Teoria de Hamilton-Jacobi: Connexió amb l'òptica geomètrica i la mecànica ondulatòria

Guillem Arias

14 de desembre de 2025

Resum

En aquest treball es presenta una revisió detallada de la teoria de Hamilton-Jacobi en la mecànica clàssica, un mètode elegant per a la resolució de sistemes dinàmics mitjançant l'ús de transformacions canòniques. Partint del formalisme hamiltonià es dedueix l'equació de Hamilton Jacobi i es presenta la solució d'aquesta, la funció principal de Hamilton, S, que ens permetrà treballar amb variables canòniques constants, simplificant molt l'obtenció de les trajectòries del sistema. Es demostra a més, que la funció principal de Hamilton coincideix amb l'acció clàssica. Tot seguit s'exploren les profundes connexions d'aquest formalisme amb altres branques de la física, l'òptica geomètrica i la mecànica ondulatòria. S'estableix l'analogia formal amb l'òptica geomètrica on l'equació de Hamilton-Jacobi pren la forma d'una equació eikonal i les superfícies a S constant correspondran amb els fronts d'ona. Aquest paral·lelisme condueix de forma natural a la mecànica ondulatòria d'Erwin Schrödinger. Aquest treballa remarca el paper de la teoria de Hamilton-Jacobi, i en definitiva, els formalismes de la mecànica analítica com a unió entre la mecànica clàssica i la mecànica quàntica.

1 Teoria de Hamilton-Jacobi

Busquem una transformació canònica tal que les variables que obtenim siguin constants:

$$\{q_i, p_i\} \xrightarrow{\text{TC}} \{Q_i, P_i\} \tag{1}$$

Amb $\{q(t_0) = q_0, \; p(t_0) = p_0\}$ i $q_i = q_i(q_0, p_0, t)$, $p_i = p_i(q_0, p_0, t)$.

La condició perquè això es doni serà que el Hamiltonià transformat sigui igual a 0, és a dir $K = 0$.

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_i = \text{constant} \tag{2}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_i = \text{constant} \tag{3}$$

Aquesta condició s'aconsegueix imposant que la funció generatriu de la transformació satisfaci:

$$0 = K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{(on } F \text{ és la funció generatriu)} \tag{4}$$

De forma més general, n'hi haurà prou que K sigui constant.

Amb tot, l'equació de Hamilton-Jacobi per a la funció generatriu de segona espècie $F_2(q, P, t)$ serà:

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, \; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

Solucionant aquesta equació trobem la funció principal de Hamilton $S(q_1, \ldots, q_n, t)$. Així doncs, podem escriure:

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, \; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

on $S = S(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i les α_i són constants d'integració independents.

Podem escriure les noves variables canòniques en termes de la funció principal de Hamilton:

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad p_i = p_i(q, \alpha, t) \tag{7}$$

$$Q_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} \equiv \beta_i \quad \Rightarrow \quad \beta_i = \beta_i(q, \alpha, t) \tag{8}$$

Aleshores, invertint les relacions, obtenim la solució general del moviment:

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \qquad p_i = p_i(\alpha, \beta, t) \tag{9}$$

És fàcil veure que tant S com $S + \alpha$ (on α és una constant arbitrària) són solucions de l'equació, per tant, existeix una constant aditiva.

Finalment, veiem com podem expressar la funció principal de Hamilton:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = L \tag{10}$$

$$S = \int L \, dt + \text{constant} \tag{11}$$

Així, la funció principal de Hamilton coincideix amb l'acció clàssica calculada al llarg de les trajectòries reals del sistema.
Per un sistema la Hamiltoniana del qual no depengui del temps serà possible separar S en dues parts, una que només contindrà el temps, i un altre que només contindrà les coordenades generalitzades.
L'equació de Hamilton-Jacobi en aquest cas pendrà la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0 \tag{12}$$

