Ciencias Sociales
Universidad de la República
URUGUAY

NOTAS DEL CURSO

MATEMÁTICA I
(Fundamentos de matemática para las ciencias sociales)

Tema 2: Potenciación y Logaritmación

Montevideo, Marzo 2021

Crecimiento en el tiempo de variables

1.1. Variación absoluta y relativa

En las ciencias sociales con mucha frecuencia se trabaja modelando la evolución de una variable en el tiempo. Es decir que si x representa el tiempo (medido en minutos, horas, días, años, etc) la variable dependiente $f(x)$ corresponderá a la variable que deseamos representar. Un ejemplo de esto es el Ejemplo 1.1 del tema 1 en el que se ve la tasa de desempleo en cada año.

Otro ejemplo posible es si queremos saber cómo evolucionó la cantidad de inmigrantes que vivieron en nuestro país en cada momento a partir del 1 de enero de 2015, se puede establecer una función cuyo dominio representa el tiempo y en el que el conjunto co-dominio son los números naturales.

Si la variable tiempo está en días, el conjunto de las imágenes será las distintas cantidades de inmigrantes presentes en el país en cada momento. Por ejemplo, si queremos saber cuántos inmigrantes hay el 1 de enero de 2015 a las 0 horas, calcularíamos $f(0)$. Por lo que $f(365)$ es la cantidad de inmigrantes que hay el 31 de diciembre a las 23:59.

Eventualmente podemos querer medir cuánto creció en ese año la cantidad de inmigrantes. Para eso podemos medirlo de dos maneras (recuerda que estas dos formas de calcular variaciones también se ven en el Tema 1 de Principios de Economía). Recordemos que:

- Para medir el cambio en una variable en el tiempo calculamos la variación absoluta de esa variable dependiente $f(x)$ como:

  $$\Delta f = f(x+k) - f(x)$$

  Siendo $f(x)$ el valor que toma la variable en el momento inicial del periodo que estamos considerando y $f(x+k)$ el valor de la misma en el momento final.
  En nuestro ejemplo, midiendo la variación absoluta tenemos un estimado de la variación de la cantidad de inmigrantes luego de un año.

  $$f(365) - f(0)$$

- Para medir el cambio en una variable en el tiempo en relación al valor inicial de la variable calculamos la variación porcentual de esa variable x como:

$$\frac{\Delta f}{f} = \left(\frac{f(x+k) - f(x)}{f(x)} \right) .100$$

  En nuestro ejemplo, midiendo la variación porcentual (o tasa de crecimiento) se mide la misma variación absoluta pero en relación a la población inmigrante a principio de año.

$$\left(\frac{f(365) - f(0)}{f(0)} \right) .100$$

Ejemplo 1.1.1. Cálculo de variación absoluta y variación porcentual (ejemplo de Tema 1.1 de Principios de Economía)

Cuadro 1.1: Cálculo de variación absoluta y variación porcentual

Año	**PIB en millones de pesos 2005**	**Variación absoluta**	**Variación porcentual**
2005	425.018		
2006	442.438	17.420	4,10 %
2007	471.380	28.942	6,54 %
2008	505.207	33.827	7,18 %
2009	526.646	21.438	4,24 %
2010	567.742	41.096	7,80 %
2011	597.050	29.308	5,16 %
2012	616.890	19.841	3,32 %
2013	648.354	31.464	5,10 %
2014	671.036	22.682	3,50 %

Fuente: Banco Central del Uruguay

En este ejemplo, la variación absoluta del PIB entre 2008 y 2009 se calcula de la siguiente forma:

$$PIB_{2009} - PIB_{2008} = 526646 - 505207 = 21438$$

La variación relativa del PIB en esos dos años se calcula como:

$$\frac{PIB_{2009} - PIB_{2008}}{PIB_{2008}} .100 = \frac{526646 - 505207}{505207} .100 = \frac{21438}{505207} .100 = 0{,}0424 .100 = 4{,}24$$

Ejemplo 1.1.2. Cálculo de variación absoluta y variación porcentual en una función lineal.

Cuando Juan estudia para el parcial de Matemática, hace 3 ejercicios por hora. Por lo que se hace un esquema con la cantidad de ejercicios que hará según las horas.

Cuadro 1.2: Cálculo de variación absoluta y variación porcentual en una función lineal.

