El Problema de Hénon-Heiles: Integrabilitat, Simetria i la Transició al Caos

Guillem Arias

14 de desembre de 2025

Resum

El sistema d'Hénon-Heiles, proposat inicialment en el context de la dinàmica galàctica, s'ha convertit en un model paradigmàtic per a l'estudi de la transició del moviment regular al caòtic en sistemes hamiltonians. Aquest treball revisa el problema clàssic de l'existència d'una tercera integral aïllada del moviment en un potencial axialment simètric i analitza com la dinàmica del sistema evoluciona amb l'augment de l'energia. Mitjançant la integració numèrica i les seccions de Poincaré, s'observa una progressió clara: a baixes energies, els tors invariants dominen, indicant la presència d'una segona integral aïllada; a energies intermèdies, els tors ressonants es trenquen d'acord amb el teorema de Kolmogórov-Arnold-Moser (KAM), donant lloc a un espai de fases mixt amb illes regulars envoltades de mars caòtics; i a altes energies, el moviment caòtic predomina i la integral aïllada deixa d'existir globalment. S'utilitzen eines modernes com els exponents de Liapunov, l'índex d'alineació menor (SALI) i l'anàlisi espectral per caracteritzar l'aparició del caos i classificar famílies d'òrbites ressonants. A més, es discuteixen les connexions amb el caos quàntic, destacant com l'estructura clàssica de l'espai de fases es manifesta en la distribució estadística dels nivells d'energia quàntics. El model d'Hénon-Heiles serveix així com a exemple fonamental de com els sistemes no lineals perden integrabilitat i simetria, il·lustrant mecanismes universals en la transició al caos determinista.

1 Context històric i significat del model

L'any 1963-1964 Michel Hénon i Carl Heiles publiquen un artícle amb el títol 'The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments', aquesta publicació marca un abans i un després en la comprensió de la dinàmica Hamiltoniana. La motivació original de l'article era fonamentalment astrofísica, determinar si un potencial galàctic amb simetria axial pot admetre una tercera integral aïllada del moviment. Aquest problema es relaciona directament amb el problema de la descripció d'òrbites estel·lars i la cinemàtica gal·làctica.
El model d'Hénon-Heiles va trascendir el seu context inicial per a convertir-se en un prototip de sistema no lineal que exhibeix transició d'un comportament regular a un comportament caòtic. La seva importància es troba en el fet que darrere la simplicitat matemàtica del potencial $U(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3$ s'amaga una dinàmica extraordinariament complexa. Aquest tipus de sistemes va ser un dels primers on es van poder observar, mitjançant simulacions numèriques, fenòmens com la ruptura gradual de tors invariants i l'emergència de caos determinista a mesura que augmenta l'energia del sistema.

En aquest treball integrarem el plantejament original, els resultats numèrics clàssics i les eines teòriques modernes de manera que veiem com de forma progressiva el sistema perdrà la integrabilitat i les simetries i les ressonàncies seran els elements que condicionaran i determinaran el mecanisme d'aquesta transició. Mostrem el model d'Hénon-Heiles com una eina fonamental per a l'estudi de sistemes dinàmics no lineals i la seva universalitat.

2 Fonaments i plantejament

2.1 Definicions

Abans d'entrar en el model ens calen unes definicions bàsiques

- **Integral del moviment**: Una integral del moviment és una funció de les coordenades i dels moments conjugats que es manté constant al llarg d'una trajectòria a l'espai de fase Equivalentment, una quantitat conservada sota l'evolució Hamiltoniana. Formalment podem dir que si $I(q,p)$ és integral llavors $\frac{d}{dt}I(q(t),p(t)) = 0$ per a qualsevol solució del nostre sistema

- **Integrals aïllades**: Les integrals del moviment aïllades restringeixen la forma de l'òrbita i redueixen la dimensió efectiva de l'espai de fases. En un espai 2n dimensional, una integral aïllada defineix una hipersuperficie invariant de 2n-1 dimension sobre la que queden confinades les trajectòries compatibles amb aquesta.