I llavors podrem suposar una solució de la forma

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t \tag{13}$$

on W és la funció característica de Hamilton. Substituïnt a (12) ens queda

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = \alpha_1 \tag{14}$$

que ja no depèn del temps.
La funció característica de Hamilton genera una transformació canònica en que les noves coordenades són cícliques, tindrem llavors un sistema descrit per unes equacions del moviment la integració de les quals és trivial.
La transformació canònica generada per la funció característica de Hamilton $W(q_i, \alpha_i)$ ve definida per les relacions

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \qquad P_i = \alpha_i. \tag{15}$$

En les noves variables, la Hamiltoniana es redueix a

$$H = \alpha_1, \tag{16}$$

que és una constant del moviment i no depèn de les coordenades Q_i.

Les equacions de Hamilton prenen aleshores la forma

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}. \tag{17}$$

Com que H no depèn de Q_i, s'obté immediatament

$$\dot{P}_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_i = \alpha_i = \text{const.} \tag{18}$$

A més, com que $H = \alpha_1$, resulta

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \text{const.} \tag{19}$$

La integració de les equacions del moviment és, per tant, trivial i dóna

$$Q_i(t) = \omega_i\, t + Q_i(0). \tag{20}$$

Finalment, la solució del moviment en les coordenades originals s'obté invertint la transformació canònica mitjançant les relacions

$$Q_i = \frac{\partial W(q_i, \alpha_i)}{\partial \alpha_i},$$

la qual cosa permet expressar $q_i(t)$ en funció del temps i de les constants del moviment α_i.

2 Òptica Geomètrica

Amb l'objectiu de desenvolupar l'analogia entre la teoria de Hamilton–Jacobi i l'òptica geomètrica, considerarem sistemes en què la Hamiltoniana no depèn explícitament del temps i coincideix amb l'energia total del sistema. En aquest cas, la funció principal de Hamilton pot separarse en una part espacial i una part temporal,

$$S(q, P, t) = W(q, P) - Et, \tag{21}$$

on W és la funció característica de Hamilton.

En aquest règim estacionari, la funció W pot interpretar-se com l'acció clàssica calculada al llarg de la trajectòria real que connecta dos punts de l'espai de configuracions. Suposant que entre dos punts prou propers existeix una única trajectòria clàssica, la variació de W sota desplaçaments dels punts extrems ve donada exclusivament pels termes de contorn,

$$\delta W = \left[\sum_i p_i\, \delta q_i - H\, \delta t \right]_1^2. \tag{22}$$

D'aquesta expressió se'n dedueix immediatament que el moment canònic ve donat pel gradient de la funció característica,

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \tag{23}$$

i que W satisfà l'equació de Hamilton–Jacobi estacionària

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) = E. \tag{24}$$

Les superfícies definides per $W(q) = \text{constant}$ formen una família de superfícies equidistants respecte a l'acció. Les trajectòries clàssiques del sistema les tallen de manera transversal i coincideixen amb les corbes característiques associades a l'equació de Hamilton–Jacobi. Aquesta estructura geomètrica permet una interpretació directa en termes d'òptica geomètrica: les superfícies a W constant juguen el paper de fronts d'ona, mentre que les trajectòries mecàniques corresponen als raigs normals a aquests fronts.

Per a un instant de temps fixat, una superfície a S constant coincideix amb una superfície a W constant, de manera que l'evolució temporal d'aquestes superfícies pot interpretar-se com la propagació d'un front d'ona. Si ds és un desplaçament elemental normal al front i dt el temps necessari per recórrer-lo, la velocitat de propagació ve donada per

$$u = \frac{ds}{dt}. \tag{25}$$

Com que en un interval dt la funció W varia una quantitat $dW = E\, dt$, i al llarg del desplaçament ds es compleix

$$dW = \nabla W \cdot d\mathbf{s}, \tag{26}$$

s'obté

$$dt = \frac{ds}{|\nabla W|}. \tag{27}$$

El mòdul del gradient de W es determina a partir de l'equació de Hamilton–Jacobi estacionària. Per a una partícula no relativista sotmesa a un potencial $V(q)$,

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q), \tag{28}$$

i, utilitzant la relació $p^2 = (\nabla W)^2$, s'obté

$$(\nabla W)^2 = 2m\, [E - V(q)]. \tag{29}$$

Aquesta expressió és formalment idèntica a l'equació eikonal de l'òptica geomètrica.