Hora	**Ejercicios realizados en esa hora**	**Ejercicios realizados hasta el momento**
1	3	3
2	3	6
3	3	9
4	3	12
5	3	15
6	3	18
...	...	...

Como ya vimos en el tema 1, podemos calcular la cantidad de ejercicios realizados cuando van x horas con la relación $f(x) = 3x$.

Ahora Juan se dispone a calcular las variaciones absolutas y porcentuales en cada hora.

Hora	**Variación absoluta**	**Variación porcentual**
1		
2	3	$\left(\frac{6-3}{3}\right).100 \ = 100\,\%$
3	3	$\left(\frac{9-6}{6}\right).100 \ = 50\,\%$
4	3	$\left(\frac{12-9}{9}\right).100 \ = 33{,}333\,\%$
5	3	$\left(\frac{15-12}{12}\right).100 \ = 25\,\%$
6	3	$\left(\frac{18-15}{15}\right).100 \ = 20\,\%$
...	...	...

Lo que se puede ver en la tabla es que la variación absoluta en la cantidad de ejercicios realizada a medida que avanzan las horas es constante, pero la variación porcentual decrece.

Esto es algo que sucede en general con las funciones afines: La variación absoluta, si tomo de a una unidad (en este caso de a una hora) es constante y es igual al coeficiente que multiplica a la x en $f(x)$ (en este caso 3).

Potenciación y logaritmación

1.2. Funciones exponenciales

En las ciencias sociales se utiliza un tipo de funciones conocidas como funciones exponenciales para modelar cómo evolucionan algunas variables en el tiempo. Para entender mejor el tema, primero recordaremos algunas cuestiones de la **potenciación**.

1.2.1. Potenciación

Definición 1.2.1. Para $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, se define b^n (se lee "b elevado a la n") de la siguiente manera:

$$b^n = \begin{cases} b^0 = 1 \text{ si } n = 0 \text{ y } b \neq 0 \\ b^1 = b \text{ si } n = 1 \\ b^n = b.\,b.\,b \ldots b \text{ (producto de n factores b); si } n \geq 2 \end{cases}$$

b se denomina la base de la potencia y n el exponente.

Ejemplo 1.2.1. Algunos ejemplos de potencias

- $2^3 = 2.\,2.\,2 = 8$
- $1,5^4 = 1,5.\,1,5.\,1,5.\,1,5 = 5,0625$
- $7^0 = 1$

Observación 1.2.1. 0^0 no está definido

Definición 1.2.2. Para $b \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, se define b^{-n} (se lee "b elevado a la menos n" o "b elevado al opuesto de n") de la siguiente manera:

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Ejemplo 1.2.2.

- $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

- $4^{-1} = \dfrac{1}{4^1} = \dfrac{1}{4}$

Propiedades de la potenciación

En condiciones de existencia se cumple:

Propiedades	**Ejemplos** $(b = 2; a = 3; n = 5; m = 4)$
1. $b^n . b^m = b^{n+m}$	$2^5 . 2^4 = 2^9$
2. $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$	$\dfrac{2^5}{2^4} = 2^1$
3. $a^n . b^n = (a. b)^n$	$3^5 . 2^5 = (6)^5$
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	$\dfrac{3^5}{2^5} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^5$
5. $(b^n)^m = b^{n.m}$	$(2^5)^4 = 2^{20}$

Definición 1.2.3. Potencia de base real y exponente racional
Para $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se define $a^{\frac{1}{n}}$ (se lee " a elevado a la 1 sobre n") de la siguiente manera:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Esto nos permite tratar a la raíz cuadrada, a la raíz cúbica o a una raíz de un orden más alto, como si fuese una potencia.

Ejemplo 1.2.3.

- $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

- $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125}$

- $a^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a}$

Observación 1.2.2. Todas las propiedades descritas para las potencias de exponente natural aplican también a estas potencias.

