NOTAS DEL CURSO

MATEMÁTICA I
(Fundamentos de matemática para las ciencias sociales)

Tema 1: Funciones

Montevideo, Marzo de 2021

1. Funciones

1.1. Definición y representación de funciones

1.1.1. Introducción

La aplicación de las matemáticas en las ciencias sociales radica en la capacidad de representar matemáticamente fenómenos del mundo real. Estas representaciones reciben el nombre de modelos matemáticos. Al igual que una foto aérea o un plano pueden ser representaciones de una ciudad, o una maqueta a escala de un avión puede ser una representación de un avión real, los modelos matemáticos se utilizan para representar distintos fenómenos del mundo real.

Los modelos matemáticos generalmente se componen de varias funciones matemáticas. Las funciones plantean relaciones entre variables. Por ejemplo, la relación entre las variables: monto del impuesto IRPF a pagar por una persona y el salario de la persona, puede establecerse mediante una función. La función nos dará la regla que permite establecer el monto del impuesto a partir del dato del salario de la persona. Por lo tanto, las funciones tal como las veremos en el curso sugieren que el valor de una variable va a depender del valor de otra variable. El mundo real está lleno de relaciones funcionales: el número de personas en una playa puede depender de la temperatura o del día de la semana, las ventas de un producto pueden depender del precio de ese producto o del precio de las marcas competidoras, los gastos en vestimenta de una persona pueden depender de su ingreso, etc.

Para entender el uso de las funciones en las ciencias sociales comenzaremos por definir más rigurosamente qué es una función para luego estudiar distintos tipos de funciones y sus aplicaciones.

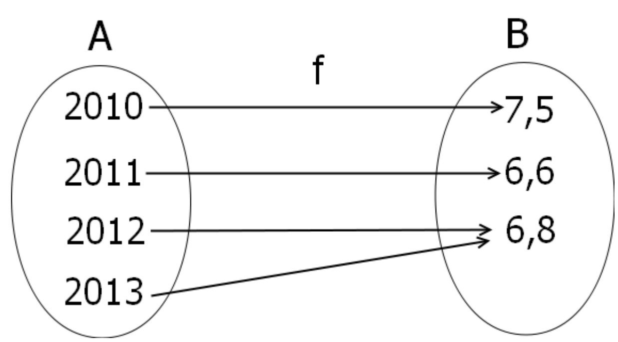
Ejemplo 1.1.1. Consideremos las mediciones de un indicador social (por ejemplo la tasa de desempleo) a lo largo de cuatro años a partir del 2010. Posiblemente una de las representaciones más naturales para esta información sea el formato de tabla:

Año	Tasa de Desempleo (%)
2010	7,5 %
2011	6,6 %
2012	6,8 %
2013	6,8 %

Una alternativa, en principio más compleja pero que a la larga resulta más potente y útil, es la expresión de esta información a través de lo que llamamos **funciones.** Concretamente, podemos pensar que disponemos de dos conjuntos:

$A = \{2010; 2011; 2012; 2013\}$ (denominado conjunto de partida o **dominio**)
$B = \{7,5; 6,6; 6,8\}$ (denominado conjunto de llegada o **co-dominio**)

Establecemos una "relación" (a la que llamaremos f) entre los elementos de ambos, de forma tal que:



Ejemplo 1.1.2. Supongamos que el gobierno implementa una política de ingreso mínimo garantizado. Esto es, una política que busca asegurar que todos los hogares dispongan de un monto de dinero igual o superior a un cierto umbral. Para fijar ideas, consideremos el valor de \$ 12.000 por mes. Así, a un hogar que tenga ingresos propios por menos de \$ 12.000 mensuales, el gobierno le otorgará una ayuda económica que complemente estos ingresos y le permita disponer de al menos \$ 12.000. En tanto, a un hogar que tenga ingresos iguales o mayores a \$12.000 por mes no le corresponderá ayuda.

Note que la regla de asignación de la ayuda económica constituye una relación entre el ingreso del hogar y la prestación que recibe. Para cada nivel de ingreso del hogar sabemos exactamente cuál es el monto de ayuda económica que le corresponde según el programa de ingreso mínimo garantizado.

Por ejemplo, a un hogar con ingresos de \$ 0 por mes le corresponderá una ayuda económica de \$ 12.000 por mes. Del mismo modo, a un hogar que tiene ingresos de \$ 3.000 por mes le corresponderá una prestación de \$ 9.000 mensuales (3000+9000 = 12000). Finalmente, a un hogar con ingresos mensuales de \$12.000 o más no le corresponderá ninguna prestación.

Aquí, la regla de asignación de la prestación del programa es una función. Su conjunto de partida o dominio es el conjunto de los ingresos de los hogares y su conjunto de llegada o co-dominio es el conjunto de los posibles montos de la ayuda económica.

Definición 1.1.1. Función

Se consideran dos conjuntos A y B distintos del conjunto vacío.

Una **función f de A en B**, ($f : A \to B$), es una relación de A en B, en la cual a cada elemento del conjunto A (al que llamaremos **dominio** de la función), le corresponde un y solo un elemento del conjunto B (al que llamaremos **co-dominio** de la función).

Ejemplo 1.1.3. Considere el Ejemplo 1.1.2 y responda:

1. ¿Cuál es el conjunto A en ese caso?
2. ¿Cuál es el conjunto B?

La función mencionada en el ejemplo establece una relación entre el ingreso mensual de los hogares y el monto de ayuda económica que les corresponde según el programa. El conjunto A en este caso corresponde al conjunto de todos los valores que puede tomar el ingreso de las familias.

Este ingreso puede ser 0 (para una familia que no percibe ingresos) o un número real positivo. Entonces podemos escribir:

$$A = [0, +\infty)$$

En tanto, el conjunto B es el conjunto de todos los valores que puede alcanzar la ayuda económica. Si un hogar no percibe ingresos, entonces le corresponderá una ayuda mensual de \$ 12.000. En cambio, si el hogar tiene ingresos mensuales iguales o mayores a \$ 12.000 le corresponderá \$ 0 de ayuda. Finalmente, si los ingresos del hogar están entre \$ 0 y \$ 12.000, la ayuda será la diferencia entre \$ 12.000 y su ingreso. Así, vemos que la ayuda económica será como mínimo \$ 0 y como máximo \$ 12.000, pasando por todos los valores entre \$ 0 y \$ 12.000. Entonces podemos afirmar que B es cualquier conjunto en el que $[0, 12000]$ esté incluido.

Podemos pensar entonces en una función como una "máquina matemática" en la cual introducimos datos de entrada (que son los elementos del dominio) y son transformados en un resultado o dato de salida. Nos referiremos a estos resultados como las "imágenes" de los datos de entrada. Las imágenes pertenecerán al codominio.

$$\text{Insumos} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \text{Resultado}$$

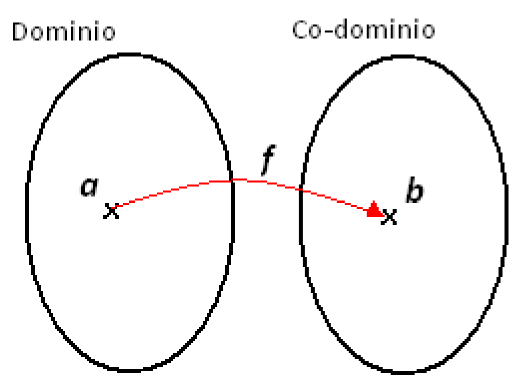
Es importante recordar que por cada "insumo" obtendremos **uno y solo un** resultado. Podemos pensar en esta relación en la otra dirección, es decir, desde el resultado a los insumos, y nos podemos preguntar lo siguiente: ¿pueden dos insumos generar el mismo resultado?

La respuesta a la pregunta anterior es **sí**. Un elemento en el conjunto de llegada puede corresponder a más de un elemento en el conjunto de partida. Para ver más claro este punto, piense en la función del Ejemplo 1.1.1, donde el elemento "6,8" del conjunto B es el correspondiente de dos elementos del conjunto A: "2012" y "2013". Lo importante para que la relación establecida entre los conjuntos A y B sea una función es que a cada elemento del conjunto A corresponde uno y solo un elemento de B, lo cual es cierto en ese caso.

Del mismo modo, en el Ejemplo 1.1.2 tendremos elementos del conjunto B (montos de ayuda económica en ese caso) que serán correspondientes de varios elementos del conjunto A (ingresos del hogar). Por ejemplo, si un hogar recibe una ayuda económica de $ 0 por mes, su ingreso mensual puede ser de $ 12.500, $ 13.000, $ 45.691, etcétera. Lo relevante es que si conocemos el ingreso mensual de un hogar, entonces utilizando la regla de asignación sabremos qué monto de ayuda le corresponderá, y ese valor será único para ese ingreso.

1.1.2. Imagen y pre-imagen. Recorrido de una función.

En una función, a cada elemento a del dominio, le corresponde un único elemento b en el co-dominio, al que llamaremos **"imagen de a"**, y notaremos $f(a)$.



Decimos que $f(a) = b$, entonces b es la imagen de a (a través de la función f) y a es una pre-imagen de b.

Ejemplo 1.1.4. Recuerde el Ejemplo 1.1.2 y responda:

1. ¿Cuál es la imagen de 0?
2. ¿Cuál es el conjunto de las pre-imágenes de 5000?
3. ¿Cuál es el conjunto de las pre-imágenes de 0?

Respuestas:

1. 1) A una familia con un ingreso mensual de \$0 se le adjudican \$12.000, de modo que la imagen de 0 será 12000. Si a la regla de asignación de la ayuda la llamamos $f(x)$, entonces tendremos que $f(0) = 12000$.

2. Sabemos el dato del valor de "llegada" y queremos saber el valor de "partida" que le corresponde. Recuerde que la función f "mapea" valores desde el ingreso mensual de la familia a la ayuda que le corresponde. Llamemos "a" al ingreso de la familia que recibe \$ 5.000. Entonces tendremos que

$$5000 + a = 12000 \rightarrow 12000 - 5000 = a \rightarrow 7000 = a$$

   La respuesta es que la pre-imagen de 5000 es 7000. Esto es, un hogar que recibe \$ 5.000 pesos de ayuda tiene un ingreso de \$ 7.000.

   O sea, $f(7000) = 5000$.

3. En este caso, el valor de "llegada" es cero. De acuerdo a la función f, a cualquier ingreso mensual igual o mayor a \$12.000 le corresponderá una ayuda de \$ 0. Así, en este caso no podemos identificar un conjunto pre-imagen de cero con un solo elemento, ya que este conjunto tiene infinitos elementos (todos los valores de \$ 12.000 en adelante). Note que lo anterior no significa que f no sea una función, ya que la definición de función establece que a cada pre-imagen corresponde una y solo una imagen (lo cual se cumple en este caso) pero a una imagen pueden corresponderle más de una pre-imagen.

