Prácticas Numérico

Apartado 1 Errores.

Antes de empezar el apartado, responded las siguientes cuestiones.

1). Dado que el redondeo en base 10 de la suma o producto de dos números es $\mp 0{,}5 * \varepsilon$, donde ε es el valor la última cifra significativa y que el dígito eliminado es aleatorio ¿podemos suponer que el redondeo es una variable aleatoria uniforme?

2) Si dibujo la gráfica de función de densidad del error por redondeo ¿Como debería ser dicha gráfica?

3) Si asumimos que el error de redondeo es una variable aleatoria uniforme entre $-0{,}5 * \varepsilon$ y

$\mp 0{,}5 * \varepsilon$ ¿Cuál debería ser error absoluto promedio de la suma (o el producto) de un número elevado de números en coma flotante?, da una respuesta razonada.

Ejercicio 1.

a) Implementad en Python la siguiente función racional.

$$f(x) = \frac{4x^4 - 59x^3 + 324x^2 - 751x + 622}{x^4 - 14x^3 + 72x^2 - 151x + 112}$$

Representad el valor de la función anterior para los valores de $x = 1{,}606 + 2^{-52}i$ con i=0, 1, …, 800, usad los siguientes comandos en Python para pintar la gráfica y ajustar el rango del eje y

```
plt.plot(i,y,'b.')
plt.ylim(8.7523765807784,8.7523765807786)
```

¿Sale una figura continua? ¿Por qué? ¿Puedes explicar el patrón que sale? ¿Qué consecuencias puedes sacar sobre el redondeo?

b) **Aplicación de la regla de Horner:** Implementad en Python la siguiente función

$$f(x) = \frac{622 + x * (-751 + x * (324 + x * (-59 + 4 * x)))}{112 + x * (-151 + x * (72 + x * (-14 + x)))}$$

Representad el valor de la función anterior para los mismos valores de x. ¿Observas alguna diferencia con la gráfica anterior?

c) **Un poquito de análisis previo:** Finalmente Implementad ahora la siguiente función

$$f(x) = 4 - \frac{3(x-2)[(x-5)^2 + 4]}{x + (x-2)^2[(x-5)^2 + 3]}$$

Representad el valor de la función anterior para los mismos valores de x. ¿Observas alguna diferencia con las gráficas anteriores?

Cuestiones: A la vista de las gráficas, responded las siguientes cuestiones.

1) ¿Las tres funciones que hemos pintado son la misma función, solo que escrita de diferente manera? Da una respuesta razonada.
2) ¿Podemos afirmar ahora que la distribución del error por redondeo es una variable aleatoria uniforme?
3) Comenta los resultados obtenidos.

Ejercicio Opcional: (solo para los que les molen los auténticos fenómenos numéricos paranormales), dibujad ahora las mismas gráficas para valores de $x = 2{,}4 + 2^{-52}i$ con i=0,1,….800, para los límites de la gráfica usad plt.ylim(.7407108239094,.74071082390965)

¿Qué cambio has observado? ¿Podrías explicar por qué ha cambiado la dirección del patrón?

Apartado 2 Aproximación de funciones:

Antes de implementar el apartado, responded a las siguientes preguntas.

1. ¿Dado un conjunto de n puntos, existe siempre un polinomio de grado m < n-1 que pase por dichos puntos?
2. ¿Se te ocurre una manera en la cual el cálculo de los valores singulares de una matriz permita calcular un polinomio de regresión adecuado?
3. ¿Como podrías transformar el problema de encontrar un polinomio de regresión en un problema de producto de matrices?
4. ¿Crees que, además, es posible calcular el error de regresión a partir de los valores singulares?

En general, los métodos de regresión polinómica que hemos visto consisten en el cálculo analítico del mínimo de una función de error. Dicho calculo pasaba por calcular el gradiente de cierta función en igualarlo a 0. En esta práctica vamos a ver que todos esos pasos no son realmente necesarios.

Apartado 1: Considerar el siguiente conjunto de datos:

i	x_i	y_i
1	0	1
2	0.25	1.2840
3	0.5	1.6487
4	0,75	2.1170
5	1	2.7183

Vamos a buscar el polinomio $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ que minimiza el error al aproximar los datos anteriores usando la norma estándar de R^n. Es decir, vamos a usar una regresión cuadrática.

a) Vamos a escribir el problema de regresión como un problema de interpolación sobredimensionado asumiendo que el polinomio $P_2(x)$ pasa por todos los puntos $\mathbf{x_i,y_i}$. Para ello escribiremos el problema en la forma **Xa = y** donde **X** es una matriz 5 x 3, **a** es un vector 3 x 1 e **y** es un vector 5x1.
b) Calculad la descomposición en valores singulares $\mathbf{X = U\ S\ V^t}$ de la matriz **X** que habéis encontrado en el apartado anterior. Utilizad los apuntes de clase para obtener los valores singulares de **X** y para construir las matrices **U** de 5 x5, **S** de 5 x 3 y **V** 3x3.

Apartado 2: Se puede demostrar (de hecho, no es muy difícil), que los valores **a = (a_0, a_1 y a_2)** del polinomio que buscamos se pueden obtener mediante el siguiente producto de matrices

a=Vz

El vector **z = (c_1/s_1, c_2/s_2, c_3/s_3)**, donde los valores $\mathbf{s_i}$ corresponden a los valores singulares de la matriz **A** y los valores $\mathbf{c_i}$ corresponden a los tres primeros valores del vector obtenido al multiplicar la matriz $\mathbf{U^t}$ por **y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5).**

Apartado 3: Se puede demostrar también (es más fácil aun) que el error cometido con la regresión obtenida para los valores es $\boldsymbol{E} = \sqrt{\boldsymbol{c_4}^2 + \boldsymbol{c_5}^2}$, calculad el error y comparadlo con el cálculo manual del error (es decir, comparad el valor E con el valor obtenido al calcular $\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{y}_i)^2}$

Ejercicio opcional:

a) ¿Qué obtenemos cuando aplicamos el método de los apartados 1 y 2 a la construcción de un polinomio de grado 4?
b) Comprueba que, efectivamente el polinomio obtenido se corresponde en este caso a un polinomio de interpolación en lugar de a un polinomio de regresión.