

# Sistemes dinàmics i teoria del caos

Guillem Arias

Octubre 2024

## Contents

<b>1 Exemples de sistemes dinàmics no lineals</b>	<b>3</b>
1.1 Mecànica . . . . .	3
1.1.1 Pèndol forçat i l'aplicació estàndard . . . . .	3
1.1.2 El billar . . . . .	5
1.2 Sistemes Dissipatius: Turbulència . . . . .	6
1.2.1 Inestabilitat de Bénard-Rayleigh . . . . .	6
1.2.2 Model de Lorenz-Saltzman . . . . .	7
1.3 Altres models no lineals . . . . .	8
1.3.1 Model de població . . . . .	8
1.3.2 Reaccions químiques . . . . .	9
<b>2 Equacions diferencials i aplicacions</b>	<b>10</b>
2.1 Definicions. Nocions de base . . . . .	10
2.1.1 Existència i unicitat de les solucions . . . . .	10
2.1.2 Sistemes conservatius i dissipatius . . . . .	11
2.1.3 Punts singulars . . . . .	11
2.2 Punts singulars i la seva estabilitat . . . . .	11
2.2.1 Linearització . . . . .	11
2.2.2 Funcions de Liapunov . . . . .	15
2.2.3 Teorema de la varietat central . . . . .	16
2.3 Solucions periòdiques i la seva estabilitat . . . . .	16
2.3.1 Secció de Poincaré . . . . .	17
2.3.2 Model de Volterra . . . . .	18
2.3.3 Oscil·lador de Van der Pol . . . . .	19
<b>3 Bifurcaciones</b>	<b>20</b>
3.1 Varietat central unidimensional . . . . .	20
3.1.1 Bifurcació Saddle-Node . . . . .	21
3.1.2 Bifurcació Transcritica . . . . .	21
3.1.3 Bifurcació a Forquilla . . . . .	21
3.2 Varietat central bidimensional . . . . .	22
3.2.1 Bifurcaciones de Hopf: Casos supercrític i subcrític . . . . .	23
3.3 Bifurcaciones globals de cicles límit . . . . .	24
3.3.1 Bifurcació saddle-node de cicles . . . . .	24
3.3.2 Bifurcació de període infinit . . . . .	24
3.3.3 Bifurcació homoclínica . . . . .	24
3.4 Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	25
3.5 Bifurcaciones: Cas de les aplicacions . . . . .	25
3.5.1 Bifurcació subharmònica . . . . .	25
3.5.2 Bifurcació de Hopf i Torus invariant . . . . .	26

<b>4 Transició al caos</b>	<b>28</b>
4.1 Ruta subharmònica . . . . .	28
4.1.1 Bifurcations subharmòniques . . . . .	28
4.1.2 Universalitat i grup de renormalització . . . . .	30
4.2 Intermitències . . . . .	30
4.2.1 Intermitència I . . . . .	31
4.2.2 Intermitència II . . . . .	31
4.2.3 Intermitència III . . . . .	31
4.3 Rutes quasi-periòdiques . . . . .	32
4.3.1 Aplicació del cercle . . . . .	32
4.3.2 Blocatge de freqüències . . . . .	33
<b>5 Caos</b>	<b>35</b>
5.1 Diagnòstic del caos . . . . .	35
5.1.1 Espectre de potència . . . . .	35
5.1.2 Sensibilitat a les condicions inicials. Exponents de Liapunov . . . . .	36
5.2 Atractors estranys . . . . .	37
5.2.1 Fractals . . . . .	38
5.3 Mesures invariants . . . . .	38
5.3.1 Aplicació del forner . . . . .	39
5.3.2 Multifractals . . . . .	40
5.3.3 Aplicació tenda de campanya . . . . .	41
5.4 Aplicació de ferradura i punts homoclínnics transversals . . . . .	42
5.5 Mecànica Clàssica . . . . .	43
5.5.1 Introducció . . . . .	43
5.5.2 Sistemes integrables . . . . .	43
5.5.3 Sistemes integrables perturbats . . . . .	44
5.5.4 Billar i Teorema KAM . . . . .	45
5.6 Caos quàntic . . . . .	46

# 1 Exemples de sistemes dinàmics no lineals

## 1.1 Mecànica

La mecànica clàssica proporciona nombrosos exemples de sistemes dinàmics descrits per equacions diferencials ordinàries. Els problemes que es poden resoldre exactament són pocs i es troben discutits al curs.

Sovint provenen de problemes de dos cossos, on la força és funció de la distància entre els cossos. El més famós és el problema de Kepler, que descriu el moviment d'un planeta entorn del Sol.

Aquest model, però, és només una idealització del sistema solar, en què els planetes no interaccionen entre ells. El problema no resoluble més senzill és el problema dels tres cossos, per exemple, el sistema Terra-Sol-Lluna. Per descomptat, podem intentar treure avantatge del fet que la relació entre la massa de la Lluna i de la Terra és molt petita i provar mètodes perturbatius. Aquests són extremadament difícils d'emprar i han ocupat l'atenció dels millors físics i matemàtics els darrers 250 anys. Han sorgit dubtes seriosos sobre la possibilitat que aquests mètodes perturbatius convergeixin, i Poincaré, en particular, arriba a la conclusió premonitoria que el moviment no és simple, periòdic o quasiperiòdic, i de fet, podria ser irregular i mostrar gran sensibilitat a les condicions inicials, fent-ho pràcticament impracticable a llarg termini. Aquesta possibilitat de moviment caòtic per a sistemes amb pocs graus de llibertat ha estat ignorada durant 50 anys.

Aquest desconeixement s'explicava pel fet que no teníem, per estudiar aquests sistemes, ordinadors que poguessin revelar fàcilment aquests comportaments complexos. Aquesta explicació no és completament satisfactòria; de fet, és molt fàcil, quan es desitja, realitzar un sistema mecànic simple que presenti un comportament caòtic. Un exemple és el pèndol doble.

Un pèndol simple té dues posicions d'equilibri, una estable i una inestable. Quan s'acobla un altre pèndol, la posició d'equilibri inestable es visita molt sovint, i mentre que el moviment és oscil·latori a baixa amplitud, es torna extremadament complicat quan, per exemple, el pèndol doble rep una gran velocitat inicial. De fet, aquest moviment és llavors caòtic, cosa que es fa evident comparant el moviment de dos pèndols dobles amb condicions inicials gairebé idèntiques.

### 1.1.1 Pèndol forçat i l'aplicació estàndard

S'observen els mateixos fenòmens per a un pèndol forçat on el camp gravitatori actua a temps  $nT$ . L'equació del moviment s'escriu

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad (1.1)$$

Si

$$p = ml^2\dot{\theta} \quad (1.2)$$

és l'impuls, llavors les equacions del moviment esdevenen:

$$\begin{aligned} ml^2\dot{\theta} &= p \\ \dot{p} &= -mgL \sin(\theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Definint llavors  $\theta_n$  per l'angle en el temps  $nT$  i  $p_n^\pm$  per l'impuls en el temps  $nT \pm 0$  tenim:

$$p_n^+ = p_{n+1}^-$$

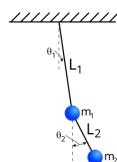


Figure 1: Imatge mostrant un pèndol doble

$$p_n^+ - p_n^- = \int_{nT-0}^{nT+0} \dot{p} dt = -mglT \sin(\theta_n)$$

$$ml^2(\theta_{n+1} - \theta_n) = \int_{nT}^{(n+1)T} p dt = Tp_n^+$$

la dinàmica es pot reduir llavors a l'estudi de l'aplicació estàndard

$$p_{n+1} = p_n - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi q_n) \quad (1.4)$$

$$q_{n+1} = q_n + p_{n+1} \quad (1.5)$$

amb

$$p_n = p_n^- \frac{T}{2\pi ml^2} \quad (1.6)$$

$$q_n = \frac{\theta_n}{2\pi} \quad (1.7)$$

$$k = \frac{T^2 g}{l} \quad (1.8)$$

Una realització física d'aquesta aplicació ve donada per un model simplificat del ciclotró:

$B$  = camp magnètic

$V \sin(\omega t)$  = Salt de potencial en un interval petit

$E_n$  = energia de la partícula en el temps  $t_n$  quan entra en la regió de potencial.

Les quantitats

$$p_n = \frac{\omega E_n}{eBc} \quad (1.9)$$

$$q_n = \frac{\omega t_n}{2\pi} \quad (1.10)$$

$$K = \frac{2\pi\omega V}{eB} \quad (1.11)$$

evolucionen segons les equacions (1.4) i (1.5) de l'aplicació estàndard.

L'aplicació estàndard apareix igualment en física del sòlid. Un model simple d'estructura incommensurable es deu a Frenkel-Kontorova.

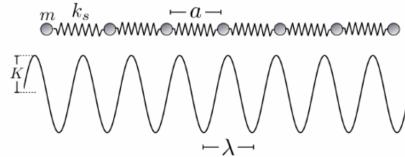


Figure 2: Model de Frenkel-Kontorova

Imaginem una cadena d'àtoms, acoblats per molles, dipositats a la superfície d'un cristall representat per un potencial

$$V(x) = \frac{k}{4\pi^2} \cos(2\pi x) \quad (1.12)$$

l'energia de la configuració llavors ve donada per

$$W = \sum_n \frac{1}{2} (q_n - q_{n-1})^2 + \frac{k}{4\pi^2} \cos(2\pi q_n) \quad (1.13)$$

Les configuracions d'equilibri donades per  $\frac{\partial W}{\partial q_n}$ , satisfan l'equació

$$(q_n - q_{n+1}) + (q_n - q_{n-1}) - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi q_n) = 0 \quad (1.14)$$

Aquestes equacions són equivalents a aquelles de l'aplicació estàndard si escrivim  $p_n = q_n - q_{n-1}$ . L'aplicació estàndard és més senzilla i es presta particularment bé a un estudi numèric. De fet, ens interessa el comportament de la seqüència

$$((q_0, p_0), (q_1, p_1), \dots, (q_n, p_n), \dots) \quad (1.15)$$

anomenada òrbita de condicions inicials  $(q_0, p_0)$ .

Per valors petits de  $k$  observem un moviment que s'assembla al del pèndol ordinari, moviments de nutació i rotació, però també algunes superfícies molt petites que l'òrbita sembla omplir densament (zones caòtiques). En augmentar  $K$ , veiem més clarament una estructura no trivial que es repeteix a totes les escales. Aquesta invariància d'escala o fractalitat és característica dels sistemes hamiltonians que presenten zones caòtiques.

A valors més grans de  $K$ , tot l'espai de fases apareix a primera vista densament ple d'òrbites i el sistema presenta una gran sensibilitat a les condicions inicials, fenomenologia característica del caos. El que caracteritza els sistemes hamiltonians és que les zones caòtiques, tot i que contenen tors a totes les escales, ocupen una fracció finita de l'espai de fases.

### 1.1.2 El billar

En mecànica, sobretot els darrers anys, el billar ha tingut un paper important.

Un billar simple correspon al moviment d'una partícula lliure en un recinte  $A$ , la partícula efectua xocs elàstics a les fronteres  $\partial A$ . Si  $A$  és un cercle o una el·ipse el moviment és regular i quasiperiòdic. Hi ha, però, formes tals que el moviment sigui completament caòtic. Dos exemples famosos són el billar de Sinai i l'estadi de Bunimovich.

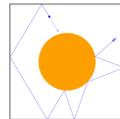


Figure 3: Billar de Sinai

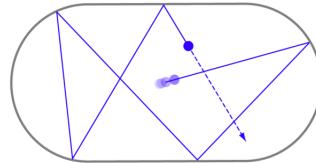


Figure 4: Billar de Bunimovich

Com que el moviment entre dos xocs amb la paret és senzill, podem reduir l'estudi de la dinàmica al de l'aplicació de Poincaré

$$(s_{n+1}, \cos(\theta_{n+1})) = T(s_n, \cos(\theta_n)) \quad (1.16)$$

on  $s_n$  representa la posició de la  $n$ -èsima col·lisió i  $\theta_n$  designa l'angle entre la velocitat i la tangent a la vora del punt de rebot.

Numèricament es veu clarament que les òrbites del billar sobre l'estadi omplen de manera densa l'espai de fases. El sistema és llavors ergòdic, que significa que el temps mitjà que passa l'òrbita en una regió  $A$  de l'espai de fases és proporcional a la superfície de  $A$ . L'ergodicitat del billar ha estat demostrada rigorosament per Sinai i Bunimovich, que també van demostrar la sensibilitat del sistema en relació a les condicions inicials. Després de 5 col·lisions, un petit error en les condicions inicials s'amplifica en un factor  $10^{12}$ .

## 1.2 Sistemes Dissipatius: Turbulència

Un sistema mecànic pot estar sotmès a forces de fricció. Quan aquestes són importants, el sistema es torna dissipatiu i poden aparèixer nous fenòmens. Els sistemes dissipatius són molt comuns. Presenten el fenomen fàcilment observable de la turbulència. Sabem que si un fluid flueix en una canonada cilíndrica amb un obstacle al mig, el moviment és regular a flux baix (flux laminar), mentre que a cabal alt es torna turbulent: es formen vòrtexs darrere de l'obstacle.

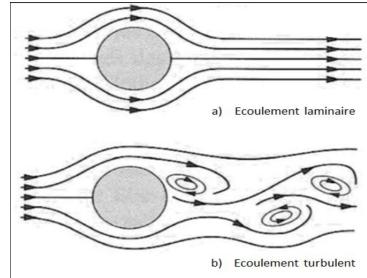


Figure 5: Imatge que mostra el flux laminar i el flux turbulent

Per descriure el flux d'un fluid, hem de conèixer el seu camp de velocitat  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , solució de l'equació de Navier-Stokes. La turbulència es caracteritza pel comportament realment aleatori de  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ .

Des del punt de vista mecànic, un sistema d'aquest tipus es pot considerar dissipatiu amb un nombre infinit de graus de llibertat, el que resulta en el fet que la dinàmica es descriu per equacions en derivades parcials.

Els fenòmens turbulents poden ser molt complicats. En general hi ha un caos espai-temporal, és a dir, un comportament irregular en  $\vec{x}$  i  $t$ .

Tanmateix, quan la turbulència és feble, el comportament espacial encara hauria de ser regular i només la dependència temporal de  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  pot mostrar un comportament irregular. Per il·lustrar aquests fenòmens, parlarem de la inestabilitat de Bénard-Rayleigh.

### 1.2.1 Inestabilitat de Bénard-Rayleigh

L'any 1900, Bénard informa de la següent observació: escalfant la part inferior d'una capa fina d'oli de balena, la cara superior de la qual està a l'aire lliure, s'observa que més enllà d'un valor crític del gradient de temperatura a través de la capa, es forma una estructura estacionària constituïda de cèl·lules hexagonals contínues.

La interpretació teòrica d'aquesta observació va ser iniciada per Rayleigh l'any 1916. Des de llavors, aquest fenomen ha estat àmpliament estudiat i constitueix un element fonamental per entendre els fenòmens de convecció a l'atmosfera.

Esquemàticament, tenim la situació següent (Figura 6): essent el fluid expandible, un augment local de temperatura fa que una petita regió de fluid sigui més lleugera. Com a resultat, la regió tendeix a pujar, però en fer-ho es refreda i tendeix a baixar. Aquest mecanisme produeix un moviment de convecció circular en el fluid. Aquest moviment es veu frenat per la difusió de la calor, que tendeix a refredar la petita regió, i per la viscositat del líquid. Per tant, hi ha competència entre diversos efectes.

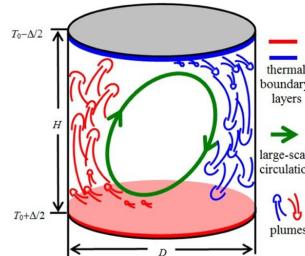


Figure 6: Esquema de la convecció de Rayleigh-Bénard

Quan la diferència de temperatura  $\Delta T$  és petita, els guanys de difusió i el perfil de temperatura són lineals i no varien amb el temps. Més enllà d'un valor crític de  $\Delta T$ , es formen rotllos de convecció. En determinades condicions, obtenim rodets rectilinis equidistants.

Per caracteritzar aquests sistemes introduïm dues quantitats adimensionals:  
El nombre de Prandtl  $\sigma$ , característic del fluid:

$$\sigma = \frac{\rho D_T}{\nu} \quad (1.17)$$

on

$\rho$  = densitat

$D_T$  = coeficient de difusió tèrmica

$\nu$  = viscositat

i el nombre de Reynolds  $R$ :

$$R = \frac{\alpha g d^3}{\nu D_T} \Delta T \quad (1.18)$$

on

$\alpha$  = coeficient de dilatació volúmic

$g$  = constant de gravitació

$d$  = espessor del fluid

Per un sistema infinitament estès, el nombre de Reynolds té un valor crític  $R_c = 1707$ . Una mica més enllà de  $R_c$  obtenim un règim estacionari.

Per congelar la disposició espacial dels rodets, que pot arribar a ser molt complexa segons la geometria, es va plantejar utilitzar cel·les petites, per tal de limitar el nombre de rodets.

### 1.2.2 Model de Lorenz-Saltzmann

El model de Lorenz es basa en les equacions de l'hidrodinàmica un poc simplificades, en unitats apropiades:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{D\vec{v}}{Dt} = \Delta \vec{v} - \nabla p + \theta \hat{z} \quad (1.19)$$

que és l'equació de Navier-Stokes

$$\frac{D\theta}{Dt} = \Delta\theta + Rv_z \quad (1.20)$$

que és l'equació de difusió

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.21)$$

que és l'equació de continuïtat.