Definición 1.1.2. Llamaremos **recorrido** de una función al subconjunto del co-dominio en el cual todos sus elementos son imágenes de algún elemento del dominio (lo cual es equivalente a decir que todos sus elementos tienen por lo menos una pre-imagen). Dada una función $f : A \rightarrow B$, al conjunto recorrido lo denotaremos $Rec(f)$

Nota: Para una función cualquiera, claramente $Rec(f) \subset B$. En nuestro curso trabajaremos con funciones cuyo dominio y co-dominio son subconjuntos del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. A estas funciones se les conoce como funciones reales.

1.1.3. Variable dependiente y variable independiente

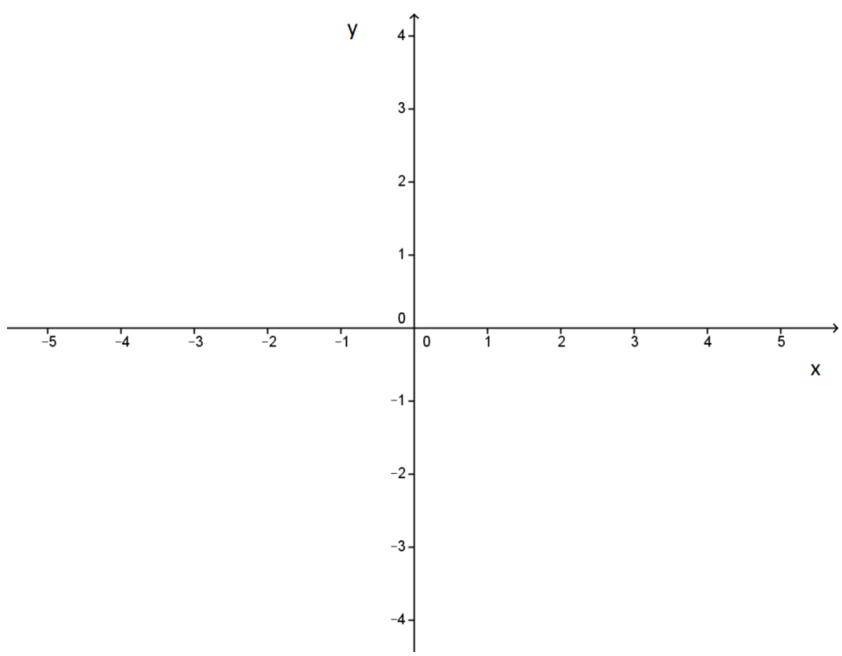
Note que cuando decimos que $f(a) = b$ estamos afirmando que el valor de b está determinado por el valor de a a través de la función f. Podemos pensar en los elementos de los conjuntos dominio y co-dominio como datos concretos de dos variables cuya relación queremos entender. Por ejemplo, la relación entre los años de educación de una persona y su ingreso, o entre el ingreso mensual de un hogar y el monto de ayuda que le corresponde como en el caso del Ejemplo 1.1.2.

Por lo tanto, cuando decimos que una cierta variable, por ejemplo el ingreso de una persona (a la que podemos denominar $f(x)$) "depende" de otra variable como sus años de educación (a la que podemos denominar x) estaremos diciendo que el valor de la variable $f(x)$ **depende de** x, es decir, se determina solo por el valor que la variable x tome. Así, llamaremos a la variable $f(x)$ la "variable dependiente" y a x la "variable independiente".

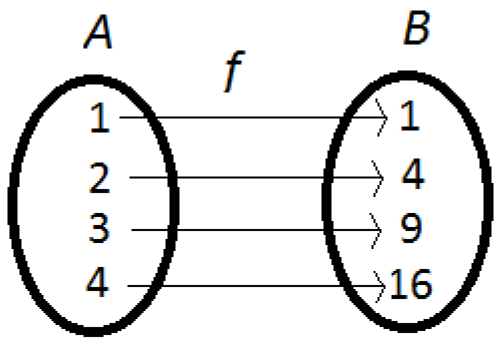
Esta expresión se lee como: "$f(x)$ es una función de x" o "$f(x)$ depende de x".

1.1.4. Representaciones de funciones

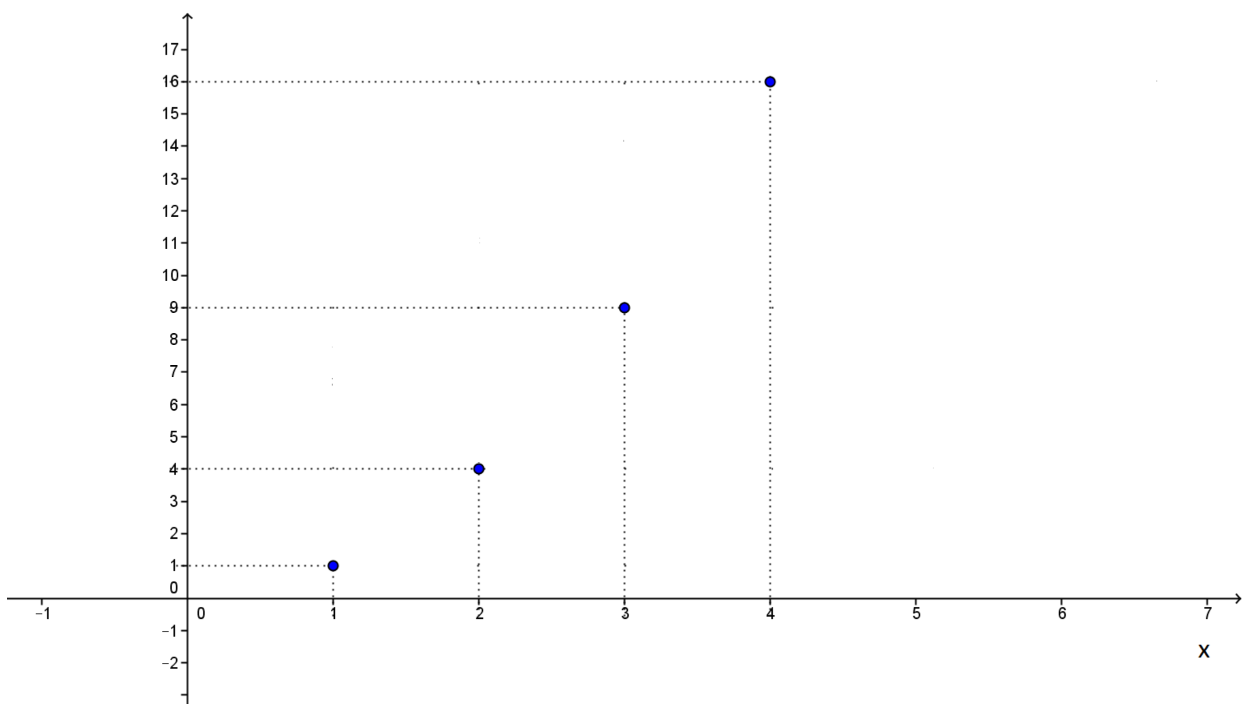
Además de la representación mediante diagramas de Venn utilizada anteriormente, existen otras formas de representar las funciones. Se puede representar una función gráficamente, en un sistema de ejes cartesianos ortogonales. La recta horizontal (o eje de abscisas) representa a los elementos del dominio y la vertical (o eje de ordenadas) a los del co-dominio de la función.



Ejemplo 1.1.5. Sean dos conjuntos $A = \{1; 2; 3; 4\}$ y $B = \{1; 4; 9; 16\}$. Se considera la función $f : A \to B$ definida así:



Podemos representar gráficamente esta función en un sistema de ejes de la siguiente manera: 5



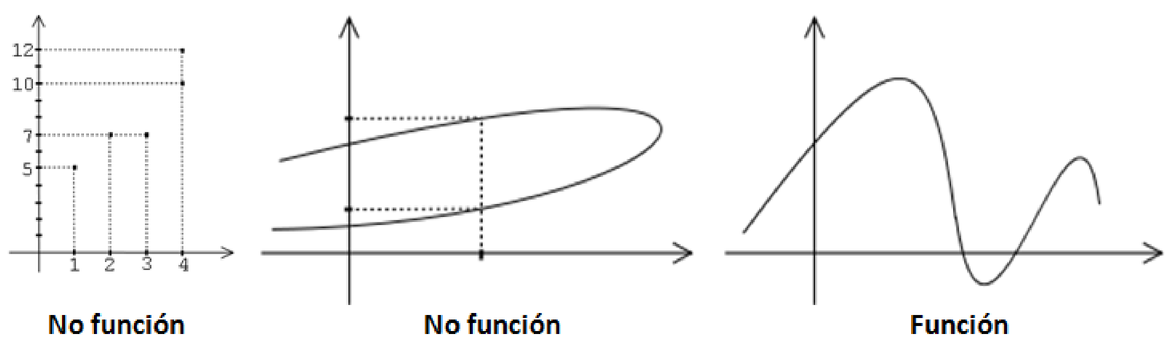
Observación 1.1.1. La función f asigna a cada elemento del conjunto A su cuadrado. Podemos plantear esa relación a través de la siguiente expresión: $f(x) = x^2$, la cual vamos a denominar expresión analítica de la función f. Entonces, una nueva manera de definir esta función es: $f : A \to B | f(x) = x^2$. La expresión anterior se lee: "f es una función de A en B tal que $f(x)$ equivale al cuadrado de x".

Por lo tanto, el valor de $f(x)$ es resultado (depende) del valor de x. Como ya vimos, x es la variable independiente y el valor de $f(x)$ al que habitualmente se lo denomina y es la variable dependiente.

En el caso del Ejemplo 1.1.5 tenemos que:

$$y = f(x) = x^2$$

Observación 1.1.2. Dado un gráfico de una función, si miramos cualquier elemento del dominio (en el eje horizontal) debe haber uno y solo un punto del gráfico en la "vertical" del mismo (de otra forma estaríamos diciendo que de ese elemento del dominio "salen" dos flechas hacia el co-dominio y en ese caso no estaríamos frente a una función).



Cuando estemos analizando funciones, una de las cosas que nos interesará saber es para qué elementos x del conjunto de partida $f(x)$ vale cero. Llamaremos a estos elementos del conjunto de partida **raíces** de la función. Esta información nos será útil por ejemplo cuando estemos considerando conceptos como el saldo migratorio (la diferencia entre los inmigrantes y los emigrantes) de nuestro país en función del tiempo, o el saldo de la balanza comercial (la diferencia entre el valor de las exportaciones y las importaciones). Adicionalmente, el concepto de raíz nos será útil para descubrir otras propiedades matemáticas de las funciones (esto lo veremos más adelante). Procederemos ahora a dar una definición formal del concepto de "raíz de una función".