Observación 1.2.3. Esto implica que dados $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}^*$, $a \geq 0$ y $n \geq 2$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 1.2.4.

$$25^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$$

1.2.2. Función exponencial

Definición 1.2.4. Función exponencial

A partir de las definiciones anteriores, podemos presentar un nuevo tipo de función: la **función exponencial**.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad | \quad f(x) = b^x \qquad b \in \mathbb{R}^+, \quad b \neq 1$$

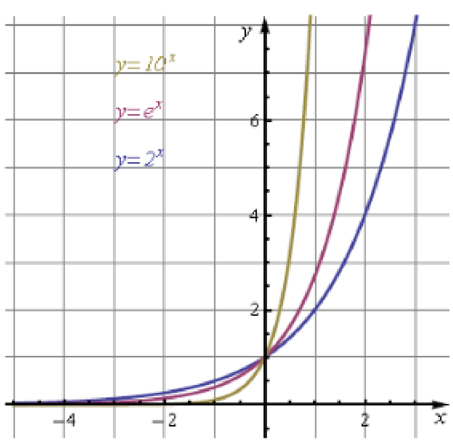


Gráfico 1. $f(x) = b^x, \quad b > 1$

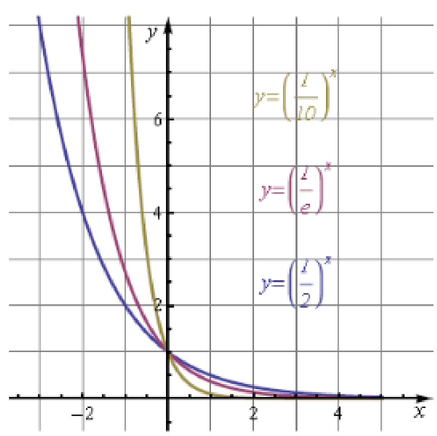


Gráfico 2. $f(x) = b^x, \quad 0 < b < 1$

Observación 1.2.4. Como se puede ver, la base determina la forma de la representación gráfica.

Ejemplo 1.2.5. En este sentido podemos ver que si tenemos

- $f(x) = 0,99^x$
- $g(x) = 1,01^x$

Y luego evaluamos en $x = 100$, tendremos

- $f(100) = 0,99^{100} \cong 0,37$
- $g(100) = 1,01^{100} \cong 2,70$

Algunas características de la función exponencial

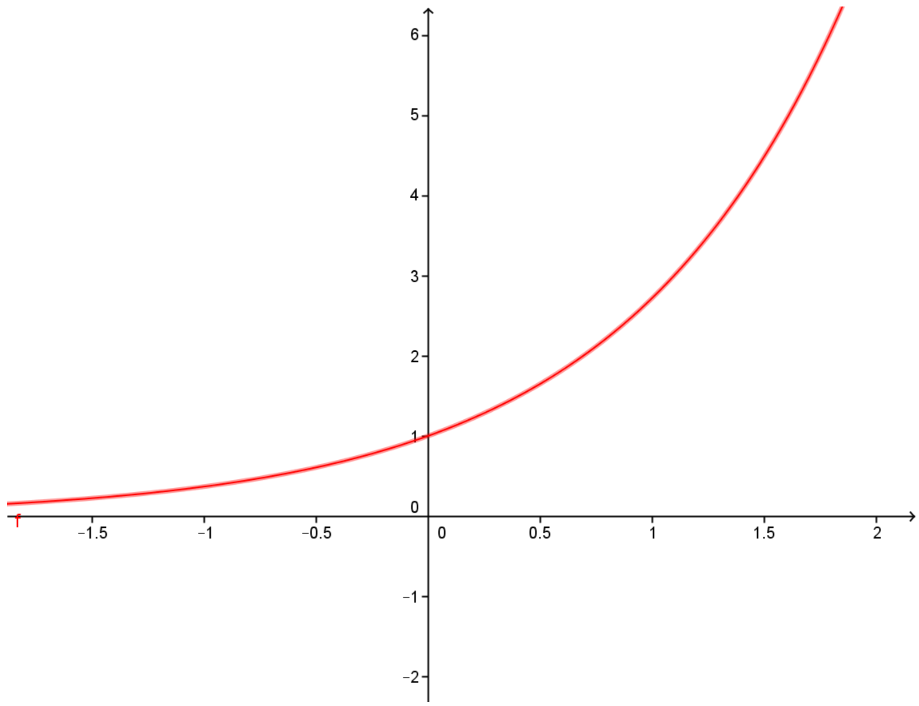
1. $f(0) = b^0 = 1$
2. $sg(f(x)) \; \overset{+ \qquad\qquad + \qquad\qquad + \qquad\qquad +}{\xrightarrow{\hspace{8cm}}}{}_{x}$
3. La función es creciente en $\mathbb{R}$ si $b > 1$ (ver gráfico 1)
4. La función es decreciente en $\mathbb{R}$ si $0 < b < 1$ (ver gráfico 2)