L'operador

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \vec{v} \cdot \nabla \quad (1.22)$$

introduceix la no linealitat, tenim

$\vec{v}(\vec{x}, t)$  = camp de velocitats

$p(\vec{x}, t)$  = camp de pressions

$T(\vec{x}, t)$  = camp de temperatures

i la desviació del perfil de temperatures  $\theta(\vec{x}, t)$  ve definida per:

$$T(\vec{x}, t) = T_0 + \frac{\Delta T}{2} \left( 1 - \frac{z}{d} \right) + T_1 \theta(\vec{x}, t) \quad (1.23)$$

els dos primers termes corresponen al perfil sense convecció. Idealitzem el problema assumint que el sistema s'estén infinitament en la direcció  $y$ , el que condueix a només tenir dependència espacial en  $x$  i  $z$ , que la velocitat en l'eix  $y$  sigui 0 i que tots els rotllos siguin paral·lels.

Podem satisfer l'equació de continuïtat escrivint  $v_x = -\partial_z \psi$ ,  $v_z = -\partial_x \psi$ , llavors, desenvolupant  $\psi$  i  $\theta$  en sèries de Fourier respecte a  $(x, z)$  observem que tots els termes excepte tres tendeixen asymptòticament cap a 0.

Aquestes tres variables mostren un comportament irregular, no periòdic. Per tant, Lorenz va decidir

retenir directament només aquests tres termes i estudiar l'equació resultant.

Això equival a escriure

$$\psi = \sqrt{2} \frac{(\pi^2 + q^2)^2}{\pi q} X(t) \cos(\pi z) \sin(qx) \quad (1.24)$$

$$\theta = \sqrt{2} \frac{(\pi^2 + q^2)^3}{\pi q^2} Y(t) \cos(\pi z) \cos(qx) + \frac{(\pi^2 + q^2)^3}{\pi q^2} Z(t) \sin(2\pi z) \quad (1.25)$$

En relació al temps  $t' = (\pi^2 + q^2)t$ , les equacions (1.19), (1.20), (1.21), esdevenen, deixant de banda tots els termes que no reproduueixen la forma (1.24), (1.25):

$$\dot{X} = \sigma(Y - X) \quad (1.26)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (1.27)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (1.28)$$

amb

$$r = \frac{q^2}{(\pi^2 + q^2)^3} R \quad (1.29)$$

$$b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + q^2} \quad (1.30)$$

$X$  mesura la velocitat angular del rotlle,  $q = \frac{2\pi}{\lambda}$

Els termes en  $x$  de  $\psi$  i en  $y$  de  $\theta$  són els primers modes que es desenvolupen quan es crea inestabilitat, com ja havia trobat Rayleigh.

Per  $r < 1$ ,  $(x, y, z)(t)$  tendeixen a 0 amb  $t$  tendint a infinit, no tenim convecció, només difusió de la calor. Es pot veure que la primera inestabilitat apareix a partir de  $r = 1$  doncs si  $r_1 < r < 1$ ,  $(x, y, z)(t) \rightarrow (x_\infty, y_\infty, z_\infty) \neq 0$  amb  $t$  tendint a infinit que es correspon a l'aparició dels rodets.

S'aconsegueix el valor mínim d' $R$  per  $q^2 = \frac{\pi^2}{2}$  o bé per una longitud d'ona  $2\sqrt{2}$  que correspon al valor crític  $R_c = 1707$  de Rayleigh.

Lorenz pren llavors per  $b$  el valor  $b = \frac{8}{3}$ ,  $\sigma$  és un paràmetre fix i  $r$  un paràmetre controlat.

Per exemple, per  $\sigma = 10$  i  $r = 28$  el model mostra una molt gran sensibilitat a les condicions inicials, és per tant un comportament irregular imprèdictible.

Resulta que a llarg termini, les trajectòries s'aproximen a un objecte estrany, objecte que no és una superfície, ni tampoc un volum, és un objecte fractal de dimensió 2,07.

Aquesta és la gran diferència amb el conjunt invariant de sistemes mecànics no dissipatius.

## 1.3 Altres models no lineals

### 1.3.1 Model de població

El model més simple de l'evolució d'una població és el model de Malthus.

Si  $n(t)$  és la mida de la població per un temps  $t$ , proposem l'equació:

$$\frac{dn}{dt} = kn(t) \quad (1.31)$$

que prediu un creixement exponencial catastròfic de la població.

Verhulst, intentant tenir en compte l'efecte inhibidor de la limitació dels recursos, proposa

$$\frac{dn}{dt} = An(t)(\theta - n(t)) \quad (1.32)$$

on  $A$  i  $\theta$  són paràmetres.

La solució és una corba en forma de S, que reproduceix bé l'efecte de la saturació i descriu bastant bé l'evolució de la població dels Estats Units als anys 30.

Pot semblar raonable reemplaçar les equacions diferencials per un mapa iterat. Obtenim llavors l'equació de la població  $x_n$  pel temps  $n\tau$  per  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (1.33)$$

que és l'aplicació o mapa logístic.

Aquest mapa logístic presenta, contràriament a l'equació diferencial, un comportament més complex en

tant a la variació del paràmetre  $\lambda$ .

Les solucions apareixen caòtiques en alguns casos. Sorprenentment, aquesta aplicació també descriu molts fenòmens de bifurcació, especialment els que apareixen en experiments de convecció.

Cal tenir en compte també que Volterra va aconseguir descriure el fenomen sovint observat de variacions periòdiques en la població d'espècies animals competidores mitjançant equacions diferencials no lineals.

### 1.3.2 Reaccions químiques

L'any 1958, Belousov observa, estudiant l'oxidació de l'àcid cítric amb el bromat de potassi, en presència d'altres compostos en solució aquosa, l'aparició d'oscil·lacions.

Aquestes es manifesten per l'alternança periòdica d'una solució incolora i després d'una de color groc a la proveta.

Zhabotinsky, al començament dels anys 60, dedica la seva tesi a l'estudi del mecanisme i les propietats d'aquesta reacció, la seva obra va romandre ignorada molt de temps, però seguint el desenvolupament en la termodinàmica dels processos irreversibles, i la descoberta d'oscil·lacions al nivell cel·lular en els éssers vius, es va entendre la importància d'aquesta descoberta.

Per tal de concentrar-nos en la dinàmica temporal de la reacció, busquem homogeneïtzar-la. Per a això utilitzem un reactor continu que agita l'espècie i proporciona un flux permanent de material de flux  $J$ .

Les quantitats variables són:

$J$  = Flux

$T$  = Temperatura

$C_l$  = Concentració de l'espècie  $l$  al reactor

$C_l^0$  = Concentració de l'espècie  $l$  al flux d'alimentació

Les equacions que descriuen la dinàmica de les espècies són de la forma:

$$\dot{C}_l = F_l(T, \{C_i\}) + J(C_l^0 - C_l) \quad (1.34)$$

on  $F(T, \{C_i\})$  és una funció polinòmica no lineal en  $\{C_i\}$ .

El flux  $J$  juga el rol de  $\Delta T$  en l'instabilitat de Bénard. És un paràmetre que mesura l'importància relativa dels efectes lineals en relació amb els efectes no lineals a les reaccions químiques.

## 2 Equacions diferencials i aplicacions

Els exemples que hem donat ens han demostrat que en un nombre determinat de casos, és possible descriure la dinàmica d'un sistema mitjançant equacions diferencials ordinàries no lineals o per aplicacions. És l'estudi d'aquests sistemes que s'endurà la nostra atenció.

Hem vist que el comportament a llarg termini d'un sistema pot ser de diferents tipus: estacionari, periòdic, quasiperiòdic i caòtic, segons certs paràmetres de control.

Nosaltres estudiarem essencialment règims asymptòtics de complexitat creixent.

### 2.1 Definicions. Nocións de base

Les equacions diferencials que estudiarem són de la forma

$$\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x}) \quad (2.1)$$

on

$$\dot{x}_i = X_i(\{x_j\}) \quad (2.2)$$

amb  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ , l'enter  $n$  denota el nombre de graus de llibertat del sistema dinàmic,  $R^n$  l'espai de fases.

Com  $\vec{X}(\vec{x})$  no depèn explícitament del temps, aparentment excloem els sistemes no autònoms, dels quals tanmateix tenim exemples físics interessants com el pèndol doble. De fet, si  $\vec{X}$  depèn periòdicament del temps, apareixerà sota la forma  $\omega t$ . Llavors posarem  $\varphi_i = \omega_i t$ .

Sempre podem posar en la forma (2.1) totes les equacions diferencials on apareixen derivades d'ordre més elevat respecte al temps. Si l'equació conté les derivades fins a ordre  $k$  respecte al temps, tindrem un sistema amb  $kn$  graus de llibertat, definint  $\vec{y} = (\vec{x}, \vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(k-1)})$  l'equació  $\dot{\vec{y}} = \vec{Y}(\vec{y})$ .

Un exemple clàssic sobre com procedir ens és proporcionat pel pas en mecànica d'equacions de Newton, contenint  $\vec{x}$ ,  $\dot{\vec{x}}$  a les equacions de Hamilton, que descriuen la dinàmica de la parella  $(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ .

Nosaltres també estudiarem les aplicacions definides per l'equació

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{f}(\vec{x}_k) \quad (2.3)$$

on  $k = 1, 2, 3, \dots$  i  $\vec{x}_k \in R^n$ .

#### 2.1.1 Existència i unicitat de les solucions

Els teoremes clàssics proporcionen proves per l'existència d'una sola solució per l'equació (2.1) a temps curts.

L'existència d'una solució única per qualsevol temps és un problema global, netament més difícil. Però en tot el que segueix assumirem que aquest és el cas. En aplicacions pràctiques, podem considerar que si aquesta condició no es compleix, l'equació és una mala modelització del fenomen considerat.

Es pot llavors definir el semi-flux  $U_t$  per

$$\vec{x}_t = U_t(\vec{x}_0) \quad (2.4)$$

per a tot  $t$  major o igual a 0 amb

$$U_{t+s} = U_t \circ U_s \quad (2.5)$$

Una conseqüència important d'aquesta propietat d'unicitat global és que per tot punt de l'espai de fases passa una trajectòria i només una.

Donem dos contraexemples a aquestes propietats:

1.

$$\dot{x} = x^{1/3} \quad (2.6)$$

$$x_t = \pm \left( \frac{2}{3}t + a \right)^{3/2} \quad (2.7)$$

cap unicitat,

2.

$$\dot{x} = x^2 \quad (2.8)$$

$$x_t = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \quad (2.9)$$

no definit per  $t > \frac{1}{x_0}$ , per tant no tenim existència global.

### 2.1.2 Sistemes conservatius i dissipatius

Sovint trobem dos tipus d'equacions diferencials, aquelles que descriuen sistemes dissipatius i aquelles que descriuen sistemes conservatius. Les definim de la manera següent.

Sigui  $M$  un domini de l'espai de fases i sigui  $V(t)$  el volum de la seva imatge pel flux  $U_t(M)$ . Tenim llavors:

$$\frac{dV}{dt}(t) = \int_{U_t(M)} \operatorname{div} \vec{X}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.10)$$

Dit d'un altre manera,  $\operatorname{div} \vec{X}$  dona la taxa de creixement exponencial d'un petit volum:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \approx \operatorname{div} \vec{X} \Rightarrow V_t \approx V_0 e^{\operatorname{div} \vec{X} t} \quad (2.11)$$

Un sistema conservatiu és tal que per qualsevol  $\vec{x}$

$$\operatorname{div} \vec{X} = 0 \quad (2.12)$$

que és per exemple el cas d'un sistema hamiltonià.

Un sistema dissipatiu és un tal que per tot  $\vec{x}$

$$\operatorname{div} \vec{X} < 0 \quad (2.13)$$

### 2.1.3 Punts singulars

Un punt singular, o d'equilibri de l'equació diferencial (2.1) és un punt  $\vec{x}^*$  tal que  $\vec{X}(\vec{x}^*) = 0$ , correspon a una solució estacionària  $\vec{x}_t = \vec{x}^*$  de l'equació, és llavors un punt fix del semi-flux  $U_t(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$ .

En el cas d'una aplicació, el punt singular serà un punt fix  $\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$ .

La importància dels punts singulars ve donada pel següent teorema que Arnold anomena teorema fonamental de les equacions diferencials.

**Teorema 1** *Donat un entorn suficientment petit d'un punt no singular, existeix un canvi de coordenades  $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$ , ( $C^r$  l'inversa del qual és  $C^r$  si  $\vec{X}(\vec{x})$  és  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ) tal que l'equació en  $\vec{y}$  esdevé:*

$$\dot{y}_1 = 1 \quad (2.14)$$

$$\dot{y}_j = 0, \quad j = 2, \dots, n \quad (2.15)$$

Dit d'un altre manera, les trajectòries són corbes localment paral·leles.

Tenint en compte això, és natural estudiar les trajectòries entorn als punts singulars.

## 2.2 Punts singulars i la seva estabilitat

### 2.2.1 Linearització

La idea natural per estudiar el comportament de les solucions al veïnatge d'un punt singular  $\vec{x}^*$  és linearitzar l'equació (2.1) entorn al punt. Escrivim doncs  $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}^*$ , i en primera aproximació ens porta a estudiar l'equació

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} \quad (2.16)$$

on  $A = \frac{D\vec{X}}{D\vec{x}}(\vec{x}^*)$  és la matriu  $n \times n$  d'elements  $A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(\vec{x}^*)$  (matriu Jacobiana).

La solució de l'equació (50) ve donada per

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}(0) \quad (2.17)$$

La matriu A té  $n$  valors propis complexos  $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ . Com que A és real, són de la forma  $\beta_j \pm i\gamma_j$ . Per tant, tenim l'avantatge d'escriure  $\vec{y} = \text{Re}\vec{z}$  i resoldre l'equació  $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$ :

$$\vec{y}(0) = \text{Re} \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{z}_j \quad (2.18)$$

i la solució és de la forma

$$\vec{y}(t) = \text{Re} \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\alpha_j t} \vec{z}_j \quad (2.19)$$

Podem descomposar l'espai de fases  $R^n$  en tres parts disjunes:

$E^-$  = punts de l'espai generats pels vectors propis  $\vec{z}_j$  tals que  $\text{Re}[\alpha_j] < 0$

$E^+$  = punts de l'espai generats pels vectors propis  $\vec{z}_j$  tals que  $\text{Re}[\alpha_j] > 0$

$E^0$  = punts de l'espai generats pels vectors propis  $\vec{z}_j$  tals que  $\text{Re}[\alpha_j] = 0$

i tenim

$$R^n = E^- \oplus E^+ \oplus E^0 \quad (2.20)$$

Aquesta descomposició és útil en el sentit següent:

Si  $\vec{y}(0) \in E^-$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{y}(t) = 0$  i  $\vec{y}(t) \in E^-$ ,  $\forall t$

Si  $\vec{y}(0) \in E^+$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{y}(t) = 0$  i  $\vec{y}(t) \in E^+$ ,  $\forall t$

Si  $\vec{y}(0) \in E^0$ ,  $\vec{y}(t) \in E^0$ ,  $\forall t$

Llavors podem dir que:

1.  $E^-$  és la varietat lineal estable associada al punt singular. Tota condició inicial sobre aquesta varietat s'aproxima al punt d'equilibri després d'un temps prou llarg. El moviment es contreu exponencialment en aquesta direcció.
2.  $E^+$  és la varietat lineal inestable associada al punt singular. Tota condició inicial sobre aquesta varietat serà exponencialment repel·lida del punt d'equilibri.
3.  $E^0$  és la varietat lineal central associada al punt singular; en aquest cas ens quedem en aquesta varietat mentre oscil·lem.

Aquestes consideracions segueixen sent vàlides amb algunes modificacions en el cas general, quan els valors propis de A no són tots diferents.

Mostrem algebraicament que qualsevol matriu es pot descompondre en dues parts:

$$A = S + N \quad (2.21)$$

$$[S, N] = 0 \quad (2.22)$$

on

$$S = \sum_{j=1}^m \alpha_j P_j \quad (2.23)$$

$$N = \sum_{j=1}^m N_j \quad (2.24)$$

Les projeccions  $P_j$  estan associades als  $m$  valors propis diferents de A ( $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$  i  $\sum_j P_j = I$ ). La dimensió de l'espai  $M_j = P_j R^n$  és  $m_j$ , que anomenem la multiplicitat algebraica del valor propi  $\alpha_j$ . Els operadors  $N_j$  són operadors nilpotents, és a dir, que  $N_j^{m_j} = 0$ . Observeixen les següents relacions:

$$N_j N_k = 0 \quad (2.25)$$

per  $j$  diferent de  $k$ ,

$$P_j N_k = N_k P_j = \delta_{jk} N_j \quad (2.26)$$

Cada  $N_j$  actua doncs de forma trivial als espais  $M_k$ ,  $k \neq j$  i la seva restricció a l'espai  $M_j$  pren, en una base adequada, la forma d'una matriu  $m_j \times m_j$ , formada de  $n_j$  matrius de Jordan.

Es pot llavors calcular fàcilment

$$e^{At} = e^{St} e^{Nt} = e^{Nt} \sum_j e^{\alpha_j t} P_j \quad (2.27)$$

com

$$P_j e^{N_k t} = P_j \quad (2.28)$$

per  $k$  diferent de  $j$  i

$$P_j e^{Nt} = P_j e^{N_j t} = P_j \left( I + N_j t + \cdots + \frac{N_j^{m_j-1}}{(m_j-1)!} t^{m_j-1} \right) \quad (2.29)$$

i finalment

$$\vec{y}(t) = \operatorname{Re} \sum_j e^{\alpha_j t} P_j \left( I + N_j t + \cdots + \frac{N_j^{m_j-1}}{(m_j-1)!} t^{m_j-1} \right) \vec{y}(0) \quad (2.30)$$

Veiem l'aparició de termes polinomials anomenats termes seculars pels astrònoms. No obstant això, les conclusions del cas anterior ( $m_j = 1$ ) es mantenen vigents: tenim una descomposició de l'espai en 3 varietats lineals disjunes.

$$R^n = E^- \oplus E^+ \oplus E^0 \quad (2.31)$$

$$e^{At} E^\pm \subset E^\pm \quad (2.32)$$

$$e^{At} E^0 \subset E^0 \quad (2.33)$$

$$E^\pm = \{ \vec{y} \mid \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{At} \vec{y} = 0 \} \quad (2.34)$$

amb la identificació

$E^-$  = varietat estable, punts de l'espai generats pels vectors propis associats a l'espectre de  $e^A$  a l'interior del cercle unitat

$E^+$  = varietat inestable, punts de l'espai generats pels vectors propis associats a l'espectre de  $e^A$  a l'exterior del cercle unitat

$E^0$  = varietat central, punts de l'espai generats pels vectors propis associats a l'espectre de  $e^A$  sobre el cercle unitat

Si el punt singular és completament estable ( $E^+ = E^0 = \{0\}$ ), diem que és un pou o punt atractiu.