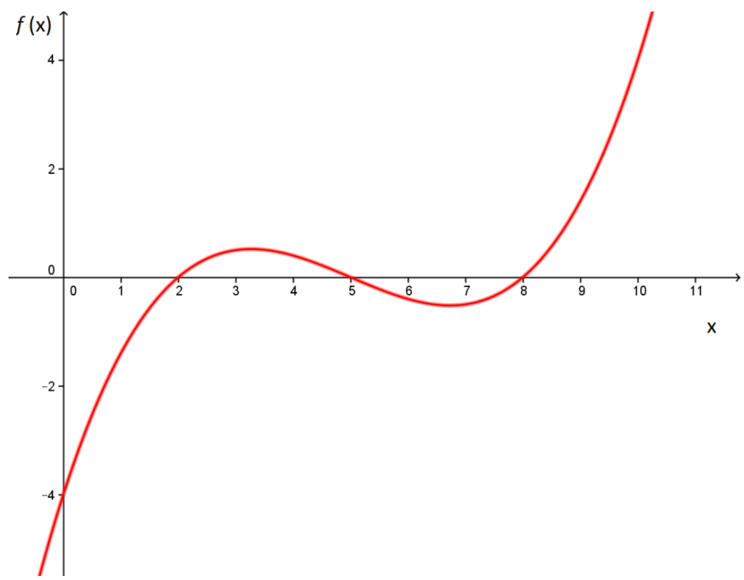
Definición 1.1.3. Raíces o ceros de una función

Las **raíces** o **ceros** de una función son aquellos números del dominio cuya imagen a través de la función es cero. Dicho de otro modo: Sean dos conjuntos no vacíos A y B, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ y una función $f : A \to B$.

$$\alpha \text{ es raíz de } f \Leftrightarrow \alpha \in A \text{ y } f(\alpha) = 0$$

El conjunto de raíces de f es: $\{x | x \in A, f(x) = 0\}$

Ejemplo 1.1.6. Consideremos, por ejemplo, el siguiente gráfico de una cierta función f.



Es fácil concluir, a partir del gráfico, que las raíces de la función f son: 2, 5 y 8, ya que: $[f(2) = f(5) = f(8) = 0\ ]$, es decir, que $(2, f(2))$, $(5, f(5))$ y $(8, f(8))$ son los puntos donde la gráfica de la función corta con con el eje horizontal (abcsisas).

1.1.5. Signo de una función

Estudiar el signo de una cierta función $f(x)$ (que notaremos $sg(f(x))$ consiste en determinar para qué valores de x, pertenecientes a su dominio, se cumple que $f(x) < 0$, para qué valores de x se cumple que $f(x) > 0$ y para qué valores de x se cumple que $f(x) = 0$.

Ejemplo 1.1.7. Nuevamente, esto es muy sencillo de realizar a partir del gráfico de la función. Por ejemplo, si consideramos el gráfico del Ejemplo 1.1.6, podemos concluir que:

- Si $x < 2 \Rightarrow f(x) < 0$
- Si $x = 2 \Rightarrow f(x) = 0$
- Si $2 < x < 5 \Rightarrow f(x) > 0$
- Si $x = 5 \Rightarrow f(x) = 0$
- Si $5 < x < 8 \Rightarrow f(x) < 0$
- Si $x = 8 \Rightarrow f(x) = 0$
- Si $x > 8 \Rightarrow f(x) > 0$

Para expresar esta información de forma más abreviada, utilizaremos de aquí en más el siguiente diagrama, conocido como **diagrama de signo**. Allí se indican; el dominio de la función, sus raíces y el valor del signo de la imagen de cualquier x:

$$\begin{array}{ccccccccc} & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & \\ sg(f(x)) & \text{---} & | & \text{---} & | & \text{---} & | & \longrightarrow & \\ & & 2 & & 5 & & 8 & & x \end{array}$$

Definición 1.1.4. Ordenada en el origen

Otro valor que nos puede interesar es $f(0)$ al que llamaremos **ordenada en el origen**. Más formalmente:

Sean: $D \subseteq \mathbb{R}/0 \in D$ y la función $f : D \to \mathbb{R}$. Llamaremos **ordenada en el origen** a la **imagen de** 0 según la función f, o sea $f(0)$. En el gráfico del Ejemplo 1.1.6 podemos observar que -4 es su ordenada en el origen $[f(0) = -4]$, es decir, $(0; 4)$ es el punto de corte de la gráfica de la función con el eje vertical (ordenadas).

También resulta de interés saber si, para un intervalo de valores de x, las imágenes de una función están aumentando a medida que aumenta x o están disminuyendo. Para esto formalizaremos los conceptos de crecimiento y decrecimiento de una función.

Definición 1.1.5. Crecimiento y decrecimiento de una función en un conjunto

Sea una función f de dominio A y co-dominio B, $(f : A \to B)$ y $C \subseteq A$

Entonces:

- f es estrictamente creciente en $C \Leftrightarrow \forall x \in C, \forall y \in C | x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f es estrictamente decreciente en $C \Leftrightarrow \forall x \in C, \forall y \in C | x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- f es constante en $C \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} | \forall x \in C, f(x) = k$

O sea, diremos que f es estrictamente creciente si para todos los elementos del dominio, la función f nos devuelve resultados cada vez mayores a medidas que incrementamos el valor de los elementos del dominio, que son los "insumos" que ponemos en la "máquina matemática". Por el contrario, f será estrictamente decreciente en C si para todos los elementos del conjunto C, la función f nos devuelve resultados cada vez menores a medidas que incrementamos el valor de los "insumos" que ponemos en la "máquina matemática". Finalmente, f es constante en C si para todos los elementos del conjunto C, la función f nos devuelve siempre el mismo número real al introducir los "insumos" en la "máquina matemática".

Adicionalmente, nos interesará saber para qué valores de su dominio la función f alcanzará sus valores máximo y mínimo, y cuáles serán estos valores. Para esto, definiremos las nociones de máximo y mínimo.

Definición 1.1.6. Máximos y mínimos. Sea una función f de dominio A y co-dominio B, $(f : A \to B)$

- M es máximo de $f \Leftrightarrow M \in rec(f)$ y para todo $x \in A$ se cumple que $f(x) \leq M$.

  Si $a \in A$ es una preimagen de M $(f(a) = M)$, decimos que f alcanza su máximo en a.

- m es mínimo de $f \Leftrightarrow m \in rec(f)$ y para todo $x \in A$ se cumple que $f(x) \geq m$.

  Si $a \in A$ es una preimagen de m $(f(a) = m)$, decimos que f alcanza su mínimo en a.

Dicho de otro modo, M es un máximo de f si y solo si M es mayor o igual que cualquier otro resultado que nos devuelva la función f cuando le introducimos elementos del conjunto A y además M tiene alguna pre-imagen a través de f. De forma equivalente, podemos decir que M es la mayor de la mayor de las imágenes. En la misma línea, m es un mínimo de f si y solo si m es menor o igual que cualquier otro resultado que nos devuelva la función f cuando le introducimos elementos del conjunto A y además m tiene alguna pre-imagen a través de f. De igual forma, podemos decir que m es la menor de las imagenes.

1.2. Funciones definidas por tramos

Recuerde el Ejemplo 1.1.2. Allí vimos que la regla de asignación de la ayuda económica era tal que cada familia debía disponer de al menos \$ 12.000 por mes al sumar el ingreso del hogar y la ayuda. Esto implica que si el hogar tiene un ingreso mensual de menos de \$ 12.000 por mes, la ayuda económica completa ese ingreso hasta llegar a los \$12.000, pero si el ingreso del hogar es de \$12.000 o más, la ayuda económica es \$ 0. La expresión analítica de la función que determina la ayuda económica es $f(x) = 12000 - x$ (siendo x el ingreso mensual del hogar) si x es menos de 12000. En cambio, la ayuda económica es $f(x) = 0$ si x es igual o mayor a 12.000. Estamos ahora en condiciones de escribir la expresión analítica que describe completamente la regla de asignación de la ayuda económica. La misma será:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ | f(x) = \begin{cases} 12000 - x, \text{ si } 0 \leq x < 12000 \\ 0, \text{ si } x \geq 12000 \end{cases}$$

La expresión anterior puede leerse como: "sea la función f que va desde el conjunto de los reales positivos y el cero a ese mismo conjunto; tal que $f(x)$ valdrá $(12000 - x)$ cuando x sea igual o mayor a cero pero menor a 12000, y valdrá cero cuando x sea igual o mayor a 12000".

Definición 1.2.1. Una función definida por tramos es aquella que tiene distintas expresiones analíticas en diferentes intervalos de su dominio.

1.3. Operaciones con funciones

Las funciones también se pueden combinar algebraicamente para crear otra función resultante, siempre y cuando lo permitan el dominio y el co-dominio.

Ejemplo 1.3.1. Suponga que tenemos las funciones:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = 3x - 5$;
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | g(x) = x^2 - 2x + 1$;
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | h(x) = x^3$;
- $j : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} | j(x) = \frac{1}{2x^4}$

Es posible combinar estas funciones para obtener nuevas funciones. A continuación mostramos ejemplos de suma, diferencia, producto y cociente de funciones.

- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | p(x) = f(x) + g(x) = 3x - 5 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + x - 4$ (suma de funciones)
- $q : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} | q(x) = h(x) - j(x) = x^3 - \frac{1}{2x^4}$(resta de funciones)
- $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | r(x) = f(x) \cdot h(x) = (3x - 5) \cdot x^3 = 3x^4 - 5x^3$(producto de funciones)
- $s : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} | s(x) = \frac{h(x)}{j(x)} = \frac{x^3}{\frac{1}{2x^4}} = 2x^7$(cociente de funciones)

1.4. Funciones afines

El primer tipo de funciones que veremos se conoce con el nombre de funciones afines. Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo 1.4.1. El propietario de una camioneta destinada al traslado de personas cobra una tarifa mínima de \$ 500 más \$ 15 por cada km de distancia recorrida.

¿Cuánto tendrá que pagar una persona que contrató el servicio pero no pudo utilizarlo?

¿Cuál será el precio que se le cobre a un grupo de personas que viajen desde Montevideo a Piriápolis (aprox. 100 km)? ¿Y a Durazno (aprox. 185 km)?

En una tabla:

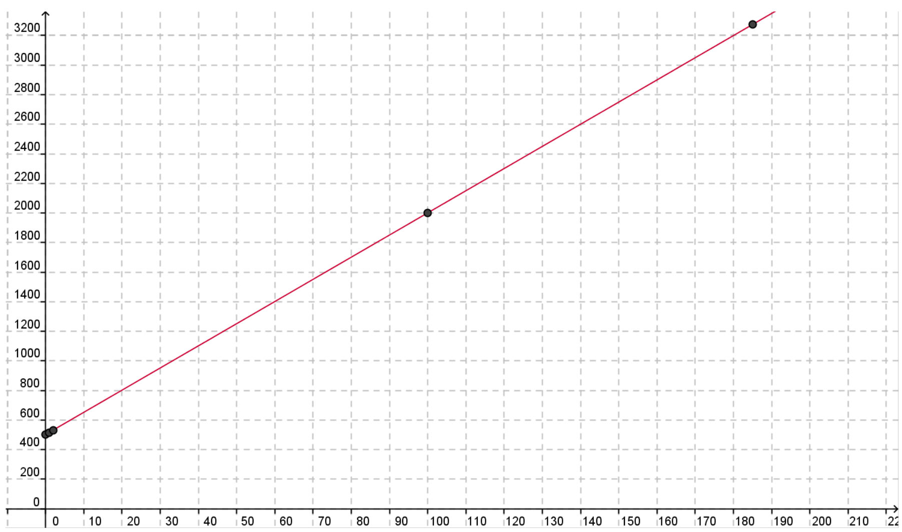
Distancia recorrida (en km)	Tarifa a cobrar (en \$)
0	$15 \cdot 0 + 500 = 500$
1	$15 \cdot 1 + 500 = 515$
2	$15 \cdot 2 + 500 = 530$
100	$15 \cdot 100 + 500 = 2000$
185	$15 \cdot 185 + 500 = 3275$
...	...
x	$15x + 500$

La expresión analítica de una función afín es de la forma:

$$f(x) = ax + b; \qquad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

¿Es una función? ¿Por qué? ¿Cuál es su Dominio? ¿Y el Recorrido correspondiente?