Observación 1.2.5. Un caso particular de la función exponencial es aquella en la que $b = e \cong 2,718281$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad | \quad f(x) = e^x$$

Es muy utilizada en las Ciencias Sociales para reflejar la evolución de una magnitud (por ejemplo, población de personas o monto de dinero depositado en un banco) que cambia a una tasa instantánea constante.

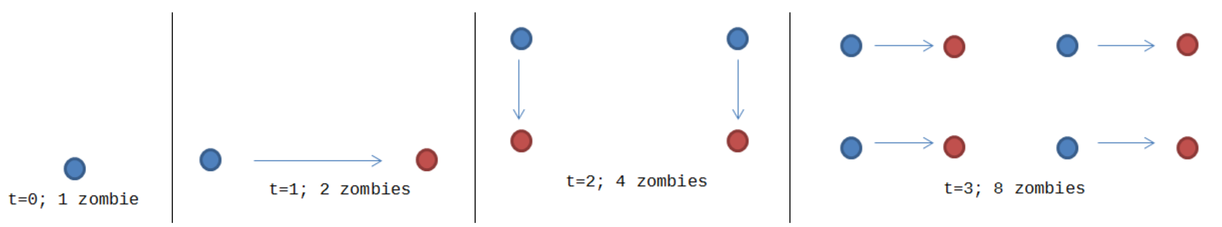
Dado que $e > 1$, la gráfica de la función exponencial en este caso toma la siguiente forma:



1.2.3. Crecimiento exponencial

Los procesos de crecimiento exponencial, los cuáles se describen mediante una función exponencial, se caracterizan por una variación porcentual constante en el valor de la variable que estemos estudiando con el paso del tiempo. Esto quiere decir que, si nuestra variable de tiempo está medida en años, el crecimiento de la variable año a año será siempre en un mismo porcentaje (medido a través de la variación porcentual vista antes).

Ejemplo 1.2.6. En la mayoría de las historias relacionadas con zombies, la mordida de un zombie a una persona sana ocasiona que este último se transforme en zombie. Veamos como sería en los momentos desde $t = 0$ a $t = 3$.



Como se ve, en cada unidad de tiempo (tomemos por ejemplo 1 minuto) cada zombie muerde a una persona sana por lo que en cada minuto se duplicará la población de zombies respecto al minuto anterior (o crece en un 100 % esta población).

Por lo que si en el momento 0 hay un zombie, en el momento 1 se puede calcular la cantidad de zombies multiplicando a 1 por 2. En el momento 2, se multiplica la cantidad del momento 1 por 2 ($2.2 = 4$). En el momento 3 habrá los mismos zombies del momento 2, pero multiplicados por 2 ($4.2 = 2.2.2 = 8$).

Si observamos con detenimiento, cada vez se multiplican los zombies de la vez anterior por dos. Es decir que podría escribir una fórmula general para calcular la cantidad de zombies en cualquier momento del tiempo de la siguiente forma:

$$f(t) = 2^t$$

Así en $t = 2$ la cantidad de zombies es, como ya vimos en el diagrama, $f(2) = 2^2 = 4$.

A partir de este método podríamos calcular la cantidad de zombies en cada minuto t, simplemente calculando 2^t. Podríamos ir listando la cantidad de zombies en cada minuto y así tener un buen panorama de la situación. Incluso podríamos saber la cantidad de zombies cuando ha transcurrido una hora:

$$f(60) = 2^{60} = 1.152.921.504.606.846.976$$

Esto no podría suceder, ya que es un número que excede a la población mundial. Más adelante veremos como se podría calcular el minuto exacto en el que se alcanza que toda la población mundial se convierte en zombie.

Algo importante en este caso es ver que minuto a minuto hay un crecimiento de la variable que se da en el mismo porcentaje. Minuto a minuto se duplica la cantidad de zombies, lo cual quiere decir que minuto a minuto crece en un 100 % la cantidad de zombies.