- **Integrals no aïllades** : Les integrals del moviment no aïllades no redueixen la dimensió accessible per la trajectòria, poden ser tant combinacions funcionals o relacions que no restringeixen la dinàmica de l'òrbita.

El problema de la tercera integral ens requereix separar el que confina l'òrbita i per tant serà aïllat del que no la confina

2.2 Introducció i hipòtesi en simetria axial

El potencial gravitatori galàctic el considerarem estàtic i amb un eix de simetria. En coordenades cilíndriques (R, θ, z), el potencial s'escriu $\phi(R, z)$ i l'estat de l'estrella en l'espai de fases és $(R, \theta, z, \dot{R}, \dot{\theta}, \dot{z})$. Les dues integrals trivials són :

$$E = \phi(R, z) + \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right), \qquad L_z = R^2\dot{\theta}.$$

Es va assumir que no existia una tercera integral aïllada, però això contradeia l'evidència experimental, certes distribucions de velocitats estel·lars. D'això sorgeix la pregunta: "Admet un potencial amb simetria axial una tercera integral aïllada del moviment?". La resposta, com la de molts problemes en física, serà que depèn, l'existència d'aquesta tercera integral aïllada dependrà del nivell d'energia de l'òrbita.

2.3 Plantejament reduït en el pla i criteri de Poincaré

Sense pèrdua de generalitat considerem una partícula al pla (x, y) amb potencial $U(x, y)$, espai de fase 4 dimensional $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ i integral d'energia

$$I_1 = U(x, y) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = E \tag{1}$$

En absència de simetria rotacional no tindrem integral de moment angular. La pregunta que ens hem de fer és sobre la natura de la segona integral I_2: és aïllada? Per estudiar-ho utilitzem la secció de Poincaré: intersectem la trajectòria amb el pla $x = 0$ imposant $\dot{x} > 0$ i es recullen els punts $P_i = (y_i, \dot{y}_i)$. Si no hi ha I_2,els punts ocupen l'àrea admissible, si, en canvi, existeix I_2, resten sobre una o més corbes tancades invariants.
Per discriminar regions regulars d'aquelles ergòdiques , Hénon-Heiles defineixen un criteri dinàmic de separació. A partir d'un punt P_i i d'un punt proper a aquest $P_i^{‘}$ apliquem el mapa de Poincaré successivament i calculem

$$\mu = \sum_{i=1}^{25} ||P_i - P_i^{‘}|| \tag{2}$$

Si P_i es troba en una regió de corbes invariants, la separació creixerà lentament i quasi linealment amb i, e canvi, en una regió ergòdica la separació creixerà de forma gairebé exponencial. S'estableix un llindar $\mu_c \simeq 10^{-4}$: si $\mu < \mu_c$, el punt s'assigna a una corba invariant (regular); si $\mu > \mu_c$, s'assigna a zona ergòdica . Aquest mètode permet estimar, per a cada energia E, la proporció d'àrea ocupada per corbes versus regió ergòdica.

3 El model d'Hénon-Heyles

3.1 El potencial d'Hénon-Heiles i les seccions equipotencials

El model que utilitzarem serà el potencial polinòmic

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \tag{3}$$

que genera un paisatge equipotencial característic. En particular, per valors equipotencials elevats l'estructura geomètrica formarà contorns amb simetries notables, ho podem visualitzar com un triangle equilàter a determinats nivells. En aquest potencial $E = 1$ equival a l'energia d'escapament, per sobre de la qual les línies equipotencials deixaran de ser tancades i existeixen trajectòries que poden escapar si el moviment és ergòdic. Tot i això l'energia critica que destrueix les corbes invariants és inferior a l'energia d'escapament, ho trobarem amb els resultats numèrics.