Si el punt singular és completament inestable ( $E^- = E^0 = \{0\}$ ), diem que és una font o punt repulsiu.

Si té una varietat estable i una inestable però no varietat central, és un punt hiperbòlic.

## Linearització d'un sistema a temps continu

Per a sistemes continus, tenim una equació diferencial de la forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{X}(\vec{x})$$

on  $\vec{x} \in R^n$  i  $\vec{X}(\vec{x})$  és el camp vectorial. Volem analitzar l'estabilitat d'un punt singular  $\vec{x}^*$  tal que  $\vec{X}(\vec{x}^*) = 0$ .

1. **Linearització (matriu Jacobiana):** Linearitzem el sistema al voltant del punt singular  $\vec{x}^*$  calculant la **matriu Jacobiana**  $J$  de  $\vec{X}(\vec{x})$  en  $\vec{x}^*$ :

$$J = \left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^*}$$

Aquesta matriu Jacobiana conté les derivades parcials de les components de  $\vec{X}$  respecte de les components de  $\vec{x}$ , avaluades en el punt  $\vec{x}^*$ .

### 2. Anàlisi dels valors propis de $J$ :

- Si tots els valors propis de  $J$  tenen **part real negativa**, el punt singular  $\vec{x}^*$  és **estable asymptòticament** (és a dir, les trajectòries s'acosten al punt amb el temps).

- Si algun valor propi de  $J$  té **part real positiva**, el punt és **inestable** (les trajectòries s'allunyen del punt).
- Si algun valor propi té **part real zero**, l'estabilitat és més complexa d'analitzar amb només la linealització, i pot ser necessari un anàlisi de Lyapunov o un estudi no lineal més profund.

### Linearització d'un sistema a temps discret

Pel cas dels sistemes discrets, tenim una seqüència de punts que evoluciona segons

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n) \quad (2.35)$$

on  $\vec{x} \in R^n$  i  $\vec{f}$  és la funció que defineix el sistema.

Volem estudiar l'estabilitat d'un punt fix  $\vec{x}^*$  tal que  $\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$ .

1. **Linearització (matriu Jacobiana):** Al voltant del punt fix  $\vec{x}^*$ , calculem la **matriu Jacobiana** de  $\vec{f}$  evaluada en  $\vec{x}^*$ :

$$J = \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^*}$$

2. **Anàlisi dels valors propis de  $J$ :**

- Si **tots els valors propis de  $J$**  es troben **dins del cercle unitari** (és a dir, tenen mòdul menor que 1), el punt fix  $\vec{x}^*$  és **estable asymptòticament** (les iteracions convergeixen al punt fix amb el temps).
- Si **alguns valors propis de  $J$**  tenen **mòdul major que 1**, el punt fix és **inestable** (les iteracions divergeixen del punt fix).
- Si **alguns valors propis tenen mòdul exactament 1**, l'estabilitat és indeterminada amb aquesta anàlisi, i pot requerir un estudi no lineal addicional o una funció de Lyapunov discreta per arribar a conclusions.

### Linearització d'un sistema bidimensional

Si l'espai de fases és de dimensió 2, podem, per qualsevol cas, visualitzar el comportament prop del punt d'equilibri per les trajectòries solució de l'equació (2.16).

La matriu Jacobiana s'escriu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

On es poden diferenciar els següents casos segons la naturalesa dels valors propis, arrels del polinomi característic.

#### Arrels diferents $\lambda_1, \lambda_2$

La matriu és diagonalitzable, obtenim

$$\dot{x} = \lambda_1 x \quad (2.37)$$

$$\dot{y} = \lambda_2 y \quad (2.38)$$

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} x(0) \quad (2.39)$$

$$y(t) = e^{\lambda_2 t} y(0) \quad (2.40)$$

$$y = kx^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (2.41)$$

Si  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  tenen el mateix signe tenim un node, estable o inestable segons el signe de les arrels.

Si  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  tenen signes diferents tenim un punt hiperbòlic.

**Arrels complexes**  $\lambda = \alpha \pm \beta i$

Les solucions són llavors de la forma

$$x(t) = e^{\alpha t} (x(0) \cos(\beta t) - y(0) \sin(\beta t)) \quad (2.42)$$

$$y(t) = e^{\alpha t} (x(0) \sin(\beta t) + y(0) \cos(\beta t)) \quad (2.43)$$

Si  $\alpha \neq 0$  estable o inestable segons el signe d' $\alpha$ .

Si  $\alpha = 0$  tenim un centre o punt el·líptic.

**Arrels del tipus**  $\lambda = \frac{a+d}{2}$

Els vectors propis han de satisfer

$$\frac{a-d}{2}x + by = 0 \quad (2.44)$$

$$cx + \frac{d-a}{2}y = 0 \quad (2.45)$$

Si tenim  $a = d$ ,  $b = c = 0$ , la matriu és diagonalitzable per a qualsevol base, tenim un node degenerat, estable o inestable segons el signe de  $a$ .

En cas contrari, la matriu no serà diagonalitzable; a la base

$$\{\vec{e}_1 = (b, \frac{d-a}{2}), \vec{e}_2 = (0, 1)\} \quad (2.46)$$

la matriu esdevé

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

i obtenim

$$\dot{x} = \lambda x + y \quad (2.48)$$

$$\dot{y} = \lambda y \quad (2.49)$$

$$y(t) = y(0)e^{\lambda t} \quad (2.50)$$

$$x(t) = (x(0) + y(0)t)e^{\lambda t} \quad (2.51)$$

node impropri, estable o inestable segons el signe de  $\lambda$ .

## 2.2.2 Funcions de Liapunov

De tot això sorgeix el problema de saber si la no linearitat modifica o no els resultats. Considerem llavors el cas d'un punt singular estable. Podem distingir naturalment dues formes d'estabilitat. Un punt singular  $\vec{x}^*$  serà dit estable no linealment si és tal que tota solució que parteix d'un entorn del punt es mantindrà en l'entorn del punt per tots els instants posteriors. Aquesta és la bona noció física d'estabilitat.

Un punt crític és asimptòticament estable si a més

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^* \quad (2.52)$$

Un punt que no és estable és inestable. Això significa que almenys una trajectòria que comença en un punt en l'entorn de  $\vec{x}^*$  abandonarà l'entorn.

Cal notar que un punt inestable pot ser tal que totes les trajectòries que parteixen d'un entorn convergeixen cap a ell.

El conjunt dels punts que tendeixen cap a un punt singular estable s'anomena conca d'atracció.

Tenim el teorema fonamental de Liapunov:

**Teorema 2** Si el punt singular és linealment estable ( $\operatorname{Re}\alpha_j < 0 \forall j$ ), llavors el punt crític és asimptòticament estable. Si un dels valors propis té una part real positiva, és inestable.

La idea darrere del teorema es pot entendre simplement. Suposem que la matriu A té una base de vectors propis  $\vec{z}_j$ ,  $A\vec{z}_j = \alpha_j \vec{z}_j$ .

Podem descompondre

$$\vec{y} = \operatorname{Re} \sum_j \alpha_j \vec{z}_j \quad (2.53)$$

llavors la funció de Liapunov

$$V(\vec{y}) = \sum_j |\alpha_j|^2 \quad (2.54)$$

on  $V(\vec{y}) > V(0) \forall \vec{y} \neq 0$  i

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} V(\vec{y}_t) = \sum_j \dot{\alpha}_j \alpha_j^* + \dot{\alpha}_j^* \alpha_j = 2\operatorname{Re} \sum_j \dot{\alpha}_j \alpha_j^* \quad (2.55)$$

però  $\dot{\alpha}_j = \alpha_j \dot{\alpha}_j + o(\vec{y})$ , així

$$\dot{V} = 2 \sum_j \operatorname{Re} \alpha_j |\alpha_j|^2 + o(\vec{y}^2) < -2(\delta - \varepsilon V) \quad (2.56)$$

si  $\operatorname{Re} \alpha_j < -\delta \forall j$  i  $\vec{y}$  estan en un cert entorn de l'origen que determina el valor de  $\varepsilon > 0$ . Per tant  $V_t \leq e^{-2(\delta-\varepsilon)t} V_0$ , la qual cosa implica que

$$\vec{y}(t) = o(e^{-(\delta-\varepsilon)t}) \quad (2.57)$$

i per tant ens acostem exponencialment ràpid al punt d'equilibri. Podem interpretar el temps  $\tau$  donat per  $\tau^{-1} = \sup_j \operatorname{Re} \alpha_j$ , com un temps de relaxació del sistema cap a l'estat d'equilibri en l'aproximació lineal, doncs  $\vec{x}(t) - \vec{x}^* = o(e^{-t/\tau})$  quan  $\vec{x}(0)$  està molt a prop de  $\vec{x}^*$ .

### 2.2.3 Teorema de la varietat central

Què succeeix en el cas més general, en què el punt singular és hiperbòlic, o fins i tot, només té una varietat inestable? Podem esperar que les varietats lineals estable i inestable, que són hiperplans, es corbin sota l'efecte de la no linearitat i esdevinguin superfícies tangents a les varietats lineals corresponents. Però què passa amb la varietat central? El millor resultat general porta el nom de teorema de la varietat central:

**Teorema 3** *L'equació diferencial  $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x})$  té a l'entorn d'un punt singular  $\vec{x}^*$  3 varietats que passen pel propi punt:*

1. Una única varietat estable  $E^s$  que és tangent a la varietat  $E^-$  en  $\vec{x}^*$ .  
 $\vec{x}(t)$  tendeix a  $\vec{x}^*$  exponencialment ràpid quan  $t$  tendeix a infinit.
2. Una única varietat inestable  $E^i$  que és tangent a la varietat  $E^+$  en  $\vec{x}^*$ . Les trajectòries d'aquesta varietat s'allunyen exponencialment ràpid del punt singular.
3. Una varietat central  $E^c$  que és tangent a la varietat  $E^0$  en  $\vec{x}^*$ .  
El comportament de les trajectòries d'aquesta varietat està regit pels termes no lineals de l'equació. La varietat central és localment atractiva; si la solució es troba en un entorn de  $\vec{x}^*$  llavors tendeix cap a  $E^c$ .

Les varietats estable i inestable són analítiques si  $\vec{X}(\vec{x})$  ho és; la varietat central només serà  $C^\infty$ .

**Utilitat de la varietat central:** 1. Permet determinar l'estabilitat d'un punt singular quan l'anàlisi lineal no és suficient.

2. Permet reduir l'estudi del moviment a l'entorn de  $\vec{x}^*$  a la del moviment sobre la varietat central que habitualment és de petites dimensions.

## 2.3 Solucions periòdiques i la seva estabilitat

En el cas d'una aplicació  $\vec{x}_{k+1} = \vec{f}(\vec{x}_k)$ , una solució periòdica, de període  $p$ , és tal que

$$\vec{x}_k^* = \vec{x}_{k+p}^* \quad (2.58)$$

com

$$\vec{x}_{k+p} = \vec{f}(\vec{x}_{k+p-1}) = \vec{f}(\vec{f}(\vec{x}_{k+p-2})) = \dots = \vec{f}^p(\vec{x}_k) \quad (2.59)$$

$\vec{x}_k^*$  és un punt fix de l'aplicació  $\vec{f}^p$ :

$$\vec{x}_k^* = \vec{f}^p(\vec{x}_k^*) \quad (2.60)$$

El problema de l'estabilitat de l'òrbita es limita doncs al problema ja resolt de l'estabilitat de l'aplicació  $\vec{f}^p$ .

En el cas d'una equació diferencial  $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x})$ , una solució  $\gamma_t$  és periòdica de període  $T$  si

$$\gamma_{t+T} = \gamma_t \quad (2.61)$$

posem

$$\vec{y}_t = \vec{x}_t - \gamma_t \quad (2.62)$$

llavors

$$\dot{\vec{y}} = \vec{X}(\gamma + \vec{y}) - \vec{X}(\gamma) = \left( \frac{D\vec{X}}{D\vec{x}} \right) (\vec{x} = \gamma) \vec{y} + O(\vec{y}^2) \quad (2.63)$$

d'on l'equació d'ordre més baix

$$\dot{\vec{y}} = A_t \vec{y} \quad (2.64)$$

on la matriu  $A_t$  és periòdica amb període  $T$ :

$$A_{t+T} = A_t \quad (2.65)$$

### 2.3.1 Secció de Poincaré

Sigui  $\Sigma$  un hiperplà transversal a la trajectòria en  $\gamma_0 = p$ . Dit d'un altre manera,  $\Sigma$  és generat per un conjunt de vectors  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  tals que  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = \dot{\gamma}_0)$  sigui una base de  $R^n$ . Es pot per exemple prendre  $\Sigma$  perpendicular a  $\dot{\gamma}_0$ ; llavors  $\Sigma$  s'anomena secció de Poincaré.

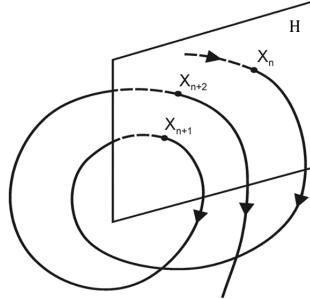


Figure 7: Secció de Poincaré

Sigui  $t(\pi_0)$  el temps necessari perquè la trajectòria resultant de  $p + \pi_1 \in \Sigma$  torni cap a  $\Sigma$ , al punt  $p + \pi_1$ . Si  $\pi_0 = \sum_{i=1}^n y_i e_i$  llavors  $t(\pi_0)$  és funció de  $(y_1, \dots, y_{n-1})$ .

$U_t(\vec{x})$  sent el flux associat a l'equació  $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x})$ , la dinàmica

$$p + \pi_1 = U_{t(\pi_0)}(p + \pi_0) \quad (2.66)$$

defineix una aplicació

$$\pi_1 = \Phi(\pi_0) \quad (2.67)$$

anomenada aplicació de Poincaré. Localment  $\Phi(\pi)$  està ben definida i és tan diferenciable com  $\vec{X}$ . Té un punt fix  $\pi = 0$  pel qual  $t(0) = T$ .

Considerem per un moment  $\pi_0$  i  $\pi_1$  com dos vectors de  $R^n$ . La matriu Jacobiana  $M$  de l'aplicació de Poincaré definida per

$$\pi_1 = M(0)\pi_0 + O(|\pi_0|^2) \quad (2.68)$$

s'obté linealitzant (2.66).

Ens cal abans considerar la teoria de Floquet de les equacions diferencials, en particular el següent teorema.

**Teorema 4** *Donada una equació diferencial lineal a coeficients periòdics de període  $T$ , llavors l'operador evolució  $V_t$ , solució de  $\dot{V}_t = A_t V_t$ ,  $V_0 = I$ , té la forma*

$$V_t = P(t) e^{tB} \quad (2.69)$$

$$P(t+T) = P(t) \quad (2.70)$$

$$P(0) = I \quad (2.71)$$

Procedim a linearitzar l'equació (2.66)

$$M(\pi_0) = \dot{U}_{t(\pi_0)}(p + \pi_0) \nabla t(\pi_0) + (DU)_{t(\pi_0)}(p + \pi_0) \quad (2.72)$$

en particular, per  $\pi_0 = 0$

$$M(0) = \dot{U}_T(p) \nabla t(0) + (DU)_T(p) \quad (2.73)$$

però

$$\dot{U}_T(p) = \dot{\gamma}_T = \dot{\gamma}_0 \quad (2.74)$$

i

$$(DU)_T(p) = V_T = e^{TB} \quad (2.75)$$

On  $\dot{\gamma}_0$  és vector propi de  $e^{TB}$ , de valor propi 1.

Tenim llavors que les matrius  $M(0)$  i  $e^{TB}$  tenen els mateixos valors propis; dit d'un altre manera, l'aplicació de Poincaré linearitzada al voltant del punt fix 0 és idèntica a  $e^{TB}|_\Sigma$ . Obtenim llavors la caracterització següent de l'estabilitat:

$E^-$  = varietat lineal estable de l'òrbita periòdica  $\gamma$  = subespai de  $\Sigma$  corresponent als valors propis de  $B_\Sigma$  en què la part real és negativa

$E^+$  = varietat lineal inestable de l'òrbita periòdica  $\gamma$  = subespai de  $\Sigma$  corresponent als valors propis de  $B_\Sigma$  en què la part real és positiva

$E^0$  = varietat lineal central de l'òrbita periòdica  $\gamma$  = subespai de  $\Sigma$  corresponent als valors propis de  $B_\Sigma$  en què la part real és nul·la.

### 2.3.2 Model de Volterra

Volterra proposa un sistema d'equacions diferencials ordinàries que permet modelitzar l'evolució cíclica de certes poblacions de depredadors i preses, sent  $N_1(t)$  = nombre de preses al temps  $t$ ,  $N_2(t)$  = nombre de depredadors al temps  $t$ . Per descriure l'evolució de les espècies Volterra introduceix les equacions següents:

$$\dot{N}_1 = k_1 N_1 - \lambda_1 N_1 N_2 \quad (2.76)$$

$$\dot{N}_2 = -k_2 N_2 + \lambda_2 N_1 N_2 \quad (2.77)$$

Els coeficients positius  $k_1$  i  $k_2$  descriuen respectivament la taxa de creixement de les preses en absència de depredadors i la taxa de mortalitat dels depredadors en absència de les preses. Els termes no lineals en  $N_1 N_2$  són proporcionals a la probabilitat que un depredador trobi preses.