Una generalización

Supongamos que si hay un número de zombies N, solo una parte de ellos contagia a otros para convertirlos en zombies. Cada zombie, de ese selecto grupo que puede contagiar a otros, puede contagiar a uno y solo un zombie en cada minuto. Digamos que ese porcentaje es un $K\,\%$. Entonces, si ahora hay N zombies, en el minutos siguiente habrá los N zombies actuales, más los zombies que coopten este porcentaje de zombies que puede contagiar (que van a ser $N.\frac{K}{100}$). Por lo que al siguiente minuto habrá:

$$N + N.\frac{K}{100} = N\left(1 + \frac{K}{100}\right) = N(1+k) \text{ zombies}^1$$

Nuevamente, solo un $K\,\%$ de estos zombies podrá morder a alguien. Entonces, al próximo minuto estarán nuevamente los $N(1 + k)$ zombies que contamos recién más los nuevos contagiados. Estos son la misma cantidad que la cantidad de zombies con posibilidad de contagiar. Los que pueden contagiar son el $K\,\%$ de los $N(1 + k)$ zombies. O sea que habrá

[1] Notar que para simplificar asumimos que $\frac{K}{100} = k$

$N(1+k)(k)$ nuevos zombies. Por lo que ahora habrá

$$N(1+k)+N(1+k)k = N(1+k)(1+k) = N(1+k)^2 \text{ zombies}$$

En el próximo minuto habrá $N(1+k)^3$ zombies. Te invitamos a razonar cómo se llega a esa cifra.

En este ejemplo, en cada minuto, la población de zombies crece. ¿Cuánto crece? Crece en $K\,\%$ de la cantidad de zombies que haya en ese minuto. Y eso implica, como vimos en el ejemplo, multiplicar por $1+k$ a la cantidad de zombies.

Estos procesos, en los cuales hay un crecimiento constante en términos porcentuales, pueden describirse, por lo tanto, mediante la siguiente función:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \mid f(t) = V_o(1+k)^t$$

donde $f(t)$ es la imagen de la función en el momento t , $V_o = f(0)$ es la imagen de la función en $t = 0$, k es el porcentaje de crecimiento dividido 100 (o sea, el $100\,\%$ de crecimiento sería $k = \frac{100}{100} = 1$) y t es el tiempo medido en las unidades que estemos considerando .

Si la tasa es negativa, es decir si en cada minuto muere un $M\,\%$ de los zombies[2] , esta función queda de la siguiente manera:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \mid f(t) = V_o(1-m)^t$$

Ejemplo 1.2.7. (ejemplo adaptado del Ejemplo 8 de la sección 7.2 de Budnick (2006)) La población de un país era de 100 millones a comienzos del año 1970. Desde esa época se ha incrementado exponencialmente con un índice constante de 4 por ciento por año. La función que estima el tamaño de la población P (en millones de habitantes) para los años siguientes es

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \mid f(t) = 100.\,(1,04)^t$$

con t=0 representando el 1 de enero de 1970. Se encuentra la población proyectada para el inicio de 1995 (suponiendo una variación porcentual anual constante) al evaluar f(25), ya que t = 25 corresponde al inicio de 1995. La población proyectada para el país es

$$P = f(25) = 100.\,(1,04)^{25} \simeq 100.\,2,67 = 267 \text{ millones}$$

Así se puede calcular la población para cualquier momento.

[2] $M = 100.\,m$

Ejemplo 1.2.8. Si, en cambio, debido a un proceso de emigración, la población disminuye desde esa época con un índice constante de 3 por ciento por año la función que estima el tamaño de la población P (en millones de habitantes) es

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \mid f(t) = 100.\,(1 - 0,03)^t = 100.\,(0,97)^t$$

donde t=0 representa el inicio de 1970. Se encuentra la población proyectada para 1995 (suponiendo una variación porcentual anual constante) al evaluar f(25), donde t = 25 corresponde a 1995. La población proyectada para el país es

$$P = f(25) = 100.\,(0,97)^{25} \simeq 100.\,0,46697 = 46{,}697 \text{ millones}$$

En el Ejemplo 1.2.7 estamos ante un proceso con **tasa de crecimiento positiva**, lo cual implica un aumento de la población con el paso del tiempo. En cambio, en el ejemplo 1.2.8 estamos ante un proceso con **tasa de crecimiento negativa**, por lo cual con el paso del tiempo la población disminuye.