D'aquí es dedueix que la velocitat de propagació del front d'ona és

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}. \tag{30}$$

Com que $E - V$ és l'energia cinètica T, i per a una sola partícula es compleix $2mT = p^2 = m^2v^2$, la velocitat pot expressar-se també com

$$u = \frac{E}{mv}. \tag{31}$$

Així, la funció característica de Hamilton $W(q)$ pot identificar-se amb l'eikonal de l'òptica geomètrica: el seu gradient determina la direcció de propagació dels raigs i el seu mòdul fixa la velocitat local del front d'ona. Aquesta identificació posa de manifest que la teoria de Hamilton–Jacobi constitueix el fonament matemàtic de l'analogia entre la òptica geomètrica i la mecànica i proporciona el punt de partida natural per a la descripció ondulatòria del moviment.

3 Mecànica ondulatòria

Postulem ara que els fronts d'ona amb els que em treballat fins ara són superfícies a fase constant d'una funció complexa depenent del temps adequada $\psi = \psi(q,t)$.
Assumim que aquesta funció pren la següent forma

$$\psi = R(q_i, t)e^{-2\pi i(wt - \phi(q_i)} \tag{32}$$

on w és la freqüència associada amb ψ. Llavors del nostre postulat tenim que hi ha una constant h tal que

$$h(wt - \phi(q_i)) = (Et - W(q_i)) \tag{33}$$

i això ha de valer per qualsevol q_i, t de manera que $E = hw$, $W = h\phi$.
Utilitzant el nostre càlcul anterior de la velocitat de propagació de l'ona podem escriure

$$u = \lambda w = \frac{E}{p} \to \lambda = \frac{h}{p} \tag{34}$$

Ara podem reescriure ψ

$$\psi = R(q,t)e^{\frac{i}{\hbar}(W - Et)} \tag{35}$$

on $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ és la constant de planck reduïda.
Si ara assumim que R no depèn de les coordenades generalitzades, i derivem aquesta darrera equació respecte a q_i trobem

$$\partial_{q_i}\psi = \frac{i}{\hbar}\psi\partial_{q_i}W \tag{36}$$

Recordant que el moment conjugat ve donat per

$$p_i = \partial_{q_i}W, \tag{37}$$

l'expressió anterior es pot escriure com

$$\partial_{q_i}\psi = \frac{i}{\hbar}p_i\psi, \tag{38}$$

la qual cosa constitueix una equació d'autovalors. Això suggereix que associem al moment p_i l'operador $\hat{p}_i$ que actua sobre les funcions d'ona ψ definit per

$$\hat{p}_i := \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{39}$$

Postulem que aquesta associació és vàlida també quan R depèn de les coordenades generalitzades q_i. Això suggereix igualment que associem a l'energia del sistema un operador hamiltonià $\hat{H}$ que actua sobre les funcions d'ona segons

$$\hat{H} := H(q_i, \hat{p}_i, t), \tag{40}$$

on s'entén que q_i i qualsevol funció d'aquestes coordenen actuen sobre ψ mitjançant multiplicació ordinària.
Suposem ara que R no depèn explícitament del temps. Derivant l'expressió

$$\psi = R(q,t)e^{\frac{i}{\hbar}(W - Et)} \tag{41}$$

respecte al temps, obtenim

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E\psi, \tag{42}$$

o equivalentment,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi. \tag{43}$$

Aquesta expressió suggereix que associem a l'energia del sistema l'operador

$$\hat{E} := i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{44}$$

Aquesta definició també es pot justificar tractant el temps com una coordenada addicional juntament amb les q_i. En aquest cas, l'operador corresponent al moment conjugat a la coordenada temporal seria

$$\hat{p}_{n+1} := \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{45}$$

i combinant-ho amb la definició anterior obtenim

$$\hat{p}_{n+1} + \hat{E} = 0, \tag{46}$$

en analogia amb la relació clàssica corresponent.
Finalment, si per a una funció d'amplitud general $R(q_i, t)$ acceptem ambdues associacions, és a dir, si identifiquem l'acció sobre ψ dels operadors $\hat{H}$ i $\hat{E}$, obtenim l'equació fonamental

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{47}$$

que, identificant h com la constant de Planck, correspon a l'equació de **Schrödinger**.

