

Relativitat General

Geometria de l'espaitemps i gravetat

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Guillem Arias

Apunts basats en els cursos Introduzione alla Relatività Generale, impartit pel Dr. Lapo Casetti, i Relatività, del Dr. Aldo Cotrone.

Índex

1 Fonaments matemàtics	2
1.1 Espais topològics	2
1.2 Varietats	3
1.3 Vectors	3
1.4 Tensors	4
1.5 Formes diferencials	5
1.6 Tensor mètric	6
1.7 Significat de les coordenades	7
2 Curvatura	10
2.1 Connexió afí i transport paral·lel	10
2.2 Geodèsiques	12
2.3 Curvatura	12
2.4 Límit Newtonià	14
3 Equacions d'Einstein	17
3.1 Principi d'equivalència	17
3.2 Equació de la desviació geodèsica	18
3.3 Equació d'Einstein	18
3.4 Problema de la constant cosmològica	19
3.5 Principi antròpic	19
3.6 Integrals sobre l'espai-temps	20
3.7 Teorema d'Stokes	20
3.8 Teoria de Yang-Mills	21
3.9 Acció d'Einstein-Hilbert	22
3.10 Vectors de Killing	24
3.11 Variació de les accions	25
3.12 Solució d'Schwarzschild	27
4 Forats negres	29
4.1 Col·lapse gravitacional	29
4.2 Zoologia dels forats negres	30
4.3 Radi de la shadow	30
4.4 Coordenades d'Eddington Finkelstein	31
4.5 Forats blancs	32
4.6 Extensió de Kruskal	32
4.7 Hipersuperfícies nul·les	33
4.8 Horitzons de Killing i gravetat superficial	34
4.9 Espai-temps de Rindler	35
4.10 Termodinàmica dels forats negres	36
4.11 Diagrama de Carter-Penrose	37
4.12 Espai de Sitter	39
4.13 Espai d'anti-de Sitter	39
4.14 Estructura Causal de l'Espai-temps	41
4.15 Forat negre de Kerr	42
4.16 Forat negre carregat: Reissner-Nordstrom	43
5 Càrrega conservada	45
5.1 El problema de definir una càrrega conservada en RG	45
5.2 Energia ADM	45
5.3 Integral de Komar	46
6 Efectes quàntics	47
6.1 Radiació de Hawking	47

1 Fonaments matemàtics

1.1 Espais topològics

L'estructura més general amb què treballarem és un espai topològic:

Definició 1 Sigui X un set qualsevol i $\tau = \{U_i | i \in I\}$ denota una certa col·lecció de subsets d' X . La parella (X, τ) és un espai topològic si τ satisfà els següents requeriments:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. Si τ és qualsevol subcol·lecció d'I la família $\{U_j | j \in J\}$ satisfà $\bigcup_{j \in J} U_j \in \tau$
3. Si k és qualsevol subcol·lecció finita d'I la família $\{U_k | k \in K\}$ satisfà $\bigcap_{k \in K} U_k \in \tau$

Una mètrica $d : X \times X \rightarrow R$ és una funció que satisfà les següents condicions:

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ Per qualsevol $x, y, z \in X$

Si X està equipat amb una mètrica d , X es converteix en un espai topològic els sets oberts del qual venen donats per discs oberts

$$U_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\} \quad (1.1)$$

i totes les seves possibles unions. La topologia τ així definida s'anomena topologia mètrica determinada per d .

L'espai topològic (X, τ) s'anomena espai mètric. Sigui (X, τ) un espai topològic i A un subset qualsevol d' X , llavors $\tau^A = \{U_i \cap A | U_i \in \tau\}$ induceix la topologia relativa en A per $\tau^A = \{U_i \cap A | U_i \in \tau\}$.

Definició 2 Siguin X, Y espais topològics, un mapa $f : x \rightarrow y$ és continu si l'antiimatge d'un set obert en Y és un set obert en X .

Definició 3 Suposem que τ proporciona una topologia a X . N és un entorn d'un punt $x \in X$ si N és un subset d' X i N conté com a mínim un set obert U_i al qual x pertany. Si N té un set obert en τ s'anomena entorn obert

Definició 4 Un espai topològic (X, τ) és un espai de Hausdorff si per a qualsevol parella de punts distints $x, x' \in X$, existeixen entorns oberts U_x de x i $U_{x'}$ de x' tals que $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$.

Sigui (X, τ) un espai topològic, un subset A d' X és tancat si el seu complement en X és un set obert, és a dir, si $X - A \in \tau$. D'acord amb la definició X, \emptyset estan tancats i oberts. Considerem un set A , la clausura d' A és el set tancat més petit que conté A i es denota A^0 .

El límit $b(A)$ d' A és el complement d' A^0 en A : $b(A) = A - A^0$.

Un set obert sempre està disjunt del seu límit, mentre que un set tancat conté el seu límit.

Sigui (X, τ) un espai topològic, una família $\{A_i\}$ de subsets d' X s'anomena un revestiment d' X si $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Si tots els A_i són sets oberts de topologia τ el revestiment s'anomena revestiment obert.

Definició 5 Considerem un set X i tots els seus possibles revestiments. El set X és compacte si per cada revestiment $\{U_i | i \in I\}$ existeix un subset finit J d'I tal que $\{U_j | j \in J\}$ també és un revestiment d' X

En general si un set és compacte en R^n ha d'estar fitat, que més cal?

Teorema 1 Sigui X un subset d' R^n . X és compacte $\leftrightarrow X$ és tancat i fitat

Definició 6 Un espai topològic X està connectat si no es pot escriure com $X = X_1 \cup X_2$ on X_1 i X_2 són oberts i $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. En cas contrari X s'anomena disconnectat.

Definició 7 Un loop en un espai topològic X és un mapa continu $f : [0, 1] \rightarrow X | f(0) = f(1)$. Si qualsevol loop en X es pot encongrir de forma contínua fins a un punt, X s'anomena simplement connex.

1.2 Varietats

Les varietats són generalitzacions de les nostres idees de corbes i superfícies a objectes de dimensió arbitrària.

Definició 8 M és una varietat diferenciable m -dimensional si:

1. M és un espai topològic
2. M està equipada amb una família de parelles $\{(U_i, \varphi_i)\}$
3. $\{U_i\}$ és una família de conjunts oberts que cobreix M . $\bigcup_i U_i = M$. φ_i és un homomorfisme de U_i a un subset obert U_i^* d' R^m .
4. Donats U_i, U_j tals que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ el mapa $\Psi = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ a $(U_i \cap U_j)$ és infinitament diferenciable

La parella (U_i, φ_i) s'anomena carta i la família sencera $\{(U_i, \varphi_i)\}$ s'anomena atles.

El subset U_i s'anomena entorn de coordenades i φ_i funció de coordenades o simplement coordenada.

L'homomorfisme φ_i està representat per m funcions $\{x^1(p), \dots, x^m(p)\}$. El set $\{x^\mu(p)\}$ també s'anomena coordenada.

Un punt $p \in M$ existeix independentment de les seves coordenades: depèn de nosaltres l'assignació de coordenades.

Si U_i, U_j es trepitgen, dos sistemes de coordenades s'assigenen a un punt en $U_i \cap U_j$. L'axioma 4 assegura que la transició de coordenades sigui suau (C^∞).

El mapa φ_i assigna m valors de coordenades $x^\mu (1 \leq \mu \leq m)$ a un punt $p \in U_i \cap U_j$ i el mapa φ_j assigna $y^\nu (1 \leq \nu \leq m)$ al mateix punt, i a transició de y a x $x^\mu = x^\mu(y)$ ve donada per m funcions d' m variables.

Si la unió de dos atles segueix sent un atles, diem que els dos atles són compatibles.

Un exemple de varietat, encara que trivial, és l'espai euclidi R^m , en què una sola carta cobreix tot l'espai i φ pot ser el mapa identitat.

Sigui $f : M \rightarrow N$ un mapa d'una varietat m -dimensional M a una varietat n -dimensional N . Un punt $p \in M$ està mapejat a un punt $f(p) \in N$, en particular $f : p \rightarrow f(p)$.

Prenem una carta (U, φ) en M i (V, ψ) en N , on $p \in U, f(p) \in V$. Llavors f té la següent presentació en coordenades $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : R^m \rightarrow R^n$.

Si escrivim $\varphi(p) = \{x^\mu\}, \psi(f(p)) = \{y^\alpha\}, \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ és simplement la funció vectorial $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ d' m variables.

Si $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ o simplement $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$ és C^∞ respecte a cada x^μ , f és diferenciable a p o a $x = \varphi(p)$.

Mapes diferenciables també s'anomenen suaus, la diferenciabilitat d' f és independent del sistema de coordenades.

Definició 9 Sigui $f : M \rightarrow N$ un homomorfisme, i ψ, φ funcions de coordenades. Si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ és invertible i tant $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x), x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$ són C^∞ , llavors f és un difeomorfisme i M es difeomòrfica a N i viceversa denotant $M \equiv N$

1.3 Vectors

Sobre una varietat un vector està definit per ser un vector tangent a una corba de M , si la corba és diferenciable la podem aproximar en un entorn d' x_0 com una línia tangent

$$y - y(x_0) = a(x - x_0) \quad (1.2)$$

on $a = \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$.

Els vectors tangents en una varietat M generalitzen aquesta línia tangent.

Per definir un vector tangent necessitem una corba $c : (a, b) \rightarrow M$ i una funció $f : M \rightarrow R$ on (a, b) és un interval obert que conté $t = 0$. Definim el vector tangent a $c(0)$ com una derivada direccional d'una funció $f(c(t))$ al llarg de la corba $c(t)$ at $t = 0$.

El ràtio de canvi de $f(c(t))$ a $t = 0$ al llarg de la corba és

$$\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0} \quad (1.3)$$

en termes de coordenades locals.

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} \quad (1.4)$$

en altres paraules $\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0}$ s'obté aplicant l'operador diferencial x a f on

$$x = x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad x^\mu = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} \quad (1.5)$$

llavors

$$\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0} = x^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \equiv x[f] \quad (1.6)$$

aquesta darrera igualtat defineix $x[f]$. És $x = x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ que és com definim el vector tangent a M a $p = c(0)$ al llarg de la direcció donada per la corba $c(t)$.

Introduïm ara el concepte de classe equivalent de corbes en M . Si dos corbes satisfan

1. $c_1(0) = c_2(0) = p$
2. $\frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{dx^\mu(c_2(t))}{dt}|_{t=0}$

llavors $c_1(t) \sim c_2(t)$, són de classe equivalent.

Indiquem el vector tangent X amb la classe equivalent de corbes.

Totes les classes equivalents de corbes a $p \in M$, tots els vectors tangents a p formen un espai vectorial que anomenem espai tangent d' M a P , denotada $T_p M$.

La base $\{e_\mu\}$ s'anomena base de coordenades, si un vector $v \in T_p M$ s'escriu $V = V^\mu e_\mu$ els números V^μ són els components de V respecte a e_μ .

Donat que $T_p M$ és un espai vectorial existeix un espai dual a $T_p M$ els elements del qual són funcions lineals de $T_p M$ a R .

L'espai dual s'anomena espai cotangent a p i el denotem $T_p^* M$. Un element $w : T_p M \rightarrow R$ de $T_p^* M$ s'anomena vector dual, covector, o en el context de les formes diferencials una 1-forma.

Si un vector s'assigna suauament a cada punt d' M s'anomena camp vectorial sobre M . El set de camps vectorials sobre M es denota $\chi(M)$, la unió de tots els $T_p M$ sobre M s'anomena fibrat tangent i anàlogament per $T_p^* M$ tenim el fibrat cotangent.

1.4 Tensors

Un tensor de tipus (q,r) és un objecte multilineal que mapeja q elements de $T_p^* M$ i r elements de $T_p M$ a un número real. $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ denota el conjunt de tensors de tipus (q,r) a $p \in M$.

Un element de $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ s'escriu en termes de bases de $T_p M$ i $T_p^* M$

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{v_1 \dots v_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{v_1} \dots dx^{v_2} \dots dx^{v_r} \quad (1.7)$$

notem que $\{dx^\mu\}$ és una base de $T_p^* M$ i podem escriure un covector arbitrari $w = w_\mu dx^\mu$.

T clarament és una funció lineal de $\otimes^q T_p^* M \otimes^r T_p M$ a R .

Definim un camp tensorial de tipus (q,r) com una assignació suau d'elements de $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ a cada punt $p \in M$ i el set de tots els camps tensorials a M es denota $\mathcal{T}_r^q(M)$.

L'operació simètrica d'un tensor $w \in \mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ està definida per

$$Pw(v_1 \dots v_r) \equiv w(v_{p(1)}, \dots, v_{p(r)}) \quad (1.8)$$

on $v_i \in T_p M$ i $p \in S_r$ el grup simètric d'ordre r .

Per un tensor genèric (q,r) les operacions de simetria es defineixen separadament per q índexs i r índexs. Prenem la base de coordenades $e_\mu = \{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ llavors

$$w(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_r}) = w_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} \quad (1.9)$$

$$Pw(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_r}) = w_{\mu p(1) \mu p(2) \dots \mu p(r)} \quad (1.10)$$

Per $w \in \mathcal{T}_{r,p}^q(M)$ el simmetritzador \mathcal{S} es defineix

$$\mathcal{S}w = \frac{1}{r!} \sum_{p \in S_r} pw \rightarrow \mathcal{S}w \quad \text{és totalment simètric} \quad (1.11)$$

i l'antisimmetritzador \mathcal{A}

$$\mathcal{A}w = \frac{1}{r!} \sum_{p \in S_r} sgn(p)pw \rightarrow \mathcal{A}w \quad \text{és totalment antisimètric} \quad (1.12)$$

1.5 Formes diferencials

Definició 10 Una forma diferencial d'ordre r o una r -forma és un tensor totalment antisimètric del tipus $(0,r)$.

Definim també el producte wedge \wedge d' r 1-formes com el totalment antisimètric producte tensorial

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{o \in S_r} sgn(p) dx^{\mu p(1)} \wedge dx^{\mu p(2)} \wedge \dots \wedge dx^{\mu p(r)} \quad (1.13)$$

el producte wedge satisfà les següents propietats

1. $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = 0$ si algú índice μ apareix almenys 2 vegades
2. $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = sgn(p) dx^{\mu p(1)} \wedge \dots \wedge x^{\mu p(r)}$
3. $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ es lineal en cada dx^μ

Si denotem l'espai vectorial d' r -formes a $p \in M$ $\Omega_p^r(M)$, el conjunt d' r -formes forma una base de $\Omega_p^r(M)$ i un element $w \in \Omega_p^r(M)$ s'expandeix de la següent forma

$$w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (1.14)$$

Els components de qualsevol tensor de segon rang $w_{\mu\nu}$ es descomponen en la part simètrica $\sigma_{\mu\nu}$ i la part antisimètrica $\alpha_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(w_{\mu\nu} + w_{\nu\mu}) = w_{(\mu\nu)}, \\ \alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(w_{\mu\nu} - w_{\nu\mu}) = w_{[\mu\nu]} \end{aligned} \quad (1.15)$$

definim $\Omega_p^0(M) = R$, clarament $\Omega_p^1(M) = T_p^*M$.

Definim el producte exterior d'una q -forma i una r -forma $\wedge : \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{q+r}(M)$ mitjançant una extensió trivial.

Sigui $w \in \Omega_p^q(M), \xi \in \Omega_p^r(N)$ l'acció de la $(q+r)$ -forma $w \wedge \xi$ en $q+r$ vectors es defineix

$$(w \wedge \xi)(v_1, \dots, v_{q+r}) = \frac{1}{q!r!} \sum_{p \in S_{q+r}} sgn(p) w(v_{p(1)}, \dots, v_{p(q)}) \xi(v_{p(q+1)}, \dots, v_{p(q+r)}) \quad (1.16)$$

on $v_i \in T_p M$. Si $q+r < m$, $w \wedge \xi$ es fa 0 idènticament. Amb aquest producte definim l'algebra

$$\Omega_p^*(M) \equiv \Omega_p^0(M) \oplus \Omega_p^1(M) \oplus \dots \oplus \Omega_p^m(M) \quad (1.17)$$

Definició 11 La derivada exterior dr és un mapa $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ amb acció sobre una r -forma $w = \frac{1}{r!} w_{r_1 \dots r_\mu} dx^{r_1} \wedge \dots \wedge dx^{r_\mu}$ definida $drw = \frac{1}{r!} (\frac{\partial}{\partial x^v} w_{r_1 \dots r_\mu}) dx^v \wedge dx^{r_1} \wedge \dots \wedge dx^{r_\mu}$

Veiem dos exemples. Les r -formes en espai 3-dimensional són

1. $w_0 = f(x, y, z)$
2. $w_1 = w_x(x, y, z)dx + w_y(x, y, z)dy + w_z(x, y, z)dz$
3. $w_2 = w_{xy}(x, y, z)dx \wedge dy + w_{yz}(x, y, z)dy \wedge dz + w_{zx}(x, y, z)dz \wedge dx$
4. $w_3 = w_{xyz}(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$

Es sap que el potencial electromagnètic $A = (\phi, A)$ és una 1-forma $A = A_\mu dx^\mu$. El tensor electromagnètic es defineix $F = dA$ i té els components

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Sigui $\phi : M \rightarrow N$ un mapa suau entre varietats suaus, llavors hi ha un mapa lineal associat de l'espai de les 1-formes en N a l'espai de les 1-formes en M . Aquest mapa lineal s'anomena pullback i es denota ϕ^* . D'altra banda el push-forward és una aproximació lineal a mapes suaus en espais tangents. Suposem que $\varphi : M \rightarrow N$ és un mapa suau entre varietats suaus, llavors el diferencial de φ a un punt x denotat $d\varphi_x$ és la millor aproximació lineal de φ a prop de x .

Quan el mapa ϕ és un difeomorfisme el pullback juntament amb el pushforward es poden utilitzar per transformar qualsevol camp tensorial d' N a M i viceversa.

1.6 Tensor mètric

Considerem el fibrat vectorial $S^2(T^*(N)) = Sym(T^*(M) \otimes T^*(M))$ i sigui g una secció seva. Per qualsevol punt $p \in M$ ens proporciona una forma bilineal sobre $T_p M$

$$\begin{aligned} g|_p : T_p M \otimes T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ g_p(v_1, v_2) &= g_p(v_2, v_1) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Aquesta forma bilineal és simètrica $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$ i Si és no degenerada $g(v, v_i) = 0 \quad \forall v_i \in T_p M \rightarrow v = 0$. llavors hem definit per cada punt $p \in M$ una mètrica.