Una pregunta que puede ser útil contestar respecto a este tipo de problemas es, ¿en qué momento del tiempo toda la población mundial se convertirá en zombie, si se mantiene esta tasa de crecimiento de zombies de 100 % por minuto? ¿O en qué momento la población del país del ejemplo visto ascenderá a 1200 millones? Queda claro que con el método "manual" utilizado en el ejemplo de los zombies (haciendo el diagrama), responder estas preguntas llevaría mucho tiempo. Para resolver este tipo de problemas nos será útil la próxima sección.

1.3. Funciones logarítmicas

En las ciencias sociales se utilizan a las funciones logarítmicas para modelar cómo evolucionan algunas variables. Por eso resulta de mucha utilidad manejar el uso de los logaritmos, en tanto nos permiten simplificar algunos cálculos complejos y además poder resolver problemas como el mencionado en la sección anterior.

1.3.1. Logaritmación

Antes de ver la definición formal, puede resultar útil entender qué es lo que se va a definir. En el caso de los zombies teníamos que el número de zombies en cada momento t se podía calcular de la siguiente forma:

$$f(t) = 2^t$$

En este caso, si queremos saber cuál es el momento en el que se llegue a 32768 zombies, debemos notar que no tenemos elementos para resolver la siguiente ecuación:

$$32768 = 2^t$$

Lo que queremos saber es cuál es el exponente al que debe elevarse el número 2 para que el resultado sea 32768. Para resolver esa ecuación que tiene a t por incógnita, utilizamos el logaritmo.

Si le aplicamos el logaritmo a un cierto número c en una determinada base b, esto nos da como resultado el exponente al que debe ser elevado b para obtener como resultado c.

Definición 1.3.1. Logaritmos

Para $b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$, $c \in \mathbb{R}^+$, se define

$$\log_b c = x \iff c = b^x$$

Esto se lee como que el logaritmo de c en base b es igual a x.

En nuestro ejemplo, tenemos que

$$32768 = 2^t \iff \log_2 32768 = t$$

Para realizar este cálculo se debe utilizar una calculadora. En este caso $t = 15$

Te recomendamos verificar que entre el minuto 32 y 33, de forma aproximada, se alcanza que toda la población mundial (aproximadamente 7 mil millones) se convierte en zombie.

Ejemplo 1.3.1.

- $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$
- $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$

Observación 1.3.1. Para que la expresión $\log_b c$ tenga sentido (para que sea un número real), se requieren tres condiciones:

$$b > 0, \quad b \neq 1, \quad c > 0$$

Observación 1.3.2. La logaritmación es una de las operaciones inversas de la potenciación: se conoce la base de la potencia b y el resultado de la potencia c, y la incógnita es el exponente x al cual debe elevarse la base b para obtener aquel resultado c. De la propia definición se deduce que:

- $log_b b = 1$
- $log_b \left(b^k\right) = k$
- $log_b 1 = 0$

<u>Otras propiedades de la logaritmación</u>

En condiciones de existencia de cumple que:

Propiedades	**Ejemplos** $(b = 2; c = 8; d = 4; n = 5)$
1. $log_b\left(c^n\right) = n.\, log_b c$	$log_2\left(8^5\right) = 5.\, log_2 8 = 5.\, 3$
2. $log_b c + log_b d = log_b(c.\, d)$	$log_2 8 + log_2 4 = log_2(8.\, 4) = log_2(32) = 5$
3. $log_b c - log_b d = log_b\left(\dfrac{c}{d}\right)$	$log_2 8 - log_2 4 = log_2\left(\dfrac{8}{4}\right) = log_2 2 = 1$
4. $log_b c = \dfrac{log_d c}{log_d b}$	$log_2 8 = \dfrac{log_4 8}{log_4 2} = \dfrac{1,5}{0,5} = 3$

Observación 1.3.3. La propiedad 4 se conoce como cambio de base. Esta propiedad es muy útil cuando sabemos calcular logaritmos en una base fija d y queremos conocer el logaritmo de c en base b. Usaremos mucho esta propiedad a la hora de hacer las cuentas, con $d = e$ o $d = 10$, ya que son los logaritmos que la mayoría de las calculadoras realizan.