Si representamos los puntos en una gráfica, ¿qué forma tiene?



Definición 1.4.1. Llamaremos **afín** a una función de la forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = ax + b$, con $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

Podemos clasificar a las funciones afines, según el valor del coeficiente a:

1. $a \neq 0 \to f(x) = ax + b \to$ funciones polinómicas de primer grado
2. $a = 0 \to f(x) = b \to$ funciones constantes

Nota: En las aplicaciones en Ciencias Sociales habitualmente trabajaremos con dominios que sean subconjuntos de $\mathbb{R}$, dado que la variable independiente representará en muchos casos cantidades o precios.

1.4.1. Representación gráfica de una función afín

Aceptamos que la representación gráfica de una función afín es una recta y como tal hacen falta solamente 2 puntos para poder determinarla.

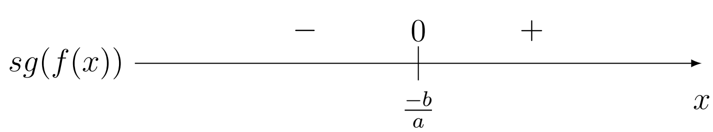
- Raíces de las funciones polinómicas de primer grado: para hallar las raíces de una función debemos resolver la ecuación: $f(x) = 0$

  En este caso:

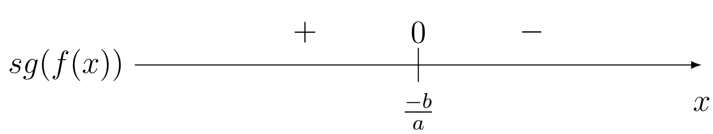
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{-b}{a}$

- Signo de las funciones polinómicas de primer grado: ($a \neq 0 \Leftrightarrow a > 0$ o $a < 0$)

  1. Si $a > 0$

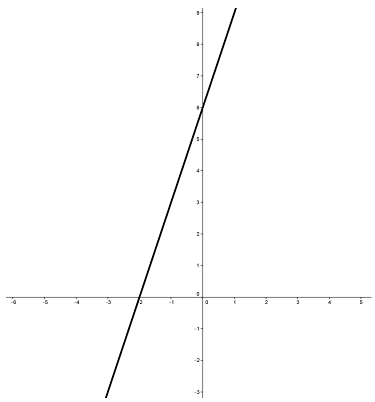
  2. Si $a < 0$

Ejemplo 1.4.2. Representación gráfica y signo de funciones afines.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = 3x + 6$

Gráfico



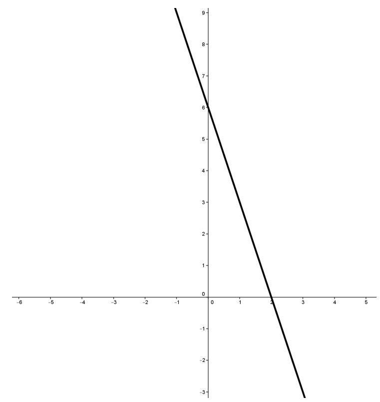
Signo

$sg(f(x))$ $\quad - \quad 0 \quad +$ $\quad x$

-2

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = -3x + 6$

Gráfico



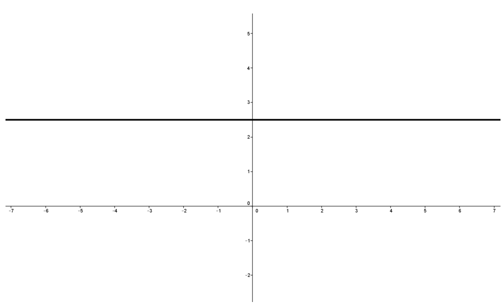
Signo

$sg(f(x))$ $\quad + \quad 0 \quad -$ $\quad x$

2

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = b$ con $b \in \mathbb{R}$ (función constante)

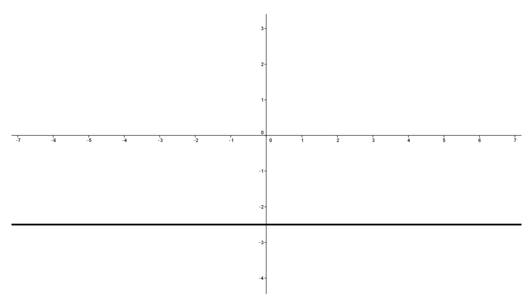
Gráfico



Signo

$sg(f(x))$ $\quad + \quad +$ $\quad x$

Gráfico



Signo

$sg(f(x))$ $\quad - \quad -$ $\quad x$

En el caso $b = 0$, el gráfico de f coincide con el eje de abscisas (eje x).

Observación 1.4.1.

1. Si $b \neq 0$, f no tiene raíces.
2. Si $b = 0$, f es idénticamente nula, por lo cual x es raíz de f para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nota: Consideremos una función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = ax + b$; con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$

Como se vio antes, la gráfica de una función de este tipo es una recta. Podemos plantear entonces que la ecuación de una recta es:

$$y = ax + b,\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

El número a recibe el nombre de coeficiente angular de la recta, y b es la ordenada en el origen (b es la imagen de 0).

1.4.2. Interpretación de los parámetros de una función afín.

La interpretación de los parámetros de una función es un aspecto fundamental del curso.

En el caso de una función lineal cuya forma general es: $y = f(x) = ax + b$, hay dos parámetros para interpretar: los coeficientes a y b.

El coeficiente a, llamado coeficiente angular, está indicando como cambia la variable y ante un cambio de la variable x. En este caso el cambio es constante: cada vez que la variable x aumenta (o disminuye) en una unidad, la variable y aumenta (o disminuye) en el valor de a. Además, si analizamos el gráfico de la función, el valor de a nos indica la pendiente o inclinación de la gráfica de la función. Es decir, la gráfica será una recta cuya inclinación vendrá dada por el valor del coeficiente angular. Si $a > 0$, la pendiente o inclinación será positiva, si $a < 0$ la pendiente o inclinación será negativa.

El coeficiente b, llamado ordenada en el origen o término independiente, es un término constante. En el caso particular en que $x = 0$ se tiene que $y = f(0) = b$. Gráficamente, $(0, b)$ es el punto de corte de la gráfica de la función con el eje de las ordenadas.

Volvamos sobre el Ejemplo 1.4.1 para fijar estos conceptos.

¿Cuál es la expresión analítica de la función f que relaciona la cantidad de kilómetros recorridos (a la que llamaremos x) por la camioneta con el costo del viaje?

El dueño de la camioneta cobrará \$ 500 sólo por contratar el viaje, de modo que el costo del viaje implicará un monto de \$ 500, independientemente de la cantidad de kilómetros recorridos. El término independiente de esta función será 500. El nombre "término independiente" no es para nada arbitrario, ya que denomina al término de la función f que no depende de x.

Adicionalmente, sabemos que el costo del viaje aumentará $ 15 con cada kilómetro recorrido. De manera que el costo total del viaje incorporará un término variable que dependerá de la cantidad de kilómetros recorridos. Este término será el producto del costo por kilómetro por la cantidad de kilómetros recorridos (a la que hemos llamado x).

Estamos entonces en condiciones de escribir la función que describe el costo del viaje:

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} | f(x) = 500 + 15x$$

En esta función, un cambio en el valor de y es directamente proporcional a un cambio en el valor de x. Esta tasa de cambio es constante y se representa por medio del coeficiente angular 15. El valor de 15 en el coeficiente angular nos indica que por cada unidad que aumente x, $f(x)$ aumentará en 15. Por ejemplo:

$$f(10) = 500 + 15 \cdot 10 = 650$$

$$f(11) = 500 + 15 \cdot 11 = 665$$

$$f(11) - f(10) = 665 - 650 = 15$$

Si prueba con otros valores de x encontrará que siempre que x aumente en una unidad $f(x)$ se incrementará en 15.

Visto de otro modo, el coeficiente angular nos indica la pendiente que tiene la recta con que representamos a $f(x)$. Valores mayores del coeficiente angular nos indicarán que la función aumenta más rápidamente a medida que aumenta x y viceversa.

Ejemplo 1.4.3. Supongamos que el Ministerio de Desarrollo Social (MIDES) dispone de 200.000 dólares por mes para implementar un programa social que consiste en realizar una transferencia monetaria de 150 dólares por mes por hogar a determinados sectores de la sociedad. Para determinar la cantidad de hogares a los cuales podría beneficiar con el programa, el MIDES necesita calcular el costo total de dicho programa. Se sabe que el programa tiene ciertos costos fijos, asociados a gastos administrativos y de personal que ascienden a 6000 dólares mensuales; y también costos variables, que dependerán de la cantidad de individuos que vayan a recibir la transferencia. Por lo tanto, el costo total (CT) será la suma de los costos fijos (CF) y los costos variables (CV). El CT mensual del programa se define a través de la siguiente función lineal:

$$CT(x) = CV(x) + CF(x) = 150x + 6000$$

Siendo x la cantidad de personas que cubre el programa. Por lo tanto, el Costo Total es la variable dependiente, ya que su valor dependerá de la cantidad de personas que cubra el programa (variable independiente).

El valor 150 es el coeficiente angular, que nos indica que por cada persona adicional que ingresa al programa, los costos aumentan en 150 dólares. El aumento por persona es constante, es siempre el mismo. Por ejemplo, si el programa cubre a 900 personas el CT será: $CT(900) = 150 * 900 + 6000 = 141000$.

En cambio si el programa cubre 901 personas el CT será: $CT(901) = 150*901+6000 = 141150$.

Por otra parte, la ordenada en el origen es 6000, que nos indica que aunque el programa no estuviera llegando a ninguna persona, igual tendría costos por 6000 dólares, porque son los costos fijos.

(Ejercicio) Compruebe que si el MIDES cuenta con 200000 mensuales podrá alcanzar a 1293 hogares con su programa.