En una carta determinada podem desenvolupar aquest tensor de tipus (0,2) en la base canònica

$$\begin{aligned} g &= g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ dS^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \tag{1.19}$$

La mètrica com totes les formes bilinelas es pot classificar en termes de la seva signatura, indiquem amb W^+ el subespai de $T_p M$ pel qual la mètrica està definida positiva i W^- el subespai pel qual està definida negativa

$$\begin{aligned} g_p(v, v) &> 0 & \forall v \in W^+ \\ g_p(v, v) &< 0 & \forall v \in W^- \end{aligned} \tag{1.20}$$

llavors la signatura és $(\dim W^+, \dim W^-)$

1. $\dim W^+ = \dim T_p M \rightarrow$ mètrica definida positiva, mètrica euclídea
2. $\dim W^+ = 1 (\dim W^- = \dim T_p M - 1)$ o $\dim W^+ = \dim T_p M - 1, \dim W^- = 1 \rightarrow$ signatura Minkowskiana
3. Per valors genèrics de $\dim W^+, \dim W^-$ parlem de mètrica pseudo-Riemanniana

De l'àlgebra lineal sabem que sempre podem trobar una base de vectors ortonormals en $T_p M$ tals que la mètrica tingui la forma canònica

$$g = e^1 \otimes e^1 + \dots + e^M \otimes e^M - e^{M+1} \otimes e^{M+1} - e^{M+2} \otimes e^{M+2} - \dots - e^n \otimes e^n \tag{1.21}$$

en el cas de la signatura minkowskiana $(-, +, +, +)$ o més generalment pseudo-Riemanniana, els vectors es separen naturalment en tres categories

1. $g(v, v) < 0 \rightarrow$ vector tipus temps
2. $g(v, v) = 0 \rightarrow$ vector tipus llum
3. $g(v, v) > 0 \rightarrow$ vector tipus espai

La mètrica induceix un isomorfisme canònic entre vectors i formes. Donat un vector v podem construir la forma

$$\begin{aligned} w(\cdot) &= g(\cdot, v) \\ w_\mu &= g_{\mu\nu} v^\nu \end{aligned} \tag{1.22}$$

és a dir que la mètrica ens permet baixar índexs, de fet, mitjançant l'invers de la mètrica podem realitzar la transformació oposada $v^\nu = g^{\nu\mu} w_\mu$.

La mètrica i l'invers de la mètrica satisfan $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$.

Definició 12 Sigui $f : M \rightarrow N$ un mapa suau i $\dim M \leq \dim N$

1. el mapa f s'anomena immersió d' M en N , si $f_+ : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ és una injecció, és a dir, $\text{rang } f_+ = \dim M$
2. el mapa f s'anomena embedding si f és una injecció i una immersió. La imatge $f(M)$ s'anomena subvarietat d' N

1.7 Significat de les coordenades

La Relativitat Especial (RE) utilitza les coordenades naturals vinculades per la mètrica de Minkowski. En Relativitat General (RG), en canvi, tractem amb una varietat general i no tenim per què treballar amb la plena arbitrarietat de les coordenades.

Tot i això, localment hem de ser capaços de restringir-nos a la Relativitat Especial, per tant és raonable començar amb el mateix esquema:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (1.23)$$

Aquests són 4 components d'un vector, sinó 4 números. En principi, aquests números poden no tenir cap significat físic immediat, i l'han d'obtenir en restringir-nos a la Relativitat Especial.

Seguint el principi de la relativitat, també ens caldrà formular una teoria que doni conjunts de coordenades que deixin inalterades les quantitats físiques.

Això es formula com el Principi de Covariància General, que diu que les lleis de la física s'han d'escriure amb el formalisme tensorial. És a dir, donats dos tensors:

$$S_{\nu\rho}^\mu = A_{\nu\rho}^\tau \quad (1.24)$$

La igualtat només pot ser una llei si es transforma de la mateixa manera. Aquesta és una condició necessària però no suficient per establir una llei física.

En Relativitat General aquest principi és necessari perquè un tensor en \mathbb{R}^4 (espai pla) no es transforma com un tensor en una varietat general sota una transformació de coordenades qualsevol. A més, suposem que trobem una llei de la física vàlida en Relativitat General; els objectes matemàtics s'han de correspondre a objectes ja coneguts quan fem la restricció a Relativitat Especial. Aquesta consideració es coneix com a Principi d'Acoblament Mínim.

Donada la completa arbitrarietat de les coordenades, com podem mesurar físicament temps i longituds (pròpies)?.

Assumim vàlid, com en Relativitat Especial, el Principi de Localitat, amb l'òbvia diferència que el sistema de referència comòbil no estarà connectat a un Sistema de Referència (SDR) inercial global a través d'una transformació de Lorentz. La validesa del principi ens permet definir adequadament intervals infinitesimals i finits.

Suposem que etiquetem x^0 com a temps i les altres com a espacials (x^i). Pel principi de localitat, tenim:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 d\tau^2 \quad (1.25)$$

donat que en el S.R.I. (Sistema de Referència Inercial) local treballem amb Minkowski.

En la mètrica general g , tenim localment (per a un observador en repòs on $dx^i = 0$):

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 \quad (1.26)$$

Per invariància ens porta a escriure el temps propi com:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (1.27)$$

Perquè això tingui sentit físic (lectura d'un rellotge estàndard), cal la condició:

$$g_{00} > 0 \quad (1.28)$$

Per a un interval finit, el temps propi depèn del camí (del punt):

$$c\Delta\tau = \int \sqrt{g_{00}(x^0, x^1, x^2, x^3)} dx^0 \quad (1.29)$$

Per a l'espai, naturalment, no podem fer les mateixes assumpcions doncs el temps propi depèn del punt. Procedim emprant la llum. Considerem un senyal que viatja d'un punt A a un punt B infinitament proper.

Localment, sabem de la Relativitat Especial que per a la llum $ds^2 = 0$. En la nostra varietat general:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0 dx^i + g_{ij}dx^i dx^j = 0 \quad (1.30)$$

Això és una equació de segon grau per dx^0 . Solucionant per dx^0 :

$$dx^0 = \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0i} dx^i \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij}) dx^i dx^j} \right) \quad (1.31)$$

On el terme dins l'arrel quadrada prové del discriminant.

Considerem l'esquema d'anada i tornada:

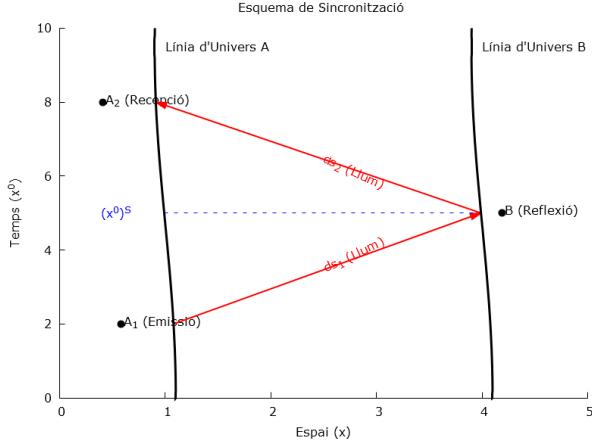


Figura 1: Esquema de sincronització

- $A_1 : (x^0, x^i)$
- $B_1 : (x^0 + dx_{(1)}^0, x^i + dx^i)$
- $A_2 : (x^0 + dx_{(1)}^0 + dx_{(2)}^0, x^i)$

Els temps d'anada ($dx_{(1)}^0$) i tornada ($dx_{(2)}^0$) corresponen a les solucions positiva i negativa (tenint en compte la inversió del desplaçament espacial). Durant el trajecte d'anada i tornada, l'interval total és:

$$dx_{(1)}^0 + dx_{(2)}^0 = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j} \quad (1.32)$$

L'interval de temps propi mesurat per l'observador A és $d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0$. Definint la distància espacial dl a partir del temps que triga la llum en anar i tornar ($cd\tau = 2dl$):

$$dl = \frac{1}{2} cd\tau_{total} = \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} (dx_{(1)}^0 + dx_{(2)}^0) \right) \quad (1.33)$$

Substituint l'expressió anterior, obtenim la longitud que mesuraria un observador instantani:

$$dl^2 = \left(-g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j \quad (1.34)$$

Això ens permet definir el tensor mètric espacial γ_{ij} :

$$\boxed{\gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}} \quad (1.35)$$

Per tal que aquesta longitud sigui real i tingui sentit, la mètrica espacial γ_{ij} ha de ser definida positiva. Això requereix condicions com $\gamma_{11} > 0$, determinant positiu, etc..

Hem vist que les mesures de temps i espai depenen del camí i de la mètrica. Estudiem ara el tema de la simultaneitat: en Relativitat General, existeixen rellotges sincronitzats?

Considerem l'esquema de reflexió de llum anterior. Simplement hem redifinit x^0 com una etiqueta. Podem definir el moment "simultani" a l'esdeveniment de reflexió en B com el punt mig de l'interval a A:

$$(x^0)^S = x^0 + \frac{1}{2} (dx_{(1)}^0 - dx_{(2)}^0) \quad (1.36)$$

Substituint les expressions anteriors:

$$(x^0)^S = x^0 + \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} \quad (1.37)$$

Per tant, dos rellotges es poden sincronitzar (simultaneïtat transitiva) si el terme de correcció és nul:

$$\frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} = 0 \implies g_{0i} = 0 \quad (1.38)$$

Aquesta és una condició sobre la mètrica. Si $g_{0i} = 0$, diem que la superfície espacial és ortogonal a la direcció d'evolució temporal. Les coordenades es poden escollir de tal manera que es compleixi aquesta condició.

Suposem que estem a \mathbb{R}^4 (Minkowski) i tractem un problema de simetria axial. En coordenades cilíndriques inercials ($c = 1$):

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (1.39)$$

Introduïm un sistema rotat entorn a l'eix Z amb velocitat angular ω constant. La transformació és:

$$t = t' \quad (1.40)$$

$$r = r' \quad (1.41)$$

$$\phi = \phi' + \omega t' \quad (1.42)$$

$$z = z' \quad (1.43)$$

En aquest sistema de referència rotatori, el diferencial $d\phi = d\phi' + \omega dt'$. Substituint a la mètrica:

$$ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + r'^2(d\phi'^2 + \omega dt')^2 + dz'^2 \quad (1.44)$$

Expandint els termes:

$$ds^2 = -(1 - \omega^2 r'^2)dt'^2 + dr'^2 + r'^2 d\phi'^2 + 2\omega r'^2 d\phi' dt' + dz'^2 \quad (1.45)$$

Identifiquem els components mètrics. Per g_{00} :

$$g_{00} = -(1 - \omega^2 r'^2) \quad (1.46)$$

Per tal de tenir un temps real, necessitem $1 - \omega^2 r'^2 > 0$, la qual cosa limita el radi màxim (velocitat de la llum).

Calculem ara la mètrica espacial γ_{ij} en el sistema rotatori:

- $\gamma_{r'r'} = 1$ (ja que $g_{rr} = 1$ i $g_{0r} = 0$)
- $\gamma_{z'z'} = 1$
- $\gamma_{\phi'\phi'}$ és més complex perquè $g_{0\phi} \neq 0$.

Aplicant la fórmula $\gamma_{ij} = g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{-g_{00}}$ (adaptant signes segons convenció del text o estàndard):

$$\gamma_{\phi'\phi'} = r'^2 + \frac{(\omega r'^2)^2}{1 - \omega^2 r'^2} = \frac{r'^2(1 - \omega^2 r'^2) + \omega^2 r'^4}{1 - \omega^2 r'^2} = \frac{r'^2}{1 - \omega^2 r'^2} \quad (1.47)$$

Això mostra que la geometria espacial no és euclidiana.

Si calculem la longitud d'una circumferència a radi R :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_{\phi'\phi'}} d\phi' = \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{1 - \omega^2 R^2}} d\phi' = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \omega^2 R^2}} \quad (1.48)$$

Com que el denominador és menor que 1, tenim que $L > 2\pi R$. Això és sorprendent: En un sistema de Referència no inercial la geometria deixa de ser euclidiana.

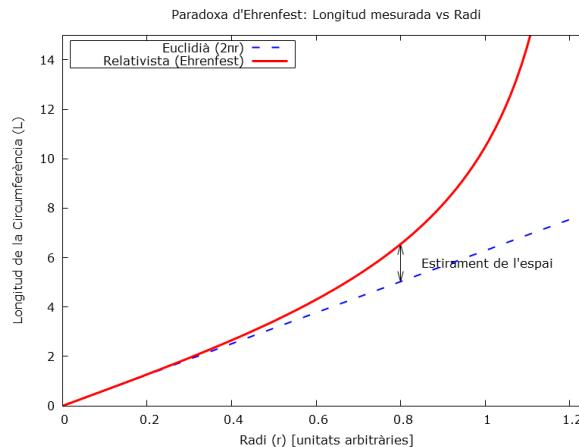


Figura 2: Representació gràfica paradoxa d'Ehrenfest

2 Curvatura

2.1 Connexió afí i transport paral·lel

El primer pas serà el de generalitzar la noció de derivada de tal manera que tingui en compte la geometria de la varietat.

Definició 13 Una connexió afí serà un mapa $\nabla : \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(M)$ tal que satisfà les següents propietats

1. $\nabla_{x_1+x_2}y = \nabla_{x_1}y + \nabla_{x_2}y$
2. $\nabla_x(y_1 + y_2) = \nabla_xy_1 + \nabla_xy_2$
3. $\nabla_{fx}y = f\nabla_xy$
4. $\nabla_x(fy) = f\nabla_xy + [x(f)y = \nabla_xyf]$

en coordenades locals x^μ amb una base $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \nabla_{e_\mu}e_v \equiv \nabla_\mu e_v = e_\rho[\Gamma_{\mu v}^\rho \equiv$ coeficients de connexió] tenim la derivada covariant

$$\nabla_xy = \nabla_{(x^\mu e_\mu)}(y_{e_v}^v) = x^\mu \nabla_\mu(y_{e_v}^v) = x^\mu \left(\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} e_\rho + y^v \Gamma_{\mu v}^\rho e_\rho \right) = x^\mu \left(\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} + y^v \Gamma_{\mu v}^\rho \right) e_\rho \quad (2.1)$$

on podem fer la identificació

$$\nabla_\mu y^\rho = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} + y^v \Gamma_{\mu v}^\rho \quad (2.2)$$

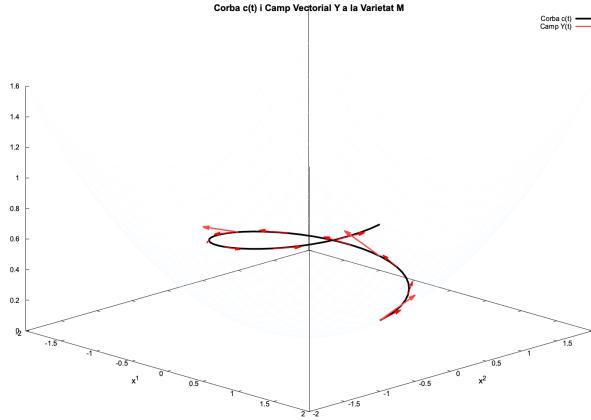


Figura 3: Figura que mostra la corba $c(t)$ i el camp vectorial Y a la varietat M

Suposem ara que prenem una corba $c(t)$ a la nostra varietat M . Prenem un vector y a la corba i veiem com evoluciona al llarg de la corba.

Si v és el camp vectorial tangent a la corba, y és transportat paral·lelament al llarg de la corba si la derivada covariant respecte al camp vectorial v de x és $\nabla_V y = 0$.

Si prenem dues connexions diverses que compleixen la condició, y serà transportat paral·lelament al llarg de la corba de formes diverses. L'equació del transport paral·lel és llavors

$$v^\mu \left(\frac{\partial y^\rho}{\partial v^\mu} + y^v \Gamma_{\mu v}^\rho \right) e_\rho = 0 \quad (2.3)$$

Si tenim $v^\mu = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt}$ llavors escrivim

$$\frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \left(\frac{\partial y^\rho}{\partial v^\mu} + y^v \Gamma_{\mu v}^\rho \right) e_\rho = 0 \rightarrow \frac{\partial y^\rho}{\partial t} + \frac{dx^\mu}{dt} y^\mu \Gamma_{\mu v}^\rho = 0 \quad (2.4)$$

L'equació del transport paral·lel es tradueix en aquesta equació al primer ordre en la component y .

Si la corba $c(t)$ és tal que $\nabla_v v = 0 \rightarrow c$ és una geodèsica.

Posant $y^\rho = v^\rho = \frac{dx^\rho(c(t))}{dt}$ trobem que l'equació per la geodèsica és una equació al segon ordre

$$\frac{d^2 x^\rho}{dt^2} + \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \Gamma_{\mu \nu}^\rho = 0 \quad (2.5)$$

Si reparametritzem la corba amb una parametrització afí l'equació geodèsica es manté igual, com tenim derivades segones respecte al temps, un exemple seria una parametrització lineal en t $t \rightarrow \hat{t} = at + b$. En general però, podem tenir parametritzacions no afins $t \rightarrow \hat{t} = f(t) \rightarrow \nabla_v v = gv$. Tindrem una parametrització afí quan tinguem l'equació de la geodèsica en la forma $\nabla_v v = 0$. Estendre la noció a tots els tensors requereix Leibniz i la linealitat

$$\nabla_v(T_1 \otimes T_2) = \left(\nabla_v T_1 \right) \otimes T_2 + T_1 \otimes \left(\nabla_v T_2 \right) \quad (2.6)$$

per exemple $w \in \Omega^1(M)$, $w(x) \in f(M)$

$$\begin{aligned} \nabla_v(w(x)) &= \nabla_v(w_\mu x^\mu) \\ \nabla_v(w_\mu x^\mu) &= (\partial_v w_\mu)x^\mu + w_\mu(\partial_v x^\mu) \\ \equiv (\nabla_v w)(x) + w(\nabla_v(x)) &= (\nabla_v w)_\mu w^\mu + w \left((\partial_v x^\mu)e_\mu + \Gamma_{v\mu}^\rho \right) = (\nabla_v w)_\mu x^\mu + w_\mu(\partial_v x^\mu) + w_\rho \Gamma_{v\mu}^\rho \end{aligned} \quad (2.7)$$

i les dues expressions que hem trobat per $\nabla_v(w_\mu x^\mu)$ han de ser iguals, llavors

$$\nabla_v w_\mu = \partial_v w_\mu - \Gamma_{v\mu}^\rho w_\rho \quad (2.8)$$

que és la derivada covariant de la 1-forma. Podem estendre tot això per un tensor genèric

$$\nabla_\mu T_{v_1 \dots v_s}^{r_1 \dots r_r} = \partial_r T_{v_1 \dots v_s}^{r_1 \dots r_r} + v \Gamma_{\mu\rho}^{r_1} T_{v_1 \dots v_s}^{\rho r_2 \dots r_r} + \dots + \Gamma_{\mu\rho}^{r_r} T_{v_1 \dots v_s}^{r_1 \dots \rho} - \Gamma_{\mu v_1}^\rho T_{\rho v_2 \dots v_s}^{r_1 \dots r_r} - \dots - \Gamma_{\mu v_s}^\rho T_{v_1 \dots \rho}^{r_1 \dots r_s} \quad (2.9)$$

Suposem que tenim una corba sobre la nostra varietat, i hem definit $\nabla_\mu e_v = \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho$ en coordenades x^μ i $f_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ en coordenades y^α .

$$\nabla_{f_\alpha} f_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma f_\gamma = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\gamma} e_\rho \quad (2.10)$$

considerant el canvi de coordenades $f_\alpha = e_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}$ podem escriure la derivada covariant de la següent manera.

$$\nabla_{\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} e_\mu} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} e_\nu \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \nabla_\mu \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} e_\nu \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} e_\nu + \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho \right) = \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} e_\rho + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho \quad (2.11)$$

igualant a l'expressió anterior $\nabla_{f_\alpha} f_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\gamma} e_\rho$ trobem la llei de transformació tensorial

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \cdot \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\rho} \quad (2.12)$$

Si $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ i $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$ són dos conjunts de coeficients de connexió $\rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$ és un tensor, perquè sota transformacions de coordenades el terme de més $\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\rho}$ es cancel·la entre els dos termes. A més, si $T_{\mu\nu}^\rho$ és un tensor, llavors $\Gamma_{\mu\nu}^\rho + T_{\mu\nu}^\rho$ transforma com una connexió, de fet, és una nova connexió $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$.