Observación 1.3.4. El logaritmo que tiene como base al número $e \cong 2,718281$ es muy utilizado. Se le llama logaritmo natural o neperiano. Para diferenciarlo, usamos la notación $ln : log_e c = ln(c)$.

En relación a la observación previa, notar que, usando la propiedad 4 con $d = e$, se concluye que $log_b c = \dfrac{ln(c)}{ln(b)}$.

1.3.2. Función logarítmica

Definición 1.3.2. Función logarítmica

A partir de la operación logaritmo, puede definirse la siguiente función: la **función logarítmica**.

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad | \quad f(x) = \log_b(x)$$

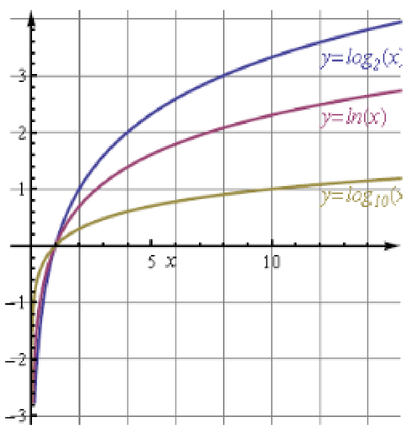


Gráfico 3. $f(x) = \log_b(x), \quad b > 1$

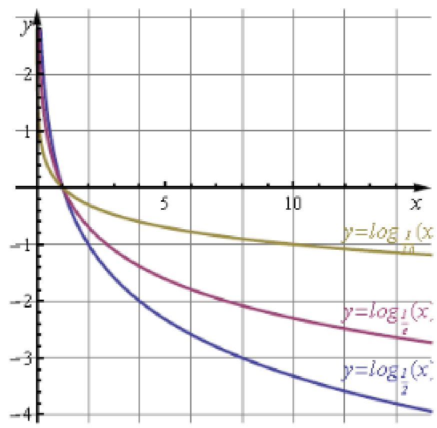
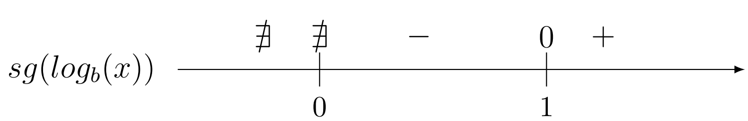


Gráfico 4. $f(x) = \log_b(x), \quad 0 < b < 1$

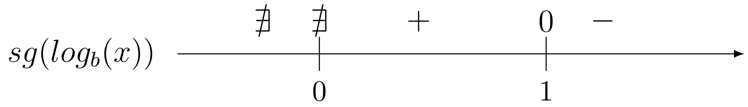
Observación 1.3.5. Como se puede ver, la base determina la forma de la representación gráfica de la función.

<u>**Algunas características de la función logarítmica**</u>

1. $f(1) = \log_b(1) = 0$
2. La función es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ si $b > 1$ (ver gráfico 3)
3. La función es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$ si $b < 1$ (ver gráfico 4)
4. Si $b > 1$

