

Problemas

Problema 1 (3.5 puntos)

Las señales $x[n]$ e $y[n]$ son la entrada y salida respectivamente de un sistema de tiempo discreto LTI definido mediante la siguiente ecuación:

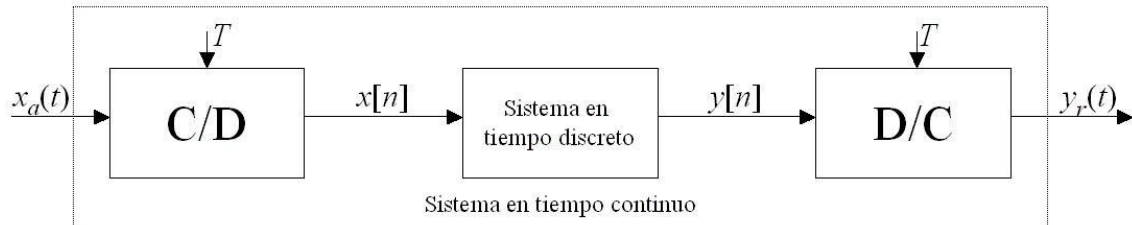
$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

Aplicando las tablas y propiedades de la DTFT, obtenga la expresión de la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\omega})$, y a continuación la respuesta al impulso del sistema $h[n]$.

Solución:

Problema 2 (3.5 puntos)

Queremos procesar señales continuas limitadas en banda a 20 kHz mediante un filtro de tiempo discreto $H(e^{j\omega})$ (caja indicada en la siguiente figura como “Sistema en tiempo discreto”) utilizando el siguiente esquema:



a) Suponiendo que el sistema en tiempo discreto $H(e^{j\omega})$ es un sistema lineal e invariante, y que los conversores C/D y D/C son ideales, determine los posibles valores que debe tomar el periodo de muestreo T para que el “sistema en tiempo continuo” equivalente (la asociación serie del C/D, el sistema en tiempo discreto y el D/C) se comporte también como un sistema lineal e invariante para las señales de entrada que queremos procesar (1.2 puntos).

Solución (indique en este espacio la solución final de este apartado, las operaciones en sucio las puede realizar en la parte de atrás de esta hoja):

Consideramos a partir de ahora y para el resto del problema que el valor de T está fijado a su máximo valor según lo obtenido en el apartado anterior.

b) Nos dan las siguientes especificaciones para el filtro en tiempo continuo equivalente $|H(j\Omega)|$ (caja indicada en la figura como “Sistema en tiempo continuo”) y debemos diseñar el filtro en tiempo discreto $|H(e^{j\omega})|$. Aplique la transformación necesaria para obtener las especificaciones del filtro de tiempo discreto $|H(e^{j\omega})|$. (1.1 puntos).

$$3.988 < |H(j\Omega)| < 4.012 \quad \text{en} \quad 0 < |\Omega| < 8000\pi \text{ rad/s}$$

$$|H(j\Omega)| < 0.006 \quad \text{en} \quad 16000\pi < |\Omega| < 28000\pi \text{ rad/s}$$

$$1.995 < |H(j\Omega)| < 2.005 \quad \text{en} \quad 32000\pi < |\Omega| < 40000\pi \text{ rad/s}$$

Solución:

c) Considerando ahora el diseño del filtro FIR mediante el método del enventanado, determine qué ventanas de las que conoce puede emplear en su diseño y cuáles no. Para las ventanas con las que se pueden cumplir las especificaciones dadas, calcule la longitud mínima de la ventana que necesitaría. Indique cuál de las ventanas posibles es la más eficiente computacionalmente. (1.2 puntos).