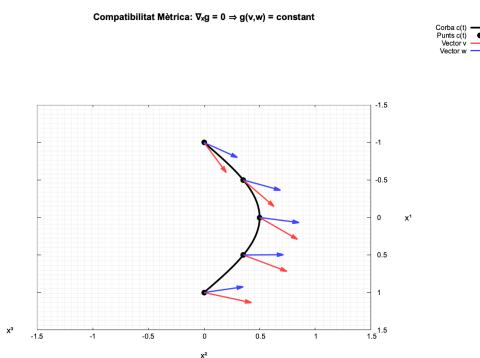


Figura 4: Compatibilitat mètrica al llarg d'una corba

La connexió físicament rellevant és la de Levi-Civita, serà la connexió compatible amb la mètrica $g(v,w)$. Tindrem compatibilitat si el producte intern dels dos vectors v,w és constant sota el transport paral·lel. Diem que és una connexió mètrica si $\nabla_\mu(g(v,w)) = \nabla_x g(v,w) + g(\nabla_x v, w) + g(v, \nabla_x w) = 0$ al llarg de la corba $c(t)$ amb v,w transportats paral·lelament i x vector tangent. En definitiva, busquem una connexió tal que la derivada covariant de la mètrica sigui 0. Ha de valer $\forall v, w, x$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu g_{v\rho} &= \partial_\mu g_{v\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{v\sigma} = 0 \\ \nabla_v g_{\rho\mu} &= \partial_v g_{\rho\mu} - \Gamma_{v\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} - \Gamma_{v\mu}^\sigma g_{\rho\sigma} = 0 \\ \nabla_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} = 0\end{aligned}\quad (2.13)$$

Prenem la primera equació amb signe menys i la segona i la tercera amb signe més i reescrivim

$$-\partial_\mu g_{v\rho} + \partial_v g_{\rho\mu} + \partial_\rho g_{\mu\nu} + \left(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{v\mu}^\sigma \right) g_{\sigma\rho} + \left(\Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \Gamma_{\rho\mu}^\sigma \right) g_{v\sigma} - \left(\Gamma_{v\rho}^\sigma + \Gamma_{\rho v}^\sigma \right) g_{\sigma\mu} = 0 \quad (2.14)$$

Identificant $(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{v\mu}^\sigma) = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\sigma = T_{\mu\nu}$ tensor torsió i $(\Gamma_{v\rho}^\sigma + \Gamma_{\rho v}^\sigma) = 2\Gamma_{(v\rho)}^\sigma$ finalment trobem

$$\Gamma_{(v\rho)}^\sigma = \left[\frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \left(\partial_v g_{\rho\mu} + \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{v\rho} \right) + \right] + T_{\mu\nu}^\sigma g_\rho^\mu + T_{\mu\rho}^\sigma g_v^\mu \quad (2.15)$$

Una connexió qualsevol es pot descomposar en la seva part simètrica i la seva part antisimètrica.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{(\mu\nu)}^\rho + \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho = T_{\mu\nu}^\rho + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + T_\mu^\rho {}_\sigma g^\sigma_v + T_v^\rho {}_\sigma g_\mu^\sigma \quad (2.16)$$

la connexió mètrica per la qual la torsió és nul·la s'anomena connexió de Levi-Civita, per aquesta connexió els coeficients són els símbols de Christoffel $\equiv \hat{\Gamma}_{v\rho}^\sigma$

Teorema 2 La connexió de Levi-Civita existeix i és única

2.2 Geodèsiques

Per una mètrica plana la geodèsica és una recta que uneix dos punts A i B. Si ho volem generalitzar a espaietmeps curvats, introduïm la noció que la geodèsica és la corba que extremitza el temps propi τ

$$\begin{aligned}\tau &= \int_\gamma \frac{dt}{c} \sqrt{c^2 - v^2} = \int_\gamma \frac{dt}{c} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} = \int_\gamma d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \\ \delta\tau &= 0 = \int_\gamma d\lambda \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta\mathcal{L}}{\sqrt{-\mathcal{L}}} \right) \sim \int d\lambda \delta\mathcal{L}\end{aligned}\quad (2.17)$$

Extermitzar τ coincideix amb extermitzar $\mathcal{L} = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$, l'equació resultant

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt} [\Gamma_{v\rho}^\mu \equiv \text{connexió de Levi-Civita}] = 0 \quad (2.18)$$

La connexió de Levi-Civita és la única compatible amb l'extremització de la Lagrangiana.

2.3 Curvatura

Comencem amb algunes definicions

Definició 14 Parèntesis de Lie: $[] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$.

$x, y \rightarrow [x, y]$ tal que $f \in \mathbf{f}(M)$

$$[x, y](f) = x(y(f)) - y(x(f))$$

$$\text{en coordenades locals } (x^\mu \partial_\mu y^\nu - y^\nu \partial_\mu x^\nu) e_v = [x, y]$$

satisfà les següents propietats

1. és lineal en qualsevol de les entrades
2. és antisimètric
3. satisfà l'identitat de Jacobi

Les propietats que satisfà el parèntesis de Lie són les propietats definitòries de l'àlgebra de Lie.

Definició 15 Torsió : $T : \chi(M) \otimes \chi(M) \rightarrow \chi(M)$

$$x, y \rightarrow \nabla_x y - \nabla_y x - [x, y] = T(x, y)$$

$$\text{en coordenades locals } T_{v\rho}^\mu = dx^\mu T(e_v, e_\rho) = dx^\mu (\nabla_v e_\rho - \nabla_\rho e_v + [e_v, e_\rho]) = dx^\mu (\nabla_v e_\rho - \nabla_\rho e_v + 0) \\ dx^\mu (\Gamma_{v\rho}^\sigma e_\sigma - \Gamma_{\rho v}^\sigma e_\sigma) = \Gamma_{v\rho}^\mu - \Gamma_{\rho v}^\mu$$

definim ara de forma anàloga el tensor de curvatura de Riemann

Definició 16 Curvatura (Tensor de Riemann) $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$

$$x, y, z \rightarrow R(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x, y]} z \\ \text{en coordenades locals } dx^\mu (R(e_v, e_\rho) e_\lambda) \equiv R_{\lambda v \rho}^\mu = dx^\mu (\nabla_v \nabla_\rho e_\lambda - \nabla_\rho \nabla_v e_\lambda - 0) = dx^\mu (\nabla_v \Gamma_\rho^\sigma e_\sigma - \nabla_\rho \Gamma_v^\sigma e_\sigma) = dx^\mu (\partial_v \Gamma_\rho^\sigma e_\sigma + \Gamma_\rho^\sigma \Gamma_v^\alpha e_\alpha - \partial_\rho \Gamma_v^\sigma e_\sigma - \Gamma_v^\sigma \Gamma_\rho^\alpha e_\alpha) = \partial_v \Gamma_\rho^\mu + \Gamma_\rho^\sigma \Gamma_v^\mu - \partial_\rho \Gamma_v^\mu - \Gamma_v^\sigma \Gamma_\rho^\mu$$

Podem escriure a nivell explicatiu $R \sim d_\Gamma \Gamma \sim d\Gamma + [\Gamma, \Gamma]$.

Veiem algunes propietats del tensor de Riemann. Obviament podem baixar índexs amb la mètrica $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} R_{\nu\rho\sigma}^\alpha$

1. $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}$
2. $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\rho\sigma\mu\nu}$
3. $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$

Abans de seguir amb les propietats definim

Definició 17 Tensor de Ricci : $R_{icc}(x, y) = dx^\mu R(e_\mu, x)y$
 $R_{v\lambda} = R_{v\mu\lambda}^\mu = R_{\lambda v}$

Definició 18 Curvatura escalar: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ També anomenat escalar de Ricci, és simplement una funció sobre la nostra varietat, una 0-forma.

Ara podem veure dues propietats més

1. 1ra identitat de Bianchi: $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$
 en components $R_{v\lambda\sigma}^\mu + R_{\lambda\sigma v}^\mu + R_{\sigma v\lambda}^\mu = 0$
2. 2na identitat de Bianchi: $\nabla_x R(y, z)w + \nabla_y R(z, x)w + \nabla_z R(x, y)w = 0$
 en components $\nabla_\mu R_{\rho\lambda\alpha}^\nu + \nabla_\lambda R_{\rho\alpha\mu}^\nu + \nabla_\alpha R_{\rho\mu\lambda}^\nu = 0$

Partint de la segona identitat de Bianchi i contraient v amb λ

$$\nabla_\mu R_{\rho\lambda\alpha}^\nu + \nabla_\lambda R_{\rho\alpha\mu}^\nu + \nabla_\alpha R_{\rho\mu\lambda}^\nu = 0 \quad (2.19)$$

i ara contraient ρ amb α (multiplicant per $g^{\alpha\rho}$)

$$\nabla_\mu R + \nabla_\nu R_{\rho\alpha\mu}^\nu g^{\alpha\rho} - \nabla_\alpha R_{\rho\mu\lambda}^\nu g^{\nu\rho} = 0 \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu R + \nabla_\nu [R_{\alpha\mu}^\nu = -R_{\mu\alpha}^\nu] - \nabla_\alpha R_\mu^\nu &= 0 \\ \nabla_\mu R - 2\nabla_\nu R_\mu^\nu &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Finalment multiplicant per $g^{\alpha\beta}$

$$\nabla_\mu g^{\mu\beta} R - 2\nabla_\nu R^{\nu\beta} = -2\nabla_\nu (R^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\nu\beta}R) = 0 \quad (2.22)$$

el terme entre parèntesis és el que anomenem tensor d'Einstein $\equiv G^{\nu\beta}$. El tensor d'Einstein té derivada covariant nul · la $\nabla_v G^{\nu\beta} = 0$.

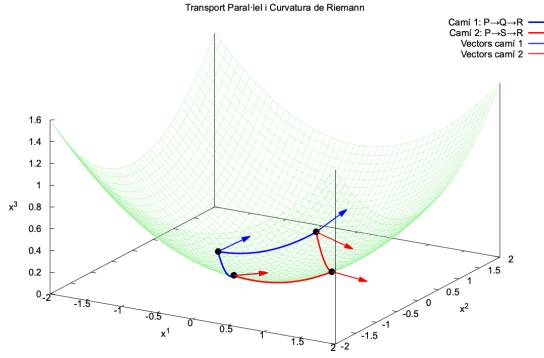


Figura 5: Transport paral · lel al llarg d'una corba tancada

Considerem ara una corba tancada infinitesimal donada per $c(t) = x^\mu + \varepsilon^\mu t$, $t \in [0, 1]$. Volem transportar paral · lelament dos un vector des d'un punt p a un punt r seguint dues trajectòries diferents P-Q-R i P-S-R, i volem comprovar si $V_r^\mu = V_r^{\cdot\mu}$.

El transport paral · lel de v_p^μ ve donat per $\frac{dv^\mu}{dt} + v^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} = 0$. Tenim condicions inicials $v^\mu(t = 0) = v_p^\mu \rightarrow v^\mu = v_p^\mu - v^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu \varepsilon_t^\nu + O(\varepsilon^2)$

$$v_q^\mu = v_p^\mu - v_p^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu e^\nu$$

$$v_r^\mu = v_q^\mu - v_p^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \delta^\beta = v_p^\mu - v_p^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu \varepsilon^\nu - \delta^\beta v_p^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \delta^\beta \varepsilon^\eta \left[\left(v_p^\lambda \Gamma_{\lambda\eta}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) - \left(v_p^\alpha \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\eta}^\mu \right) \right] \quad (2.23)$$

hem trobat l'expressió per v_r^μ transportat per la corba p-q-r paral · lelament, també podem buscar $v_r^{\cdot\mu}$ transportat paral · lelament per la corba p-s-r

$$v_r^{\cdot\mu} = v_p^r - v_p^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu \delta^\nu - \varepsilon^\beta v_p^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \varepsilon^\beta \delta^\eta (v_p^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\eta}^\mu - v_p^\lambda \partial_\eta \Gamma_{\alpha\eta}^\mu) \quad (2.24)$$

si la diferència dels dos vectors és 0 tindrem una mètrica plana, com a mínim localment

$$v_r^\mu \cdot v_r^{\cdot\mu} = \delta^\beta \varepsilon^\eta v_p^\lambda (-\partial_\beta \Gamma_{\lambda\eta}^\mu + \Gamma_{\lambda\eta}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \partial_\eta \Gamma_{\lambda\beta}^\mu - \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\eta}^\mu) \quad (2.25)$$

Serà 0 si l'objecte entre parèntesis és 0. L'objecte entre parèntesis és el tensor de curvatura de Riemann $R_{\lambda\eta\beta}^\mu$.

Si el tensor de Riemann és 0 el transport paral · lel no depèn de la corba. La varietat és plana si els components del tensor de Riemann són 0.

Donat que el tensor de Riemann és un tensor, en variar coordenades els components varien de forma homogènia

$$\tilde{R}_{\beta\gamma\sigma}^\alpha = R_{v\rho\delta}^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial y^\sigma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \rightarrow \text{la noció de varietat plana no depèn de les coordenades} \quad (2.26)$$

Si $\tilde{R}_{\beta\gamma\sigma}^\alpha = 0 \rightarrow R_{v\rho\delta}^\mu = 0$ En Minkowski amb cartesianes $\Gamma_{v\rho}^\mu \sim \frac{1}{2}\eta(\partial\eta + \dots) = 0 \rightarrow R = \partial\Gamma + [\Gamma, \Gamma] = 0 \rightarrow$ Minkowski és plana Podríem fer un raonament anàleg al del tensor de curvatura pel tensor torsió.

2.4 Límit Newtonià

Busquem donar una interpretació física de la mètrica $g_{\mu\nu}$ i de les connexions $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$. Per fer-ho, estudiem aquests objectes en el Límit Newtonià, fent una sèrie d'aproximacions que es redueixen a la física coneuguda.

Comencem imposant el límit no-relativístic, que implica (prenent $c = 1$):

$$\frac{dx^r}{d\tau} \ll c = 1 \implies \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad \text{per a } i \in (1, 2, 3) \quad (2.27)$$

Considerem l'equació de la geodèsica:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (2.28)$$

En el límit no-relativístic, tots els termes que depenen de les connexions espacials Γ_{ij}^μ es tornen negligibles respecte als termes temporals:

$$\Gamma_{ij}^\mu \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \ll \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \quad (2.29)$$

Per tant, l'equació de la geodèsica es redueix a:

$$\frac{d^2x^\tau}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\tau \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.30)$$

Substituint l'expressió de la connexió de Christoffel Γ_{00}^τ :

$$\frac{d^2x^\tau}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\tau\rho}(\partial_0 g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}) \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.31)$$

Imosem que la mètrica sigui estàtica, és a dir, que els seus elements no depenguin de $x^0 = t$.

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.32)$$

Llavors l'equació es simplifica a:

$$\frac{d^2x^\tau}{d\tau^2} - \frac{1}{2}g^{\tau\rho}\partial_\rho g_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.33)$$

Estem interessats en la física Newtoniana, per la qual cosa esperem que les manifestacions de la gravetat no siguin extremes. Podem aproximar la mètrica amb petites variacions (pertorbacions) de la mètrica de Minkowski (Aproximació del Camp Feble):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.34)$$

on els índexs alçats són $g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$.

Per tant, l'equació de la geodèsica esdevé (descartant termes de segon ordre en $h_{\mu\nu}$):

$$\frac{d^2x^\tau}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{\tau\rho}\partial_\rho h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.35)$$

La component temporal de l'equació és:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{0\rho}\partial_\rho h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.36)$$

Com que $\partial_0 h_{00} = 0$ (mètrica estàtica), i $x^0 = t$, l'equació es redueix a:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \implies \frac{dt}{d\tau} = \text{constant} \quad (2.37)$$

La component espacial ($i \in (1, 2, 3)$) és:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{i\rho}\partial_\rho h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \quad (2.38)$$

Com que $\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = \text{constant}$, podem dividir per $(\frac{dt}{d\tau})^2$:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\eta^{i\rho}\partial_\rho h_{00} \quad (2.39)$$

En el límit Newtonià, $\eta^{i\rho}$ és la mètrica espacial, $\eta^{ij} = -\delta^{ij}$ (segons la signatura usual $(+, -, -, -)$). Per tant, per a la coordenada espacial j :

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} = \frac{1}{2}(-\delta^{j\rho})\partial_\rho h_{00} = -\frac{1}{2}\partial_j h_{00} \quad (2.40)$$

Comparem amb la llei de la gravetat de Newton (força per unitat de massa):

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} = -\partial_j \varphi \quad (2.41)$$

Això ens permet identificar el potencial Newtonià φ :

$$\varphi = \frac{1}{2}h_{00} \quad (2.42)$$

Reintroduint la velocitat de la llum c , i recordant que $g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = 1 + h_{00}$:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \quad (2.43)$$

Així, almenys en el límit Newtonià, g_{00} conté la informació sobre la gravetat.

Recapitulant, en aquest límit, tot va com si l'únic terme de la mètrica que produeix efecte sigui el temporal:

- $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$
- $g_{0i} = 0$
- $g_{ij} = \eta_{ij} = -\delta_{ij}$

Aquestes condicions defineixen l'aproximació Newtoniana de la mètrica.

El fet que $g_{00} \neq 1$ implica, com ja sabem, que el temps pateix dilatació. En altres paraules, la gravetat és només una manifestació de com el temps depèn del punt: és la no-homogeneïtat del temps el que produeix la gravetat Newtoniana.

L'expressió del temps propi $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0$ permet retrobar l'expressió per al desplaçament cap al vermell (redshift) gravitacional. Per exemple, per a la mètrica de Schwarzschild:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2r}} dt \quad (2.44)$$

En aquest punt podem conoure coses sobre les connexions. Sabem que en l'espai-temps pla (Minkowski) la força és $F^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$. Imposar que un sistema de referència sigui inercial significa que $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$.

Estès a una varietat general amb la derivada covariant, obtenim l'equació de la geodèsica:

$$\frac{D^2}{d\tau^2}x^\mu = 0 = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad (2.45)$$

Això implica que la força inercial (o gravitatòria) es pot expressar en funció de les connexions:

$$F^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad (2.46)$$

Hem obtingut així una representació de la quasiforça de la gravetat en funció de les connexions de Christoffel.

3 Equacions d'Einstein

Comencem fent algunes consideracions sobre l'electromagnetisme en l'espai temps pla de Minkowski.

1. Les equacions de camp per $\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)$ són les equacions de Maxwell que són completament compatibles amb la relativitat especial
2. L'equació del moviment de la partícula carregada de prova és l'equació de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m_i}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \rightarrow$ cada partícula de prova s'accelera de manera diferent per càrrega i massa inercial diferents en un mateix camp electromagnètic
3. Les mesures les fem en un S.R.I, un sistema que no està influenciat pel camp electromagnètic, no és accelerat pel camp electromagnètic, podem utilitzar, per exemple, una partícula sense càrrega. El fet que podem construir un S.R.I està lligat al fet que existeixen partícules globalment lliures, la qual cosa és compatible amb l'estrucció de l'espai temps de Minkowski.

Veiem ara el cas de la gravitació Newtoniana

1. L'equació de camp és l'equació de Poisson pel potencial gravitacional φ , $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$ on $G \sim 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$ és 1 constant de Newton, que a les energies a les que fem els experiments és petita.
2. La força electromagnètica és molt més intensa que la força gravitacional
3. L'equació de Poisson no és compatible amb la relativitat, és invariant només sota transformacions de Galileu, inclou acció a distància. Si el sol desapareix notem l'efecte de forma instantània, cada variació de ρ es transmet immediatament a φ . La velocitat de transmissió és infinita, el que viola el segon postulat de la relativitat especial. Per tot això, és incompatible amb la relativitat especial, i amb l'estrucció de l'espai temps de Minkowski.
4. L'equació del moviment és $\vec{F} = -m_g \vec{\nabla} \varphi \rightarrow \vec{a} = -\frac{m_g}{m_i} \vec{\nabla} \varphi$.
5. Experimentalment trobem que $\frac{m_g}{m_i} = 1$

3.1 Principi d'equivalència

Elevem aquesta troballa experimental a principi: Principi d'equivalència débil, $m_g = m_i$. Totes les partícules de prova acceleren de la mateixa manera en el potencial φ , per exemple $\vec{a} = \vec{g}$.