Introduint les noves variables  $x = \frac{\lambda_2}{k_2} N_1$  i  $y = \frac{\lambda_1}{k_1} N_2$  el sistema es redueix a

$$\dot{x} = k_1 x (1 - y) \quad (2.78)$$

$$\dot{y} = -k_2 y (1 - x) \quad (2.79)$$

Existeix una constant del moviment  $K(x, y)$ ; el sistema és doncs integrable, les òrbites estan donades per les corbes  $K = \text{constant}$ .

Un raonament geomètric mostra que totes les òrbites del primer quadrant  $x, y > 0$  estan tancades i per tant corresponen a solucions periòdiques.

Els punts d'equilibri  $N_1^* = \frac{k_2}{\lambda_2}, N_2^* = \frac{k_1}{\lambda_1}$  corresponen a la mitjana temporal de les poblacions.

### 2.3.3 Oscil·lador de Van der Pol

Un bonic exemple de l'ús de la noció de secció de Poincaré apareix en l'estudi de l'oscil·lador forçat de Van der Pol.

L'idea de Van der Pol per descriure un oscil·lador forçat, motivada per l'estudi dels circuits elèctrics, consisteix en modificar l'equació de l'oscil·lador lineal per tal de desfer-se de l'invariant per dilatació, introduir una font continua d'energia que compensa les pèrdues per fregament viscós i limitar l'augment d'energia ocasionat per la taxa de fregament negativa.

Van der Pol proposa llavors prendre un coeficient de fregament de la forma:

$$\gamma(\theta) = -\gamma_0 \left( 1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right) \quad (2.80)$$

amb  $\gamma_0 > 0$ , donant lloc a l'equació

$$\ddot{\theta} + \gamma(\theta)\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad (2.81)$$

que en les unitats adequades

$$\ddot{\theta} - (\varepsilon - \theta^2)\dot{\theta} + \theta = 0 \quad (2.82)$$

on  $\varepsilon = \frac{\gamma_0}{\omega}$ . Aquesta equació equival a un sistema de primer ordre

$$\dot{x} = y - \left( \frac{x^3}{3} - \varepsilon x \right) \quad (2.83)$$

$$\dot{y} = -x \quad (2.84)$$

Sigui  $C$  la corba de l'equació  $y = \frac{x^3}{3} - \varepsilon x$ ; a  $C$  tenim  $\dot{x} = 0$ .

L'anàlisi local mostra que l'origen és un punt fix inestable. A grans distàncies de l'origen, al contrari, la dissipació és positiva, llavors és atret per l'origen.

Prenem doncs com a secció de Poincaré l'eix dels  $y$  positius; l'aplicació de Poincaré  $y_1 = \Phi(y_0)$  és tal que no tenim ... >  $y_3 > y_2 > y_1$ , ni tampoc ... <  $y_3 < y_2 < y_1$  perquè les trajectòries no es tallin dins l'espai de fases.

Una òrbita periòdica correspon a un punt fix de l'aplicació; es pot raonar que llavors existeix una òrbita periòdica asymptòticament estable anomenada cicle límit.

Una de les prediccions més remarcables del model és l'existència d'oscil·lacions de relaxació, on un moviment lent és seguit d'un moviment més ràpid independent de les condicions inicials.

Apareixen en el límit en què el paràmetre  $\varepsilon$  és molt gran.

Efectuant un canvi de variable  $x = \sqrt{\varepsilon}X$ ,  $y = \varepsilon^{3/2}Y$ ,  $t = \varepsilon\tau$  les equacions (2.83) i (2.84) esdevenen

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \dot{X} = Y - \frac{X^3}{3} + X \quad (2.85)$$

$$\dot{Y} = -X \quad (2.86)$$

Quan  $\varepsilon = \infty$  ens desplaçem a la corba  $\Gamma$  d'equació  $Y = \frac{X^3}{3} - X$ , donat que  $d\tau = -\frac{dY}{X}$  a  $\Gamma$

$$d\tau = - \left( \frac{X^2 - 1}{X} \right) dX \quad (2.87)$$

Aquestes oscil·lacions de relaxació s'observen sovint en els éssers vius, on sovint ens trobem amb moviments periòdics estables, el període dels quals és independent de les condicions inicials, un dels fenòmens més notables derivats de la no linealitat de la dinàmica dels sistemes no conservatius. En els sistemes mecànics, de fet, hi pot haver una gran quantitat de solucions periòdiques, però depenen de manera crucial de les condicions inicials.

### 3 Bifurcaciones

Un dels fenòmens més comuns en sistemes no lineals és el de la bifurcació. Es tracta d'un canvi qualitatiu de les solucions, obtingut variant els paràmetres de control del sistema. Considerem l'equació diferencial

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \mu) \quad (3.1)$$

on  $\vec{x} \in D \subset R^n$ ,  $\mu \in R^p$  és un conjunt de  $p$  paràmetres i  $\vec{f}$  és  $C^r$  amb  $r$  major o igual a 2.

Assumint que  $\vec{x}^*(\mu)$  és un punt singular (punt fix o d'equilibri), llavors

$$\vec{f}(\vec{x}^*, \mu) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}^*, \mu) = A_{ij} \quad (3.3)$$

On la matriu  $A$  és la matriu Jacobiana evaluada en el punt fix.

Els punts d'equilibri depenen contínuament dels paràmetres  $\mu$  mentre que la matriu  $A$  no tingui valors propis amb part real nul·la. Aquesta és una simple conseqüència del teorema de la funció implícita. Si, en canvi, per un valor crític  $\mu = \mu_c$ , alguns d'aquests valors propis tenen la seva part real nul·la, poden coincidir diversos branços de punts singulars. Direm que  $(\vec{x}^*, \mu_c)$  és un punt de bifurcació.

Si apareix una nova solució, es diu que la bifurcació és directa o normal.

Com que  $A$  és real, en general hi ha  $r$  valors propis reals que poden anul·lar-se i  $m$  parelles de valors propis complexos conjugats les parts reals de les quals poden anul·lar-se. Direm que  $r + m$  és la codimensió de la bifurcació. És el nombre mínim de paràmetres que cal variar de manera genèrica per anul·lar les parts reals dels valors propis, i així provocar una bifurcació. És clar que les bifurcaciones més comunes seran les de baixa codimensió. Ens interessen aquí les bifurcaciones de codimensió 1, és a dir, produïdes per la variació d'un únic paràmetre, que denotarem com  $\varepsilon = \mu - \mu_c$ .

Són possibles dos casos:

1. Un valor propi real s'anul·la.
2. La part real d'una parella de valors propis complexos conjugats s'anul·la.

La varietat central associada al primer cas serà de dimensió 1, mentre que en el segon cas serà de dimensió 2. Els casos més complicats de bifurcaciones corresponen a un doble valor propi nul, un valor propi nul i dos amb conjugats imaginaris, i així successivament. Aquests casos, tanmateix, són menys genèrics i no els discussirem aquí.

El teorema de la varietat central ens mostra que podem separar les variables lentes (que corresponen al valor propi o a la parella de valors la part real dels quals s'anul·la) de les variables ràpides que poden ser eliminades adiabàticament. Ens podem limitar així al moviment de les variables lentes que es descriurà (en coordenades oportunes) per una o dues equacions en els dos casos.

Per simplificar la notació suposem que  $\vec{x}^* = 0$ , i es pot sempre reduir a aquest cas mitjançant una translació.

#### 3.1 Varietat central unidimensional

Primer discussim les bifurcaciones que impliquen un únic valor propi real igual a zero. La dinàmica sobre la varietat central unidimensional està governada per una equació de la forma

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad x \in R.$$

on  $\varepsilon \in R$ . Cal observar que els símbols són els mateixos però el significat és diferent ja que es referixen a la varietat central.

L'origen  $(0, 0)$  és un punt de bifurcació:

$$f(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0.$$

Per tant, en el cas genèric es pot expandir en sèrie de Taylor:

$$f(x, \varepsilon) = \varepsilon + ax\varepsilon + bx^2 + \dots$$

(per simplificar la notació suposem  $a = 1$ ). Es distingeixen tres casos:

### 3.1.1 Bifurcació Saddle-Node

Els punts fixos apareixen/desapareixen a la bifurcació. En unitats apropiades,

$$\dot{x} = \varepsilon + ax\varepsilon + bx^2.$$

Canvi de variable per  $y$  petit i  $a \neq 0$ , es fa l'expansió a l'ordre quadràtic obtenint

$$x = y(1 + a_2y),$$

$$\dot{y} = \varepsilon + by^2.$$

#### Exemple

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \varepsilon - y + x^2.$$

Per  $\varepsilon < 0$ , existeixen dos punts fixos  $(\pm\sqrt{-\varepsilon}, 0)$  (un estable i un hiperbòlic) que es coalescen i desapareixen per  $\varepsilon > 0$ .

### 3.1.2 Bifurcació Transcrítica

$$\dot{x} = x\varepsilon - x^2.$$

El punt fix persisteix però hi ha un canvi d'estabilitat.

### 3.1.3 Bifurcació a Forquilla

Si per raons de simetria  $f$  ha de ser imparell en  $x$ ,  $b = 0$ ,

$$\dot{x} = x\varepsilon - x^3.$$

**Exemple** Mostrem que el model de Lorenz té una bifurcació a forquilla per  $r = 1$ . Els valors propis de la matriu Jacobiana en l'origen són  $-b$  i

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{(1 + \sigma) \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 + 4\sigma(r - 1)}}.$$

Per  $r \approx 1$ ,  $\lambda_+ \approx \sigma(r - 1)$ . Com s'ha vist prèviament a la varietat central:

$$\dot{u} = \sigma(r - 1)u - \sigma u^3.$$

Per  $r > 1$ , neixen els dos punts fixos estables:

$$C^{\pm} = (\pm\sqrt{b(r - 1)}, \pm\sqrt{b(r - 1)}, r - 1).$$

### 3.2 Varietat central bidimensional

Les equacions del sistema són les següents:

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon), \quad x \in R^2. \quad (12)$$

on  $\varepsilon \in R$ . En variables complexes:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\varepsilon + i\omega)z + g(z, \bar{z}, \varepsilon), \\ \dot{\bar{z}} &= (\varepsilon - i\omega)\bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}, \varepsilon). \end{aligned} \quad (13)$$

La idea és la següent: eliminar els termes no lineals en  $g$  mitjançant un canvi de variable. Es demostra que això és possible només per als termes no ressonants, que oscil·len a freqüències diferents de  $\omega$ :

- Els termes quadràtics  $z^2, \bar{z}^2, z\bar{z}$  són sempre eliminables.
- Els termes cúbics són tots eliminables, excepte  $|z|^2z$ .

Existeix un canvi de variables  $z = Z + h(Z, \bar{Z})$  que transforma aquestes equacions en la forma:

$$\dot{Z} = (\varepsilon + i\omega)Z + F(|Z|^2)Z + R(Z, \bar{Z}, \varepsilon), \quad (14)$$

on  $F \in C$  i  $R(Z, \bar{Z}, \varepsilon) = O(Z^3)$ . Descartant  $R$  i assumint que  $F$  és lineal, és a dir,  $F(|Z|^2) = (\alpha + i\beta)|Z|^2$ , obtenim la forma normal de la bifurcació:

$$\dot{Z} = (\varepsilon + i\omega)Z + (\alpha + i\beta)|Z|^2Z. \quad (15)$$

Passant a coordenades polars  $Z = re^{i\varphi}$ , obtenim:

$$\dot{r} = r(\varepsilon + \alpha r^2), \quad (16)$$

$$\dot{\varphi} = \omega + \beta r^2. \quad (17)$$

De les equacions anteriors es dedueixen les propietats de la bifurcació de Hopf (també coneguda com a bifurcació d'Andronov-Hopf):

- Si  $\alpha < 0$ , el sistema admet una òrbita periòdica aïllada estable per a  $\varepsilon$  petit i positiu, propera a un cercle amb radi proporcional a  $\sqrt{\varepsilon}$  (cas supercrític).
- Si  $\alpha > 0$ , el sistema admet una òrbita periòdica aïllada inestable per a  $\varepsilon$  petit i negatiu, propera a un cercle amb radi proporcional a  $\sqrt{-\varepsilon}$  (cas subcrític).

En ambdós casos, les freqüències d'oscil·lació del cicle límit estan donades per  $\omega + O(\varepsilon)$ .

**Observacions** En la descripció feta es van fer algunes suposicions; en realitat:

- El cicle límit és el·líptic, no circular, i la seva forma es distorsiona quan ens allunyem del punt de bifurcació (equivalència topològica, no geomètrica).
- Els valors propis es mouen sobre línies horitzontals a mesura que varia  $\varepsilon$ , mentre que, en general, seran funcions de  $\varepsilon$  i creuaran l'eix imaginari amb pendent diferent de zero.

**Exemple 1: L'oscil·lador de Van der Pol** Les equacions del sistema són:

$$\dot{x} = y + \varepsilon x - x^3, \quad (18)$$

$$\dot{y} = -x. \quad (19)$$

Posant  $z = x + (\frac{\varepsilon}{2} - i)y$ , obtenim:

$$\dot{z} = (\varepsilon + i)z - \frac{1}{2}(z + \bar{z})^3.$$

Un mètode senzill per reduir a la forma normal és desconsiderar els termes cúbics, sota la hipòtesi que les oscil·lacions siguin sinusoidals sense harmòniques superiors:

$$\dot{z} = (2\varepsilon + i)z - \frac{1}{8}z|z|^2.$$

Hi ha un cicle límit estable per  $\sqrt{4\varepsilon}e^{it}$  en les variables originals.

**Exemple 2: Bifurcació de Hopf** Les equacions del sistema són:

$$\dot{x} = \varepsilon x - \omega y - (x^2 + y^2)x, \quad (1)$$

$$\dot{y} = \varepsilon y + \omega x - (x^2 + y^2)y, \quad (2)$$

$$\dot{z} = -z. \quad (3)$$

Per  $\varepsilon = 0$ , l'origen té una varietat central lineal que coincideix amb el pla  $(x, y)$ . En coordenades cilíndriques, les equacions es poden escriure com:

$$\dot{r} = r(\varepsilon - r^2), \quad (4)$$

$$\dot{\phi} = \omega, \quad (5)$$

$$\dot{z} = -z. \quad (6)$$

Aquest sistema descriu una bifurcació de Hopf. Cal destacar que el cicle límit és isòcron. En aquest cas, es pot calcular exactament l'aplicació de Poincaré triant qualsevol pla  $\varphi = \text{constant}$ . Integrant entre  $nT$  i  $(n+1)T$ , obtenim la següent aplicació:

$$r_{n+1} = P(r_n) = \dots$$

$$z_{n+1} = e^{-T} z_n [-2\varepsilon T \varepsilon]^{-1/2} [1 + e(r_n^2 - 1)].$$

Es pot dibuixar el gràfic de l'aplicació i demostrar que admet un punt fix estable que és la solució de  $r = P(r)$ , corresponent al cicle límit per  $\varepsilon > 0$ . Això es pot comparar amb el teorema de Floquet.

**Exemple 3: Bifurcació de Hopf en el model de Lorenz** L'estabilitat dels punts  $C^\pm$  ve donada pels valors propis de la matriu Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - 1 \mp \sqrt{b(r - 1)} & 0 & -b \\ \mp \sqrt{b(r - 1)} & 0 & -b \end{pmatrix}$$

El polinomi característic és:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

on  $A = \sigma + b + 1$ ,  $B = b(r + \sigma)$ , i  $C = 2b\sigma(r - 1)$ .

Busquem solucions per  $\lambda = i\omega$ , separant les parts real i imaginària:

$$\omega^3 = \omega B, \quad A\omega^2 = C \quad \Rightarrow \quad AB = C.$$

Resolem per  $r$ , amb  $\sigma > b + 1$ :

$$r = r_H = \frac{\sigma}{\sigma - b - 1}.$$

Això dóna els valors propis  $\lambda = 0, \pm i\sqrt{b(r + \sigma)}$ . Es demostra que és un cas subcrític: el càlcul no és elemental.

### 3.2.1 Bifurcacions de Hopf: Casos supercrític i subcrític

Com les bifurcaciones de forquilla, les bifurcaciones de Hopf poden ser supercrítiques o subcrítiques. El cas subcrític és sempre molt més dramàtic i potencialment perillós en aplicacions enginyerils. Després de la bifurcació, les trajectòries han de saltar cap a un atractor distant, que pot ser un punt fix, un altre cicle límit, infinit o, en tres dimensions, un atractor caòtic.

Com en el cas de la bifurcació de forquilla subcrítica, és útil considerar els termes no lineals d'ordre superior per obtenir una visió més global del sistema.

**Exemple 4: Model bidimensional ( $\alpha = 1$ )** Considerem l'exemple bidimensional següent:

$$\dot{r} = r(\varepsilon + r^2 - r^4), \quad (20)$$

$$\dot{\varphi} = \omega + \beta r^2. \quad (21)$$

La diferència important respecte al cas supercrític anterior és que el terme cúbic és desestabilitzant i tendeix a repel·lir les trajectòries lluny de l'origen.

Per  $\varepsilon > 0$  tenim dos atractors, un cicle límit estable i un punt fix estable a l'origen.

A l'augmentar  $\varepsilon$ , el cicle inestable es restringeix al voltant del punt fix. Una bifurcació de Hopf subcrítica es produeix per  $\varepsilon = 0$ , on el cicle inestable té amplitud zero i inclou l'origen, fent-lo inestable. Per  $\varepsilon > 0$ , el cicle límit de major amplitud es converteix de manera sobtada en l'únic atractor. Les solucions que abans oscil·laven prop de l'origen ara estan forçades a créixer en oscil·lacions de gran amplitud.