Nota: para la ventana de Kaiser: $M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega}$

TABLE 7.1 COMPARISON OF COMMONLY USED WINDOWS

| Type of Window | Peak Side-Lobe Amplitude (Relative) | Approximate Width of Main Lobe | Peak Approximation Error, $20 \log_{10} \delta$ (dB) | Equivalent Kaiser Window, β | Transition Width of Equivalent Kaiser Window |
|----------------|-------------------------------------|--------------------------------|--|-----------------------------------|--|
| Rectangular | -13 | $4\pi/(M+1)$ | -21 | 0 | $1.81\pi/M$ |
| Bartlett | -25 | $8\pi/M$ | -25 | 1.33 | $2.37\pi/M$ |
| Hanning | -31 | $8\pi/M$ | -44 | 3.86 | $5.01\pi/M$ |
| Hamming | -41 | $8\pi/M$ | -53 | 4.86 | $6.27\pi/M$ |
| Blackman | -57 | $12\pi/M$ | -74 | 7.04 | $9.19\pi/M$ |

Problema 3 (3 puntos)

Se tiene una red neuronal convolucional donde el tamaño de la imagen de entrada es de $256 \times 256 \times 3$. Se le va a aplicar una capa convolucional con 64 filtros de tamaño 7×7 , stride 1 y zero padding 3.

- a) Razone el tamaño del volumen de salida de dicha capa convolucional así como el número de parámetros a entrenar.
- b) A continuación se aplica max pooling de 2×2 con stride 2. Indique el tamaño del volumen de salida.

Solución:

Propiedades de la FT y de la DTFT

- 1. Periodicidad:
 - FT: No periódica.
 - DTFT: Periódica de periodo 2π : $X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega})$
- 2. Linealidad:
 - FT: $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\Omega) + bY(j\Omega)$
 - DTFT: $ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
- 3. Desplazamiento en el tiempo:
 - FT: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)$
 - DTFT: $x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
- 4. Desplazamiento en la frecuencia:
 - FT: $e^{j\Omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$
 - DTFT: $e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
- 5. Inversión en el tiempo y en la frecuencia:
 - FT: $x(-t) \leftrightarrow X(-j\Omega)$
 - DTFT: $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$
- 6. Conjugación:
 - FT: $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\Omega)$; $x^*(-t) \leftrightarrow X^*(j\Omega)$
 - DTFT: $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$; $x^*[-n] \leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$
- 7. Simetría conjugada de la transformada de **señales reales**:
 - FT: $X(j\Omega) = X^*(-j\Omega)$
 - DTFT: $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- 8. Diferenciación en el dominio del tiempo:
 - FT: $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$
 - DTFT: $x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
- 9. Integración / Acumulación en el dominio del tiempo:
 - FT: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} X(j\Omega) + \pi X(j0) \delta(\Omega)$
 - DTFT: $\sum_{m=-\infty}^n x[m] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$
- 10. Diferenciación en la frecuencia:
 - FT: $-jtx(t) \leftrightarrow \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$
 - DTFT: $-jnx[n] \leftrightarrow \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
- 11. Compresión / Expansión en el tiempo y en la frecuencia:
 - FT: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\Omega}{a}\right)$

• 12. Teorema de Parseval y *densidad espectral de energía*:

• FT: $x(t) \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega \Rightarrow d.e.e. = |X(j\Omega)|^2$

• DTFT: $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \Rightarrow E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \Rightarrow d.e.e. = |X(e^{j\omega})|^2$

• 13. Teorema de convolución y consecuencias prácticas:

• FT: $x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\Omega)H(j\Omega)$

• DTFT: $x[n] * h[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

• 14. Teorema de multiplicación, modulación o enventanado:

• FT: $x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\Omega-\theta))d\theta = \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * Y(j\Omega)$

• DTFT: $x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Tablas de FT

$$x(t) \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \text{Re}\{a\} > 0 \leftrightarrow \frac{1}{(a + j\Omega)^n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \leftrightarrow \frac{2 \text{sen}(\Omega T)}{\Omega}$$

$$\frac{\text{sen}(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$

Tablas de DTFT

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi r)$$

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], |a| < 1 \leftrightarrow \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kT] \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq T \\ 0, & |n| > T \end{cases} \leftrightarrow \frac{\text{sen}\left(\omega\left(T + \frac{1}{2}\right)\right)}{\text{sen}(\omega/2)}$$

$$\frac{\text{sen}(Wn)}{\pi n} \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad \text{periódica}$$