Com mesurem acceleracions? Tenim un problema, no existeixen partícules lliures, qualsevol cos és accelerat per φ , la gravetat no pot ser capturada, no existeixen S.R.I globals. La gravetat no és compatible amb una estructura de l'espai temps globalment Minkowskiana.

El principi d'equivalència débil porta a la intuïció que en caiguda lliure no notem el nostre pes, no notem l'efecte de la gravetat. Per tant, un cos en caiguda lliure és la realització d'un sistema de referència inercial en Minkowski, localment. Aquest és el principi d'equivalència fort, que, en definitiva, per qualsevol punt de l'espai temps podem construir un sistema de referència localment inercial.

Si bé l'espai temps no és globalment Minkowski, sí que ho és localment.

Dit d'un altra manera, donat que els cossos cauen de la mateixa manera en el potencial gravitacional, un S.R en caiguda lliure té una acceleració relativa respecte a les partícules de prova deguda a la gravetat nul·la.

Donat que les mesures en el sistema de referència en caiguda lliure de les partícules de prova no senten els efectes de la gravetat, i per tant són les mateixes que farien un S.R.I en absència de gravetat. Aquest és l'anomenat principi d'equivalència fort.

Veiem un exemple: considerem un cohèt que accelera, el rellotge 2 envia un fotó al rellotge 1 cada segon. Gràcies a l'acceleració el fotó emès de 1 recorre sempre menys camí, i per tant, rep cada fotó amb una freqüència major a 1 segon. Segons el rellotge 1 el rellotge 2 va més veloç.

Suposem ara que el cohèt està aturat al terra, l'efecte, pel principi d'equivalència, ha de ser el mateix. Això prediu de forma encertada que els rellotges allunyats de la superfície de la terra fan tick de forma més veloç.

Notem que és la presència de la massa el que impedeix a l'espai temps ser globalment Minkowski. Les partícules en caiguda lliure són l'anàleg de les partícules lliures en Minkowski. Com en Minkowski les

partícules lliures tenen trajectòries rectilínies, és a dir, al llarg de les geodèsiques de l'espai temps, en general les partícules lliures segueixen la geodètica.

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt} = 0 \quad (3.1)$$

Això és l'anomenat principi de la geodètica.

3.2 Equació de la desviació geodètica

Considerem en primer lloc una distribució continua de partícules ($m = 1$) en un potencial gravitacional φ .

Cadascuna de les partícules té una velocitat i una acceleració $v^i = \frac{\partial x}{\partial t}$, $a^i = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$.

Introduïm el vector diferència infinitesimal entre partícules $\eta^i = \frac{\partial x}{\partial s}$ on s és l'índex que ens indica la partícula que estem considerant. La velocitat relativa entre dues partícules veïnes és $\frac{\partial \eta^i}{\partial t}$ i l'acceleració relativa $\frac{\partial^2 \eta^i}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 x^i}{\partial s \partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \eta^j$.

Anomenem l'acceleració relativa $\tilde{a}^i = -\varphi^i \eta^j$, $\varphi_j^i = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}$.

Considerem ara la mateixa situació en una varietat corba, treballem en coordenades locals x^μ , en aquest cas la base de coordenades serà $v = \partial_t$, $\eta = \partial_s$, $[v, \eta] = 0$. El moviment s'obté de l'equació $\nabla_v v = 0$. Escollim la connexió de Levi-Civita, la torsió llavors és nul · la $T(v, \eta) = \nabla_v \eta - \nabla_\eta v - [v, \eta] = 0$. Finalment trobem

$$\nabla_v \eta = \nabla_\eta v \quad (3.2)$$

3.3 Equació d'Einstein

En definitiva, si tenim una curvatura no nul · la, llavors $R(v, \eta)x = \nabla_v \nabla_\eta x - \nabla_\eta \nabla_v x - [\nabla_{[v, \eta]} x = 0]$. En la nostra varietat corba la velocitat relativa $\tilde{a}^i = \nabla_v \nabla_\eta v = \nabla_v \nabla_\eta v = R(v, \eta)v + [\nabla_\eta \nabla_v v = 0]$.

Per tant en el nostre formalisme l'acceleració relativa ve donada per la curvatura

$$(\nabla_v \nabla_\eta v)^i = R^i_{jkl} v^j v^k \eta^l \quad (3.3)$$

L'objecte $R^i_{jkl} v^j v^k$ és per tant equivalent al potencial gravitatori $-\varphi^i_j$. La diferència és que el potencial gravitatori és un escalar, un sol component; la mètrica, en canvi, és un tensor.

1. $\varphi \leftrightarrow g_{\mu\nu}$
2. $\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho \rightarrow$ l'objecte que ens interessa per les equacions de camp és $R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$ la traça del tensor de Riemann.
3. ρ està en $T^{\mu\nu}$, la densitat d'energia per un cas amb quadrivelocitat és $T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$
Tindrem per tant en les equacions de camp una proporcionalitat entre el tensor de Ricci i el tensor energia impuls $R_{\mu\nu} \sim T^{\mu\nu}$
4. Pel principi d'equivalència, localment $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ per tant la relació anterior no pot ser correcte ja que $R_{\mu\nu}$ no és covariantment constant.

El reemplacem per tant pel tensor d'Einstein per tant, l'equació finalment esdevé

$$G^{\mu\nu} = k T^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

la constant k es pot fixar estudiant el límit Newtonià de l'equació i comparant amb l'equació de Poisson $k = 8\pi G$

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad (3.5)$$

Suposem que estem convençuts que l'equació d'Einstein del camp sigui de la forma $k_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$ tal que

1. $k_{\mu\nu}$ depengui de la mètrica i de les derivades primeres i segones de la mètrica
2. $\nabla_\mu k^{\mu\nu} = 0$

3. $k_{\mu\nu} = k_{v\mu}$

4. $k_{\mu\nu}$ depen linealment de les derivades segones de $g_{\mu\nu}$

Es pot demostra que $k_{\mu\nu}$ és únic i és

$$k_{\mu\nu} = \alpha(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \quad (3.6)$$

On α és una constant de proporcionalitat i Λ és la constant cosmològica. La constant cosmològica substancialment és una energia del buit.

En general escrivim les equacions d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$. L'energia de les fonts ve donada per la part de l'equació amb $T_{\mu\nu}$, en el buit considerem $T^{\mu\nu} = 0$ i llavors només ens queda l'energia donada pel terme $\Lambda g_{\mu\nu}$.

Si $\Lambda = 0$ en el buit les equacions d'Einstein es redueixen a $R_{\mu\nu} = 0$

3.4 Problema de la constant cosmològica

Considerem l'equació de Poisson $\nabla^2\varphi = -\frac{\Lambda}{4\pi G}$, en coordenades esfèriques tindrem

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\varphi) + \text{part angular} = -\frac{\Lambda}{4\pi G} \rightarrow \varphi \sim -\Lambda r^2 \quad (3.7)$$

$\Lambda > 0$ correspon a una energia repulsiva, és a dir, un univers en expansió, s'anomena espai-temps de DeSitter(dS) i $\Lambda < 0$ correspon a una energia atractiva, s'anomena espai-temps de anti-DeSitter.

En cosmologia considerem un univers en expansió, per tant, partim de l'espai-temps de DeSitter.

Per poder calcular la constant cosmològica ens caldria conèixer tots els camps quàntics en acció.

Per simplicitat, considerem un camp escalar massiu lliure $\phi \rightarrow$ infinitos oscil·ladors harmònics de freqüència $\omega = \sqrt{m^2 + k^2}$.

L'energia del buit associada és proporcional a $\int d^3k\omega$

$$\int d^3k\omega = \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{m^2 + k^2} \quad (3.8)$$

per evitar la divergència tallem la integral a $k = k_c$ molt gran, així a més negligim la massa, ens queda $\sim \int^{k_c} dk k^3 \sim \hbar k_c^4$.

El tall ens diu fins a quina escala d'energia la nostra descripció és correcta, deixarà de ser correcta segurament a la massa de planck, a partir de llavors s'han de començar a considerar els efectes quàntics de la gravetat $\tilde{M}_{planck} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} \sim 10^{18} GeV$.

Llavors l'energia del buit associada al nostre camp escalar massiu és

$$\rho \sim (10^{18} GeV)^4 \sim 10^{72} GeV^4 \quad (3.9)$$

aquesta estimació però, és exagerada, per exemple, les energies del buit de diversos camps es podrien cancel·lar de forma gairebé exacta, com en una teoria supersimètrica, aquesta solució però seria gairebé un miracle, per tant ens quedem amb una estimació que resulta un problema.

Experimentalment a més, Planck 2018 troba $\Lambda \sim (10^{-12} GeV)^4$, aquesta diferència de 30 ordres de magnitud és el problema obert més gran en física teòrica. El problema de la constant cosmològica.

3.5 Principi antròpic

Sabem que si la constant cosmològica tingués un valor tan alt no es formaria matèria, estrelles, res. Per tal que la vida existeixi la constant cosmològica ha de ser molt petita, prop del valor experimental. Suposem que a l'univers la constant cosmològica no sigui veritablement constant, que l'univers estigui format de varies parts(multivers) en què les constants de la natura siguin diferents.

En la teoria de cordes tenim al menys 10^{500} buits diferents. És possible que una teoria fonamental tingui tantíssims buits diferents, amb propietats físiques diferents, llavors també tenim mínims locals diferents. Estar en un buit o un altre serà un qüestió de probabilitat, la probabilitat de trobar-se en un buit en particular és molt improbable, però ens hem de trobar en el trós de l'univers compatible amb la vida, és a dir, on trobem $\Lambda \sim 10^{-12} GeV$

És a dir, el trós de l'univers on les cancel·lacions miraculoses es donen.

3.6 Integrals sobre l'espai temps

Què vol dir integrar sobre l'espai temps?

$$\int_M \mathcal{L} \quad (3.10)$$

ens cal retornar a les matemàtiques per aprendre a integrar sobre varietats; considerem una varietat M , considerem dues famílies de subsets $\{U_i\}$ i $\{U_j\}$ amb coordenades x^μ i y^ν llavors podem escriure el jacobiana $J = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}$ del canvi de base $e_\mu = J f_\nu$.

Si $J > 0$ direm que el canvi de base té la mateixa orientació, això és una propietat només local. Si podem fer-ho a tots els punts de la varietat direm que la varietat és orientable.

Definició 19 M és orientable si \forall regió d'intersecció $J > 0$, altrament s'anomena no orientable

Assumim que la nostre varietat és no orientable, també assumirem que la nostre varietat tingui una partició de l'unitat compatible amb el recobriment.

Definició 20 Una partició de l'unitat compatible amb el recobriment $\{U_i\}$ és una família de funcions ϵ_i tal que

1. $0 \leq \epsilon_i(p) \leq 1 \quad \forall p \in M$
2. $\epsilon_i(p) = 0 \quad \text{si} \quad p \notin U_i$
3. $\forall p \in M \quad \sum \epsilon_i(p) = 1$

Si existeix una partició de l'unitat podem considerar ($m = \dim M$) la forma

$$w = \sum_i \epsilon_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \rightarrow w > 0 \quad (3.11)$$

a més, si canviem de coordenades a y^ν

$$w = \sum_i \epsilon_i \frac{\partial x^1}{\partial y^{\nu_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^m}{\partial y^{\nu_m}} = \sum_i \epsilon_i J dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m \leftrightarrow \text{existeix una } m\text{-forma } w \text{ que no s'anula en cap punt d'}M$$
(3.12)

w s'anomena forma volum, cal notar que si $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $f(p) < 0 \quad \forall p \in M \rightarrow fw$ és encara una forma volum sempre negativa.

Sigui $f \in \mathcal{F}(M)$, w una forma volum tal que en $U_i \quad w = g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$

$$\int_{U_i} fw = \int_{\varphi_i(U_i)} f(\varphi_i^{-1}(x)) g(\varphi_i^{-1}(x)) dx_1 \dots dx_m \quad (3.13)$$

Donada aquesta definició queda clar que podem integrar no només funcions sinó també m-formes.

Aquesta definició però val només localment, a cada carta U_i , i volem expandir-la a tota la varietat, notem que $f(p) = \sum_i \epsilon_i(p) f(p) = \sum_i f_i(p)$ llavors

$$\int_M fw = \sum_i \int_{U_i} f_i w \quad (3.14)$$

que serà la nostra definició d'integral a una varietat

3.7 Teorema d'Stokes

Sigui ara N una subvarietat de M incrustada pel mapa f i considerem una forma volum w a M $\rightarrow f^* w$ és una forma volum a N, que per tant és orientable. Si M té frontera definida per $x^m = 0$, és una subvarietat i és orientable

Teorema 3 Teorema d'Stokes: Si M és una varietat diferenciable compacta amb frontera i w és una $(m-1)$ -forma \rightarrow

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w \quad (3.15)$$

Sigui M dotada de mètrica $g \rightarrow w = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ és una forma volum, és la forma volum que utilitzarem sempre.

Si canviem de coordenades veiem com canvia la nostra forma volum

$$w = \sqrt{\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}\right)} \frac{\partial x^1}{\partial y_1^\alpha} dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^m}{\partial y^{\alpha_m}} dy^{\alpha_m} = \sqrt{|g|} |J^{-1}| J dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m = \pm \sqrt{|g|} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m \quad (3.16)$$

on el signe depèn de l'orientació relativa entre les coordenades x^μ i y^α .

Aquesta forma volum es comporta bé, i és la privilegiada per la natura. Veiem ara la dualitat de Hodge

$$\Omega^r(M) \leftrightarrow \Omega^{m-r}(M) \quad (3.17)$$

Si tenim una mètrica podem escriure el mapa entre les r formes i les $m-r$ formes de forma explícita

$$*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \epsilon_{v_1 \dots v_{m-r}}^{1 \dots r} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{m-r}} \quad (3.18)$$

aquest mapa defineix la dualitat de Hodge.

Si $w \in \Omega^r(M)$ i $w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ llavors $*w = \frac{\sqrt{|g|}}{r!(m-r)!} e^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_{m-r}} w_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_r}$.

Es demostra que $(*)^2 = \pm 1$ segons m, r i la signatura de la mètrica.

Calculem la dualitat de Hodge d'una constant

$$*1 = \frac{\sqrt{|g|}}{m!} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \quad (3.19)$$

Siguin w, η dues r -formes $\rightarrow w \wedge * \eta = \eta \wedge *w$ és una m forma.

Ara que em vist la dualitat de Hodge retornem al teorema d'Stokes. $w \in \Omega^{m-1}(M) \rightarrow *w = \tilde{w}$ és una 1-forma.

Sigui v el camp vectorial dual i M tingui frontera ∂M , la frontera ve donada per l'equació $x^m = 0$, defineix l'hipersuperficie $\partial M = \zeta$, els vectors normals a l'hipersuperficie s'escriuen $l = f(x) g^{\mu\nu} (\partial_\mu N) \partial_\nu$. Per exemple, per l'hipersuperficie $x^3 = 0$

$$l = f(x) \delta^{\mu\nu} (\partial_\mu x^3) \partial_\nu = f(x) \delta^{33} \partial_3 = f(x) \partial_3 \quad (3.20)$$

Si l no és nul llavors $n = \frac{l}{\|l\|}$.

Si n és un vector normal - n és l'altre. Ara tenim tots els ingredients per escriure el teorema d'Stokes

$$\int_M d^m x \nabla_\mu (\sqrt{|g|} v^\mu) = \int_{\partial M} d^{m-1} x \sqrt{h} (v \cdot n) \quad (3.21)$$

on h és la mètrica induida a ∂M , $h = f^* g$.

3.8 Teoria de Yang–Mills

Veiem el significat físic de la dualitat de Hodge a través de l'electromagnetisme. Considerem el corrent

$$J^\mu = (\rho, \vec{J}),$$

i sigui J la 1-forma corresponent. Les equacions de Maxwell es poden escriure com

$$d*F = \frac{1}{4\pi} *J. \quad (3.22)$$

L'acció associada és

$$S = -\frac{1}{8\pi} \int_M F \wedge *F + \int_M A \wedge *J, \quad (3.23)$$

que en components pren la forma

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int_M d^m x \sqrt{|g|} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \int_M d^m x \sqrt{|g|} A_\mu J^\mu. \quad (3.24)$$

Extenem ara l'electromagnetisme a teories de gauge no abelianes, com ara $U(1)$ (abeliana) o $SU(N)$ (no abeliana), on en general $[A, A] \neq 0$. Definim la derivada covariant

$$d_A = d + [A, \cdot],$$

i el camp de forces (curvatura) associat

$$F_A = dA + A \wedge A.$$

Aquesta curvatura satisfà la identitat de Bianchi

$$d_A F_A = 0, \quad (3.25)$$

i, en absència de fonts, l'equació del moviment

$$d_A * F_A = 0. \quad (3.26)$$

Aquesta extensió no abeliana de l'electromagnetisme defineix la teoria de Yang–Mills. La seva acció és

$$S_{YM} = \frac{1}{2g_{YM}^2} \int_M \text{Tr}(F_A \wedge *F_A) + \frac{\theta_{YM}}{8\pi^2} \int_M \text{Tr}(F_A \wedge F_A). \quad (3.27)$$

3.9 Acció d'Einstein-Hilbert

L'acció de la que deriven les equacions d'Einstein és l'acció de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_M *(R - 2\Lambda) = \frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^m x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (3.28)$$

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^m x [\delta \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu})] \quad (3.29)$$

veiem variació per variació $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{\sqrt{-g}}$, utilitzant el fet que per una matriu qualsevol $\log(\det(g_{\mu\nu})) = \text{Tr}(\log(g_{\mu\nu}))$ llavors podem escriure

$$\frac{1}{g} \delta g = \text{Tr}\left(\frac{1}{g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu}\right) = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{gg^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \quad (3.30)$$

Veiem ara quant val la variació de la mètrica inversa, fent servir el fet que $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ tenim $0 = \delta g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} + g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\rho} \rightarrow \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\delta} \delta g_{\mu\delta}$ llavors

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^m x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R - 2\Lambda) - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \quad (3.31)$$

d'on obtenim les equacions d'Einstein $0 = G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}$. Calculem ara la variació del tensor de Ricci

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \delta(\partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\delta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\delta - \Gamma_{\nu\delta}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\delta) \\ &= \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \delta \Gamma_{\alpha\delta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\delta + \Gamma_{\alpha\delta}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\delta - \delta \Gamma_{\nu\delta}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\delta - \Gamma_{\nu\delta}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\delta \end{aligned} \quad (3.32)$$

ja hem vist com si bé els símbols de Christoffel no són tensors la seva diferència si que és un tensor $\rightarrow \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ és un tensor

$$\nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\delta}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\delta - \delta \Gamma_{\nu\delta}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\delta - \Gamma_{\alpha\nu}^\delta \delta \Gamma_{\mu\delta}^\alpha$$

llavors podem reescriure la variació del tensor de Ricci $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha$ i finalment

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_M \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^m x = \frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^m x \sqrt{-g} \nabla_\alpha v^\alpha \neq 0 \quad (3.33)$$

amb $v^\alpha = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\beta}^\beta$. El fet que la variació de l'accio no s'anula indica un problema variacional: l'accio d'Einstein–Hilbert no està ben definida en presència d'una frontera, ja que apareixen termes de contorn no desitjats. Pel teorema d'Stokes, si la varietat té frontera

$$\frac{1}{16\pi G_N} \int_M d^m x \sqrt{-g} \nabla_\alpha v^\alpha = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\partial M} d^{m-1} x \sqrt{|h|} n^\alpha v_\alpha \quad (3.34)$$

n és la normal i $h_{\mu\nu}$ la mètrica induida.