### 3.3 Bifurcacions globals de cicles límit

Els sistemes bidimensionals tenen quatre maneres comunes de crear o destruir un cicle límit. La bifurcació de Hopf és la més coneguda, mentre que les altres tres són més difícils de detectar perquè impliquen regions àmplies del pla de fases i no només l'entorn d'un sol punt fix. Aquestes són anomenades bifurcacions globals. En aquesta secció, es proposen alguns exemples de bifurcacions globals per a comparar-les entre elles i amb la bifurcació de Hopf.

#### 3.3.1 Bifurcació saddle-node de cicles

Una bifurcació en què dos cicles límit es coaleseixen i es destrueixen s'anomena una bifurcació fold o saddle-node de cicles, per analogia amb la bifurcació relacionada de punts fixos. Considerem novament l'equació

$$\dot{r} = r(\varepsilon + r^2 - r^4), \quad (21)$$

$$\dot{\varphi} = \omega + \beta r^2.$$

en la regió  $\varepsilon < 0$ . Per  $\varepsilon = -\frac{1}{4}$ , la primera equació té una bifurcació saddle-node.

#### 3.3.2 Bifurcació de període infinit

Considerem, per exemple,

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad (22)$$

$$\dot{\varphi} = \mu - \cos \varphi.$$

Per  $\mu \rightarrow 1+$ , el període divergeix i el cicle límit s'anihila en dos punts fixos (un estable i l'altre hiperbòlic).

#### 3.3.3 Bifurcació homoclínica

En aquest escenari, part d'un cicle límit s'aproxima cada vegada més a un punt hiperbòlic. En la bifurcació, el cicle toca el punt de sella i es converteix en una òrbita homoclínica. Aquesta és un altre tipus de bifurcació de període infinit; per evitar confusions, es pot anomenar bifurcació homoclínica.

Es troba un exemple en la solució numèrica del sistema:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu y + x - x^2 + xy.$$

La simulació mostra una bifurcació per  $\mu_c = -0.8645$ . Per  $\mu < \mu_c$ , un cicle límit passa prop de l'origen, que és un punt hiperbòlic (figura a). A mesura que  $\mu$  creix cap a  $\mu_c$ , el cicle límit augmenta l'amplitud (figura b) i col·lideix amb les varietats estables i inestables de l'origen, creant una òrbita homoclínica que connecta l'origen amb ell mateix (figura c). Per  $\mu > \mu_c$ , l'òrbita homoclínica es destrueix juntament amb el cicle límit (figura d).

(Un model on apareixen aquest tipus de bifurcacions és el pèndol forçat descrit al capítol 8.5 de Strogatz.)

### 3.4 Teorema de Poincaré-Bendixson

El teorema de Poincaré-Bendixson és un dels resultats centrals de la dinàmica no lineal. Aquest diu que les possibilitats dinàmiques en el pla fase són molt limitades: si una trajectòria està confinada a una regió tancada i limitada que no conté punts fixos, aleshores la trajectòria haurà d'apropar-se eventualment a una òrbita tancada. No és possible res més complicat. Aquest resultat depèn de manera crucial de la bidimensionalitat del pla. En sistemes de dimensions superiors ( $n > 2$ ), el teorema de Poincaré-Bendixson ja no s'aplica, i pot passar alguna cosa radicalment nova: les trajectòries poden anar voltant per sempre en una regió limitada sense establir-se en un punt fix o una òrbita tancada. En alguns casos, les trajectòries es poden veure atretes cap a un objecte geomètric complex anomenat atractor estrany, un conjunt fractal en el qual el moviment és aperiòdic i sensible a petits canvis en les condicions inicials. Aquesta sensibilitat fa que el moviment sigui imprevisible a llarg termini. Ara estem davant de la situació del caos. En parlarem aviat, però ara cal que aprenguem que el teorema de Poincaré-Bendixson implica que el caos mai no pot ocórrer en el pla de fase.

### 3.5 Bifurcations: Cas de les aplicacions

Considerem l'aplicació en  $R^n$

$$x_{k+1} = f(x_k, \varepsilon), \quad (23)$$

Es produeix una bifurcació quan la matriu Jacobiana  $A$  té un o més valors propis de mòdul 1. Per simplicitat, suposem que tots els altres valors propis de  $A$  tenen un mòdul estrictament més petit que 1. Tenim tres casos:

1. Un valor propi real igual a 1.
2. Un valor propi real igual a -1.
3. Dos valors propis complexos conjugats de mòdul 1,  $e^{\pm 2\pi i\theta}$ .

El primer cas és fàcil de resoldre, perquè és extremadament similar al cas de les equacions diferencials. La dinàmica sobre la varietat central està governada per l'equació tipus

$$x_{k+1} = x_k + G(x_k, \varepsilon), \quad G(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial G(0, 0)}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Desenvolupant en sèrie de Taylor, podem identificar les formes normals de les bifurcaciones més comunes. Per a la bifurcació node-sella, tenim

$$x_{k+1} = x_k + \varepsilon + ax_k^2; \quad (25)$$

per la bifurcació transcritica

$$x_{k+1} = (1 + \varepsilon)x_k + ax_k^2; \quad (26)$$

i per la bifurcació a forqueta:

$$x_{k+1} = (1 + \varepsilon)x_k + bx_k^3. \quad (27)$$

#### 3.5.1 Bifurcació subharmònica

Un cas nou en relació amb els fluxos, amb valor propi -1:

$$x_{k+1} = -(1 + \varepsilon)x_k + ax_k^2 + bx_k^3; \quad (28)$$

Canvi de variable  $x_n = y_k(1 + a_2y_k)$  i desestimat els termes d'ordre superior:

$$y_{k+1} = -(1 + \varepsilon)y_k + cy_k^3$$

Aquesta forma normal té una òrbita de període 2 per  $\varepsilon > 0$ , com es veu escrivint la segona iterada i desestimat els termes  $\varepsilon^2$  i  $\varepsilon y_k^3$ :

$$y_{k+2} = (1 + 2\varepsilon)y_k - cy_k^3 + \dots$$

L'aplicació té punts fixos 0 i  $\pm y^* = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{c}}$ . La seva estabilitat ve donada per:

$$(1 + 2\varepsilon) - 3cy^{*2} = 1 - 4\varepsilon + \dots$$

Aquesta bifurcació és anomenada de duplicació de període (period doubling), flip o bifurcació subharmònica. Depenent del signe de  $c$ , pot ser supercrítica si es crea un cicle estable de període 2, o subcrítica si una òrbita inestable de període 2 és destruïda. Existeix un criteri per establir-ho: Si  $f$  és de classe  $C^3$ , es defineix la derivada Schwartziana

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)}{3(f''(x))^2} - \frac{f'(x)}{2f'(x)}. \quad (29)$$

La bifurcació és supercrítica si la derivada Schwartziana de l'aplicació en l'origen és negativa, i subcrítica si aquesta derivada és positiva.

La bifurcació subharmònica té una interpretació interessant per a l'aplicació de Poincaré associada a una òrbita periòdica. Considerem, per exemple, el cas supercrític.

Per  $\varepsilon < 0$ , l'aplicació de Poincaré té un punt fix estable, la qual cosa significa que l'òrbita periòdica és estable. Per  $\varepsilon > 0$ , el punt fix és inestable i existeix una òrbita periòdica estable. En l'espai de fases, això significa que l'òrbita periòdica ha esdevingut inestable, però ha aparegut una nova òrbita periòdica estable. Si l'òrbita té període  $T$  per a  $\varepsilon = 0$ , la nova òrbita té un període proper a  $2T$ , o la meitat de la freqüència (la qual cosa explica el nom subharmònic donat a la bifurcació). Cal destacar que aquesta bifurcació requereix un espai de fases amb dimensió almenys tres, ja que en un moviment planar, la nova òrbita hauria d'intersecar-se.

### Exemple: L'aplicació logística

$$x_{k+1} = f(x_k) = rx_k(1 - x_k)$$

Punts fixos  $x = 0$ ,  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$  per  $r > 1$ :

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

- $f'(0) = r$ , valor propi 1 per  $r = 1$ ,  $\varepsilon = r - 1$
- $x_{k+1} = (1 + \varepsilon)x_k - x_k^2 + \dots$ , bifurcació transcritica,
- $f'(x^*) = 2 - r$ , valor propi  $-1$  per  $r = 3$ : Posant  $y_n = x_n - x^*$ ,  $\varepsilon = r - 3$ , bifurcació subharmònica.

$$y_{n+1} = -(1 + \varepsilon)y_n - 3y_n^2 + \dots$$

Es pot verificar directament l'existència d'una òrbita de període 2 calculant els punts fixos de la segona iterada  $x = f^2(x)$ , que és una equació de quart grau. Les solucions són  $0$ ,  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$  i

$$x^\pm = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r}$$

que són reals per  $r > 3$ . També es pot verificar l'estabilitat: considerant la regla de la derivada de la funció composta

$$\lambda = f'(x^+)f'(x^-) = 4 + 2r - r^2,$$

la condició  $|\lambda| < 1$  és satisfeta per  $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ .

### 3.5.2 Bifurcació de Hopf i Torus invariant

Finalment, considerem què passa quan dos valors propis creuen el cercle unitari en el pla complex. Aleshores hem d'estudiar l'aplicació del pla

$$x_{k+1} = f(x_k, \varepsilon), \quad (30)$$

en el cas de la matriu Jacobiana amb dos valors propis  $e^{\pm 2\pi i\theta}$  sobre el cercle unitari per  $\varepsilon = 0$ . Un canvi lineal adequat de variables transforma el sistema (30) en la forma

$$z_{k+1} = (1 + \varepsilon)e^{2\pi i\theta}z_k + g(z_k, \bar{z}_k, \varepsilon), \quad (31)$$

on  $g$  és un terme no lineal, que intentarem simplificar mitjançant la teoria de formes normals. Així, termes com  $z^2$  i  $z\bar{z}$  sempre es poden eliminar. Tanmateix, termes com  $\bar{z}^2$  només es poden eliminar si  $3\theta$

no és un enter. De la mateixa manera, termes de tercer ordre com  $z^3$  i  $z\bar{z}^2$  sempre es poden eliminar, però els termes com  $\bar{z}^3$  només es poden eliminar si  $4\theta$  no és un enter, mentre que el terme  $z^2\bar{z}$  mai es pot eliminar. Concloem que si  $e^{2\pi i\theta}$  no és ni una arrel cúbica ni quàrtica de la unitat,

$$e^{2\pi im\theta} \neq 1 \quad \text{per a } m = 3, 4,$$

existeix un canvi polinòmic de variables que transforma (31) en la seva forma normal.

Utilitzant coordenades polars  $Z_k = r_k e^{i\phi_k}$ , s'obté una aplicació de la forma

$$Z_{k+1} = (1 + \varepsilon)e^{2\pi i\theta} Z_k + (\alpha + i\beta)|Z_k|^2 Z_k, \quad (32)$$

$$r_{k+1} = (1 + \varepsilon)r_k + \alpha r_k^3, \quad \phi_{k+1} = \phi_k + 2\pi\theta + \beta r_k^2. \quad (33)$$

L'aplicació (33) descriu una bifurcació de forqueta per a la variable radial  $r$ . En funció dels signes de  $\alpha$ , es crearà o destruirà un cercle invariant amb un radi de l'ordre de  $\sqrt{\varepsilon}$ . Aquesta és la bifurcació de Hopf per a aplicacions i també és coneguda com a bifurcació de Neimark-Sacker.

En els casos fortament ressonants,  $\mu(0)_j = 1$  per  $j = 1, 2, 3$  o  $4$ , la situació és més complicada, i en general no hi ha cap corba invariant. Si existeix una corba invariant, la dinàmica sobre aquesta corba es descriu per una aplicació circular. La teoria d'aplicacions circulars és un tema immens per si mateix. A grans trets, es poden caracteritzar per un nombre de rotació, que mesura l'angle de rotació mitjà per iteració. Poden ocórrer dos casos:

- Si el nombre de rotació és racional, existeix una òrbita periòdica, que normalment atrau la majoria d'òrbites;
- Si el nombre de rotació és irracional, totes les òrbites són denses, i sota suposicions de suavitat adequades, l'aplicació és conjugada a una rotació.

Si l'aplicació de bifurcació és l'aplicació de Poincaré d'una òrbita periòdica  $\Gamma$ , el cercle invariant serà la intersecció d'un torus invariant amb la secció de Poincaré  $\Sigma$ . Si el nombre de rotació és irracional, les òrbites omplen aquest torus de manera densa. Aquestes s'anomenen òrbites quasiperiòdiques (amb dues freqüències), la qual cosa vol dir que qualsevol solució  $x(t)$  sobre el torus invariant es pot escriure com

$$x(t) = H(\omega t, \omega' t), \quad H(u+1, v) = H(u, v+1) = H(u, v), \quad (34)$$

on  $\omega/\omega'$  és igual al nombre de rotació irracional. A més dels punts, corbes i varietats invariants, hem trobat així un nou tipus de conjunt invariant que apareix bastant sovint en els sistemes dinàmics.

## Exemple

El mapa logístic amb retard 1 té una bifurcació de Hopf per  $r = 2$ :

$$x_{n+1} = 2(1 - x_n) + ry_n(1 - y_n), \quad (35)$$

$$y_{n+1} = x_n. \quad (36)$$

## 4 Transició al caos

Una qüestió que sorgeix de forma natural és la de saber si es pot observar alguna seqüència de bifurcaciones successives en variar el paràmetre de control. De fet, hi ha un límit a aquestes bifurcaciones, doncs, sabem experimentalment que a partir d'un cert valor de paràmetre observem turbulències, és a dir, caos.

La primera idea, de Landau i Hopf l'any 1944, era que el caos apareixia després d'infinites bifurcaciones de Hopf, creant comportaments quasi-periòdics amb un nombre cada cop més gran de freqüències independents.

Aquest enfocament va ser qüestionat per Ruelle i Takens l'any 1971, que van mostrar que genèricament el caos hauria d'aparèixer després d'observar un comportament quasi-periòdic amb tres freqüències.

A partir de llavors es van proposar i obtenir altres rutes cap al caos a partir de bifurcaciones successives en nombrosos sistemes.

En canvi, l'escenari de Landau-Hopf no s'ha confirmat experimentalment.

D'una certa manera, les rutes proposades corresponen totes a diferents maneres en què un valor propi d'un mode que es desestabilitza per bifurcaciones successives travessa el cercle unitat.

En general per al valor propi  $+1$  tenim una bifurcació *saddle-node* i l'escenari és intermitència I, per al valor propi  $-1$  tenim una bifurcació subharmònica, si és directa tindrem una cascada subharmònica, i si és inversa tindrem una intermitència III, finalment pel cas  $e^{\pm i\theta}$  tindrem bifurcaciones de Hopf, si és crítica tindrem l'escenari quasi-periòdic i si és subcrítica intermitència II.

### 4.1 Ruta subharmònica

Aquesta ruta cap al caos consisteix en una sèrie de bifurcaciones subharmòniques successives. Apareixen per valors  $\mu_n$ , a partir dels quals el caos comença. Aquesta ruta és molt sovint observada en sistemes fortement dissipatius.

Les conseqüències més remarcables són l'existència de característiques universals, independents de les propietats específiques del sistema.

#### 4.1.1 Bifurcaciones subharmòniques

Per tal de justificar l'estudi de les aplicacions, considerem l'aplicació unidimensional que descriu localment una bifurcació subharmònica.

$$x_{n+1} = -(1 + \epsilon)x_n + ax_n^2 + \dots \quad (4.1)$$

i neglijint els termes d'ordre cúbic, que és possible si  $a \neq 0$ . Escrivim

$$x_n = x^* + \left( \frac{3 + \epsilon}{a} \right) y_n \quad (4.2)$$

on  $x^* = \frac{2+\epsilon}{a}$  és el punt fix de l'aplicació, es pot reescriure sota la forma de l'aplicació logística

$$y_{n+1} = 4\mu y_n(1 - y_n) \quad (4.3)$$

amb  $\mu = \frac{3+\epsilon}{4}$ .

Quan  $\epsilon = 0$ , és a dir  $\mu = 3/4$ , té lloc una bifurcació subharmònica. Ara volem estudiar globalment aquesta aplicació, al veïnatge del punt fix  $y = 0$ . En prendre  $y \in [0, 1]$  i  $\mu \in [0, 1]$ , l'aplicació transforma el segment  $[0, 1]$  en ell mateix i per tant l'estudiarem sobre aquest interval.

Més generalment, veurem que és d'interès estudiar les aplicacions

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n) \quad (4.4)$$

on  $f_\mu$  és una família de funcions a un paràmetre definides a l'interval  $[0, 1]$  que el transformen en ell mateix, i posseeixen un únic màxim quadràtic  $\bar{x}$  és a dir tal que  $f(x) \sim f(\bar{x}) - a(x - \bar{x})^2$ . A més,  $f(0) = f(1) = 0$ . En el cas de l'aplicació logística  $\bar{x} = \frac{1}{2}$ .

En les aplicacions, quan  $\mu$  és petit només hi ha un punt fix estable  $x = 0$  i a mesura que  $\mu$  augmenta el punt fix perd estabilitat i un nou punt fix estable  $x^*$  apareix, aquest punt perd la seva estabilitat donant

lloc, mitjançant una bifurcació subharmònica a un cicle estable de període 2.

Sembla llavors que el fenomen es repeteix indefinidament fins que arriba a un cert valor de  $\mu_\infty$ . Per tal d'estudiar aquesta cascada de bifurcacions subharmòniques ens referirem al cas de l'aplicació logística.

Donem primer unes definicions.

Un cicle de longitud  $n$ , o una òrbita periòdica de longitud  $n$ , és un conjunt de punts fixes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de l'aplicació  $f^n(x) = f(f(\dots f(x) \dots))$  tals que  $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_1 = f(x_n)$ .

El cicle és estable si  $|f^{n'}(x_j)| < 1$ . Aquesta condició no depèn del punt  $x_j$  del cicle.