3.2 Resultats numèrics i transició amb l'energia

Les integracions numèriques mostren clarament l'evolució de les seccions de Poincaré amb l'energia:

- **Règim baix** ($E = 0{,}0833$): apareixen àrees tancades ben definides, associades a òrbites periòdiques estables i corbes invariants (tors deformats). També s'identifiquen punts que corresponen a òrbites periòdiques inestables. La distribució suggereix clarament l'existència d'una segona integral aïllant.
- **Règim intermedi** ($E = 0{,}1250$): persisteixen *illes de regularitat*, però no ocupen tot l'espai admissible. S'observen punts aïllats d'una mateixa trajectòria que no es poden unir per corba, indicant desconnexió i emergència d'una regió ergòdica. La transició amb E és abrupta: petits increments d'energia trenquen corbes senceres i generen zones caòtiques.
- **Règim alt** ($E = 0{,}1667$): els punts de la secció omplen l'àrea disponible. Les successions P_i salten aparentment de forma aleatòria d'una banda a l'altra, perdent l·lògica"geomètrica. La regió ergòdica domina, i la segona integral desapareix a escala global.

Amb el criteri μ trobem una energia crítica $E_{critica}$ per sota de la qual la segona integral existeix i per sobre de la qual perdem gran part de l'espai de fases quedant només illes regulars aïllades.

3.3 Tipus d'òrbites i classificació ressonant

En el sistema d'Hénon-Heiles es troben diversos tipus d'òrbites regulars i caòtiques amb transició governada per ressonàncies:

- **Òrbites de caixa**: típiques de sistemes triaxials sense simetria axial estricta; en el pla

(x, y) representen oscil·lacions confinades dins d'un çompartiment"geomètric.

- **Òrbites ressonants** $n : m$: la relació entre períodes de les oscil·lacions transversals i longitudinals és $n : m$; les famílies fortament ressonants ($2:2$, $3:3$, $4:4$, ...) bifurquen de la família principal $1:1$, que estructura gran part de la regularitat a baixa energia.
- **Òrbites caòtiques**: el percentatge augmenta amb l'energia. Per a energies superiors a $E >\sim 0{,}06$, les partícules es mouen majoritàriament en òrbites ressonants $1 : 1$ i caòtiques; per $E >\sim 0{,}14$, les òrbites caòtiques dominen el sistema.

Tot això en definitiva descriu la coexistència de dinàmiques: illes regulars envoltades de mars caòtics, amb fronteres fractals i "sticky"on les trajectòries poden romandre llargs temps.

4 Caos

4.1 Integrabilitat: Liouville-Arnold i Teorema KAM

Un sistema hamiltonià amb N graus de llibertat és integrable si disposa de N integrals primeres independents i en involució (commuten via parèntesi de Poisson). El Teorema de Liouville-Arnold garanteix que el moviment s'organitza en tors invariants T^N, sobre els quals el flux és quasi-periòdic.

Teorema KAM

El Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) estableix que si un sistema hamiltonià integrable és sotmès a una pertorbació hamiltoniana petita, la majoria dels tors no ressonants persisteixen com a tori lleugerament deformats. Els tors ressonants, en canvi, es trenquen, generant cadenes d'illes i regions caòtiques. Això explica per què el sistema d'Hénon-Heiles mostra una coexistència de regions regulars i caòtiques a energies intermèdies i altes.

El sistema d'Hénon-Heiles és paradigmàtic: a baixa energia (pertorbació "petita") persisteixen molts tors; a energia més alta, la densitat de ressonàncies creix, els tors ressonants col·lapsen i augmenta la mescla caòtica.

4.2 Caracterització moderna del caos

Per complementar les seccions de Poincaré, s'utilitzen indicadors variacionals:

4.3 Exponents de Liapunov

Els exponents de Liapunov mesuren la sensibilitat a condicions inicials. Un exponent màxim positiu implica separació exponencial de trajectòries properes i certifica caos determinista. El seu càlcul requereix integrar les equacions variacionals associades al flux hamiltonià i normalitzar periòdicament vectors tangents.