Aprofitant que la derivada covariant de la mètrica és nul · la podem calcular fàcilment la variació de $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\nabla_\mu\delta g_{\nu\delta} + \nabla_\nu\delta g_{\mu\delta} - \nabla_\delta\delta g_{\mu\nu})$$

i ara podem calcular v^α

$$\begin{aligned} v^\alpha &= g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\beta}^\beta \\ &= g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\nabla_\mu\delta g_{\nu\delta} + \nabla_\nu\delta g_{\mu\delta} - \nabla_\delta\delta g_{\mu\nu}) \\ &\quad - g^{\mu\alpha}\frac{1}{2}g^{\beta\rho}(\nabla_\mu\delta g_{\beta\rho} + \nabla_\beta\delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\beta}) \\ &= g^{\alpha\delta}(\nabla^\nu\delta g_{\nu\delta} - \nabla_\delta(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Llavors

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\partial M} d^{m-1}x \sqrt{|h|} n^\alpha v_\alpha &= \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\partial M} d^{m-1}x \sqrt{|h|} n^\alpha g_{\alpha\delta} (\nabla^\nu\delta g_\nu^\delta - \nabla^\delta(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})) \\ &= \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\partial M} d^{m-1}x \sqrt{|h|} n^\alpha (\nabla^\nu\delta g_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})) \\ &= \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\partial M} d^{m-1}x \sqrt{|h|} n^\alpha g^{\mu\nu} (\nabla_\mu\delta g_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{3.36}$$

I suposem per hipòtesis que $= 0$, llavors podem aprofitar per sumar 0 a la expressió $g^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu sgn(n^2) = h^{\mu\nu} \rightarrow$

$$= \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\partial M} d^{m-1}x \sqrt{|h|} n^\alpha h^{\mu\nu} [\nabla_\mu\delta g_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu}] \tag{3.37}$$

notem que donat un vector v , $h_{\mu\nu}$ el projecta a la frontera

$$h(v, n) = h_{\mu\nu}v^\mu n^\nu = g_{\mu\nu}v^\mu n^\nu - n_\mu n_\nu sgn(n^2)v^\mu n^\nu = v_\mu n^\mu - n_\mu v^\mu = 0 \tag{3.38}$$

estem suposant que la frontera ∂M no sigui de tipus llum.

Si v, w són vectors a ∂M

$$h(v, w) = g_{\mu\nu}v^\mu w^\nu - n_\mu n_\nu sgn(n^2)v^\mu w^\nu = g(v, w) \tag{3.39}$$

Donat que en el principi variacional s'assumeix que la variació a la frontera és nul · la $\delta g_{\mu\nu}|_{\text{frontera}} = 0$, llavors la nostre variació és redueix a

$$\frac{1}{16\pi G_N} \int_{\partial M} d^{m-1}x \sqrt{|h|} n^\alpha h^{\mu\nu} [-\nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})] \tag{3.40}$$

Gibbons i Hawking resolen el problema que envolta l'acció afegint un terme de frontera adequat, que no afecta les equacions d'Einstein, que sabem que són correctes.

La curvatura extrínseca de la frontera és

$$k = h^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu.$$

La seva variació ve donada per

$$\delta k = \delta h^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu + h^{\mu\nu}(\delta\nabla_\mu)n_\nu + h^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta n_\nu).$$

Aquesta expressió es pot simplificar com

$$\delta k = -h^{\mu\nu}n_\delta\delta\Gamma_{\mu\nu}^\delta = h^{\mu\nu}n^\rho\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}.$$

El terme de frontera de Gibbons–Hawking és

$$S_{GH} = \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial M} d^{m-1}x \sqrt{|h|} k. \tag{3.41}$$

Aquest terme és vàlid tant per a fronteres de tipus espai com de tipus temps.

L'acció total és, finalment,

$$S_{\text{tot}} = S_{EH} + S_{GH}.$$

3.10 Vectors de Killing

Considerem un camp vectorial X a M ,

$$X = x^\mu e_\mu,$$

de manera que

$$\frac{dx^\mu(c(t))}{dt} = x^\mu(c(t)),$$

amb condicions inicials $x^\mu(c(0)) = x_0^\mu$.

La solució que passa per x_0^μ s'anomena corba integral de X .

El conjunt de totes les corbes integrals és el que anomenem flux del camp vectorial X , δ , que constitueix un mapa

$$\delta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M. \quad (3.42)$$

Per comoditat, amb $t \in (-\infty, \infty)$, el flux pren un punt de la varietat i un temps t i ens dona un altre punt de la varietat $\delta^\mu(t, x_0)$.

Si prenem

$$\delta^\mu(t, \delta^\nu(s, y_0)) = \delta^\mu(t + s, y_0),$$

on s parametriza un altre conjunt de corbes, tenim llavors una regla de composició.

Un exemple de flux és el flux hamiltonià. L'espai de fases és una varietat de dimensió $2n$, amb coordenades (q^μ, p_μ) , i definim l'Hamiltonià $H \in \mathcal{F}(M)$. El camp vectorial hamiltonià serà

$$X = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial H}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial p^\mu}, \quad (3.43)$$

i el flux associat a X s'anomena flux hamiltonià.

A cada t fixat, el flux δ_t defineix un difeomorfisme de M . En variar t , δ_t defineix un grup a un paràmetre perquè satisfà

1. $\delta_0 = \text{id}$,
2. $\delta_t \circ \delta_s = \delta_{t+s}$,
3. $\delta_{-t} = (\delta_t)^{-1}$.

És un grup abelià.

Considerem ara el difeomorfisme infinitesimal f generat pel camp vectorial X i calculem el pullback f^*g en coordenades locals:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x_0 + \epsilon x) \frac{\partial x^\mu(x_0 + \epsilon x)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu(x_0 + \epsilon x)}{\partial x^\beta} &= g_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \\ &+ \epsilon \left[x^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + g_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \delta_\beta^\nu + g_{\mu\nu} \partial_\beta x^\nu \delta_\alpha^\mu \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= g_{\alpha\beta} + \epsilon \left[x^\rho \partial_\rho g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} \partial_\alpha x^\mu + g_{\alpha\nu} \partial_\beta x^\nu \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.44)$$

El terme d'ordre ϵ és

$$\nabla_\alpha x_\beta + \nabla_\beta x_\alpha = \partial_\alpha x_\beta + \partial_\beta x_\alpha - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda x_\lambda.$$

Per tant, la variació de la mètrica sota el difeomorfisme és

$$\delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha x_\beta + \nabla_\beta x_\alpha. \quad (3.45)$$

Definició 21 Les isometries són els difeomorfismes que preserven la mètrica:

$$f^*g(p) = g(f(p)) \iff \nabla_\mu x_\nu + \nabla_\nu x_\mu = 0.$$

On $X = x^\mu \partial_\mu$ és el camp vectorial que genera el difeomorfisme. Aquests camps vectorials s'anomenen vectors de Killing.

En l'espai de Minkowski les connexions de Christoffel són nul·les,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha x_\beta + \partial_\beta x_\alpha = 0.$$

L'equació de Killing es redueix a la forma plana i la seva solució general és lineal en les coordenades:

$$x_\alpha = a_\alpha + \omega_{\alpha\beta} x^\beta,$$

on

- $a_\alpha \in \mathbb{R}^m$ són constants \rightarrow translacions,
- $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ són constants antisímetriques \rightarrow rotacions i boosts.

Substituint:

$$\partial_\alpha x_\beta = \omega_{\beta\alpha} \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha x_\beta + \partial_\beta x_\alpha = \omega_{\beta\alpha} + \omega_{\alpha\beta} = 0,$$

com cal.

Per tant, el nombre total de generadors de simetria de Minkowski és:

$$m \text{ translacions} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ rotacions/boosts} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Aquest conjunt correspon al grup de Poincaré, a més, és el número màxim d'isometries d'una varietat m -dimensional, Minkowski és per tant màximament simètric.

Les isometries formen un grup, es pot demostrar que si X, Y són Killing, llavors $aX + bY$ són Killing i $[X, Y]$ encara és Killing. Llavors Killing tanquen una àlgebra de Lie.

Notem que si $g_{\mu\nu}$ no depèn de la coordenada $y \rightarrow \partial_y$ és de Killing. Notem també que si X és de Killing i γ geodèsica amb vector tangent $v \rightarrow v_\mu x^\mu$ es conserva al llarg de la geodèsica.

$$\nabla_\nu(v^\mu x_\mu) = v^\nu \nabla_\nu(v^\mu x_\mu) = v^\nu (\nabla_\nu v^\mu) x_\mu + v^\nu v^\mu \nabla_\nu x_\mu = 0 \quad (3.46)$$

anàlogament $T^{\mu\nu} x_\mu \equiv J^\nu$

$$\nabla_\nu J^\nu = (\nabla_\nu T^{\mu\nu}) x_\mu + T^{\mu\nu} \nabla_\nu x_\mu = 0 \quad (3.47)$$

en definitiva els vectors de Killing ens ajuden a construir quantitats conservades al llarg del moviment.

Existeix també el tensor de Killing $K_{\mu_1 \dots \mu_n}$ totalment simètric tal que $\nabla_{(\nu} K_{\mu_1 \dots \mu_n)} = 0$.

No està associat a isometries però $v^{\mu_1 \dots \mu_k} k_{\mu_1 \dots \mu_k}$ es conserva al llarg de la geodèsica γ amb vector tangent v .

3.11 Variació de les accions

Considerem una acció S definida a partir d'una densitat lagrangiana \mathcal{L} i fem la variació respecte d'un camp vectorial X^μ o un difeomorfisme infinitesimal:

$$\delta_X S = \int d^4x \delta_X (\sqrt{-g} \mathcal{L}) \quad (3.48)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + (\text{termes de frontera}) \right), \quad (3.49)$$

on $T^{\mu\nu}$ és el tensor energia-impuls associat. Quan la variació és induïda per un difeomorfisme infinitesimal generat per X^μ , obtenim les equacions de conservació i els corrents associats.

Per a un camp escalar ϕ amb acció

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right),$$

les equacions del moviment són

$$\square \phi - V'(\phi) = 0, \quad \text{on} \quad \square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu).$$

El tensor energia-impuls associat és

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Per un volum V amb frontera ∂V , el teorema de la divergència dóna:

$$\int_V d^4x \nabla_\mu J^\mu = \int_{\partial V} d\Sigma_\mu J^\mu.$$

Si la contribució a l'infinit és nul·la, la càrrega associada Q es conserva:

$$Q = \int_{\Sigma_t} d^3x J^0, \quad \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Si $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, aleshores $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$, i la simetria/antisimetria implica identitats de conservació. Per al tensor energia-impuls en un espai-temps corbat general sense vectors de Killing:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

no garanteix càrregues conservades globals.

Camp escalar lliure Acció en espai de Minkowski:

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right),$$

equacions del moviment:

$$(\square + m^2)\phi = 0,$$

i tensor energia-impuls:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right).$$

Camp electromagnètic Acció:

$$S[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Les equacions de Maxwell són:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{en buit}), \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (\text{amb corrent}).$$

Tensor energia-impuls:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^\mu_\lambda F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right).$$

Per un camp escalar:

$$\delta S = \int d^4x [\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) + \sqrt{-g} m^2 \Phi] \delta \Phi.$$

Per un camp electromagnètic:

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} (-\nabla_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu) + \text{termes de frontera.}$$

Imposant $\delta S = 0$ obtenim les equacions del moviment corresponents.

3.12 Solució d'Schwarzschild

Comencem considerant el problema en el buit i amb simetria esfèrica

Teorema 4 Teorema de Birkhoff: En cada dimensió l'única solució de l'equació d'Einstein en el buit ($R_{\mu\nu} = 0$ a simetria esfèrica) és la solució d'Schwarzschild

Considerem la varietat $M = S^2$, la 2-esfera, amb grup d'isometries

$$\text{Iso}(S^2) \simeq SO(3).$$

La seva àlgebra de Lie és

$$\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2).$$

Existeixen tres camps vectorials de Killing $\{X_i\}_{i=1}^3$ que tanquen aquesta àlgebra, és a dir,

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k,$$

on ε_{ijk} és el símbol de Levi-Civita.

Si disposem de tres vectors de Killing que tanquen l'àlgebra $\mathfrak{su}(2)$, el conjunt de les seves línies integrals defineix una subvarietat immersa de M .

Tenim un exemple en Minkowski $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + dt dr(t, r)$. Per simetria sabem que la mètrica ha de tenir la forma $ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2d\Omega_r$ i per l'equació d'Einstein $f = g^{-1} = (1 - \frac{r_s}{r})$ amb $r_s = 2MG_N$.

Amb la solució d'Schwarzschild tenim, dues singularitats, $r = 0$ i $r = r_s$.

La singularitat $r = r_s$ no és física, obedeix només a la tria de coordenades, la singularitat $r = 0$ en canvi si que constitueix una singularitat de l'espai temps, una singularitat de curvatura.

Això ho podem veure amb el comportament dels escalars de curvatura, que són invariants sota els canvis de coordenades

$$R_{\mu\nu\rho\delta} R^{\mu\nu\rho\delta} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (3.50)$$

La solució d'Schwarzschild té una singularitat de curvatura a $r = 0$, el centre del forat negre és una singularitat per a la nostra teoria, molt a prop de la singularitat, al centre del forat negre, la teoria d'Einstein no acaba de funcionar correctament.

Notem que Schwarzschild és la solució al buit per l'exterior de qualsevol cos esfèric, no només forats negres, estrelles, planetes...

A l'interior d'una estrella, on tenim matèria tindrem un altre tipus de solucions.

Fent el límit no relativístic, és a dir, de camp dèbil, i comparant amb el potencial Newtonià, per una font puntiforme de massa M ($\nabla^2\phi = 4\pi G_N\rho$) s'obté $r_s = 2GM$.

En definitiva escrivim la mètrica d'Schwarzschild

$$ds^2 = (1 - \frac{r_s}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - \frac{r_s}{r})} + r^2d\Omega^2 \quad (3.51)$$

El vector ∂_t és de Killing, i és un vector tipus temps a l'infinít. Direm llavors que la mètrica és estacionària. La mètrica estacionaria més general és

$$ds^2 = -f(x_i)dt^2 + h_{ij}(x_i)dx^i dx^j + g_i(x_i)dt dx^i \quad (3.52)$$

Si a més la mètrica és invariant sota $t \rightarrow -t$ → mètrica estàtica.

En l'espai-temps de Schwarzschild existeixen òrbites circulars per a partícules massives amb moment angular. Aquestes òrbites són estables si

$$R \geq 3r_s,$$

i inestables si

$$\frac{3}{2}r_s \leq R < 3r_s.$$

El radi $R = 3r_s$ correspon a l'ISCO (*Innermost Stable Circular Orbit*).

A $R = \frac{3}{2}r_s$ existeix l'esfera fotònica, on es troba l'única òrbita circular possible per a partícules sense massa. També existeixen òrbites no circulars, descrites per un potencial efectiu del tipus

$$V(r) = C_1 + \frac{C_2}{r} + \frac{C_3 L^2}{r^2} + \dots$$

Les correccions relativistes donen lloc a la precessió del periheli,

$$\alpha = \frac{r_s}{a(1 - \varepsilon^2)}.$$

Considerem ara la deflexió dels raigs de llum. En el límit de camp dèbil,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Per a un fluid perfecte a pressió nul·la,

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, 0, 0, 0),$$

la mètrica pren la forma

$$ds^2 = -(1 + 2\phi) dt^2 + (1 - 2\phi) dx_i dx^i, \quad (3.53)$$

amb $\phi \sim \rho$. Per a una font puntiforme, l'angle de deflexió és

$$\beta = \frac{r_s}{b},$$

on b és el paràmetre d'impacte.

Finalment, discutim el red-shift gravitacional. Considerem un interval de temps propi

$$\Delta\tau_A = \sqrt{|g_{00}(r_A)|} \Delta t = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_A}} \Delta t.$$

Per a un observador situat a $r_B > r_A$ es té

$$\Delta\tau_B > \Delta\tau_A \Rightarrow \lambda_B > \lambda_A,$$

la qual cosa correspon a un red-shift gravitacional. En canvi, en apropar-nos a la font gravitacional s'observa un blue-shift.

4 Forats negres

4.1 Col · lapse gravitacional

Si $M \leq M_\odot$ (límit de Chandrasekhar) es forma una nana blanca (pressió de degeneració dels electrons).

Si $1.4M_\odot \leq M \leq 3 - 4M_\odot$ es formen estrelles de neutrons (pressió de degeneració dels neutrons).

Un cop superat aquest darrer límit (límit de Oppenheimer-Volkhoff) es forma un forat negre.

Considerem l'exemple del col · lapse d'una esfera de pols $R = R(t)$.

Com és una esfera de pols l'única força serà la gravetat i la trajectòria serà una geodèsica de tipus temps a angle fixat

$$-d\tau^2 = ds^2 = -(1 - \frac{r_s}{R})dt^2 + (\frac{dR}{dt})^2 \frac{dt^2}{(1 - \frac{r_s}{R})} \quad (4.1)$$

Si v^μ és el vector tangent a aquella geodèsica $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\frac{dt}{d\tau}, \dots, \dots)$ i $k^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0) \rightarrow v^\nu \nabla_\nu (v^\mu k_\mu) = 0$ llavors $v^\mu k_\mu = v^\mu k^\nu g_{\mu\nu} = v^0 g_{00} = \frac{dt}{d\tau} g_{00} = -\epsilon$ que és la energia per unitat de massa es conserva al llarg de la geodèsica.

$$1 = (\frac{dt}{d\tau})^2 [(1 - \frac{r_s}{R}) - \frac{\dot{R}^2}{1 - \frac{r_s}{R}}] = [(1 - \frac{r_s}{R}) - \frac{\dot{R}^2}{(1 - \frac{r_s}{R})}] \frac{\epsilon^2}{(1 - \frac{r_s}{R})^2} \quad (4.2)$$

aillant \dot{R}^2 trobem

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{\epsilon^2} (1 - \frac{r_s}{R})^2 [-(1 - \frac{r_s}{R}) + \epsilon^2] \quad (4.3)$$

els 0 d'aquesta equació són $R = r_s$ i $R = \frac{r_s}{1 - \epsilon^2} = R_{max}$

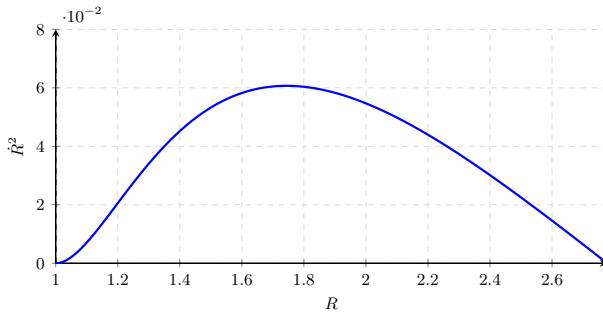


Figura 6: Forma de \dot{R}^2 entre l'horitzó i el radi màxim

la contracció assoleix r_s a un temps infinit.