Una conseqüència elemental d'aquest fet és que tots els punts del cicle perdren la seva estabilitat en el mateix temps, quan el paràmetre  $\mu$  obté un valor tal que  $f_\mu^{n'}(x_j) = \pm 1$ , i en conseqüència, tots els punts fixos pateixen al mateix temps una bifurcació subharmònica si  $f_\mu^{n'}(x_j) = -1$ .

La teoria de l'estabilitat dels punts fixos ens mostra que l'apropament cap als punts fixos era exponencial quan  $|f^{n'}(x_1)| < 1$ . De fet, si  $|f^{n'}(x_1)| = 0$  s'aproximen encara més ràpidament, cicles tals s'anomenen superestables.

Tornem a l'anàlisi de l'aplicació logística. Per  $\mu \geq \mu_0 = \frac{1}{4}$  apareix un punt fix estable  $x^* = 1 - \frac{1}{4\mu}$  que esdevé superestable per  $\mu = \lambda_0 = \frac{1}{2}$  on  $x^* = \frac{1}{2}$  perquè  $f'(1/2) = 0$ .

Llavors  $x^*$  augmenta amb  $\mu$  i perd la seva estabilitat quan  $f'(x^*) = -1$  és a dir quan  $\mu = \mu_1 = \frac{3}{4}$ . En aquest moment pateix una bifurcació subharmònica i apareix un cicle estable de període 2( $x_+^*, x_-^*$ ).

En augmentar  $\mu$ ,  $x_-^*$  s'aproxima a  $1/2$  fins que  $1/2 = f^2(1/2)$  quan  $\mu = \lambda_1 = 0.809\dots$ , en aquest moment el cicle de període 2 és superestable ja que  $f'^2(x) = f'(f(x))f'(x) = 0$  si  $x = 1/2$ .

Com  $f^2(1/2)$  disminueix quan  $\mu$  augmenta, obtenim un valor  $\mu = \mu_2 = 0.862\dots$  on el cicle esdevindrà inestable,  $f^2(x_\pm^*) = -1$ , i una nova bifurcació subharmònica es produeix, creant un cicle de període 4.

Ens podem adonar que aquest procés es repetirà fins a l'infinít.

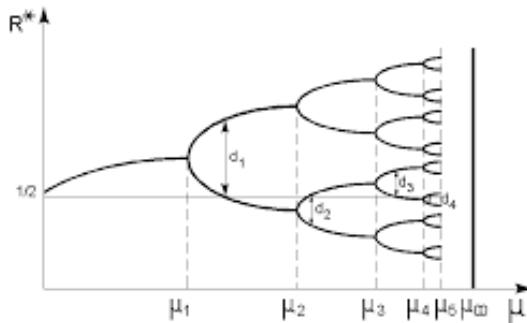


Figure 8: Diagrama de bifurcaciones esquemàtic de l'aplicació logística

Pel punt  $\mu = \mu_\infty$ , tenim un cicle de durada  $2^\infty$ , trobem numèricament que  $\mu_\infty = 0.89\dots$

Aquest mecanisme de doblar períodes a l'infinít necessita característiques que siguin generals, i no depenguin del fet que estem estudiant l'aplicació logística.

Per exemple, els punts  $\mu_n$  s'acumulen prop de  $\mu_\infty$  de forma exponencial.

Més precisament

$$\mu_n - \mu_\infty \sim \delta^{-n} \quad (4.5)$$

o

$$\frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n - \mu_{n-1}} \rightarrow \frac{1}{\delta} \quad (4.6)$$

amb

$$\delta = 4,669 \quad (4.7)$$

un número que no depèn de  $f$ , l'anomenada constant de Feigenbaum, una constant universal.

Si considerem les distàncies  $d_n$  entre els punts fixos trobem un altre constant universal.

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} \rightarrow -\alpha \quad (4.8)$$

amb

$$\alpha = 2.502\dots \quad (4.9)$$

### 4.1.2 Universalitat i grup de renormalització

L'idea qualitativa essencial que inspira aquest enfocament és l'autosimilitud.

Hem vist de fet que si ens restringim a un interval apropiat entorn al punt  $1/2$  la funció  $f^{2^{n-1}}$  s'assembla a la funció  $f^{2^n}$ .

Tanmateix, cal comparar les funcions per valors lleugerament diferents dels paràmetres.

Considerem la funció  $f^{2^{n-1}}$  quan el paràmetre  $\mu$  és igual a  $\lambda_n$ , és a dir, quan existeix un cicle de longitud  $2^n$  superestable, en l'interval  $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + d_n]$  on  $d_n = f_{\lambda_n}^{2^{n-1}}(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$  és la distància entre el punt  $1/2$  i el punt del cicle més proper.

Comparem aquesta funció a  $f^{2^n}$ , pel valor del paràmetre  $\lambda_{n+1}$  pel qual existeix un cicle superestable de longitud  $2^{n+1}$  contenint  $1/2$ , aquesta funció està restringida a l'interval  $[\frac{1}{2} + d_{n+1}, \frac{1}{2}]$ . Aquestes dues funcions són essencialment les mateixes, tret d'una inversió i una dilatació. Si superposem les funcions, i dilatem de manera apropiada les longituds, s'observa que esdevenen ràpidament idèntiques.

La universalitat es pot entendre pel fet que en restringir a intervals cada cop més petits entorn de l'origen, ja no veiem l'estructura global de  $f$ , únicament el comportament prop del màxim, on la natura quadràtica compta.

Aquestes consideracions suggereixen d'introduir la transformació de renormalització de funcions  $f$ :

$$(Tf)(x) = -\beta(f)f^2\left(-\frac{x}{\beta(f)}\right) \quad (4.10)$$

on les funcions  $f$  estan definides en l'interval  $[-1, 1]$ .

La propietat essencial de la transformació de renormalització és que  $f$  posseeix un cicle de longitud  $2j$  superestable si i només si  $Tf$  posseeix un cicle de longitud  $j$  superestable. La transformació divideix per 2 la longitud dels cicles.

Si és així, la transformació posseeix un punt fix, una funció  $g(x)$  tal que

$$Tg = g \iff g(x) = -\alpha g^2\left(-\frac{x}{\alpha}\right) \quad (4.11)$$

amb

$$-\alpha^{-1} = g(1) \quad (4.12)$$

Llavors aquesta funció posseeix els cicles de longitud  $2^n$ , llavors haurà de correspondre d'alguna manera al límit de les funcions  $f$ , degudament esglaorats cap al punt d'acumulació  $\mu_\infty$  de la cascada subharmònica. En aquest punt, totes les iteracions  $f^{2^n}$  esdevenen asymptòticament auto similars. Llavors podem essencialment

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T^n f_{\mu_\infty})(x) = g(x) \quad (4.13)$$

i operant arribem a

$$\frac{f_{\mu_\infty}^{2^{n+1}}(0)}{f_{\mu_\infty}^{2^n}(0)} \rightarrow -\frac{1}{\alpha} \quad (4.14)$$

on

$$f_{\mu_\infty}^{2^n}(0) \sim \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n \quad (4.15)$$

que essencialment ens dona  $d_n \sim \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n$

## 4.2 Intermitències

Observem sovint una transició cap al caos on les turbulències operen de la manera següent. En augmentar el paràmetre de control  $\mu$ , observem un règim periòdic.

Després, passant un valor crític  $\mu_c$ , s'observen oscil·lacions periòdiques durant un temps, i de sobte el comportament regular s'interromp, d'una manera aparentment aleatòria, per una bufada caòtica. Les bufades caòtiques tenen una durada de vida finita, i són de nou interrompudes per un comportament periòdic, així fins l'infinít.

Prop de  $\mu_c$  el temps que separa les bufades és aparentment aleatori i cada cop més gran que el període de les oscil·lacions. A mesura que  $\mu$  s'allunya de  $\mu_c$  el comportament oscil·lant regular desapareix, i finalment esdevé impossible de reconèixer.

Quan una bufada caòtica comença, al final d'una oscil·lació periòdic, aquesta darrera és inestable, doncs el multiplicador de Floquet, és a dir, el valor propi de l'aplicació de Poincaré atravessa el cercle unitat, segons com travessí el cercle unitat tindrem un tipus d'intermitència diferent.

### 4.2.1 Intermitència I

Aquest cas correspon a una bifurcació *saddle-node* inversa o directa. Sabem que la forma normal de la bifurcació és

$$x_{n+1} = \varepsilon + x_n + x_n^2 + \dots \quad (4.16)$$

aplicació que posseeix dos punts fixos, un estable i un inestable, si  $\varepsilon < 0$  i cap punt fix si  $\varepsilon > 0$ . Tanmateix, si  $\varepsilon$  és petit, existeix encara un canal estret que separa la gràfica de la funció de la diagonal, és a dir, les iteracions  $x_n$  del punt  $x_0$  passen molt temps.

Podem descriure llavors la dinàmica de  $x_n$  mitjançant una equació diferencial

$$\frac{dx}{dn} = \varepsilon + x^2 \quad (4.17)$$

que té per solució

$$x(n) = \varepsilon^{1/2} \tan(\varepsilon^{1/2}(n - n_0)) \quad (4.18)$$

Prenent  $c = \varepsilon^{1/2} \tan \phi$  trobem que la durada mitja de les oscil·lacions regulars serà

$$\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-1/2} \quad (4.19)$$

### 4.2.2 Intermitència II

Aquest cas correspon a una bifurcació de Hopf inversa, no hi ha hagut confirmació experimental fins ara i no la discutirem.

### 4.2.3 Intermitència III

Aquest és el cas d'una bifurcació subharmònica inversa, el valor propi travessa el cercle unitat per  $-1$ . Poc abans de la bifurcació, existeix una solució periòdica estable i una solució de doble període inestable. L'amplitud de la subharmònica s'amplifica, mentre que la solució periòdica disminueix, i de sobte una bufada caòtica i el procés es repeteix.

Ja hem derivat la forma normal de la bifurcació subharmònica inversa, escrivim llavors

$$x_{n+1} = -(1 + \varepsilon)x_n - x_n^3 \quad (4.20)$$

per la segona iteració

$$x_{n+1} = (1 + 2\varepsilon)x_n + 2x_n^3 \quad (4.21)$$

Quan  $\varepsilon > 0$  el terme en  $x_n^3$  allunyarà molt ràpidament el punt  $x_n$  de l'origen, portant-lo a la regió caòtica. De nou la dinàmica global haurà de tenir l'efecte de tornar a  $x_n$  al canal i el procés es repeteix.

El moviment lent de  $x_n$  cap al canal ve descrit per l'equació diferencial

$$\frac{dx}{dn} = x(\varepsilon + x^2) \quad (4.22)$$

sent

$$x(n) = \frac{x(0)e^{\varepsilon n}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 x(0)^2 - \varepsilon^2 x(0)^2 e^{2\varepsilon n}}} \quad (4.23)$$

$x(n)$  divergeix per un temps

$$n^* = \frac{1}{2\varepsilon} \ln \frac{1 + \varepsilon^2 x(0)^2}{\varepsilon^2 x(0)^2} \quad (4.24)$$

que es pot assemblar a la durada de les oscil·lacions regulars, de l'ordre  $\varepsilon^{-1}$

## 4.3 Rutes quasi-periòdiques

L'any 1971, Ruelle i Takens van proposar una ruta cap al caos a través d'unes quantes bifurcations successives de Hopf. La teoria, aclarida el 1978 amb Newhouse, prediu el següent escenari: règim estacionari, règim periòdic a una freqüència  $f_1$ , règim quasi periòdic a freqüències incommensurables  $f_1, f_2$ , règim quasi periòdic a 3 freqüències  $f_1, f_2, f_3$ , i després caos.

Més precisament, preveuen que el torus  $T^3$  pot, sota condicions força generals, esdevenir inestable i ser reemplaçat pel que es va anomenar atractor estrany sobre el qual el sistema mostra una gran sensibilitat a les condicions inicials.

A partir d'aleshores també hem observat altres vies cap al caos a través de la quasi periodicitat a dues freqüències, que corresponen a la destrucció d'un torus  $T^2$ . L'etapa intermèdia abans del caos és llavors el fenomen de bloqueig de freqüència, és a dir, el fet que per a determinats valors de paràmetres la relació de freqüències  $\frac{f_1}{f_2}$  esdevé racional.

### 4.3.1 Aplicació del cercle

Després de la bifurcació de Hopf, l'aplicació de Poincaré sobre el pla serà de la forma invertible

$$\theta_{n+1} = \theta_{n+1}(\theta_n, r_n) \quad (4.25)$$

$$r_{n+1} = r_{n+1}(\theta_n, r_n) \quad (4.26)$$

en coordenades polars.

Prop de la bifurcació el moviment estarà sobre el cercle  $r_n = \text{constant}$ . Mesurant els angles  $\theta_n$  en unitats  $2\pi$  tindrem  $\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$  amb  $\Omega = \frac{f_1}{f_2}$ .

Si  $\Omega$  és irracional els angles ompliran el cercle de forma densa quan  $n$  augmenta, el que correspon a un farciment de les trajectòries sobre el torus  $T^2$ .

Quan el paràmetre de control augmenta, hi haurà un acoblament significatiu entre  $r_n$  i  $\theta_n$ . Tanmateix, a causa de la dissipació, hi haurà una forta contracció radial de manera que l'atractor es mantindrà com una corba amb la topologia del cercle.

Per descriure el moviment sobre aquesta corba podem seguir utilitzant l'angle  $\theta_n$

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad (4.27)$$

Com l'aplicació de Poincaré és invertible, aquesta també ho serà, el que conduceix a  $f'(\theta) \neq 0$  per qualsevol  $\theta$ .

Veiem que  $f(\theta)$  té la forma

$$f(\theta) = \theta + \Omega + g(\theta) \quad (4.28)$$

on  $g(\theta)$  és una funció de període 1, que representa l'efecte de la no linealitat.

Agafant el primer terme de la sèrie de Fourier de  $g(\theta)$

$$f(\theta) = \theta + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta \quad (4.29)$$

Sempre que  $k < 1$  l'aplicació serà invertible, i descriurà qualitativament la situació general. A partir de  $k > 1$  deixa de ser invertible, aquesta situació correspon a la possible aparició de caos. Això es pot entendre qualitativament de la forma següent. Sobre el pla, a partir d'un cert valor del paràmetre de control, l'atractor és una corba que es replega sobre si mateixa.

Aquesta corba descriu l'atractor d'una aplicació de cercle dissipatiu

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n + br_n \quad (4.30)$$

$$r_{n+1} = -\frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n + br_n \quad (4.31)$$

La situació és comparable a la que ens hem trobat per les aplicacions utilitzades per descriure les cascades subharmòniques.

Les aplicacions  $f(\theta)$  fan aparèixer un fenòmen molt important, característic de nombrosos sistemes no lineals, la sincronització, o el blocatge de freqüències.

### 4.3.2 Blocatge de freqüències

En l'absència de no linealitat es presenten dues situacions segons si  $\Omega$  és racional o no.

Si  $\Omega = \frac{p}{q}$  tindrem  $\theta_{1+q} = \theta_1 + p$ , el moviment serà periòdic, de període  $q$  i hem fet  $p$  voltes entorn del cercle en un període. Si en canvi,  $\Omega$  és irracional ja no hi ha cap moviment periòdic, i els angles successius omplen densament el cercle.

En el cas no lineal, tenim la mateixa situació reemplaçant  $\Omega$  per  $\hat{\Omega}$ , el nombre de rotació de l'aplicació  $f$ , definit de la següent forma

$$\hat{\Omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\theta_{j+1} - \theta_j) \quad (4.32)$$

Es pot demostrar que aquest límit existeix, no depèn del punt de partida  $\theta_1$ , a més, mostra que  $f$  posseeix un cicle de període  $q$  si i només si  $\hat{\Omega} = \frac{p}{q}$ . A més,  $\hat{\Omega}$  és una funció continua i creixent de  $\Omega$ .

El resultat més sorprenent és que si  $\hat{\Omega} = \frac{p}{q}$  per un cert valor de  $\Omega_0$ , llavors existeix un entorn de  $\Omega_0$  tal que per tot  $\Omega$  a l'entorn, hi ha encara  $\hat{\Omega} = \frac{p}{q}$ . Aquest efecte és degut a la no linealitat, en el cas lineal en canvi, sempre hi ha valors iracionals de  $\hat{\Omega} = \Omega$  a l'entorn d'un  $\Omega = \frac{p}{q}$ .

Aquest fenomen s'anomena el bloqueig de freqüències perquè vol dir que si el nombre de rotació és racional, és a dir, si les freqüències de rotació estan sincronitzades, aleshores aquesta propietat és estable sota pertorbacions.

Sobre el pla  $(\Omega, k)$  de l'aplicació per  $\theta$ , l'aplicació d'Arnold, hi ha zones en què es formen llengües partint dels racionals en  $k = 0$ . Les llengües més llargues, i per tant més visibles corresponen als racionals de denominador  $q$  petit.

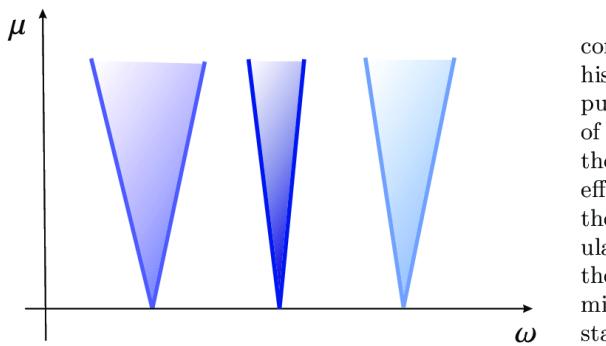


Figure 9: Llengües d'Arnold sobre el pla  $(\omega, \mu)$

La funció  $\hat{\Omega}(\Omega)$  és, per tant, estranya. És constant al voltant de cada valor racional de  $\hat{\Omega}$ , i tanmateix a cada valor irracional de  $\hat{\Omega}$  li correspon un valor únic de  $\Omega$ . A més, és contínua i en creixement. Aquestes funcions de vegades s'han anomenat escales del diable.