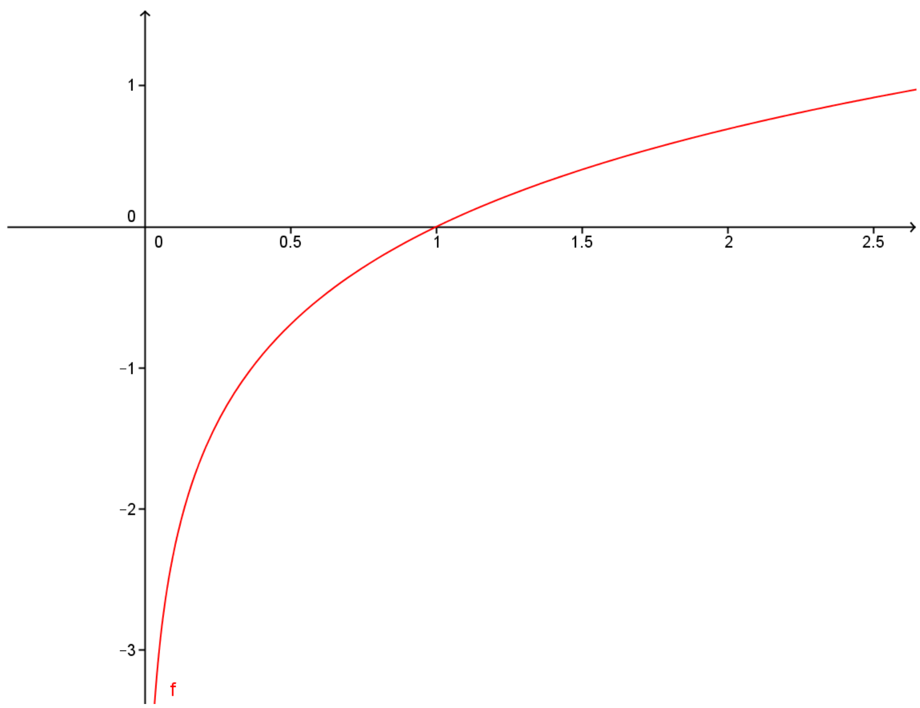


5. Si $0 < b < 1$



Observación 1.3.6. Así como un caso particular del logaritmo, es cuando la base es el número e, también es un caso particular de la función logarítmica aquella en la que $b = e \cong 2,718281$

$$f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R} \quad | \quad f(x) = ln(x)$$



Ejemplo 1.3.2. *Ejercicio de Examen de Setiembre de 2017*
En la localidad de Malas Aguas se están contabilizando los votos de la elección para ser intendente. Algunos votos se contabilizan automáticamente al terminar el horario de votación, ya que se realizan de forma electrónica. Al comenzar el escrutinio de las restantes mesas, la candidata opositora Elisabet Wilhelm pierde por 100000 votos. Pero la diferencia empieza a achicarse, y a los 10 minutos pierde por 34860 votos. En medio de la tensión, el estadístico del equipo de campaña advierte que los datos se comportan de forma exponencial y ya estimó que la diferencia entre los dos candidatos se puede representar por la siguiente función:

$$f : [0; 100] \to \mathbb{R} \, / \, f(x) = 100\,000(0{,}9)^{x}$$

siendo x el tiempo medido en minutos, y sabiendo que a los 100 minutos ya se habrán contabilizado todos los votos.

Parte I

1. Estime en qué momento la diferencia entre los dos candidatos será de 10.000 votos.

$$f(x) = 100\,000(0{,}9)^x = 10\,000 \Rightarrow (0{,}9)^x = 0{,}1 \Rightarrow x = \log_{0{,}9}(0{,}1) = 21{,}8543$$

2. El Jefe de Campaña había dicho a los periodistas que una vez que los datos muestren un empate, la candidata hablará a quienes fueron a acompañarla al local de su partido. ¿Qué tiempo deberá haber transcurrido para que esto suceda? Halle x.

   La función es decreciente por ser exponencial con base menor a 1. Cuando se terminan de contabilizar los votos, la diferencia es de $f(100)$, unos 3 votos. Por lo tanto, nunca se da el empate.

Parte II

Cuando ya van 70 minutos de escrutinio, el estadístico se da cuenta que la tendencia cambió y hay una nueva tendencia descrita por la siguiente función:

$$f : [0; 100] \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \begin{cases} 100\,000(0{,}9)^x & \text{si} \quad x \in [0; 65] \\ 111\,000(0{,}99)^{x-65} - 100\,000 & \text{si} \quad x \in (65; 100] \end{cases}$$

siendo x el tiempo medido en minutos, y sabiendo que a los 100 minutos ya se habrán contabilizado todos los votos.

1. ¿Cuál será la diferencia final de la votación?

$$f(100) = 111\,000(0{,}99)^{35} - 100\,000 = -21\,917$$

2. Calcule, con esta función, cuánto tiempo deberá pasar para que la candidata salga a hablarle a sus seguidores.

   Se debe hallar x, tal que $f(x) = 0$. En el primer tramo no puede haber solución. Luego

$$\begin{aligned} 111\,000(0{,}99)^{x-65} - 100\,000 &= 0 \\ 111\,000(0{,}99)^{x-65} &= 100\,000 \\ (0{,}99)^{x-65} &= \tfrac{100\,000}{111\,000} \\ x - 65 &= \log_{0{,}99} \tfrac{100}{111} \\ x - 65 &\approx 10{,}38 \\ x &\approx 75{,}38 \end{aligned}$$