El que veiem és un col · lapse molt ràpid a un radi pròxim a r_s que llavors s'alenteix enormement, no acaba arribant a r_s . En el temps propi τ

$$(\frac{dR}{d\tau})^2 = (\frac{dR}{dt})^2 (\frac{dt}{d\tau})^2 = [\frac{r_s}{R} - 1 + \epsilon^2] \quad (4.4)$$

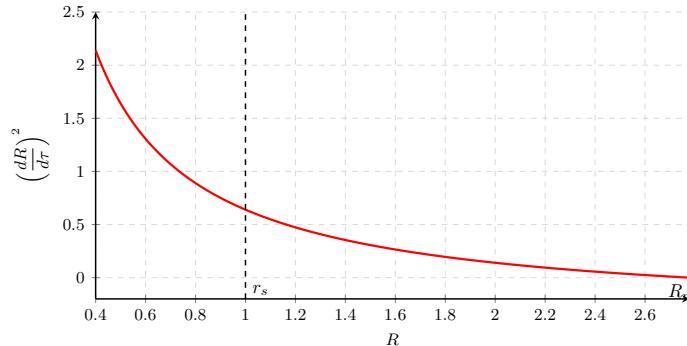


Figura 7: Evolució de $(dR/d\tau)^2$ amb el radi

4.2 Zoologia dels forats negres

Els forats negres són fonamentalment de 3 tipus

- De col·lapse estelar, la seva massa està limitada inferiorment pel límit d'Oppenheimer i superiorment per fragmentacions $3 - 4M_{\odot} \leq M \leq 100M_{\odot}$
- Forats negres supermassius, formats per col·lapses d'estructures més massives com clústers, es troben al centre de moltes galàxies $M \sim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$
- Forats negres primordials(PBM), es foren a l'univers primordial per flutuacions al plasma primordial. Poden donar lloc a forats negres de qualsevol massa, un forat negre suficientment petit a dia d'avui hauria estat evaporat per la radiació de Hawking. Podrien contribuir a la matèria fosca, aquest tipus de forats negres no han estat observats.

Veiem ara com s'han determinat experimentalment els forats negres

- De manera indirecta, el moviment d'estrelles veïnes al centre de la galàxia no era compatible amb espai buit, si que ho era amb un forat negre supermassiu al centre de la galàxia
- Ones gravitacionals del merging de forats negres, dos forats negres veïns espiralegen l'un entorn a l'altre i s'acaben unint en un esdeveniment dramàtic en que els forats negres perdren molta energia en forma d'ones gravitacionals, també s'ha observat el merging de forats negres amb estrelles de neutrons
- Imatges directes, mesuresm la radiació electromagnètica, fem "fotografies", reconstruccions de les imatges.

4.3 Radi de la shadow

La major part de la radiació a trobem al disc d'acreixement que es troba a una distància superior al ISCO respecte al centre del forat negre.

La rotació del disc d'acreixement provoca una zona més brillant respecte a les altres, en el M87 en veiem 3, que en realitat són la mateixa font, però en girar tant ràpid no les diferencien.

En realitat la forma del disc d'acreixement és diferent, però la radiació que ens arriba a nosaltres ve desviada.

Veiem com obtenir dades de les imatges, considerem el radi de la shadow(part fosca) i estudiem les geodèsiques de tipus llum en la geometria d'Schwarzschild

$$\delta\tau = \int d\lambda \delta\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

aproximant el shadow com circular i aprofitant la simetria esfèrica podem prendre un angle qualsevol $\theta = \frac{\pi}{2}$ llavors

$$\mathcal{L} = -(1 - \frac{R_s}{r})\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{(1 - \frac{R_s}{r})} + r^2\dot{\varphi}^2$$

Determinem les constants del moviment

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \rightarrow -2(1 - \frac{R_s}{r})\dot{t} = -2\epsilon \rightarrow \dot{t}^2 = \frac{\epsilon^2}{(1 - \frac{R_s}{r})^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 2r^2\dot{\varphi} = 2L \rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{r^4}$$

ara fent servir les constants del moviment

$$(\frac{dr}{d\varphi})^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\varphi}^2} = (1 - \frac{R_s}{r})[(1 - \frac{R_s}{r})\frac{\dot{t}^2}{\dot{\varphi}^2} - r^2] = (1 - \frac{R_s}{r})[\frac{\epsilon^2 r^2}{(1 - \frac{R_s}{r})L^2} - 1]r^2 \quad (4.5)$$

La radiació que forma la imatge és d'una font externa al forat negre i és aquella que passa tangent a $R = \frac{3}{2}R_s$

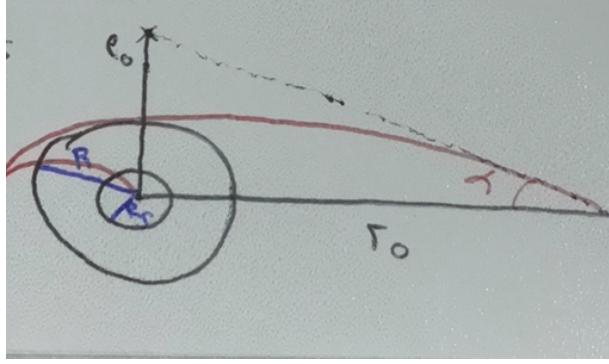


Figura 8: Diagrama que mostra la radiació de la font externa al forat negre

també podria escapar i arribar a nosaltres l'energia ortogonal a l'esfera fotònica, no hi ha però cap radiació.

Pel radi R , l'esfera fotònica, l'expressió anterior es fa 0 i tenim

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon^2}{L^2} &= \frac{1 - \frac{R_s}{r}}{R^2} \equiv h^{-2}(r) \\ \left(\frac{dr}{d\varrho}\right)^2 &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)r^2 \left[\frac{h^2(r_0)}{h^2(R)} - 1\right] = \cotg(\alpha)\end{aligned}$$

Fent trigonometria

$$\tg^2(\alpha) = \left(\frac{d\varrho \sqrt{g_{\varrho\varrho}}}{dr \sqrt{g_{rr}}}\right)^2 = \left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2 r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right) =$$

considerant $r_0 \gg R_s$ i $\alpha \sim 0 \sim \frac{r_0}{r_0}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dr}{d\varrho}\right)^2 &= r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0} \cotg^2(\alpha)\right) \\ \rightarrow \frac{h^2(r_0)}{h^2(R)} &= \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + 1 = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \sim \frac{1}{\alpha^2} = \frac{r_0^2}{\varrho_o^2}\end{aligned}$$

finalment trobem

$$\varrho_0 = r_o \frac{h(R_s)}{h(r_0)} = r_0 \frac{R_s}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_0}}} \frac{1 - \frac{R_s}{r_0}}{R_s} = R_s \sqrt{\frac{27}{4}} \quad (4.6)$$

4.4 Coordenades d'Eddington Finkelstein

Busquem unes coordenades en que la aparent singularitat a $r = R_s$ desaparegui

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} + r^2 d\Omega_i \quad (4.7)$$

Prenem una geodèsica radial a $ds^2 = 0 = d\Omega_i \rightarrow dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2} \equiv dr_+^2$. Llavors la coordenada tortuga s'escriu

$$r_+ = r + R_s \log \left| \frac{r - R_s}{R_s} \right| \quad (4.8)$$

Amb $r_+ \in (-\infty, \infty)$ i $r \in (R_s, \infty)$, d'aquesta manera ens queda

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)[dt^2 - dr_+^2] + r^2 d\Omega \quad (4.9)$$

Definim ara les coordenades d'Eddington Finkelstein

- sortints : $u = t - r_+$
- entrants : $v = t + r_+$

Amb les quals la mètrica ens queda per les entrants

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega_r \quad (4.10)$$

i per les sortints

$$ds^2 = -(1 - \frac{R_s}{r})du^2 - 2dudr + r^2d\Omega_r \quad (4.11)$$

Considerem la mètrica en v, per corbes causals tindrem $ds^2 \leq 0$ i per $r \leq R_s$

$$2dudr = -[-ds^2 - (1 - \frac{R_s}{r})dv^2 + r^2d\Omega_r] \leq 0 \quad (4.12)$$

és a dir per corbes dirigides al futur $dv > 0 \rightarrow dr < 0$. Qualsevol cos dirigit al futur que es troba a $r < R_s$ evoluciona en el futur cap a $r = 0$ en un temps propi finit.

Fent el mateix discurs amb la mètrica en u les corbes causals a $r < R_s$ dirigides al futur tenen totes $dr > 0$, qualsevol cos s'allunyarà de $r = 0$.

La mètrica en v i la mètrica en u fora del radi de Schwarzschild descriuen la mateixa física, dins el radi d'Schwarzschild són diferents, v descriu els forats negres i u descriu els forats blancs, inversions temporals dels forats negres.

4.5 Forats blancs

- Termòdinàmicament improbables:

Els forats negres són objectes d'alta entropia, llavors la segona llei de la termòdinàmica afavoreix el col·lapse de la matèria com estresos de baixa entropia en forats negres. La reversió temporal d'aquest procés per tant és molt poc afavorida. Correspon a condicions inicials molt específiques.

- Inestables:

Pertorbant lleugerament un forat negre la pertorbació relaxa i a temps llargs dona lloc a un forat negre lleugerament diferent.

En canvi, si pertorbem en el temps la mètrica del forat blanc la pertorbació creix amb el temps i acaba per destruir completament la mètrica donant lloc a un altre completament diferent.

4.6 Extensió de Kruskal

Considerem ara les coordenades de Kruskal

- $U = -e^{-\frac{u}{2R_s}} < 0$
- $V = e^{\frac{v}{2R_s}}$

llavors

$$UV = -e^{\frac{1}{2R_s}(v-u)} = -e^{\frac{1}{2R_s}(t+r_+ - t+r_+)} = -e^{\frac{1}{R_s}(r+R_s \log(\frac{r-R_s}{R_s}))} = -e^{\frac{r}{R_s}} \left(\frac{r-R_s}{R_s} \right) \quad (4.13)$$

quan $r = R_s \rightarrow U = 0 \quad V = 0$ i quan $r = 0 \rightarrow UV = 1$. Derivant

$$dUdV = \frac{dudv}{4R_s^2} e^{\frac{1}{2R_s}(v-u)} \rightarrow dudv = 4R_s^2 dUdV e^{-\frac{r}{R_s}} \frac{R_s}{r-R_s} \quad (4.14)$$

inserint això a la nostra mètrica trobem finalment

$$ds^2 = -\frac{4R_s^3}{r} e^{\frac{-r}{R_s}} dUdV + r^2 d\Omega_2 \quad (4.15)$$

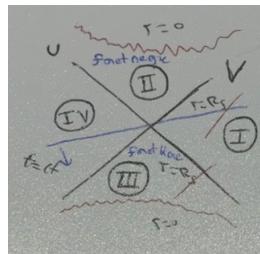


Figura 9: Diagrama de Kruskal

Les regions II I III estan cobertes per les coordenades d'Eddington-Finkelstein entrants i sortints respectivament. Les regions I i IV són anàlogues i representen l'exterior al radi d'Schwarzschild.

Anomenem el diagrama forat negre etern, doncs descriu un forat negre que existeix tant en el passat com en el futur. Kruskal és la màxima extensió analítica d'Schwarzschild, només queden singularitats a $r = 0$ que són singularitats de curvatura.

Cal dir que existeixen singularitats no eliminables que no són de curvatura. Diem que un expaitemps és geodèsicament incomplert i per tant singular si existeixen geodèsiques que s'aturen per paràmetres afins finits. Veiem com escriure el vector de Killing ∂_t en coordenades de kruskal

$$\partial_k = k = \frac{1}{2R_s}(V\partial_V - U\partial_U) \quad (4.16)$$

veiem com evoluciona

$$k^2 = -(1 - \frac{R_s}{r}) \quad (4.17)$$

és de tipus temps per $r > R_s$, de tipus espai per $r < R_s$ i nul per $r = R_s$, per tant, la singularitat de curvatura d'Schwarzschild és de tipus espai.

4.7 Hipersuperfícies nul · les

Sigui $\Sigma(x)$ una funció suau de les coordenades de l'expaitemps x^μ i considerem la família d'hipersuperfícies donada per

$$\Sigma(x) = \text{const.}$$

Els vectors normals a la hipersuperficie es defineixen com

$$\ell_\mu = F(x) \partial_\mu \Sigma,$$

on $F(x)$ és una funció escalar diferent de zero en un veïnatge de la hipersuperficie. La norma del vector normal és

$$\ell^2 = \ell_\mu \ell^\mu = F^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \Sigma \partial_\nu \Sigma.$$

Si $\ell^2 = 0$ sobre una hipersuperficie particular N de la família, diem que N és una *hipersuperficie nul · la*.

Exemple: La mètrica de Schwarzschild Considerem la mètrica de Schwarzschild en coordenades d'Eddington-Finkelstein entrants (v, r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega_2^2,$$

i prenem la hipersuperficie definida per

$$\Sigma(x) = r - 2M = 0.$$

Aleshores, el gradient és $\partial_\mu \Sigma = (0, 1, 0, 0)$ i el vector normal $\ell_\mu = F(x)(0, 1, 0, 0)$. La seva norma és:

$$\ell^2 = F^2 g^{rr} = F^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right).$$

Per a $r = 2M$, tenim $\ell^2 = 0$, la qual cosa demostra que $r = 2M$ és una hipersuperficie nul · la. En aquest cas, el vector normal a la superfície és $\ell = F \frac{\partial}{\partial v}$.

Propietats de les hipersuperfícies nul · les Sigui N una hipersuperficie nul · la amb normal ℓ_μ . Un vector t^μ és tangent a N si compleix $t^\mu \ell_\mu = 0$. Com que N és nul · la i $\ell_\mu \ell^\mu = 0$, el vector normal ℓ^μ és, al mateix temps, tangent a N .

Considerem una corba $x^\mu(\lambda)$ continguda en N la tangent de la qual és el vector normal:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \ell^\mu.$$

Proposició: Aquestes corbes són geodèsiques nul · les.

Demostració: Com que N és el membre $\Sigma = 0$ de la família $\Sigma = \text{const}$, tenim $\ell_\mu = F \partial_\mu \Sigma$. L'acceleració del vector és:

$$\begin{aligned}\ell^\nu \nabla_\nu \ell_\mu &= \ell^\nu \nabla_\nu (F \partial_\mu \Sigma) \\ &= (\ell^\nu \partial_\nu F) \partial_\mu \Sigma + F \ell^\nu \nabla_\nu \partial_\mu \Sigma.\end{aligned}$$

Usant la simetria de la connexió ($\nabla_\nu \partial_\mu \Sigma = \nabla_\mu \partial_\nu \Sigma$) i que $\ell_\mu \propto \partial_\mu \Sigma$, es pot demostrar que:

$$\ell^\nu \nabla_\nu \ell_\mu = (\ell \cdot \partial \ln |F|) \ell_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu (\ell^2) - (\partial_\mu \ln |F|) \ell^2.$$

Tot i que $\ell^2 = 0$ només sobre N , el fet que ℓ^2 sigui constant sobre N implica que el seu gradient $\partial_\mu (\ell^2)$ ha de ser proporcional a la normal ℓ_μ . Per tant:

$$\ell^\nu \nabla_\nu \ell_\mu = \alpha(x) \ell_\mu$$

per a alguna funció $\alpha(x)$ sobre N . Això prova que les corbes integrals de ℓ^μ són geodèsiques nul·les. Podem reescalar el vector normal $\ell^\mu \rightarrow f(x) \ell^\mu$ de manera que $\alpha(x) = 0$, aconseguint així que λ sigui un paràmetre afí:

$$\ell^\nu \nabla_\nu \ell^\mu = 0.$$

Definició 22 Les geodèsiques nul·les $x^\mu(\lambda)$ amb paràmetre afí λ , les tangents de les quals són normals a una hipersuperficie nul·la N , s'anomenen **generadors** de N .

4.8 Horitzons de Killing i gravetat superficial

Definició 23 Una hipersuperficie nul·la N és un horitzó de Killing d'un camp vectorial de Killing ξ^μ si, sobre N , el camp ξ^μ és normal a N .

Sigui ℓ^μ el vector normal nul a N escollit de manera que estigui afí-parametrat sobre la hipersuperficie:

$$\ell^\nu \nabla_\nu \ell^\mu = 0 \quad \text{sobre } N.$$

Atès que ξ^μ és normal a N , podem escriure la relació $\xi^\mu = f \ell^\mu$ per a alguna funció escalar f . Es defineix la **gravetat superficial** κ mitjançant l'equació:

$$\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = \kappa \xi^\mu \quad \text{sobre } N. \tag{4.18}$$

Aquesta definició és independent de l'elecció del normal ℓ^μ (excepte per un factor constant de normalització de ξ). La gravetat superficial κ es pot calcular mitjançant l'expressió:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \xi_\nu) (\nabla^\mu \xi^\nu) \Big|_N. \tag{4.19}$$

Proposició: La gravetat superficial κ és constant al llarg de cada òrbita de ξ sobre N .

Demostració: Utilitzant l'identitat de Killing $\nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\nu = R_{\nu\mu\rho}{}^\sigma \xi_\sigma$, es pot provar que per a qualsevol vector t tangent a l'horitzó, $t \cdot \partial \kappa^2 = 0$. En particular, triant $t = \xi$, veiem que κ és constant sobre les òrbites. Si l'horitzó és bifurcat (com en el cas de Kruskal), es demostra que κ és constant sobre tota la hipersuperficie N . Això constitueix la llei zero de la mecànica dels forats negres, sempre que es compleixi la condició dominant d'energia.

Exemple: Forat negre de Schwarzschild Considerem la mètrica de Schwarzschild en coordenades estàndard:

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + V^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad \text{on } V = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}.$$

El camp de Killing temporal és $\xi = \partial_t$. Per a un observador estàtic a prop de l'horitzó, l'acceleració pròpia és $a = \frac{GM}{r^2V}$. La gravetat superficial κ es pot interpretar com l'acceleració mesurada des de l'infinít, corregida pel factor de *redshift* V :

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow 2GM} (V \cdot a) = \lim_{r \rightarrow 2GM} \left(\sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \cdot \frac{GM}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}} \right) = \frac{GM}{(2GM)^2}.$$

Així, per a un forat negre de Schwarzschild:

$$\kappa = \frac{1}{4GM}.$$

4.9 Espaitemps de Rindler

L'estudi de l'espaietms de Rindler és fonamental per entendre la física prop de l'horitzó d'un forat negre. Considerem la mètrica de Rindler en $1 + 1$ dimensions:

$$ds^2 = -(\kappa x)^2 dt^2 + dx^2, \quad x > 0,$$

on $\kappa > 0$ és una constant escalar. Aquesta mètrica es pot obtenir de l'espaietms de Minkowski (T, X) mitjançant el canvi de coordenades:

$$T = x \sinh(\kappa t), \quad X = x \cosh(\kappa t).$$

Aquest canvi transforma la mètrica plana $ds^2 = -dT^2 + dX^2$ en la forma de Rindler. La regió $x > 0$ (que implica $X > |T|$) es coneix com la *falca de Rindler* (Rindler wedge), un dels quatre sectors en què els horitzons $X = \pm T$ divideixen l'espaietms de Minkowski.

L'horitzó de Killing El camp vectorial de Killing associat a la translació temporal és $\xi = \partial_t$. La seva norma és:

$$\xi^2 = g_{tt} = -(\kappa x)^2.$$

A la superfície $x = 0$, la norma s'anul·la ($\xi^2 = 0$), per tant, $x = 0$ és un **horitzó de Killing**. La gravetat superficial associada, calculada mitjançant $\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = \kappa \xi^\mu$, és precisament la constant κ .