Quan  $k$  és petit, només veiem uns quants altiplans perquè la probabilitat de trobar un valor irracional de  $\hat{\Omega}$  és propera a 1. Però augmentant  $k$ , els altiplans es fan cada cop més visibles, i quan  $k = 1$ , on l'aplicació deixa de ser invertible i pot aparèixer el caos, gairebé només hi ha altiplans doncs la probabilitat de tenir un nombre de rotació  $\hat{\Omega}$  irracional és zero.

D'aquesta discussió podem obtenir que quan el paràmetre de control de la no linealitat de l'aplicació augmenta, augmenten les possibilitats de tenir un bloqueig de freqüències i, eventualment, caos.

Finalment, mostrem com podem estudiar aplicacions en què l'angle de rotació sigui irracional.

Sigui el problema

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega + kg(\theta_n) \quad (4.33)$$

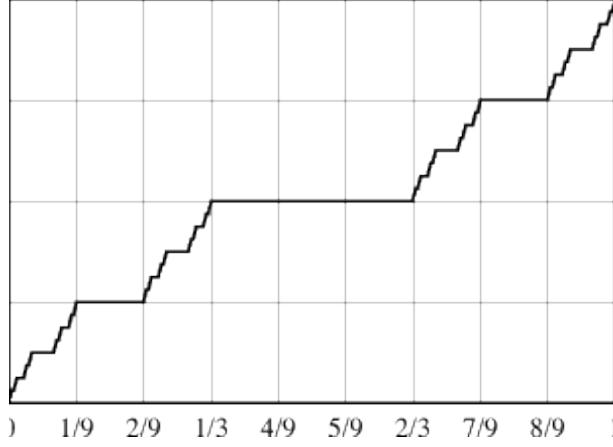


Figure 10: Escala del diable

amb

$$\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) = 0 \quad (4.34)$$

existeix un canvi de variable  $\theta_n = \phi_n + kf(\phi_n, k)$  tal que en les noves variables l'aplicació sigui una rotació

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Omega \quad (4.35)$$

Fent el canvi

$$\phi_{n+1} + kf(\phi_{n+1}, k) = \phi_n + kf(\phi_n, k) \quad (4.36)$$

desenvolupant fins a ordre 2

$$\phi_n = \phi_n^{(0)} + k\phi_n^{(1)} + k^2\phi_n^{(2)} \quad (4.37)$$

per l'ordre 0 tenim

$$\phi_{n+1}^{(0)} = \phi_n^{(0)} + \Omega \quad (4.38)$$

i per l'ordre 1

$$\phi_{n+1}^{(1)} = f(\phi_{n+1}^{(0)}, 0) - f(\phi_n^{(0)}, 0) + g(\phi_n^{(0)}) + \hat{\Omega}_n + \phi_n^{(1)} \quad (4.39)$$

el que ens permet escriure finalment

$$f = \sum_n f_n e^{i2\pi n \phi} \quad (4.40)$$

amb

$$f_n = \frac{1}{e^{2\pi i \Omega_n} - 1} \quad (4.41)$$

aquesta expressió només s'anul·la quan  $\Omega$  és un racional. Per valors d' $n$  grans encara que  $\Omega$  sigui irracional, si s'aproxima ràpidament a un racional l'expressió s'anul·larà.

Concloem llavors que el valor de  $\Omega$  que més suporta les pertorbacions, i resisteix la transició al caos és el valor més irracional possible.

## 5 Caos

### 5.1 Diagnòstic del caos

Encara que no existeix una definició general del caos, podem estar d'acord sobre algunes característiques d'un senyal que revelen el seu caràcter caòtic. Hi ha cert consens al respecte. D'una manera o altra, un sistema caòtic és impracticable en els detalls. El seu comportament té alguna cosa d'aleatori, i s'imagina que cal substituir una descripció purament determinista d'un tal sistema per una descripció estadística si es vol poder dir alguna cosa sobre ell.

Tanmateix, el punt de vista no és d'entrada probabilístic; en altres paraules, les lleis que descriuen les equacions es consideren deterministes i no contenen cap element aleatori. Només les solucions d'aquestes equacions tenen un comportament estocàstic. En aquest cas es parla de caos determinista, per tal de distingir-lo clarament del caos probabilístic, que resulta de l'adopció de lleis estadístiques. (Per exemple, la mecànica estadística de Boltzmann–Gibbs descriu la distribució de probabilitat de les posicions i velocitats d'un sistema de moltes partícules en equilibri tèrmic). L'existència d'un caos determinista ha destruït la concepció naïf del determinisme, segons la qual és possible predir perfectament l'evolució d'un sistema del qual es coneixen les condicions inicials.

De fet, veurem que una de les característiques del caos és la gran sensibilitat a les condicions inicials, és a dir, el fet que un petit error en aquestes es magnifiqui extremadament ràpid fins a fer impossible, a la pràctica, conèixer la solució amb una precisió raonable. Aquest fenomen és degut a l'estirament de les trajectòries en certes direccions de l'espai de fases. Atès que, alhora, molts sistemes estan confinats en una regió acotada de l'espai de fases, les trajectòries també s'han de replegar. Aquesta competència entre l'estirament i el replegament és la font d'una gran complexitat geomètrica de les trajectòries, i explica que es vegin tan sovint estructures fractals en aquests sistemes.

Finalment, la impracticabilitat d'un sistema caòtic es manifesta en el fet que aquest pateix una pèrdua de memòria. Com més temps passa, més difícil es fa reconstruir el passat d'una manera precisa.

Ara examinarem els conceptes que s'han introduït per expressar aquestes idees d'una manera quantitatativa.

#### 5.1.1 Espectre de potència

Sigui  $u(t)$  un senyal temporal (podria ser, per exemple, una de les coordenades d'un punt de l'espai de fases). El valor mitjà del senyal ve donat per:

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Definint una nova variable  $\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}$ , podem convenir que el valor mitjà  $\bar{u}$  del senyal sigui nul.

Una manera de mesurar la memòria d'aquest senyal és comparar-lo en instants diferents, fent la mitjana sobre el moment en què es fan les comparacions. Així, es defineix la funció de correlació del senyal:

$$\phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t + \tau) dt$$

Si  $u(t)u(t + \tau) \rightarrow 0$  quan  $\tau \rightarrow \infty$ , és a dir, si

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(\tau) = 0,$$

es diu que no hi ha correlació en el senyal en instants molt allunyats, i que, per tant, aquest no té memòria. Un senyal així es pot anomenar caòtic. En canvi, si  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(\tau) \neq 0$  o si  $\phi(\tau)$  oscil·la constantment, el senyal tindrà una memòria llarga.

Mesurar directament aquesta funció de correlació no és senzill, i sovint s'accedeix a la seva transformada de Fourier, que és donada per l'espectre de potència del senyal, definit com:

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T u(t)e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

Aquest límit només existeix si es fa la mitjana de  $P(\omega)$  en qualsevol petit interval de freqüències al voltant de  $\omega$ . Un teorema cèlebre de Wiener-Khinchin afirma que:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

i expressa que conèixer l'espectre de potència és equivalent a conèixer la funció de correlació. Aquesta fórmula mostra que, si  $P(\omega)$  és una funció contínua i integrable, llavors  $\phi(\tau) \rightarrow 0$  quan  $\tau \rightarrow \infty$ . Això implica que l'absència de correlació és equivalent a un espectre de potència continu i sense pics, com les distribucions  $\delta$  de Dirac.

Per exemple, si el senyal és quasi periòdic (com en molts casos coneguts), l'espectre de potència només conté pics  $\delta$ , i per tant no és una funció "bona". En canvi, per a un senyal caòtic, l'espectre de potència és continu i integrable. Per això es caracteritza el caos amb les propietats següents:

1. Una funció de correlació que tendeix a zero.
2. Un espectre de potència continu (i integrable).

### 5.1.2 Sensibilitat a les condicions inicials. Exponents de Lyapunov

Una mesura quantitativa de la sensibilitat a les condicions inicials (s.c.i.) ve donada pels exponents de Lyapunov. Sigui  $\vec{x}(t)$  una trajectòria corresponent a la condició inicial  $\vec{x}(0)$ , d'un flux descrit per l'equació diferencial:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}).$$

Suposem que es pertorba infinitesimalment la condició inicial, de manera que  $\vec{x}(0) \rightarrow \vec{x}(0) + \delta\vec{x}(0)$ . Llavors, al temps  $t$ , la trajectòria serà  $\vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t)$ , on  $\delta\vec{x}(t)$  satisfà l'equació:

$$\frac{d}{dt} \delta\vec{x}(t) = \mathbf{J}(\vec{x}(t)) \delta\vec{x}(t),$$

on  $\mathbf{J}$  és la matriu jacobiana de  $\vec{f}$ . La solució es pot escriure com:

$$\delta\vec{x}(t) = \mathbf{M}(t) \delta\vec{x}(0),$$

on  $\mathbf{M}(t)$  és la matriu de propagació. La norma del vector  $\delta\vec{x}(t)$  serà:

$$|\delta\vec{x}(t)| = |\mathbf{M}(t) \delta\vec{x}(0)|.$$

S'espera que, per  $t \rightarrow \infty$ :

$$|\delta\vec{x}(t)| \sim e^{\lambda t},$$

on  $\lambda$  és l'exponent de Lyapunov, definit com:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta\vec{x}(t)|}{|\delta\vec{x}(0)|}.$$

Els exponents de Lyapunov es classifiquen segons el signe:

- $\lambda > 0$ : Creixement exponencial de l'error (caos).
- $\lambda = 0$ : Error constant o creixement algebraic.
- $\lambda < 0$ : Disminució exponencial de l'error.

Els atractors en sistemes dinàmics es poden classificar segons el signe dels **exponents de Lyapunov**, que mesuren la sensibilitat respecte a les condicions inicials. A continuació es mostra la classificació per a un sistema tridimensional amb tres exponents de Lyapunov ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ):

Pel que fa als punts fixos tenim que tots els exponents són negatius. Això significa que totes les trajectòries convergeixen cap a un punt fix en l'espai de fases. El sistema és estacionari i no hi ha moviment.

Tipus d'Atractador	Exponents de Lyapunov	Règim Asimptòtic
Punt Fix	( $-,-,-$ )	Estacionari
Cicle Límit	( $0,-,-$ )	Periòdic
Torus ( $T^2$ )	( $0,0,-$ )	Quasi-periòdic
Atractador Estrany	( $+,0,-$ )	Caòtic

Table 1: Classificació d'atractors segons els exponents de Lyapunov.

Pels cicles límits un exponent és zero (correspondent al moviment periòdic), i els altres dos són negatius. El sistema evoluciona cap a una trajectòria periòdica, on les pertorbacions fora del cicle decauen.

Pels torus dos exponents són zero (associats amb dues freqüències bàsiques quasi-periòdiques), i un és negatiu. El moviment es manté en una superfície toroidal en l'espai de fases amb dinàmica quasi-periòdica.

Finalment, pels atractors estranys tenim un exponent és positiu (indicant sensibilitat a condicions inicials), un és zero (correspondent a una dimensió neutra), i un és negatiu (atraient el sistema cap a l'atractador). Aquest tipus de moviment és caòtic, amb alta imprevisibilitat a llarg termini i dinàmica no periòdica.

Per als sistemes dissipatius, la suma dels exponents de Lyapunov és **negativa**, indicant que el volum de l'espai de fases es redueix amb el temps. Aquesta és una característica típica dels sistemes amb atractors.

En sistemes caòtics, el màxim exponent de Lyapunov és positiu, indicant sensibilitat extrema a les condicions inicials. Aquesta propietat es coneix com l'efecte papallona: un petit canvi en un punt pot tenir grans conseqüències a llarg termini.

## 5.2 Atractors estranys

Fins ara, hem vist que en els sistemes dissipatius poden aparèixer diversos tipus d'atractors. Un atractador és una regió acotada  $S$  de l'espai de fases, cap a la qual tendeixen asimptòticament totes les trajectòries que parteixen d'un veïnatge. El conjunt dels punts atrets cap a l'atractador s'anomena el seu **bassi d'atracció**  $B_S$ . Les regions  $S$  i  $B_S$  són invariants pel flux.

Els atractors observats fins ara són:

- Punts (règim estacionari),
- Corbes (règim periòdic),
- Superfícies corresponents a torus (règim quasi-periòdic).

Aquests atractors són superfícies suaus, i almenys quan tenen una dimensió inferior o igual a 2, no presenten sensibilitat a les condicions inicials.

Ruelle i Takens van proposar associar el caos en els sistemes dissipatius a atractors d'un nou tipus, anomenats **atractors estranys**, caracteritzats per les següents propietats:

1. **Indescomponibilitat:** La trajectòria hauria de visitar tots els punts de l'atractador amb el temps (sense col·leccions de punts fixos, per exemple).
2. **Sensibilitat a les condicions inicials (SCI):** Malgrat la contracció dels volums, les longituds no es contrauen en totes les direccions. Hi ha estirament en algunes direccions i contracció en moltes altres. Com que les trajectòries han de romandre en una regió acotada, els elements de volum han de plegar-se mentre s'estiren.
3. **Estructura fractal:** Tots els atractors estranys observats tenen una estructura fractal. Tot i així, existeixen contraexemples com el "gat d'Arnold", on l'atractador és un torus i no un fractal.

Per un flux amb tres graus de llibertat, els atractors estranys no poden tenir dimensió 2 (no hi ha SCI) ni dimensió 3 (per la dissipació). Per tant, tenen una dimensió no entera, que conduceix a una estructura geomètrica complexa.

### 5.2.1 Fractals

Un **fractal** és un objecte de dimensió no entera amb una estructura auto-similar, és a dir, que es reproduceix quan se'n magnifica una porció.

L'exemple clàssic d'un fractal és l'**ensemble de Cantor**, construït així:

1. Prenem l'interval  $[0, 1]$ .
2. Dividim-lo en tres parts iguals i eliminem la part central,  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .
3. Repetim aquest procés indefinidament amb els intervals restants.

L'objecte resultant s'anomena **ensemble de Cantor** o **pols de Cantor**. Aquest conjunt té tres propietats fonamentals:

1. És un conjunt tancat.
2. No té punts aïllats.
3. Té interior buit.

La seva dimensió fractal es calcula així:

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0.63.$$

Altres exemples famosos de fractals inclouen el floc de neu de Koch, construït a partir d'un triangle equilàter, dividint cada costat en tres parts iguals i afegint un nou triangle equilàter al centre de cada segment central. Aquest procés es repeteix infinites vegades, donant lloc a una frontera d'objecte amb dimensió fractal:

$$D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26.$$

Un altre exemple important és l'atractor de Lorenz, que té una dimensió fractal aproximada de  $D \approx 2.06$ . Aquest atractor mostra una estructura complexa i auto-similar.

Els sistemes dinàmics sovint inclouen exemples d'atractors fractals amb estructura semblant a la de Cantor. Per exemple, l'atractor de Lorenz té una geometria que s'aproxima a una superfície, però quan s'observa una secció transversal, apareix una estructura fractal de dimensió no entera.

## 5.3 Mesures invariants

Un atractor dona una imatge global del comportament d'un sistema dinàmic per a temps llargs. Per obtenir una imatge més precisa, voldríem determinar la freqüència  $\nu(A)$  amb la qual una part  $A$  de l'atractor és visitada per una trajectòria, és a dir:

$$\nu(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{Temps passat a } A}{\text{Temps total } T}.$$

S'interpreta  $\nu(A)$  com la probabilitat que un punt escollit a l'atzar a l'atractor es trobi dins  $A$ .

Per caracteritzar aquesta freqüència, s'introduceix la noció de **mesura de probabilitat invariant**  $\mu(dx)$ , de manera que:

$$\nu(A) = \int_A \mu(dx).$$

El caràcter invariant significa que s'ha de complir:

$$\mu(U^{-t}(A)) = \mu(A),$$

on  $U^{-t}(A)$  és el conjunt, a l'instant  $-t$ , dels punts que es trobaran dins  $A$  en el temps 0.

Per a un flux, una mesura invariant es defineix formalment com:

$$\mu(dx) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \delta(x - U_t(x_0)) dt,$$

on  $U_t(x_0) = x_t$  és el valor al temps  $t$  de la trajectòria que passa per  $x_0$  al temps 0.

En el cas d'una aplicació discreta:

$$\mu(dx) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(x - f^j(x_0))dx.$$

El valor mitjà temporal de qualsevol observable  $Q(x)$  es dona per:

$$\langle Q \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q(U_t(x_0))dt = \int Q(x)\mu(dx).$$

La mesura  $\mu$  és invariant en el sentit següent:

$$\int Q \circ U_t d\mu = \int Q d\mu, \quad \forall t.$$

Així, la mitjana de  $Q$  no depèn de la condició inicial, sempre que aquesta es prengui sobre una trajectòria.

### 5.3.1 Aplicació del forner

**L'aplicació del forner** és un exemple clàssic de sistema dinàmic caòtic que il·lustra conceptes fonamentals com l'estirament, el replegament i l'aparició de comportaments fractals. Rep el seu nom perquè el seu funcionament s'assembla al procés que un forner fa quan estira i plega la massa de pa.

L'aplicació del forner és una transformació de l'espai bidimensional, on un punt  $(x, y)$  dins d'un quadrat unitari  $[0, 1] \times [0, 1]$  es transforma segons la següent regla:

1. Es divideix el quadrat en dues meitats verticals:  $[0, 0.5]$  i  $[0.5, 1]$ .
2. Cada meitat s'estira en la direcció  $x$ , duplicant la seva amplada de  $[0, 0.5]$  o  $[0.5, 1]$  a  $[0, 1]$ .
3. A continuació, es redueix l'alçada de les dues regions a la meitat.
4. Finalment, es repleguen una damunt de l'altra per tornar al quadrat original.

