_n}\left[\frac{X_1^* + ... + X_n^*}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var_{F_n}[X_i^*] \\ &= \frac{1}{n^2} n S_n^2 = \frac{S_n^2}{n} \end{aligned}$$

d) $Var_F[\overline{X}_n^*]$

Por la propiedad, $Var[Y] = E[Var[Y|X]] + Var[E[Y|X]]$, obtenemos

$$Var_F[\overline{X}_n^*] = E[Var[\overline{X}_n^*|X_1, \ldots, X_n]] + Var[E[\overline{X}_n^*|X_1, \ldots, X_n]]$$

$$\begin{aligned} Var[E[\overline{X}_n^*|X_1, \ldots, X_n]] &= Var[\overline{X}] = Var\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} Var[X_1 + \ldots + X_n] \\ &= \frac{1}{n^2} n Var[X_1] = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

ya que, por definición, $Var[X_i] = \sigma^2, \forall i$.

$$E[Var[\overline{X}_n^*|X_1, \ldots, X_n]] = E\left[\frac{S_n^2}{n}\right] = \frac{1}{n}E[S_n^2] = \frac{1}{n}E\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n}\right] =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n}E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \overline{X}^2}{n} - \frac{2\overline{X}\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{1}{n}E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} + \overline{X}^2 - 2\overline{X}^2\right] \\ &= \frac{1}{n}E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \overline{X}^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n E[X_i^2] - \frac{1}{n}E[\overline{X}^2] = \frac{1}{n^2} n E[X_i^2] - \frac{1}{n}E[\overline{X}^2] \\ &= \frac{1}{n}(Var[X_i] + (E[X_i])^2) - \frac{1}{n}(Var[\overline{X}] + (E[\overline{X}])^2) = \frac{1}{n}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var_F[\overline{X}_n^*] &= E[Var[\overline{X}_n^*|X_1,\ldots,X_n]] + Var[E[\overline{X}_n^*|X_1,\ldots,X_n]] \\
&= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n^2}(2n-1)
\end{aligned}
$$