Horitzons d'acceleració Considerem un observador que roman a una coordenada espacial fixa $x = a^{-1}$. La seva quadrivelocitat és $u^\mu = \xi^\mu / \sqrt{-\xi^2}$. La seva quadriacceleració es defineix com $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$. Atès que ξ és un camp de Killing, es pot demostrar que:

$$a^\mu = \frac{\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu}{-\xi^2}.$$

En coordenades de Rindler, la norma de l'acceleració pròpia és:

$$|a| = \sqrt{a_\mu a^\mu} = \frac{1}{x}.$$

Així, les línies d'univers amb $x = \text{const.}$ corresponen a observadors amb **acceleració pròpia constant**. Quan $x \rightarrow 0$, l'acceleració divergeix; per aquest motiu, l'horitzó de Rindler s'anomena també *horitzó d'acceleració*.

Interpretació de la gravetat superficial Tot i que l'acceleració pròpia $1/x$ divergeix a l'horitzó, l'acceleració mesurada respecte al temps de Rindler t roman finita. Si $d\tau$ és el temps propi de l'observador accelerat:

$$d\tau = \sqrt{-g_{tt}} dt = (\kappa x) dt \implies \text{accel. mesurada} = \frac{d\tau}{dt} \cdot |a| = (\kappa x) \cdot \frac{1}{x} = \kappa.$$

En l'espaietms de Rindler, un observador amb $x = \kappa^{-1}$ té una acceleració pròpia constant igual a κ . A diferència del cas de Schwarzschild, on κ està fixat per la normalització a l'infinít ($k^2 \rightarrow -1$), a Rindler el valor de κ és arbitrari i depèn de l'escala de t ($t \rightarrow \lambda t \implies \kappa \rightarrow \lambda^{-1}\kappa$).

Notem que prop de l'horitzó d'esdeveniments d'un forat negre de Schwarzschild ($r \approx 2M$), la mètrica pren localment la forma d'un producte entre l'espaietms de Rindler bidimensional i una 2-esfera de radi fix $2M$. Això permet aplicar els resultats de Rindler (com l'efecte Unruh) per derivar la temperatura de Hawking.

4.10 Termodinàmica dels forats negres

Podem estudiar el comportament de la QFT (*Quantum Field Theory*) de l'espai-temps d'un forat negre utilitzant integrals de camins euclidianos. En l'espai-temps de Minkowski això implica

$$t = i\tau \quad (4.20)$$

i continuar τ des de valors imaginaris fins a valors reals. En aquest cas, τ no és el temps propi en una línia de món sinó el "temps imaginari".

En els espai-temps de forats negres, això conduceix a una continuació de la mètrica de Schwarzschild a la mètrica euclidiana de Schwarzschild

$$dS_E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (4.21)$$

Per estudiar la regió propera a la singularitat $r = 2M$, fem

$$r - 2M = \frac{x^2}{8M} \quad (4.22)$$

per obtenir

$$ds_E^2 \approx (kx)^2 d\tau^2 + dx^2 + \frac{1}{4\kappa^2} d\Omega^2 \quad (4.23)$$

Podem veure que a prop de $r = 2M$, la mètrica és el producte del Rindler euclidiana i S^2 :

$$ds_E^2 = dx^2 + x^2 d(\kappa\tau)^2 \quad (4.24)$$

Si fem la identificació periòdica $\tau \sim \tau + \frac{2\pi}{\kappa}$, això és simplement E^2 en coordenades polars. Això significa que la singularitat a $r = 2M$ és simplement una singularitat de coordenades, sempre que $\tau \sim \tau + \frac{2\pi}{\kappa}$. Això implica que la integral funcional euclidiana s'ha de prendre sobre els camps $\phi(\vec{x}, t)$ que són periòdics en τ amb període $\frac{2\pi}{\kappa}$.

Llavors, la integral funcional euclidiana és

$$Z = \int [\mathbf{D}\phi] e^{-S_E[\phi]} \quad (4.25)$$

on $S_E = \int dt (-ip\dot{q} + H)$ és l'acció euclidiana.

Si la integral funcional es pren sobre camps periòdics en τ amb periodicitat $\hbar\beta$, llavors es pot escriure com

$$Z = \text{Tr}(e^{\hbar\beta H}) \quad (4.26)$$

Que és la funció de partició per a un sistema mecànic quàntic amb hamiltonià H a la temperatura T ($T = \frac{k_b}{\beta}$).

Com que per a Schwarzschild euclidiana $\hbar\beta = \frac{2\pi}{\kappa}$, una QFT només pot estar en equilibri a la següent temperatura:

$$T_H = \frac{\kappa\hbar}{2\pi k_b} \quad (4.27)$$

Això és la coneguda **temperatura de Hawking**; a qualsevol altra temperatura, Schwarzschild euclidiana té una singularitat cònica i, per tant, el sistema no està en equilibri. Si construim un forat negre petit la seva temperatura serà major. Quanta més temperatura més ràpid emeten radiació i s'evaporen. Per això no s'espera que poguem observar forats negres primordials de massa molt petita, doncs ja s'haurien evaporat.

Els forats negres astrofísics en canvi emeten radiació molt lentament el que no permet experimentalment observar la radiació de Hawking. Considerem ara la Llei de Tolmann

$$\sqrt{-g_{tt}(r)} T = \text{constant} \quad (4.28)$$

Notem que $T = \frac{1}{8\pi M}$ llavors

$$M = \frac{1}{8\pi T} = E \quad (4.29)$$

Aquesta relació porta a $c_v = \frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{1}{8\pi T^2} < 0$ La calor específica dels forats negres és negativa, el que vol dir que el sistema no està en equilibri tèrmic. Tenim l'inestabilitat de Jeans

Ara sabem que els forats negres són objectes termals amb capacitat per radiar energia. Què passa amb l'entropia?

Bekenstein va argumentar el següent: Suposem que els forats negres no tinguessin entropia; aleshores un objecte amb $S_{object} > 0$ cau dins del forat negre, i llavors $\Delta S_{total} < 0$, cosa que contradiu el segon principi de la termodinàmica. Per tant, hauríem d'esperar que un forat negre tingués una entropia S_{BH} tal que $S_{total} = S_{BH} + S_{object}$ i que $\Delta S_{total} \geq 0$.

Hawking va demostrar després que l'àrea d'un forat negre només pot créixer, $\Delta A \geq 0$, la qual cosa porta Bekenstein a proposar que l'entropia d'un forat negre és proporcional a la seva àrea:

$$S_{BH} = \frac{A}{4G} \quad (4.30)$$

Aquesta és la coneguda entropia de Hawking-Bekenstein.

El fet que la entropia sigui proporcional a l'àrea del forat negre i no pas el seu volum, implica que la superfície té els mateixos graus de llibertat que el volum, això serà el Principi Hologràfic. El principi hologràfic ens diu que una teoria de gravetat quàntica en un espai-temps asimptòticament $AdS_5 \times S^5$ és equivalent a una teoria conforme de camps sense gravetat a Minkowski 4D.

4.11 Diagrama de Carter-Penrose

Donat un espai-temps amb mètrica ds^2 si multipliquem la mètrica per un factor $\Lambda^2(x) \neq 0$

$$d\tilde{s}^2 = \Lambda^2(x)ds^2 \quad (4.31)$$

és una mètrica en que la natura del vector V(llum, temps espai) és la mateixa que en ds^2 . Aquesta és la idea del diagrama de Carter Penrose, un mapa que ens porti l'espai-temps a la pissarra mantenint l'estructura causal de l'espai-temps. Notem que en general $d\tilde{s}^2$ no és una solució de les equacions d'Einstein.

Veiem com podem escollir $\Lambda^2(x)$ per efectivament compactificar el nostre espai, partim de Minkowski 4D

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\Omega_r \quad (4.32)$$

introduïm

$$\begin{aligned} u &= t - r \\ v &= t + r \end{aligned}$$

amb $(u, v) \in (-\infty, \infty)$ i quan $r \gg 0 \rightarrow v \gg u$ fem ara el canvi

$$\begin{aligned} u &= \tan(\tilde{U}) \\ v &= \tan(\tilde{V}) \end{aligned}$$

amb $(\tilde{U}, \tilde{V}) \in (-\pi/2, \pi/2)$ i $\tilde{V} \gg \tilde{U}$.

Veiem com queda la nostra mètrica amb aquests canvis

$$ds^2 = \frac{1}{4\cos^2(\tilde{U})\cos^2(\tilde{V})}(-4d\tilde{U}d\tilde{V} + \sin^2(\tilde{U} - \tilde{V})d\Omega_r) \quad (4.33)$$

els infinits els trobem al prefactor, la resta ens queda una mètrica compacta i amb els infinits portats a finits, per tant escollim el factor conforme $\Lambda^2 = 4\cos^2(\tilde{U})\cos^2(\tilde{V})$.

Notem que en principi els punts $\tilde{U}, \tilde{V} = -\pi/2, \pi/2$ no estan inclosos en la nostra varietat, però un cop compatifiquem els podem incloure, expandint així $\tilde{U}, \tilde{V} \in [-\pi/2, \pi/2]$, llavors

$$d\tilde{s}^2 = -4d\tilde{U}d\tilde{V} + \sin^2(\tilde{U} - \tilde{V})d\Omega_r \quad (4.34)$$

veiem com es comporten els infinits:

- **Infinit espacial i_0 :**

- $r \rightarrow \infty$ amb $t = \text{constant}$
- Equivalentment: $u \rightarrow -\infty, v \rightarrow +\infty$
- En coordenades compactificades: $\tilde{U} = -\pi/2, \tilde{V} = \pi/2$

- **Infinit temporal futur i^+ :**

- $t \rightarrow +\infty$ amb $r = \text{constant}$
- $u \rightarrow +\infty, v \rightarrow +\infty$
- $\tilde{U} = \tilde{V} = \pi/2$

- **Infinit temporal passat i^- :**

- $t \rightarrow -\infty$ amb $r = \text{constant}$
- $u \rightarrow -\infty, v \rightarrow -\infty$
- $\tilde{U} = \tilde{V} = -\pi/2$

- **Infinit nul futur I^+ (o ζ^+):**

- $v \rightarrow +\infty$ amb u finit
- $\tilde{V} = \pi/2, -\pi/2 < \tilde{U} < \pi/2$

- **Infinit nul passat I^- (o ζ^-):**

- $u \rightarrow -\infty$ amb v finit
- $\tilde{U} = -\pi/2, -\pi/2 < \tilde{V} < \pi/2$

Aquests són tots els punts que hem afegit a la nostra varietat.

Posant

$$\begin{aligned}\tilde{V} - \tilde{U} &= \chi \in [0, \pi] \\ \tilde{V} + \tilde{U} &= \tau \in [-\pi, \pi]\end{aligned}$$

trobem

$$ds^2 = d\tau^2 + d\chi^2 + \sin^2(\chi)d\Omega_r \quad (4.35)$$

si fos $\chi \in [-\pi, \pi] \rightarrow R_t \times S^2 \rightarrow$ Univers estàtic d'Einstein.

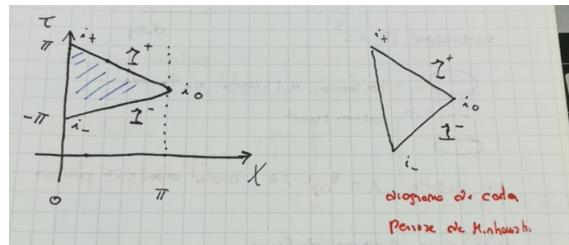


Figura 10: Diagrama de Carter-Penrose de Minkowski

si ara considerem Kruskal

$$ds^2 = -(1 - \frac{R_s}{r})dUdV + r^2d\Omega_r \quad (4.36)$$

la compactificació s'escriu

$$d\tilde{s}^2 = -4(1 - \frac{R_s}{r})d\tilde{U}d\tilde{V} + r^2 \sin^2(\tilde{V} - \tilde{U})d\Omega_r \quad (4.37)$$

i el diagrama

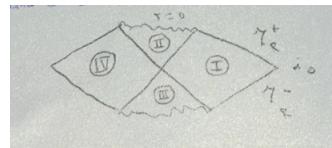


Figura 11: Diagrama de Carter-Penrose de Kruskal

les regions I i IV estan desconnectades causalment però un observador de cadascuna es pot trobar a un forat negre.

4.12 Espai de Sitter

Considerem la mètrica per l'Espai de Sitter

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 ch^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)[dt^2 + \sin^2(\chi)d\Omega_r] \quad (4.38)$$

substancialment $R_t \times S^3$.

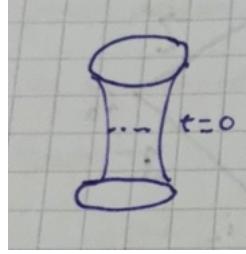


Figura 12: Espai temps de Sitter

Per de Sitter tenim $\Lambda = \frac{3}{\alpha^2} > 0$. Veiem el seu diagrama de Penrose. Fent el canvi $ch\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \frac{1}{\cos(t)}$, $t' \in [-\pi/2, \pi/2]$ trobem

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2(t')} ds_E^2$$

i la compactificació

$$d\tilde{S}^2 = -(dt')^2 + d\chi^2 + \sin^2(\chi)d\Omega_1 \quad (4.39)$$

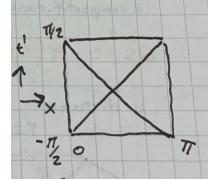


Figura 13: Diagrama de Penrose de l'espai de Sitter

ara definim $r^2 = \alpha^2 \sin^2(\chi) ch^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, $r \in [0, \infty)$ i $(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}) sh^2(\tau) = sh^2(\tau/\alpha)$, $\tau \in (-\infty, \infty)$ en aquestes coordenades de Sitter pren la forma

$$ds^2 = -(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}) d\tau^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{r^2}{\alpha^2}} + r^2 d\Omega_r \quad (4.40)$$

τ és killing tipus temps per $r < \alpha$ i esdevé nul a $r = \alpha \rightarrow r = \alpha$ són horitzons de killing per ∂_t , horitzons cosmològics, \exists gravetat superficial χ .

4.13 Espai d'anti-de Sitter

Per l'espai temps d'anti- de Sitter tenim

$$ds^2 = \alpha^2 (-ch^2(\rho) dt^2 + d\rho^2 + sh^2(\rho) d\Omega_r) \quad (4.41)$$

amb $\Lambda < 0$ i $\rho \in [0, \infty)$. ∂_t és killing tipus temps.

Veiem el diagrama de Penrose fent el canvi $ch(\rho) = \frac{1}{\cos(\chi)}$ amb $\chi \in [0, \pi/2]$

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2(\chi)} dS_E^2 \quad (4.42)$$

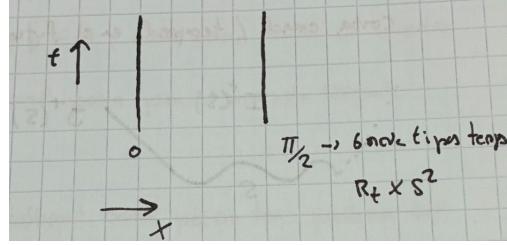


Figura 14: Diagrama de Penrose anti-de Sitter

introduïm les coordenades Poincaré Patch($R = 1$)

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + d\vec{x}_2^2 + dw^2}{w^2} \quad (4.43)$$

amb $w \in [0, \infty)$ ara la compatficiació ve donada per $\Lambda^2 = w^2$ i el diagrama ens queda

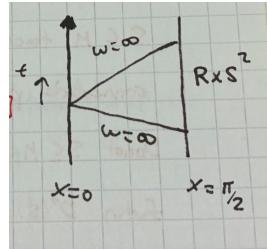


Figura 15: Coordenades Poincaré Patch

tenim Minkowski 3D o en coordenades globals Minkowski compactificat en una esfera a la frontera $w = 0$. Tenim una isometria $x^i \rightarrow \lambda x^i$, $\lambda \neq 0$.

Per un forat negre tindrem

$$ds^2 = -\frac{1}{2^2} \left[\left(1 - \frac{w^3}{w_s^3} \right) dt^2 + d\vec{x}_2^2 \right] + \frac{dw^2}{w^2 \left(1 - \frac{w^3}{w_s^3} \right)} \quad (4.44)$$

en coordenades globals

$$ds^2 = -1 \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{r^2}{R^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r} + \frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\Omega_r \quad (4.45)$$

on R és el radi de curvatura d'AdS.

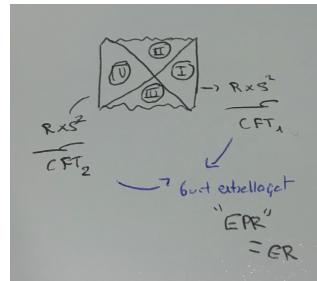


Figura 16: Forat nege

4.14 Estructura Causal de l'Espaitemps

Definició 24 Una corba causal és una corba o bé de tipus temps o tipus llum, és a dir, el seu vector tangent és de tipus temps o llum

Considerem un subconjunt de la nostra varietat $S \subseteq M$

Definició 25 Futur causal(temporal) $J^+(S)(I^+(S))$ és el conjunt de punts que poden ser connexos a S per una corba causal(temporal) en el futur de S .

De forma anàloga es defineixen $J^-(S)$ i $I^-(S)$

Definició 26 $S \subseteq M$ (tancat) és acrònic si cap parella de punts pot ser connectada per una corba de tipus temps

Definició 27 Donat $S \subseteq M$ acrònic i tancat, el domini de dependència futur $D^+(S)$ és el conjunt de punts p tals que cada corba causal de p inextensible en el passat interseca S

De forma anàloga podem definir $D^-(S)$ i $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$.

Tot el que pot influir causalment a $D^+(S)$ ve de S , la física a $D^+(S)$ es pot obtenir imposant condicions iniciales a S

Definició 28 Horitzó de Cauchy de S és la frontera de $D(S)$

Definició 29 S acrònic i tancat es diu superfície de Cauchy si $D(S) = M$

Definició 30 Si \exists al menys una superfície de Cauchy M s'anomena globalment hiperbòlic.

Tant Minkowski com De Sitter són globalment hiperbòlics, en canvi anti de Sitter no ho és, ens cal informació extra sobre la frontera, aquest però no és un cas patològic com si ho seran Kerr o RN.

Teorema 5 Si M és globalment hiperbòlic $\rightarrow \exists f$ in (M) tal que les superfícies $R = \text{constant}$ són de Cauchy i M pot ser foliat amb superfícies tals.

Per respectar la causalitat no volem que el nostre spaitemps tingui corbes tancades de tipus temps(CTC), encara que siguin solució de les equacions d'Einstein.

Definició 31 M és fortament causal si $\forall p \in M$, cada entorn seu té un subentorn V tal que cada corba causal passa per v una sola vegada, és a dir, que no hi hagi CTC.

Això però no és suficient perque una pertorbació podria fer que l'espaietms deixés de ser fortament causal caldrà que sigui fortament i establement causal.

Si l'espaietms és globalemt hiperbòlic és fortament causal, ja que la superfície de Cauchy Σ és fortament causal, i cada corba causal inextensible l'ha d'interseccar.

Ara volem definir el que és un forat negre, de moment, en un espai asimptòticament.

Primer ens caldrà definir la noció d'espai asimptòticament pla.

Considerem Minkowski

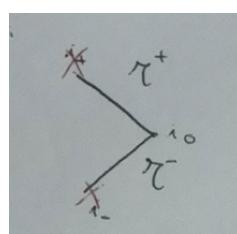


Figura 17: Diagrama de Carter-Penrose de Minkowski

Definició 32 Una varietat M és asimptòticament plana si la seva compatificació conforme \tilde{M} és tal que $\partial\tilde{M} = i_0 \cup \zeta^+ \cup \zeta^-$, $\exists v$ entorn de $\partial\tilde{M}$ sobre el que l'espaietms és fortament causal i $d\tilde{s}^2 = ds_{minkowski}^2$ anant a i_0 .