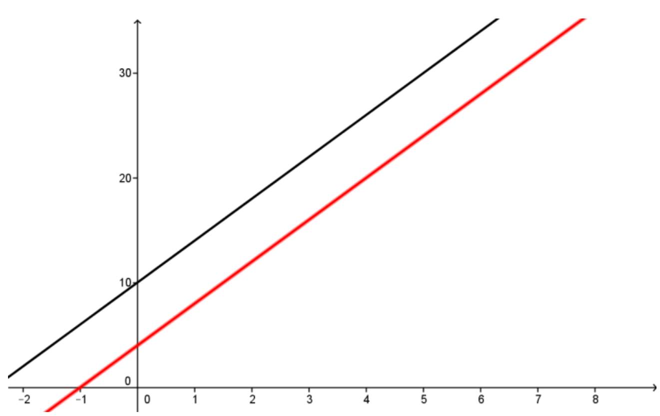
Definición 1.4.2. Posiciones relativas de 2 rectas en el plano

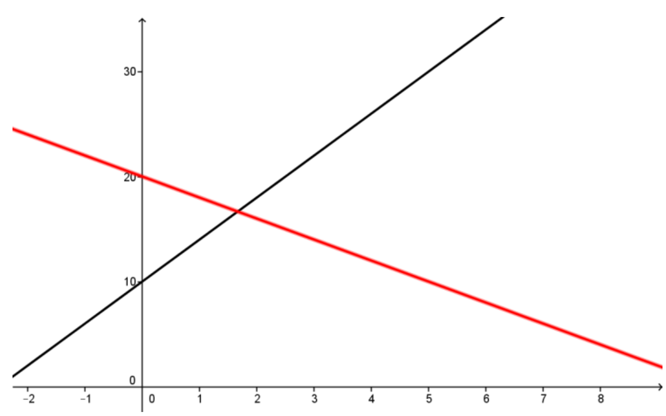
Sean las rectas: $r : y = a_1x + b_1$ y $s : y = a_2x + b_2$

- **Paralelas:** las rectas son paralelas si y solo si tienen el mismo coeficiente angular, es decir: $a_1 = a_2$.

En particular, si además de lo anterior se cumple $b_1 = b_2$, las rectas son coincidentes (y en ese caso sería $r = s$).

- **Secantes:** las rectas son secantes si y solo si los coeficientes angulares son distintos, es decir: $a_1 \neq a_2$.





Ejemplo 1.4.4. Una aplicación a las Ciencias Sociales: Equilibrio del mercado de un producto.

El mercado de un bien, por ejemplo de alfajores, es el ámbito en el cual los compradores (demandantes) y vendedores (oferentes) se encuentran e intercambian ese bien. El mercado se dice que está en equilibrio cuando la cantidad demandada del bien por parte de los compradores resulta igual a la cantidad ofertada del bien por parte de los vendedores.

Tanto la cantidad demandada como la cantidad ofertada varían con el precio del bien, es decir, dependen del precio que tenga el bien en cuestión. Esto puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera:

- Función de demanda: $q^D : [0, 250] \to \mathbb{R} | q^D = -4p + 1000$
- Función de oferta: $q^O : [0, 250] \to \mathbb{R} | q^O = 3p + 860$

donde:

$q^D =$ cantidad mensual demandada de alfajores en función del precio

$q^O =$ cantidad mensual ofertada de alfajores en función del precio

$p =$ precio de cada alfajor

Si el mercado está en equilibrio, la cantidad ofertada es igual a la demandada, como ya habíamos señalado antes. Es decir, en equilibrio se cumple: $q^D = q^O$

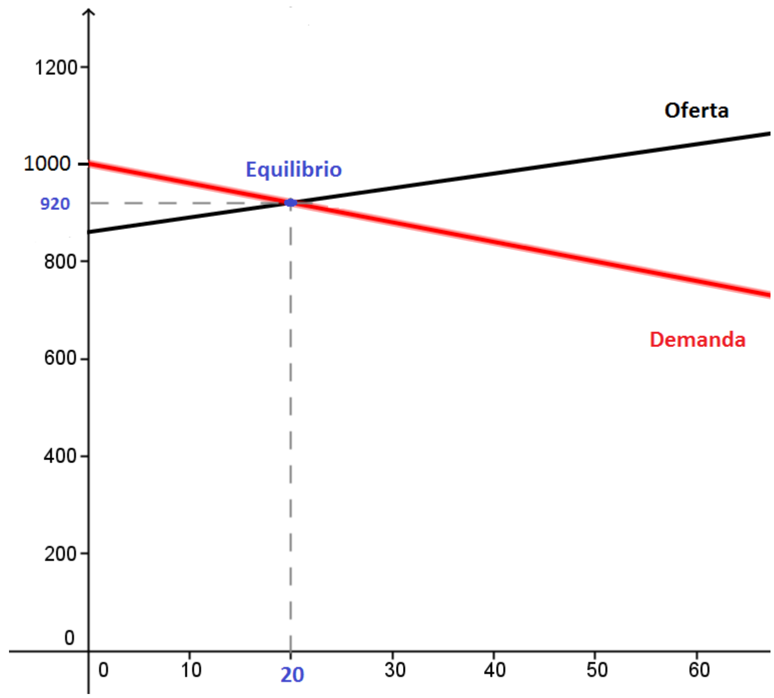
El precio de equilibrio será el p tal que las cantidades ofrecidas y demandadas sean iguales. Para hallarlo, tendremos que resolver la ecuación anterior:

$$q^D = q^O \Leftrightarrow 3p + 860 = -4p + 1000 \Leftrightarrow 7p = 140 \Leftrightarrow p = 20$$

Cuando los alfajores cuestan \$20, entonces, el mercado de alfajores se encuentra en equilibrio. ¿Y qué cantidad de alfajores es intercambiada a ese precio?

Para determinarla, basta con sustituir el precio de equilibrio en la función de oferta o en la de demanda. Así se llega a que la cantidad mensual intercambiada (también se le dice transada) de equilibrio es 920 alfajores.

Resulta interesante también interpretar el equilibrio del mercado en términos gráficos:



El equilibrio del mercado se observa entonces en la intersección de las rectas que representan las funciones de oferta y de demanda. [1]

1.5. Funciones cuadráticas

1.5.1. Introducción

Las funciones lineales vistas anteriormente son muy útiles en ciencias sociales, pero existen fenómenos que no se comportan de manera lineal y por lo tanto no se pueden aproximar adecuadamente utilizando funciones afines. Las funciones cuadráticas son un ejemplo de funciones muy utilizadas en las ciencias sociales. Otro ejemplo de funciones no lineales que veremos más adelante en el curso son las funciones polinómicas y las funciones racionales. Comencemos con un ejemplo:

Ejemplo 1.5.1. Consideremos la relación entre los ahorros que acumula una persona a lo largo de su vida y su edad. Parece bastante intuitivo pensar que el nivel de ahorro de una persona es bajo cuando comienza su vida laboral y aumenta hasta alcanzar un máximo, para posteriormente descender cuando esa persona se jubila y empieza a consumir de sus ahorros para vivir. Si quisiéramos describir esta relación a través de una función lineal, estaríamos planteando una situación en que los ahorros crecerían con la edad durante toda la vida de la persona y a un ritmo constante.

[1] Profundizará sobre este tópico en la asignatura "Principios de Economía". Tenga en cuenta que en esa asignatura graficará los precios en el eje vertical y las cantidades en el eje horizontal.

Entonces, ¿cómo podríamos representar la relación matemática entre el ahorro acumulado por un trabajador y sus años de vida? Necesitamos una función que sea creciente para los primeros años de trabajo, que alcance un máximo y luego decrezca con respecto a la edad. Una forma de modelar esto, aunque ciertamente no la única, es a través de una función cuadrática. Por ejemplo, consideremos la siguiente función:

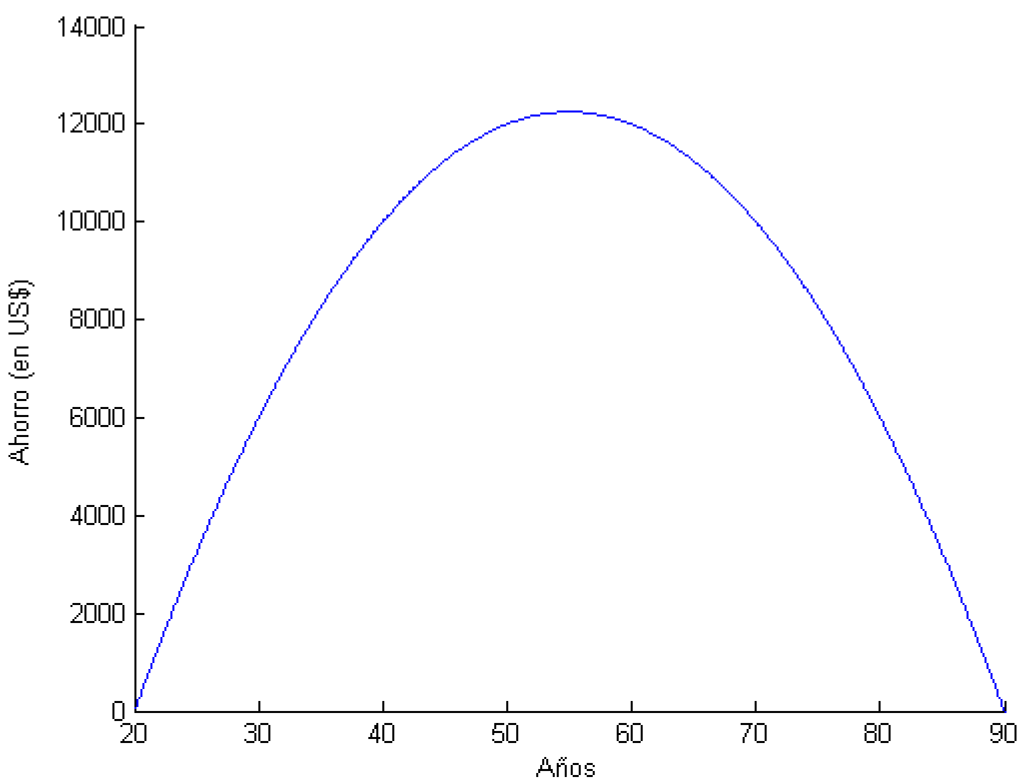
$A : [20, 90] \to \mathbb{R} | A(x) = -10x^2 + 1100x - 18000$

$\Rightarrow$ La expresión analítica de una función cuadrática es de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

Donde $A(x)$ es el monto de ahorros en pesos uruguayos y x son los años de vida del individuo. Aquí $a = -10$, $b = 1100$ y $c = -18000$.

Representación gráfica de la función de ahorro $A : [20, 90] \to \mathbb{R} | A(x) = -10x^2 + 1100x - 18000$



De acuerdo a estos resultados, el ahorro de una persona crece hasta los 55 años de edad para luego comenzar a decrecer.

Ejemplo 1.5.2. En el ejemplo 1.4.5 anterior vimos que la demanda de alfajores se regía por la siguiente función:

$$q^D : [0, 250] \rightarrow \mathbb{R} | q^D = -4p + 1000$$

Suponga que, a diferencia del ejemplo anterior, las empresas de alfajores pueden y están dispuestas a vender cualquier cantidad de alfajores que se les demande, al mismo precio. Esto implica que la cantidad de alfajores intercambiada en este mercado estará determinada enteramente por la demanda de alfajores, ya que los oferentes acomodarán su oferta a cualquier cantidad demandada sin variar el precio.