4 Mecànica Bohmiana com a interpretació quàntica en el marc de la teoria de Hamilton-Jacobi

La teoria de Hamilton-Jacobi proporciona un pont natural entre la mecànica clàssica i la mecànica quàntica. En particular, la seva connexió amb l'òptica geomètrica i l'analogia ondulatòria condueixen de manera directa a l'equació de Schrödinger. En aquest context, la mecànica bohmiana (o teoria de de Broglie–Bohm) pot ser entesa com una interpretació realista de la mecànica quàntica que aprofita plenament l'estructura hamiltoniana.

La mecànica bohmiana postula que les partícules tenen posicions ben definides en tot moment, les quals evolucionen segons una equació de moviment guiada per la funció d'ona. Aquesta funció d'ona, que satisfà l'equació de Schrödinger habitual, juga el paper d'un camp pilot que determina les trajectòries. Així, l'estat complet d'un sistema ve donat pel parell $(Q(t), \psi(t))$, on $Q(t)$ és la configuració de les partícules i $\psi(t)$ la funció d'ona.

$$\psi(q,t) = R(q,t)e^{\frac{i}{\hbar}S(q,t)},$$

la fase $S(q,t)$ satisfà una equació de Hamilton-Jacobi modificada:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(q) + Q(q,t) = 0,$$

on $Q(q,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$ és el potencial quàntic. Aques terme és el responsable de les desviacions respecte al que seria la dinàmica clàssica i configura els efectes quàntics al nostre sistema. D'aquesta manera podem entendre la mecànica Bohmiana com una extensió de la teoria de Hamilton-Jacobi, les trajectòries de les partícules son determinades per un potecial efectiu que inclourà la contribució quàntica.
En el marc d'aquesta interpretació de la mecànica quàntica les partícules segueixen trajectòries deterministes guiades per la fase S de la funció d'ona. D'acord amb les desigualtats de Bell i les correlacions EPR la nostra teoria serà no local i tindrà una dependència global de la forma ψ, Aquestes característiques queden codificades en el potencial quàntic.
La distribució estadística de les posicions vindrà donada per $|\psi|^2$ el que reproduirà les prediccions provades empíricament de la mecànica quàntica i la interpretació de Copenhague.

En definitiva la mecànica bohmiana ofereix una interpretació de la mecànica quàntica completament coherent i d'acord amb els resultats experimentals. La introducció del potencial quàntic transforma l'equació clàssica de Hamilton-Jacobi en una equació capaç d'explicar fenòmens intrínsecament quàntics com l'entrellaçament.
D'aquesta manera em vist com la teoria de Hamilton-Jacobi no només serveix com a un fonament matemàtic per a una analogia entre mecànica clàssica i altres capms de la física sinó que proporciona el marc conceptual per a una interpretació de la mecànica quàntica que pretén una transició suau de la mecànica clàssica al món quàntic.

Referències

(a) Butterfield, J. (2003). *On Hamilton-Jacobi Theory as a Classical Root of Quantum Theory.* arXiv:quant-ph/0210140v2.

(b) Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics.* Addison-Wesley, 2a edició.

(c) Tumulka, R. (2019). *Bohmian Mechanics.* arXiv:1704.08017v3 [quant-ph].

(d) Apunts de l'assignatura Mecànica Teòrica. *Curs impartit per Alberto Manrique, semestre de tardor 2025–2026.* Universitat de Barcelona.