Abans d'introduir la definició de forat negre veiem un altre patologia que pot tenir el nostre spaitemps

Definició 33 *M és asimptòticament predictable en el futur si $\exists \Sigma$ superfície de Cauchy parcial tal que $D^+(\Sigma) \supset \zeta^+$.*

Si no ho és M té una singularitat nua

Les singularitats nues redueixen el domini de dependència dels espais temps.

Definició 34 *Si donat un espai temps asimptòticament pla M, $M \setminus J^-(\zeta^+) = B \neq \emptyset \rightarrow$ direm que M conté un forat negre, B s'anomena regió del forat negre, $\partial B = H^+$ s'anomena horitzó d'esdeveniments futur.*

El forat blanc es defineix anàlogament via $J^+(\zeta^-) \rightarrow$ Horitzó d'esdeveniments passat.

$\partial B = H^+$ és una hipersuperfície nul·la i es pot demostrar que és acronal.

- Principi de censura còsmica(dèbil):

En espais temps asimptòticament plans el col·lapse gravitacional no porta mai a la formació de singularitats nues.

- Principi de censura còsmica(fort) :

Tots els espais temps físicament sensats són globalment hiperbòlics.

4.15 Forat negre de Kerr

Que succeeix si no tenim simetria esfèrica?

Un espai temps asimptòticament pla és axisimètric si \exists killing m de tipus espai a l'infinit tal que totes les seves òrbites siguin tancades.

Formalment podem dir que m genera un grup a un paràmetre d'isometria U(1): $[m, k] = 0$.

Un objecte rotant en un espai temps asimptòticament pla és axisimètric

Teorema 6 Teorema de Carter-Robinson: *Per espais temps asimptòticament pla estacionari i axisimètric, les solucions de les equacions d'Einstein són Kerr(en el buit)*

Notem que Kerr no descriu l'espai temps fora d'un cos genèric rotant però aproxima prou bé la solució lluny d'ell.

En coordenades $x = \cos(\theta)$ la solució s'escriu

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma}\right)dt^2 + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma}\right)\sin^2(\theta)d\varrho^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 - 2a\sin^2(\theta)\left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma}\right)dtd\varrho \quad (4.46)$$

$k = \partial_t$ killing tipus temps a l'infinit \rightarrow mètrica estacionaria però no estàtica.

a $\theta = \pi/2$, $r = 0$, $g_{\varrho\varrho} = a^2$ constant i una singularitat de curvatura $a^2 d\varrho^2$ que és un cercle de radi a.

Fent $a = 0$ recuperem Schwarzschild i fent $r = \infty$ recuperem Minkowski en esfèriques

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \quad \Delta = r^2 - 2Mr^2 + a^2 \quad (4.47)$$

els eventuals 0 de Δ són singularitats de coordenades, factoritzant

$$\Delta = (r - r_*)(r - r_-)$$

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

Diferenciem tres situacions

- i) $M < a \rightarrow$ no singularitat de coordenades, no horitzó d'esdeveniments \rightarrow singularitat nua per $r = 0$, $\theta = \pi/2$, $m = \partial_\varrho$ és killing tipus espai a l'infinit
- ii) $M > a \rightarrow r_{\pm}$ són reals positives, de fet, són horitzons de Killing per

$$\eta_{pm} = k_{\pm} + \Omega_{\pm}m, \quad \Omega_{pm} = \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2}, \quad k_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{r(r_{\pm}^2 + a^2)}$$

veiem ara el diagrama de Penrose per aquesta solució

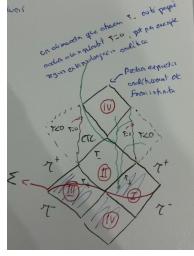


Figura 18: Diagrama de Penrose forat negre de Kerr

Veiem que $r = r_+$ és l'horitzó d'esdeveniments i $r = r_-$ és l'horitzó de Cauchy.

Per un observador estàtic $k^\mu \partial_\mu \varrho = 0 \rightarrow \varrho = \text{constant}$ l'horitzó rota amb velocitat angular constat Ω_ϱ respecte a l'observador estàtic.

La regió de l'espaitemps quan travesssem r_- genera problemes amb la causalitat, un cop travesssem r_- ens poden arribar corbes tipus temps de la singularitat $r = 0$, a més, trobem CTC.

Abans d'atravessar aquesta regió l'espaitemps pot ser completament descrit per una superficie de Cauchy parcial. Globalment però l'espaitemps no és hiperbòlic.

Considerem una partícula sense massa anant de la regió I fins a r_- , generaria un blue shift tal que no es podria negligir la energia. S'haurien de considerar pertorbacions i no nomès solucions d'Einstein al buit.

Si prenem un vector de killing k i calculem $k^2 = g_{tt} = 0$ per $r_{ergosfera} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta)}$. A l'ergoregió g_{tt} és de tipus espai $k^2 > 0 \rightarrow \partial_t$ tipus espai.

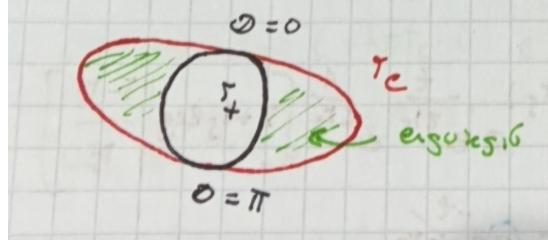


Figura 19: Figura que mostra l'ergoesfera

El fet que hi hagi un forat negre rotant implica que hi ha una regió a que no podem estar ferms.

- iii) $M = a \rightarrow r_+ = r_- = M = r_H$ en aquest cas $\kappa = k \rightarrow T_H = 0$ tenim un forat negre que no emet radiació

4.16 Forat negre carregat: Reissner-Nordstrom

Finalment veiem la mètrica pel forat negre carregat

$$ds^2 = -(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2})dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2})} + r^2d\Omega_r^2 \quad (4.48)$$

és una solució amb $P = 0$, és a dir, sense pressió de matèria. És una mètrica estàtica. Això és pel que fa a la geometria, però tenim també un camp de massa

$$A = \frac{Q}{2}dt - P \cos(\theta)d\varrho \quad (4.49)$$

$$F = \frac{Q}{r^2}dt \wedge dr + P \sin(\theta)d\theta \wedge d\varrho \quad (4.50)$$

La solució és a simetria esfèrica i difereix de la d'Schwarzschild pel terme $\frac{Q^2}{r^2}$.
 $r = 0$ també constitueix una singularitat de curvatura per aquesta mètrica.
Veiem com abans el problema del discriminant.

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (4.51)$$

- i) $M < |Q|$ singularitat nua, el principi de censura còsmica proposa que aquesta eventualitat no es dona a la natura.
- ii) $M > |Q| \rightarrow r_{\pm}$ són horitzons de Killing per k amb $\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}$ veiem el diagrama de Penrose

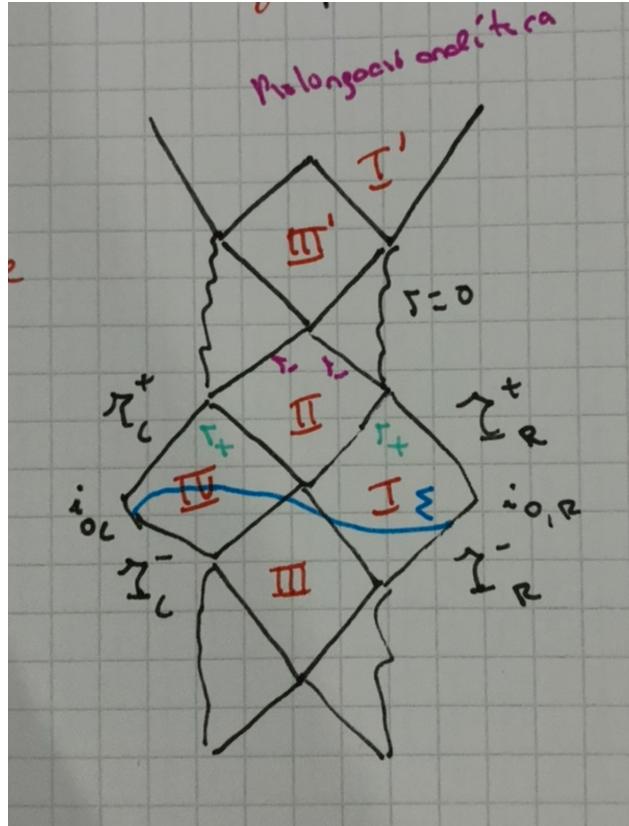


Figura 20: Diagrama de Penrose pel forat negre carregat

tenim a r_+ l'horitzó d'esdeveniments i a r_- l'horitzó de Cauchy

- iii) $M = |Q|$ és el cas extrem, $r_{\pm} = M$ és un horitzó degenerat $\kappa = 0 = T_H$, en aquest cas la solució es pot escriure

$$ds^2 = -(1 - \frac{M}{r})^2 dt^2 + dr^2(1 - \frac{M}{r})^{-2} + r^2 d\Omega_r \quad (4.52)$$

i la solució continua no sent globalment hiperbòlica

5 Càrrega conservada

Considerem primer l'electromagnetisme en l'espai de Minkowski, on es compleix l'equació $d^*F = -4\pi *j$. La càrrega elèctrica en un temps t es defineix com:

$$Q_t = - \int_{\Sigma_t} *j = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} d^*F = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma_t} *F \quad (5.1)$$

on Σ_t és una superfície de t constant. Si prenem els potencials $A = \frac{Q}{r}dt$ i el camp $F = \frac{Q}{r^2}dt \wedge dr$, i recordant que $*F = \sqrt{g}Fd\theta \wedge d\phi$, la integral sobre una esfera S^2 ens dona:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} *F = \frac{Q}{4\pi} \int \sin\theta d\theta d\phi = Q \quad (5.2)$$

Així mateix, podem definir la càrrega magnètica com $P = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma_t} F$. Aquestes definicions són vàlides per a espais asimptòticament plans, com l'espai-temps de Reissner-Nordström (RN).

En termes de corrent, podem escriure la càrrega com $Q = \int_{\Sigma_t} dS_\mu j^\mu = \int_{\Sigma_t} d^3x j^0$. Si considerem el volum V tancat entre dues superfícies Σ_{t_1} i Σ_{t_2} , el teorema de Stokes ens diu:

$$Q_2 - Q_1 = \int_V d^4x \partial_\mu j^\mu \implies Q_1 = Q_2 \iff \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.3)$$

En un espai-temps corr, la derivada parcial es generalitza a la derivada covariant: $\partial_\mu j^\mu \rightarrow \nabla_\mu j^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}j^\mu)$. Per tant, la conservació de la càrrega requereix que $\nabla_\mu j^\mu = 0$.

5.1 El problema de definir una càrrega conservada en RG

En Relativitat General, recordem que la conservació de l'energia-impuls s'expressa com $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Tanmateix, si desglossem la derivada covariant:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\nu(\sqrt{g}T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu T^{\sigma\beta} \quad (5.4)$$

El segon terme d'aquesta expressió és el que impedeix construir de manera senzilla una càrrega conservada associada al tensor energia-impuls. Com que $T^{\mu\nu}$ conté l'energia i l'impuls de la matèria, el terme ΓT (anomenat "terme d'interacció") indica que l'energia i l'impuls s'intercanvien amb el camp gravitatori.

Si intentéssim definir un tensor d'energia total $T_{tot}^{\mu\nu} = T_{materia}^{\mu\nu} + T_{grav}^{\mu\nu}$ tal que fos possible escriure una càrrega conservada, ens trobaríem amb un problema. Atès que $T_{grav}^{\mu\nu}$ hauria de comportar-se com el tensor d'Einstein $G^{\mu\nu}$, tindríem:

$$T_{tot}^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + 8\pi GT^{\mu\nu} = 0 \quad (5.5)$$

Això no funciona per definir una quantitat útil, ja que el tensor total seria idènticament nul per les equacions d'Einstein.

5.2 Energia ADM

Com a alternativa per a espais asimptòticament plans, s'utilitza l'anomenada "Energia ADM". Segons la derivació de Hawking-Horowitz, per a una varietat M foliada per superfícies Σ de tipus espai, l'energia es defineix com:

$$E_{ADM} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} dS \sqrt{|g_{00}|} ({}^2k - {}^2k_0) \quad (5.6)$$

On 2k és la curvatura extrínseca de la vora de la superfície Σ i 2k_0 és la curvatura d'un espai de referència (normalment Minkowski), necessària per normalitzar l'energia i que no sigui infinita.

Per calcular l'energia d'un forat negre de Schwarzschild, considerem la mètrica:

$$ds^2 = -A^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B^2(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (5.7)$$

Aquí $\sqrt{|g_{00}|} = A$. La curvatura extrínseca ve donada per ${}^2k = \nabla_\mu n^\mu = \frac{1}{\sqrt{g_3}}\partial_r(\sqrt{g_3}n^r)$, on $n^r = B$. Amb el determinant de la mètrica induïda $\sqrt{g_3} = \frac{r^2 \sin\theta}{B}$, obtenim:

$${}^2k = \frac{B}{r^2 \sin\theta} \partial_r \left(\frac{r^2 \sin\theta}{B} B \right) = \frac{2B}{r} \quad (5.8)$$

Substituint en la integral de l'energia ADM i prenent el límit $r \rightarrow \infty$:

$$E_{ADM} = -\frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int d\theta d\phi r^2 \sin \theta A \left(\frac{2B}{r} - \frac{2B_0}{r} \right) = -\lim_{r \rightarrow \infty} r A (B - B_0) \quad (5.9)$$

Per a Schwarzschild, $A = B = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$ i per a Minkowski $A = B_0 = 1$. Desenvolupant el límit, obtenim $E_{ADM} = M$. En el cas de AdS-Schwarzschild, on $A = B = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \Lambda r^2}$, el procediment és anàleg i també resulta en $E_{ADM} = M$.

A més, podem relacionar l'energia amb la termodinàmica mitjançant l'acció euclidiana S_E . Sabem que la funció de partició és $Z = e^{-\beta F} \approx e^{-S_E}$. L'acció euclidiana per a Schwarzschild s'obté com:

$$S_E = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} R - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} d^3x \sqrt{h} k \quad (5.10)$$

Càlculs detallats mostren que $S_E = \frac{M\beta}{2}$. Atès que l'energia lliure és $F = E - TS$, i identificant $E = M$ i $\beta = 1/T$, arribem a $F = \frac{1}{16\pi T}$, confirmant que el forat negre és un objecte termodinàmic.

5.3 Integral de Komar

La integral de Komar és una altra forma de definir una càrrega conservada quan l'espai-temps posseeix un vector de Killing ξ . Es defineix com:

$$Q_\xi(\Sigma) = \frac{c}{16\pi G} \int_{\partial\Sigma} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu \quad (5.11)$$

Aplicant el teorema de Stokes, aquesta integral de superfície es pot convertir en una integral sobre la superfície Σ :

$$Q_\xi(\Sigma) = \frac{c}{8\pi G} \int_\Sigma dS_\nu \nabla_\mu \nabla^\mu \xi^\nu \quad (5.12)$$

Utilitzant la identitat per als vectors de Killing $\nabla_\mu \nabla^\mu \xi^\nu = -R^\nu{}_\mu \xi^\mu$ i les equacions d'Einstein ($R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$), podem escriure la càrrega en funció del tensor energia-impuls:

$$Q_\xi = \int_\Sigma dS_\nu J^\nu, \quad \text{on } J^\nu = c \left(T^\nu{}_\mu \xi^\mu - \frac{1}{2} T \xi^\nu \right) \quad (5.13)$$

Aquest corrent J^ν és conservat, és a dir, $\nabla_\nu J^\nu = 0$. La prova d'aquesta conservació es basa en què:

1. $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ (conservació de la matèria).
2. $\nabla_{(\nu} \xi_{\mu)} = 0$ (equació de Killing).
3. $T^{\mu\nu}$ és simètric i $\nabla^\mu \xi^\nu$ en la integral original és antisimètric.
4. $\nabla_\xi R = 0$, ja que l'escalar de curvatura és constant al llarg de les isometries generades per ξ .

Per tant, Q_ξ és una quantitat conservada que depèn de les simetries de l'espai-temps.

6 Efectes quàntics

6.1 Radiació de Hawking

En Schwarzschild per una estrella col·lapsant tenim

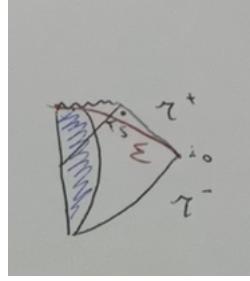


Figura 21: Diagrama de Carter Penrose per una estrella col·lapsant en Schwarzschild

Prenem un observador a radi constant $r > r_s$ a temps grans $t \gg r_s$. L'espai-temps és globalment hiperbòlic, és fol·liable, prenem una superfície de Cauchy Σ de manera que ζ^+ està totalment al futur causal de Σ , prenem un observador ζ que té una energia prou baixa com per no modificar l'energia de Schwarzschild.

Prenem coordenades de Kruskal $U = -e^{-\frac{u}{2R_s}}$ $V = e^{\frac{v}{2R_s}}$ llavors

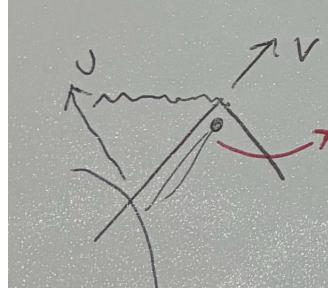


Figura 22: Figura que mostra la dinàmica de l'observador ζ .

$$ds^2 = 0 = -\cos(0)dUdV \rightarrow dU = 0 \quad o \quad dV = 0 \quad (6.1)$$

definim $\tilde{U} = -U > 0$ llavors

$$\tilde{U} = e^{-\frac{U}{2R_s}} = e^{-\frac{1}{2R_s}(t-R_s)} = e^{-\frac{t}{2R_s}} e^{\frac{1}{2R_s}[r+R_s \log(\frac{r-R_s}{R_s})]} = e^{\frac{-t}{2R_s}} e^{\frac{r}{2R_s}} \sqrt{\frac{r}{R_s} - 1} = C e^{\frac{-t}{2R_s}} \quad (6.2)$$

on C és constant pel nostre observador.

Les mesures són mesures sobre correlacions quàntiques, per exemple $\langle J(\tilde{U})J(\tilde{U}') \rangle$ amb J la corrent conservada. \tilde{U}, \tilde{U}' són exponencialment petits, comprén $\tilde{U} - \tilde{U}'$.

La nostra varietat localment és plana, per tant estem sondant una regió en que podem utilitzar els resultats de l'espai pla

$$\langle J(\tilde{U})J(\tilde{U}') \rangle \sim \langle J(\tilde{U})J(\tilde{U}') \rangle_{minkowski} \quad (6.3)$$

I aquest correlador el sabem calcular

$$\langle J(\tilde{U})J(\tilde{U}') \rangle = C \frac{1}{(\tilde{U} - \tilde{U}')^2} = C \frac{1}{(e^{-\frac{t}{2R_s}} - e^{-\frac{t'}{2R_s}})^2} \frac{d\tilde{U}}{dt} \frac{d\tilde{U}'}{dt'} = C \frac{1}{(e^{\frac{1}{4R_s}(t-t')} - e^{\frac{1}{4R_s}(t-t')})^2} = \frac{1}{2} e^{-\beta H} J(\tilde{U})J(\tilde{U}') \quad (6.4)$$

fent $t \rightarrow t + 4\pi R_s i$ trobem que el temps euclià és periòdic amb periode $\beta = 4\pi R_s = \frac{1}{T_H}$. És a dir $\frac{1}{2} e^{-\beta H} J(\tilde{U})J(\tilde{U}')$ és un ensemble tèrmic que emet radiació a T_H , la radiació de Hawking.