Vamos a intentar determinar ahora el ingreso que perciben las empresas productoras de alfajores por la venta de estos. Asumiendo que las empresas satisfacen cualquier nivel de demanda que enfrenten, los ingresos mensuales de las empresas por venta de alfajores (que notaremos I) pueden calcularse de esta manera:

$$\text{Ingresos} = \text{precio} * \text{cantidad vendida}$$

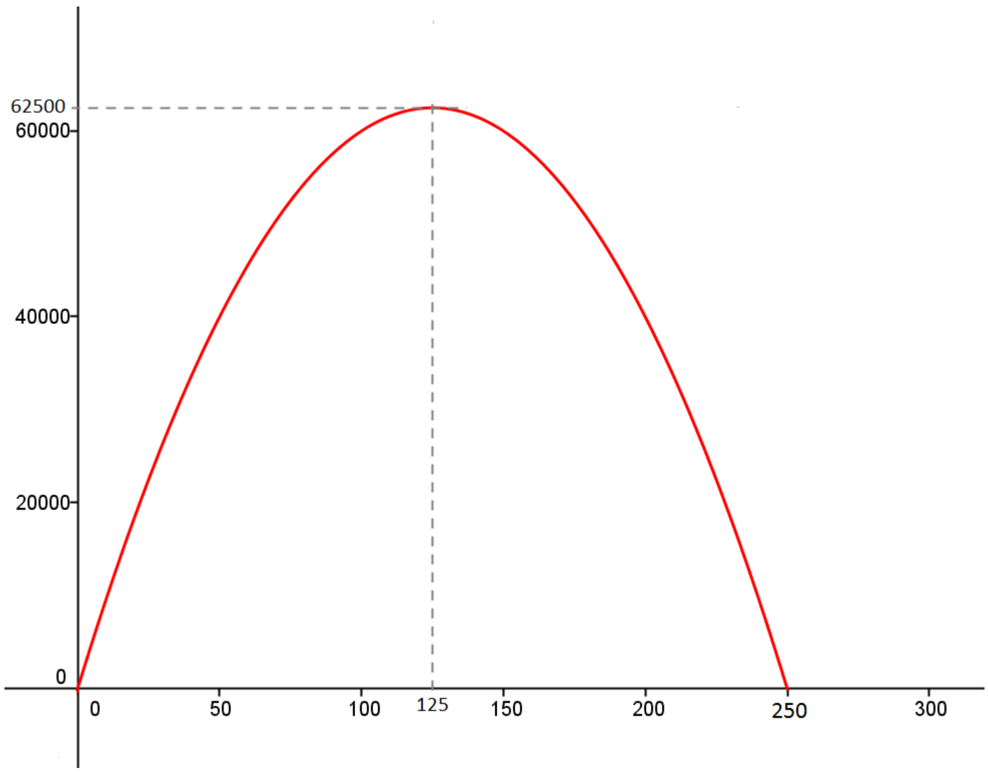
Entonces: $I(p) = p \cdot q^D = p \cdot (-4p + 1000) = -4p^2 + 1000p$

Así, la función de ingresos mensuales de las empresas quedará determinada de la siguiente manera:

$$I : [0, 250] \rightarrow \mathbb{R} | I(p) = -4p^2 + 1000p$$

Observación 1.5.1. En el caso de la función de ingresos anterior $c = 0$, pero si las empresas recibieran un subsidio mensual fijo por parte del Estado (por ejemplo de \$ 100.000), entonces la expresión analítica de la función pasaría a ser $I(p) = -4p^2 + 1000p + 100000$

Representación gráfica de la función de ingresos de la empresa: $I : [0, 250] \rightarrow \mathbb{R} | I(p) = -4p^2 + 1000p$



Definición 1.5.1. Funciones cuadráticas

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = ax^2 + bx + c; \qquad a \in \mathbb{R} | a \neq 0, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

Nótese que una función cuadrática es una función polinómica de grado 2.

1.5.2. Representación gráfica de una función cuadrática

Aceptamos que la representación gráfica de una función cuadrática es una "parábola" cuyo eje es una recta vertical (o paralelo al eje Oy).

- Raíces

  Para hallar las raíces de una función es necesario resolver la ecuación: $f(x) = 0$

  En este caso: $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

  Sea $\Delta = b^2 - 4ac$; $\Delta =$ Discriminante de la ecuación

- Signo de las funciones polinómicas de segundo grado: (según a y Δ)

  1. Caso 1 $\Delta > 0$ (f tiene dos raíces distintas α y β; por ejemplo $\alpha < \beta$)

     a) Si $a > 0$

$$\begin{array}{lccccccc} & & + & 0 & - & 0 & + & \\ sg(f(x)) & \longrightarrow & & | & & | & & \\ & & & \alpha & & \beta & & x \end{array}$$

b) Si $a < 0$

$$\begin{array}{lccccccc} & & - & 0 & + & 0 & - & \\ sg(f(x)) & \longrightarrow & & | & & | & & \\ & & & \alpha & & \beta & & x \end{array}$$

2. Caso 2 $\Delta = 0$ (f tiene una raíz doble α)

   a) Si $a > 0$

$$\begin{array}{lcccccc} & & + & 0 & + & \\ sg(f(x)) & \longrightarrow & & | & & \\ & & & \alpha_{(2)} & & x \end{array}$$

   b) Si $a < 0$

$$\begin{array}{lcccccc} & & - & 0 & - & \\ sg(f(x)) & \longrightarrow & & | & & \\ & & & \alpha_{(2)} & & x \end{array}$$

3. Caso 3 $\Delta < 0$ (f no tiene raíces reales)

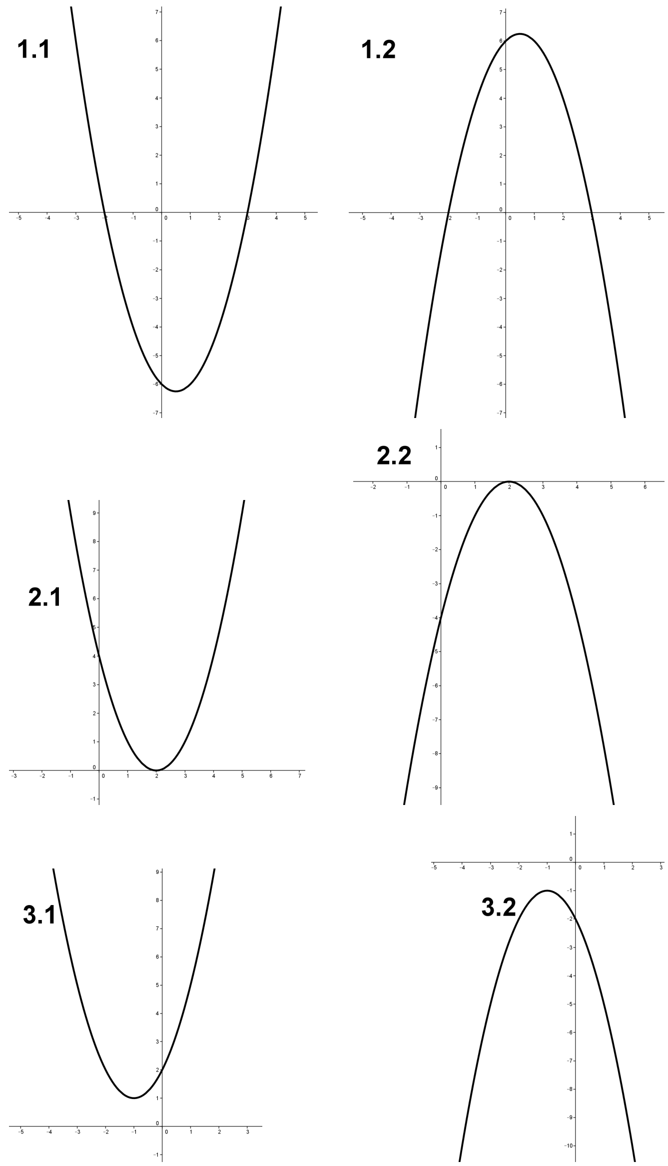
   a) Si $a > 0$

$$\begin{array}{lccccc} & & + & + & + & \\ sg(f(x)) & \longrightarrow & & & & \\ & & & & & x \end{array}$$

   b) Si $a < 0$

$$\begin{array}{lccccc} & & - & - & - & \\ sg(f(x)) & \longrightarrow & & & & \\ & & & & & x \end{array}$$

Veamos a continuación ejemplos gráficos de cada uno de estos casos:



- No daremos la definición formal de **concavidad** de una parábola, pero esperamos que sea claro a partir de los gráficos anteriores que las parábolas 1.1, 2.1 y 3.1 tienen concavidad positiva mientras que las parábolas 1.2, 2.2 y 3.2 tienen concavidad negativa. Es posible determinar la concavidad de una parábola a partir de su expresión analítica. Mas concretamente, a partir del valor del coeficiente a:

  1. si $a > 0$, la función cuadrática tiene concavidad positiva en $\mathbb{R}$;
  2. si $a < 0$, la función cuadrática tiene concavidad negativa en $\mathbb{R}$.

- Eje de la parábola:

  Es el eje de simetría de la parábola. En el caso de los gráficos de las funciones cuadráticas, es una recta vertical (o paralela al eje Oy).

- Vértice de la parábola:

  Es el punto de intersección de la parábola con el eje de la parábola: (x_v, y_v)

  Aceptamos que las coordenadas del vértice son: $x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow y_v = f(x_v) \Rightarrow y_v = f(\frac{-b}{2a})$

Elementos de una parábola:

Los elementos más importantes para representar gráficamente una función cuadrática (parábola) son los siguientes: la concavidad, las raíces y el vértice. En caso de que la función cuadrática no presenta raíces reales, se deberán representar gráficamente 2 puntos cualesquiera ademas del vértice.

Observación 1.5.2. En caso que la parábola tenga raíces reales, se puede demostrar que la abscisa del vértice coincide con el punto medio de las raíces.

$$x_v = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Observación 1.5.3. Si $a > 0$, la función cuadrática tiene **mínimo absoluto** en $\mathbb{R}$, y su valor es la ordenada del vértice de la parábola, o sea y_v. Además, no existe máximo absoluto de la función en $\mathbb{R}$.

Observación 1.5.4. Análogamente, si $a < 0$, la función cuadrática tiene **máximo absoluto** en $\mathbb{R}$, y su valor también es la ordenada del vértice de la parábola, o sea y_v. Además, no existe mínimo absoluto de la función en $\mathbb{R}$.