4.3.1 Índex SALI

L'Smaller Alignment Index (SALI) contrasta dos vectors tangents evolutius. En òrbites caòtiques, els vectors s'alineen (o anti-alineen) amb el subespai dominant i el SALI decau ràpidament cap a zero; en òrbites regulars, els vectors no col·lapsen en una direcció única i el SALI es manté a valors finits. És un test ràpid i fiable per distingir regularitat de caos en Hénon-Heiles.

4.3.2 Dinàmica espectral

L'anàlisi espectral (Transformada de Fourier) de sèries temporals $(x(t), y(t))$ revela freqüències fonamentals:

- En òrbites regulars, l'espectre és discret, amb pics nítids i combinacions lineals.
- En òrbites caòtiques, l'espectre és continuu o amb fons ample, sense estructura discreta clara.

Això permet classificar famílies ressonants, detectar bifurcacions i estudiar estabilitat.

4.4 Connexió amb el caos quàntic

Clàssicament, el caos es defineix per la sensibilitat extrema a les condicions inicials, quantificada pels exponents de Liapunov. El caos quàntic busca anàlegs d'aquesta inestabilitat en sistemes de mecànica quàntica. Tanmateix, a causa de la linealitat de l'equació de Schrödinger, l'evolució és unitària. Això implica que, si tenim dues funcions d'ona inicials $|\phi(0)\rangle$ i $|\psi(0)\rangle$, el producte intern es conserva:

$$|\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle\phi(0)|\psi(0)\rangle|^2. \tag{4}$$

Per estudiar el caos en el domini quàntic, ens centrem en les estadístiques dels nivells d'energia E_i. Després de normalitzar les energies per eliminar la dependència del sistema concret, definim $\epsilon_i = n(E_i)$, on la densitat mitjana de nivells és 1, i considerem els espais entre nivells veïns:

$$s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i. \tag{5}$$

Segons la naturalesa clàssica del sistema, les distribucions $p(s)$ prenen formes característiques:

- **Sistemes integrables (comportament regular clàssic):** Segueixen la distribució de Poisson:
$$p(s) = e^{-s}, \tag{6}$$
que permet amuntegament de nivells ($p(0) > 0$).
- **Sistemes completament caòtics (comportament ergòdic clàssic):** Segueixen la distribució de Wigner-Dyson :
$$p(s) = \frac{\pi}{2} s\, e^{-\frac{\pi}{4}s^2}, \tag{7}$$
que reflecteix repulsió de nivells ($p(0) = 0$).
- **Sistema mixt (com el d'Hénon-Heiles):** Exhibeix una distribució intermèdia, coherent amb la coexistència de regions regulars i caòtiques en l'espai de fases clàssic.

Aquesta correspondència entre l'estructura clàssica de l'espai de fases (integrable vs. caòtic) i l'estadística espectral quàntica constitueix un dels pilars de la teoria del caos quàntic i mostra com el caos clàssic es manifesta en propietats quàntiques observables.

5 Conclusions

Tant els experiments clàssics com les eines modernes ens porten a les mateixes conclusions.
A baixes energies existeix una tercera integral aïllada, les seccions de Poincaré mostren corbes invariants i la dinàmica és quasiperiòdica.
A energia intermèdia, els tors ressonants es trenquen de manera que apareixe illes regulars separades per mars caòtics, la dinàmica és mixta, amb transicions abruptes.
A altes energies la tercera integral deixa d'existir globalment ja que la regió ergòdica domina. Els indicadors variacionals i l'anàlisi espectral quantifiquen la transició i classifiquen famílies ressonants, cosa que mostra com el sistema es torna més caòtic amb l'augment de l'energia

Referències

(a) Hénon, M. & Heiles, C. (1964). *The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments.* The Astronomical Journal, 69(1), 73–79.

(b) Zotos, E. E. (2015). *Classifying orbits in the classical Hénon-Heiles Hamiltonian system.* Nonlinear Dynamics, 79(3), 2783–2793.

(c) Apunts de curs de Caos . *Sistemes dinàmics i teoria del caos.* Notes de curs basades en el contingut del professor Nils Berglund a l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL).

(d) Lee, J. (2022). *Manifolds and Differential Geometry.* AMS.