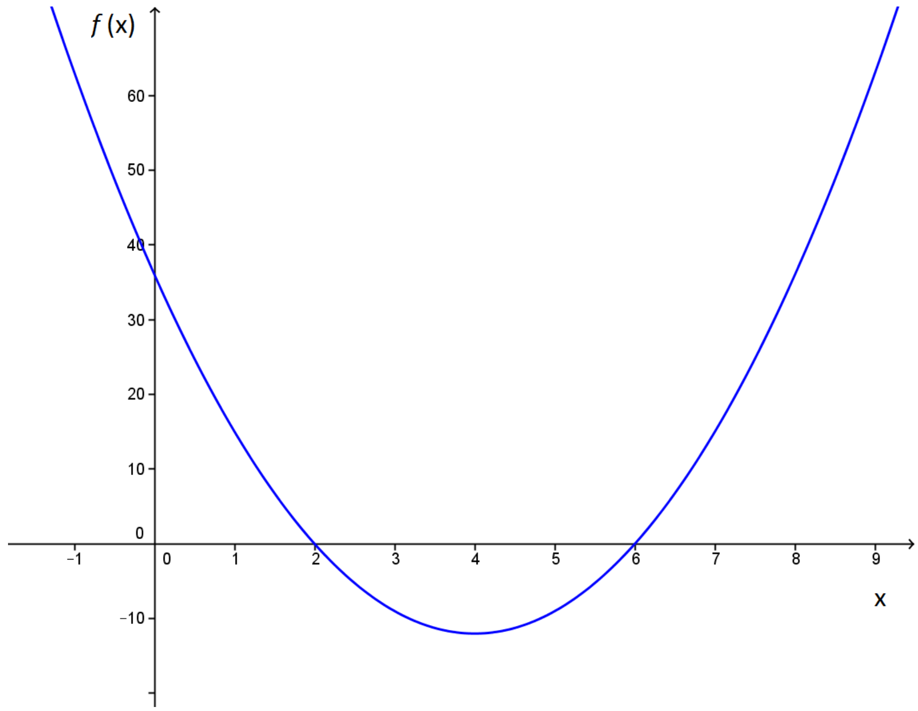
Ejemplo 1.5.3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = 3x^2 - 24x + 36$. Representar gráficamente la función f.

- **Concavidad:** Sabemos que la gráfica de f tiene concavidad positiva, pues $a = 3 > 0$.

- **Raíces:** Resolviendo la ecuación $3x^2 - 24x + 36 = 0$ se concluye que f tiene dos raíces reales diferentes: 2 y 6.

- **Vértice de la parábola:** Aplicando las fórmulas anteriormente definidas para calcular las coordenadas del vértice, se llega a que: $V = (4, -12)$.

Con los elementos anteriores, estamos en condiciones de representar gráficamente la función f:



Ejemplo 1.5.4. Considere la función del Ejemplo 1.5.1 y responda:

1. ¿A qué edad se alcanza el máximo monto de ahorro según la función planteada?
2. ¿Cuánto es el ahorro máximo?
3. ¿A qué edad es cero el ahorro?

1. Sabemos por el coeficiente $a = -10$ que la función A se puede representar con una parábola con concavidad negativa y por lo tanto, si su vértice se encuentra en el dominio de la función, que es el intervalo $x|x \in [20, 90]$ entonces ese será el punto en que $A(x)$ alcanzará su valor máximo.

   Utilizaremos la fórmula detallada arriba para encontrar x_v. Para eso necesitamos los valores de los restantes coeficientes. A través de la expresión analítica de la función podemos ver que $b = 1100$ y $c = -18000$.

   Así, tenemos que:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow x_v = \frac{-1100}{2(-10)} = 55$$

   Por lo tanto, la abscisa del vértice se encuentra en el intervalo $[20, 90]$ y la función A alcanza su punto máximo en $(55, f(55)$.

2. Ya sabemos que el ahorro máximo se alcanza a los 55. Ahora queremos saber cuánto es ese ahorro máximo. Para eso, evaluamos la función A en $x = 55$.

$$y_v = A(55) = -10 \cdot 55^2 + 1100 \cdot 55 - 18000 = 12250$$

3. Para saber a qué edad es cero el ahorro, debemos hallar las raíces de la función y asegurarnos que las mismas estén en el intervalo $[20, 90]$. En el gráfico observamos que las raíces de la función son 20 y 90. Para comprobar esto algebraicamente, utilizamos la fórmula detallada antes.

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow -10 \cdot x^2 + 1100 \cdot x - 18000 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-110 + \sqrt{110^2 - 4(-10)(-18000)}}{2(-10)}$$
$$x_1 = 20 \text{ y } x_2 = 90$$

Tanto x_1 como x_2 pertenecen al intervalo $[20, 90]$ y por lo tanto, podemos concluir que el ahorro es cero a los 20 y a los 90 años de edad.

1.6. Funciones polinómicas

1.6.1. Introducción

Una función polinómica implica que la forma funcional de f(x) será un polinomio. Por eso comenzaremos con un repaso de polinomios.

1.6.2. Repaso de polinomios

Definición 1.6.1. Monomio

$$a_n x^n;\ a_n \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}$$

a_n es llamado coeficiente, x es llamado variable independiente.

Ejemplo 1.6.1.

Monomios

- $M(x) = 2^3 x^5$
- $N(x) = \frac{\sqrt{5}}{3} x^4$
- $P(x) = x$

- $Q(x) = 5$

No son monomios

- $A(x) = 2^x$
- $B(x) = 3x^{-2}$
- $C(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$
- $D(x) = \frac{3}{x}$

Definición 1.6.2. Polinomio

Un polinomio es una suma de monomios.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

El subíndice i de a_i indica que a_i es el coeficiente de x^i (i es un natural entre 0 y n).

Ejemplo 1.6.2. Ejemplos de polinomios

- $P_1(x) = 5$
- $P_2(x) = 6x - 1$
- $P_3(x) = 3x^2 + 4x + 2$
- $P_4(x) = 5x^6 - 8x^3 + 10$

Definición 1.6.3. Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el exponente del término elevado a la potencia más alta de la expresión que tenga coeficiente no nulo ($a_n \neq 0$).

Notación: $gr[P(x)] = n$

Considerando los ejemplos de polinomios presentados anteriormente, se puede deducir que: $gr[P_1(x)] = 0$; $gr[P_2(x)] = 1$; $gr[P_3(x)] = 2$; $gr[P_4(x)] = 6$

Considere ahora el siguiente polinomio:

$$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 6 - 4x^3 + x^2 + 4x + x^2 - 3$$

Una persona lo observa y afirma, correctamente, que su grado es 1. ¿Puede explicar por qué?

Definición 1.6.4. Polinomio nulo

Se define como polinomio nulo y se lo nota $\emptyset(x)$ a aquel que tiene todos sus coeficientes 0.

Es decir, $\emptyset(x) = 0$

Definición 1.6.5. Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de $P(x)$ para $x = \alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$ es

$$P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$$

Ejemplo 1.6.3. Sea $P(x) = 3x^2 + 5x + 8$

Entonces si $x = 2 \to P(2) = 3(2)^2 + 5(2) + 8 = 30$

1.6.3. Operaciones con polinomios

Trabajaremos en el curso con cuatro operaciones con polinomios: adición, sustracción, multiplicación y división entera. Las tres primeras esperamos las recuerdes de tu paso por Secundaria (el ejemplo a continuación servirá de ayuda para recordarlas). En el curso estudiaremos con detalle la división entera de polinomios.

Ejemplo 1.6.4. Sean los polinomios $P_1(x) = 3x^2 + 5x + 1$ y $P_2(x) = 4x - 2$

Calcularemos

1. $P_1(x) + P_2(x)$
2. $P_1(x) - P_2(x)$
3. $P_1(x) \cdot P_2(x)$

1. $P_1(x) + P_2(x) = 3x^2 + 5x + 1 + 4x - 2 = 3x^2 + 9x - 1$
2. $P_1(x) - P_2(x) = 3x^2 + 5x + 1 - (4x - 2) = 3x^2 + x + 3$
3. $P_1(x) \cdot P_2(x) = 12x^3 + 20x^2 + 4x - 6x^2 - 2 = 12x^3 + 14x^2 - 6x - 2$

División entera de poliomios

Recordemos en primer lugar la división entera de naturales (algo que ya conocemos desde la enseñanza primaria):

Sea $a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}, d \neq 0$

Dividir el número natural a entre d consiste en hallar dos números naturales q y r, a los que llamamos cociente y resto respectivamente, tales que:

$$\begin{cases} 1) a = dq + r \\ 2) r < d \end{cases}$$

Nota: a recibe el nombre de dividendo, d el de divisor, q el de cociente y r el de resto.

La división entera de polinomios guarda similitud con la división entera de naturales, como podremos comprobar en la siguiente definición.

Sean $P(x)$, $D(x)$, $D(x) \neq \emptyset(x)$

Dividir el polinomio $P(x)$ entre $D(x)$ consiste en hallar dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, a los que llamamos cociente y resto respectivamente, tales que:

$$\begin{cases} 1) P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ 2) gr[R(x)] < gr[D(x)] \text{ o } R(x) \equiv \emptyset(x) \end{cases}$$

¿Qué relación existe entre el grado del dividendo, el del divisor y el del cociente?

$$gr[D(x)] + gr[Q(x)] = gr[P(x)]$$

Definición 1.6.6. Decimos que un polinomio $P(x)$ es divisible por $D(x)$ si al dividir $P(x)$ entre $D(x)$ el resto es el polinomio nulo.

Definición 1.6.7. Raíz de un polinomio.

$$\alpha \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Nota: El polinomio nulo admite infinitas raíces (de hecho todos los reales son raíces).

Algunas raíces particulares de los polinomios (raíces evidentes):

- 0 es raíz de un polinomio si y solo si el término independiente es 0

- 1 es raíz de un polinomio si y solo si la suma de sus coeficientes es 0
- -1 es raíz de un polinomio si y solo si la suma de los coeficientes de los términos de grado par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de grado impar

Teorema 1.6.1. Teorema de Descartes.

La condición necesaria y suficiente para que $P(x)$ sea divisible entre $(x-\alpha)$ es que α sea raíz de $P(x)$.

Dicho de otra manera: $P(x)$ es divisible entre $(x-\alpha)$ si y solo si α es raíz de $P(x)$.

Teorema 1.6.2. Descomposición factorial de polinomios.

Sea un polinomio $P(x)$ de grado n con n raíces reales diferentes $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ y coeficiente principal a_n.

Entonces se puede expresar $P(x)$ de la siguiente manera:

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

Observación 1.6.1. Una consecuencia directa de este teorema es la imposibilidad de tener mayor cantidad de raíces reales al grado del polinomio.

Observación 1.6.2. Debe notarse que si en la solución $P(x) = 0$ hallamos una raíz doble β, la descomposición factorial tendrá dos veces el término $(x-\beta)$, lo cual se puede simplificar como $(x-\beta)^2$. Esto es generalizable si hay una raíz que se repite n veces (si una raíz se repite n veces, diremos que el **orden de multiplicidad** de la misma es n).

Ejemplo 1.6.5. Sea el polinomio $P(x) = 2x^2 - 12x + 10$

Comprobaremos que sus raíces son 1 y 5. Sabemos que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Entonces tenemos que :

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2} = \frac{12 \pm \sqrt{(144-80}}{4} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{12 \pm 8}{4} =$$

Las dos raíces son $x_1 = \frac{20}{4} = 5$ y $x_2 = \frac{4}{4} = 1$

Comprobamos que 5 y 1 son raíces sustituyendo x por 5 y luego x por 1 en $P(x)$ y comprobar que $P(x) = 0$:

- $P(5) = 2 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 + 10 = 50 - 60 + 10 = 0$
- $P(1) = 2 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 10 = 2 - 12 + 10 = 0$

De acuerdo al Teorema de la descomposición factorial de polinomios, si conocemos las raíces del polinomio $P(x)$ podemos expresarlo como:

$$P(x) = 2(x-1)(x-5)$$

Comprobamos este resultado haciendo:

$$P(x) = 2(x-1)(x-5) = (2x-10)(x-1) = 2x^2 - 2x - 10x + 10 = 2x^2 - 12x + 10$$

1.6.4. Funciones polinómicas

Sea $P(x)$ un polinomio. La función polinómica tiene la siguiente forma general:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = P(x)$$

Es decir, la expresión analítica de la función f es el polinomio $P(x)$.

Observación 1.6.3. Las funciones afines y las cuadráticas definidas anteriormente son ejemplos particulares de funciones polinómicas. La función constante es una función polinómica de grado 0 y la función afin ($f(x) = mx + n$ con $m \neq 0$) es de grado 1 (función polinómica de primer grado), mientras que la función cuadrática es una función polinómica de grado 2.

Signo de las funciones polinómicas

Para estudiar el signo de una función polinómica debe tenerse en cuenta que:

- El signo de $f(x)$ a la derecha de la mayor raíz coincide con el signo del coeficiente principal.
- De manera análoga a lo que fue señalado en el caso de la función cuadrática, si la raíz es de orden de multiplicidad par, el signo de las imágenes de la función polinómica a la derecha de la raíz es igual al signo a la izquierda de la misma. En caso de ser impar el signo a la izquierda es distinto del que tiene a la derecha.

Ejemplo 1.6.6. Sea la siguiente función polinómica de grado 3:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 46x - 30$$

Se sabe que:

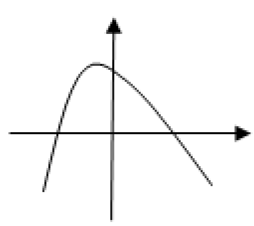
- El coeficiente principal del polinomio es 2 (signo positivo).
- Se conocen las raíces de la función que son las siguientes: 1, 3 y 5.

Entonces el diagrama de signo de esta función polinómica es:

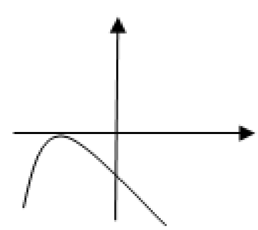
$sg(f(x))$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
x		1		3		5	

Representación gráfica de las funciones polinómicas

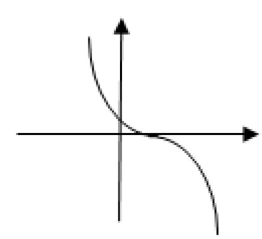
Algunos ejemplos:



Raíces simples



Raíz con orden de multiplicidad par

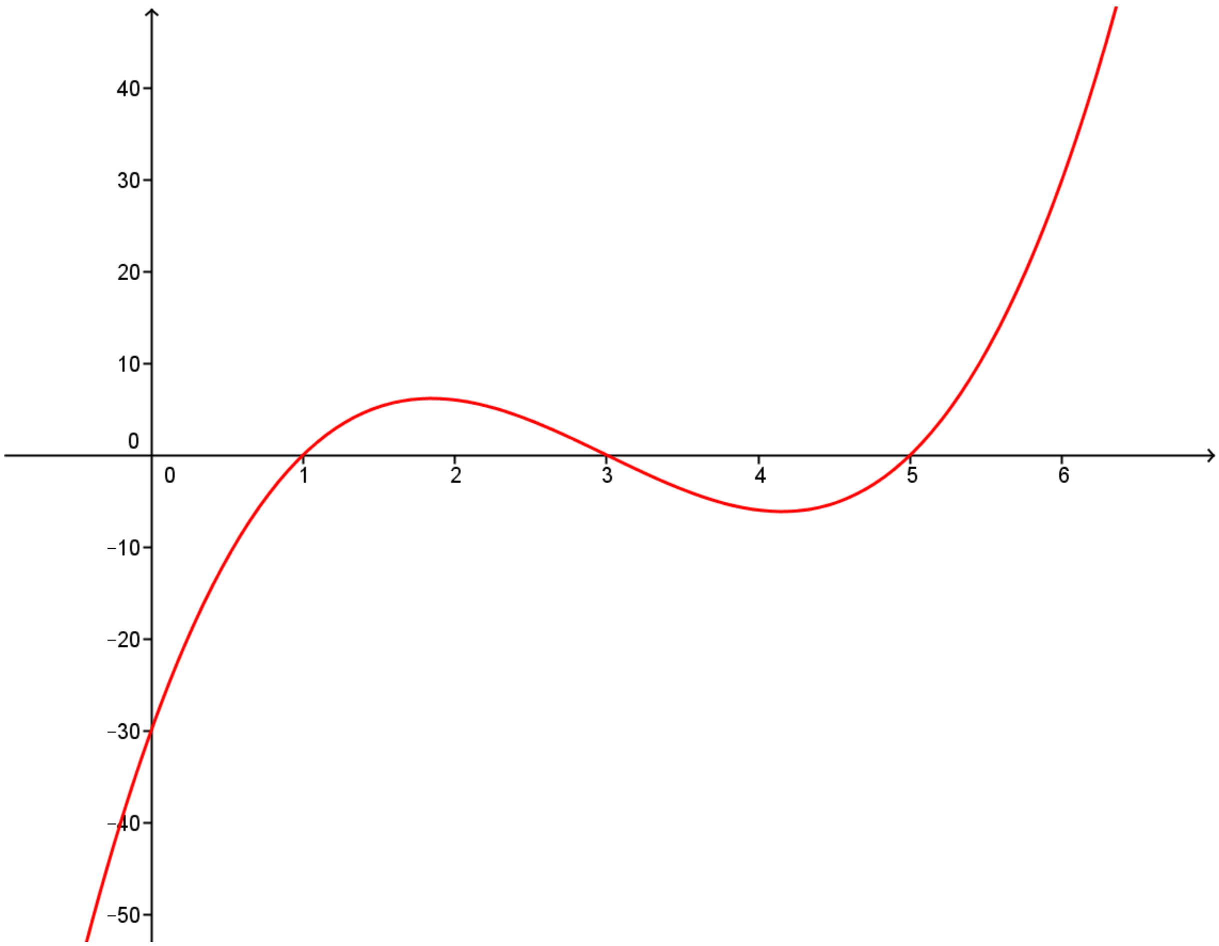


Raíz con orden de multiplicidad impar mayor a 2

Ejemplo 1.6.7.

Volvamos a considerar la función: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 46x - 30$

La representación gráfica de esta función es la siguiente:



1.7. Funciones Racionales

Las funciones que hemos estudiado hasta ahora en el curso, funciones afines, cuadráticas y polinómicas, tienen como dominio el conjunto $\mathbb{R}$, siendo $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Recordemos que el dominio de una función es el conjunto de todos los valores de entrada. Más formalmente, el dominio es el conjunto de los elementos (para nosotros números reales) que tienen imagen o correspondiente según esa función.

Esto no siempre es así. Veamos el caso de las funciones racionales.

Las funciones racionales son funciones expresadas como la "razón" o el cociente de dos polinomios.

Definición 1.7.1. Las funciones racionales son funciones de la forma:

$f : A \to \mathbb{R} | f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ polinomios.

Queremos hallar, en primer lugar, el dominio de la función f $[D(f)]$, definida como el cociente de otras dos (p y q, que tienen como dominio el conjunto $\mathbb{R}$).

Debemos recordar que la división entre números reales no está definida si el denominador es cero. Por lo que, para aquellos valores de x que hacen que $q(x) = 0$ (es decir, las raíces de q), f no está definida.

Esto es equivalente a escribir:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$$

Observación 1.7.1. Para determinar el dominio a veces es más fácil identificar los valores que no se incluyen en el dominio (es decir, buscar las excepciones que son las raíces del denominador).

Ejemplo 1.7.1. Hallar el dominio más amplio posible de la función $f : D \to \mathbb{R} | f(x) = \frac{x^2-3x}{x+2}$

Observamos que la función es de la forma que estamos estudiando donde $q(x) = x+2$. Para hallar el dominio de f debemos resolver $q(x) = 0$, es decir $x+2 = 0$ cuya única solución es $x = -2$.

Concluimos entonces que el dominio de f es: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2\}$ o de forma equivalente $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

Ejemplo 1.7.2. Hallar el dominio más amplio posible de la función $g : D \to \mathbb{R} | g(x) = \frac{-x+3}{x^2-3x+2}$

Debemos resolver en este caso la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, ecuación de segundo grado cuyas raíces son $x = 1$ y $x = 2$.

Entonces el dominio de g es: $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1, x \neq 2\}$ o de forma equivalente $D(g) = \mathbb{R} - \{1; 2\}$.

Ejemplo 1.7.3. Hallar el dominio más amplio posible de la función $h : D \to \mathbb{R} | h(x) = x + 3 - \frac{4x-2}{2x-3}$

Observamos que h es la resta de una función afín, (cuyo dominio es $\mathbb{R}$), y una función racional, por lo que el dominio de h será el dominio de la función racional, que ya sabemos hallarlo.

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Leftarrow D(h) = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$

1.7.1. Signo de una función racional

Para estudiar el signo de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, debemos hallar en primer lugar las raíces del denominador q y del numerador p .

Como sabemos, las raíces de q son los números reales que no pertenecen al dominio de f, mientras que las raíces de p que no son raíces de q son las raíces de f.

Observación 1.7.2. Si existen raíces comunes al numerador y al denominador, por ser raíces del denominador, esos números no pertenecen al dominio de f y, por lo tanto, no son raíces de f.

Para realizar el estudio de signo simplemente aplicamos la regla de signos en cada intervalo para obtener el signo de $\frac{p(x)}{q(x)}$, o sea el signo de $f(x)$. Esta regla es la regla que nos dice que si divido números de "signos opuestos", el resultados será negativo, y si los signos son iguales el signo del nuevo número será positivo. Debe tenerse en cuenta que 0 dividido cualquier número real distinto de 0, da como resultado 0. Y la división de cualquier número sobre 0 no existe.

Ejemplo 1.7.4. Sea $f : D \to \mathbb{R} | f(x) = \frac{(x^2+2x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(x^2-2x-3)\cdot(x^2-2x-3)}$

- Raíces del denominador: -1 y 3 (dobles) $\Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-1; 3\}$
- Raíces del numerador: -1 (doble), 2 y 3

Sean

$p(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

$q(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot (x^2 - 2x - 3)$