Aquest procés es pot descriure matemàticament com:

$$T(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & \text{si } 0 \leq x < 0.5, \\ (2x - 1, \frac{y+1}{2}) & \text{si } 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- **Estirament i replegament:** Aquest mecanisme és una metàfora de com el caos sorgeix en molts sistemes dinàmics. L'estirament amplifica petites diferències en les coordenades  $x$ , mentre que el replegament manté el sistema dins de l'espai unitari, creant una barreja contínua.
- **Sensibilitat a les condicions inicials:** A causa de l'estirament, dos punts inicialment propers poden divergir ràpidament, una característica típica del caos.
- **Compressió i conservació:** Tot i l'estirament, el volum total de l'espai no canvia. Això és perquè l'alçada es redueix proporcionalment a l'amplada, mantenint una densitat uniforme.
- **Aparició d'estructures fractals:** Quan es repeteix l'aplicació del forner, l'espai es subdivideix en patrons cada vegada més complexos, amb estructures fractals semblants a l'atractor de Cantor en algunes direccions.

L'aplicació del forner mostra com es poden formar estructures estables dins de sistemes caòtics. Per exemple:

- En termes de trajectòries, cada punt inicial segueix una evolució predictable definida per les regles de l'aplicació, però les diferències inicials poden portar a divergències significatives.
- Aquest tipus de model és útil per entendre fenòmens naturals on es combinen processos d'estirament i barreja, com la meteorologia o la dinàmica dels fluids.

### 5.3.2 Multifractals

La noció de multifractal es va introduir amb l'objectiu de caracteritzar l'estrucció geomètrica d'objectes complicats, com ara els atractors estranys.

Sigui  $S$  un conjunt de  $R^n$ . Cobrim el conjunt amb cubs de costat  $\varepsilon$ , i sigui  $N(\varepsilon)$  el nombre de cubs necessaris per cobrir  $S$ . La dimensió de caixa es defineix com

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0}. \quad (5.1)$$

La dimensió fractal  $D_0$  correspon, doncs, a la dimensió del conjunt  $S$ , però no ens informa sobre la seva estructura fina (la naturalesa de la seva mesura invariant).

Ara introduïm dimensions associades a una mesura sobre el conjunt  $S$ . Si  $S$  és l'atractor d'un sistema dinàmic, hem d'estudiar la freqüència amb què les òrbites típiques visiten els cubs, esperant prou temps. Sigui  $U_i$  un d'aquests cubs. Prenem  $x_c$  en la conca d'atracció de  $S$ . En l'interval de temps  $0 < t < T$ , sigui  $q(x_c, t)$  la durada durant la qual el cub  $U_i$  és visitat per l'òrbita que parteix de  $x_c$ . Es pot pensar que la probabilitat de trobar-se en el cub  $U_i$  serà donada per

$$\mu(U_i) \sim \frac{q(x_c, T)}{T}, \quad (5.2)$$

és a dir,

$$\mu(U_i) = \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{U_i}(x(t)) dt, \quad (5.3)$$

on  $\chi_{U_i}$  és la funció característica del cub.

Sovint, l'atractor no serà visitat de manera uniforme, i els  $\mu_i$  variaran fortament segons el cub  $U_i$  escollit. La dimensió de caixa  $D_0$  no percep aquesta diferència. Per caracteritzar aquest fet, podem introduir dimensions més generals:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln I(q, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}, \quad (5.4)$$

on

$$I(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q. \quad (5.5)$$

Quan  $q = 0$ , recuperem la definició de  $D_0$ , però quan  $q > 0$ , els cubs amb un  $\mu_i$  més gran tenen més importància. En el cas que tots els cubs siguin visitats amb la mateixa freqüència ( $\mu_i = \frac{1}{N}$ ),

$$D_q = D_0. \quad (5.6)$$

Un conjunt d'aquest tipus, si  $D_0$  no és enter, es dirà un fractal simple, mentre que un on  $D_q$  varia és un multifractal. Sempre es compleix  $D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \dots$

Dues dimensions tenen un paper particular, ja que sovint es mesuren:

- La dimensió d'informació  $D_1$
- La dimensió de correlació  $D_2$

La dimensió d'informació es defineix com

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i \ln \mu_i}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (5.7)$$

El nom prové del fet que  $-\mu_i \ln \mu_i$  es pot interpretar com el negatiu de l'entropia, és a dir, la informació continguda en la mesura dels  $U_i$  visitats. La dimensió d'informació també és igual a la dimensió fractal més petita d'un conjunt amb mesura 1.

L'altra magnitud sovint mesurada és la dimensió de correlació

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I(2, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}, \quad (5.8)$$

on

$$I(2, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^2. \quad (5.9)$$

Pràcticament, s'accedeix a la integral de correlació  $I(2, \varepsilon)$ . Prenent  $k$  punts  $x_1, \dots, x_k$  d'una òrbita sobre l'atractor, es calcula

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \quad (5.10)$$

on  $\Theta(z) = 1$  si  $z > 0$  i  $\Theta(z) = 0$  si  $z < 0$ . La suma correspon, per tant, al nombre de punts a una distància mútua menor que  $\varepsilon$ .

Els exemples de conjunts fractals que hem considerat són tals que la seva mesura de Lebesgue és nul·la. Aquests apareixen en sistemes dissipatius. Però existeixen conjunts de Cantor amb mesura de Lebesgue no nul·la. Aquests apareixen en sistemes conservatius no integrables. La seva dimensió fractal  $D_0$  és igual al nombre de graus de llibertat  $n$ .

Cobrim un conjunt invariant  $S$  (per exemple, un atractor) amb cubs de mida  $\varepsilon$ . Sigui  $\mu_i = \mu(U_i)$  la mesura del cub  $U_i$ . A cada cub associem un índex de singularitat  $\alpha_i$  definit per

$$\mu_i \sim \varepsilon^{\alpha_i}. \quad (5.11)$$

Comptem el nombre  $M(\alpha, d\alpha)$  de cubs per als quals  $\alpha_i \in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ . Podem esperar raonablement que aquest nombre sigui donat per

$$M(\alpha, d\alpha) \sim \varepsilon^{-f(\alpha)}. \quad (5.12)$$

Això es pot entendre invocant el fet que la dimensió de caixa  $d(\alpha)$  d'aquest conjunt hauria de ser definida per

$$M(\alpha, d\alpha) \sim \varepsilon^{-d(\alpha)}. \quad (5.13)$$

Podem, doncs, interpretar  $f(\alpha)$  com la dimensió fractal del subconjunt de  $S$  en el qual la mesura invariant té la singularitat  $\alpha$ .

Coneixent  $f(\alpha)$ , podem recuperar les dimensions generalitzades  $D_q$  mitjançant la relació

$$(q-1)D_q = \inf_{\alpha} [q\alpha - f(\alpha)], \quad (5.14)$$

que és la transformada de Legendre de  $f(\alpha)$ .

### 5.3.3 Aplicació tenda de campanya

En el cas d'aplicacions de la forma  $x_{q+} = f(x_q)$ , hi ha una manera senzilla de calcular, en principi, les mesures invariants. Suposem que la condició inicial  $x_t$  estigui donada per una probabilitat  $p(x)dx$ , llavors la probabilitat de mesurar  $x_q$  serà donada per  $p_q(x)dx$ , on

$$p_q(x) = \int \delta(x - f(y))p(y)dy.$$

Dit d'una altra manera,  $p_q$  segueix un procés de Markov.

Si coneixem amb una precisió perfecta  $x_c$ , llavors  $p(x) = \delta(x - x_c)$ .

Si considerem que  $p(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} p_q(x)$ , llavors  $p(x)$  serà una mesura invariant, solució de l'equació (anomenada de Perron-Frobenius):

$$p(x) = \int \delta(x - f(y))p(y)dy,$$

on

$$\int p(y)dy = 1.$$

Si aquesta equació té una solució única (en un cert espai de mesura), es pot demostrar que  $p_q(x) = p(x)$ , independent de la condició inicial  $p(x)$  en aquest espai. Una distribució inicial  $p$  molt concentrada al voltant de  $x_c$  pot simular el soroll sempre present en una experiència real. La mesura invariant associada a aquestes condicions inicials serà, per tant, natural.

Il·lustrant aquestes consideracions, considerem un exemple senzill d'una aplicació caòtica: la tenda de campanya. Aquesta apareix de manera natural en el model de Lorenz quan volem comprendre el seu caràcter caòtic. Prenent la secció de Poincaré del sistema segons la superfície  $z = 0$  en el seu model, Lorenz va calcular els valors successius  $z_k$  sobre aquesta superfície. A continuació, va representar els valors de  $z_{k+1}$  en funció de  $z_k$  i va obtenir una corba en forma de tenda (Figura 5.25).

El fet que s'obtingui una corba ben definida indica que les variables  $v_k$  sobre la superfície esdevenen esclaves de les  $z_t$ , és a dir,  $v_k = s(z_k)$ . Veiem que la corba  $z_{k+1} = f(z_k)$  és una aplicació unidimensional caracteritzada pel fet que l'origen és un punt fix inestable (pendents més grans que 1) i que també existeix un altre punt fix inestable. Finalment, l'aplicació posseeix un màxim únic.

Les propietats qualitatives essencials d'una aplicació com aquesta es descriuen per una de les aplicacions en aquesta classe. Per tant, prenem com a model senzill de la tenda l'aplicació en coordenades reescalades:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

on  $r > 1$  per fer que 0 sigui inestable, i  $r < 2$  per garantir que  $[0, 1]$  sigui aplicat sobre si mateix. Aquesta aplicació posseeix diverses propietats característiques dels sistemes altament caòtics:

- Un exponent de Liapunov positiu.
- Un conjunt dens d'òrbites periòdiques inestables.
- El nombre  $N_p$  dels punts periòdics de període  $p$  creix exponencialment amb  $p$ , és a dir,  $N_p \sim e^p$  per a  $p$  gran. En alguns casos es pot demostrar que l'exponent de Liapunov és igual a la suma dels exposants de Liapunov positius  $\lambda = \sum \lambda_j > 0$  (fórmula de Pesin).
- La informació mitjana obtinguda fent mesures sobre la dinàmica augmenta amb el temps.
- La funció de correlació decau molt ràpidament i l'espectre de potència és continu.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right| = \ln r.$$

Aquest exponent serà positiu per a pràcticament totes les condicions inicials tan aviat com  $r > 1$ .

Considerem el cas  $r = 2$ . L'aplicació és més senzilla de descriure quan escrivim el nombre  $z$  en base 2:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} e_i 2^{-i}, \quad e_i \in \{0, 1\}.$$

Aleshores, després de  $p$  iteracions, les òrbites de període  $p$  seran donades per els nombres  $z$  que compleixen:

$$z = 0.e_1e_2 \cdots e_p \quad (\text{repetit periòdicament}).$$

Aquests nombres corresponen a nombres racionals i formen un conjunt dens dins de l'interval  $[0, 1]$ . Això implica que, per a qualsevol  $z \in [0, 1]$ , existeix un punt periòdic de període  $p$  tal que la distància  $|z - z_p|$  tendeix a 0 quan  $p \rightarrow \infty$ .

Suposem que, en el cas de  $r = 2$ , només podem mesurar de manera força aproximada la trajectòria, és a dir, que només podem distingir entre els dos casos  $z < 1$  i  $z \geq 1$ . Això significa que només measurem una aproximació de la trajectòria en el temps  $p$ . La dinàmica permet determinar tots els bits  $e_i$  de la condició inicial. De fet, la dinàmica caòtica crea informació, la qual cosa és un resultat apparentment paradoxal. La mesura invariant en aquest cas és simplement uniforme sobre  $[0, 1]$ . La funció de correlació es decau molt ràpidament, i l'espectre de potència és continu, donant lloc a un comportament de "soroll blanc". Aquesta aplicació és extremadament caòtica, ja que no hi ha cap correlació, i la dinàmica pot ser utilitzada per generar nombres aleatoris.

## 5.4 Aplicació de ferradura i punts homoclínics transversals

Una qüestió important és comprendre el mecanisme o mecanismes que tendeixen a fer caòtic un sistema dinàmic. Sembla que el caos sovint resulta de la combinació de tres efectes:

1. La contracció d'un element de volum en certes direccions,
2. L'estirament d'un element de volum en d'altres,
3. El plegament dels elements de volum.

Els dos primers efectes corresponen a una hiperbòl·licitat local, mentre que el darrer resulta de la tendència de la dinàmica a enviar els punts a una regió compacta.

Un model matemàtic introduït per Smale té en compte aquests tres efectes: el ferró. Es pot definir de la manera següent. Sigui  $Q$  el quadrat unitat,  $Q = \{(z, p) \mid 0 < z < 1, 0 < p < 1\}$ . Apliquem-li successivament les tres operacions següents

1. Contracció vertical,
2. Estirament horitzontal,
3. Plegament del rectangle obtingut i reposició sobre el quadrat de manera que el cobreixi.

La imatge de  $Q$  per l'aplicació  $F$  es forma essencialment per 2 rectangles horitzontals  $H^+$  i  $H$ , que provenen respectivament de dos rectangles verticals  $V^+$  i  $V$  en el quadrat  $Q$  (Figura ??).

Per simplificar l'anàlisi, considerem que sobre els  $U_q$ ,  $\epsilon = -II$ , l'aplicació  $Z'$  és lineal. Si  $z = (z, p) \in U_q$ , tenim que:

$$z' = (z', p') = (r \cdot z, Q \cdot p),$$

on  $r > 1$  (estirament horitzontal) i  $Q < 1$  (contracció vertical).

A més, tenim que  $Q < 6^- < d^+ < 1 - Q$  i  $1 < 1 - \epsilon^+ < -1 < r - 1$ .

Una aplicació com aquesta transforma rectangles en rectangles. La seva inversa sobre  $Np = T(U_q)$  es dona per:

$$F^{-1}(J) = \text{recta inversa de } J.$$

La qüestió que ens plantegem és determinar l'estrucció de les òrbites que resten dins de  $Q$  per tots els temps, positius i negatius. Sigui  $\{z_q, -\infty < n < +\infty\}$  una d'aquestes òrbites. Perquè  $z^+ = T'z_q$  sigui dins de  $Q$ , és necessari que  $z_q$  estigui dins de  $V^+$  o  $V$ . Com que  $V^+$  i  $V$  no s'intersecten,  $z_q$  no pot ser més que dins d'un d'ells, és a dir,  $z_q \in U_q$ . Veiem que podem associar a una òrbita una successió infinita de + o de -, com  $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

Si a una successió infinita  $\alpha = \{\epsilon_q\}_{q \in N}$  podem associar-hi una òrbita de manera bi-unívoca, tindrem així codificat el sistema dinàmic. Notem que per a la successió, la dinàmica correspon a una simple translació, ja que si  $\epsilon_q = \epsilon(z_0)$ , tenim que:

$$z_q = r^q \cdot z_0.$$

Mostrem que el codatge pot ser realitzat en aquest cas. Sigui una successió finita  $(\epsilon_q)$ . Notem per:

$$S_q = \{z \mid z \in V_q, z \in U_q\}.$$

Podem mostrar per inducció que el conjunt  $S_q$  és un rectangle vertical de grandària  $r^q$  i de llargada 1, dins de  $V_q$ . La inducció es fa notant que si  $r^q \rightarrow \infty$ , els punts  $z$  i  $s'$  corresponents seran tots dins d'un rectangle de grandària  $r^a \cdot Q^q$ , per la qual cosa seran tan a prop com es vulgui.

## 5.5 Mecànica Clàssica

### 5.5.1 Introducció

En mecànica clàssica existeixen tres tipus de sistemes: integrables (moviment quasiperiòdic, existència de constants del moviment i exponents de Lyapunov nuls), completament caòtics (exponent de Lyapunov principal positiu i ergodicitat forta), i mixts (una part de l'espai de fases correspon a un moviment quasiperiòdic i un altre part a un moviment caòtic).

### 5.5.2 Sistemes integrables

Considerem un sistema mecànic amb  $N$  graus de llibertat i hamiltonià  $H$  independent del temps. Recordem la definició dels claudàtors de Poisson de dues funcions:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (5.15)$$

Una funció de les coordenades i dels moments és una constant del moviment si el seu parèntesi de Poisson amb l'Hamiltonià és nul. Dues constants del moviment  $F$  i  $G$  es diuen en involució si  $\{F, G\} = 0$ . Un sistema es diu integrable si existeixen  $N$  constants del moviment ( $F_i$ ), funcionalment independents, en involució i prou suaus. En aquest cas, es pot demostrar:

**Teorema 5** Cada superfície de nivell

$$\{z \in E \mid F_i = c_i, i = 1, \dots, N\}$$

és una varietat llisa, invariant sota el flux. Si, a més, és compacta i connexa, aleshores és difeomorfa a un tor  $T^N = (\varphi \in R^N) \bmod 2\pi$ , parametritzat per  $N$  angles  $\varphi_i$ . Aquests angles es poden triar de tal manera que existeixin variables canònicament conjugades, les accions  $I_j$ , amb

$$dI_j = d\varphi \wedge dq,$$

tals que l'Hamiltonià, expressat en aquestes noves coordenades, tingui la forma

$$H(J_1, \dots, J_N) = H(J).$$

Les equacions del moviment prenen una forma particularment senzilla.

$$\dot{I}_j = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_j} = 0 \quad (5.16)$$

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j} = \omega_j(I) \quad (5.17)$$

$$I_j(t) = I_j(0) = \text{constant} \quad (5.18)$$

$$\varphi_j(t) = \omega_j t + \varphi_j(0) \quad (5.19)$$

Aquestes variables particulars s'anomenen variables angle-acció.

Prenem com a exemple el cas dels  $n$  oscil·ladors harmònics

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{1}{2} m \Omega q \quad (5.20)$$

On  $\Omega \in M_n(R)$  i  $\Omega = \Omega^T$  definida positiva.

Podem llavors diagonalitzar  $\Omega : \Omega = S \Lambda^2 S^T$  on  $\Lambda$  és diagonal de valors propis  $\lambda_i$ .

Prenent  $Q = S^T q$  el nou hamiltonià s'escriu

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 Q_i^2 \quad (5.21)$$

### 5.5.3 Sistemes integrables perturbats

Com hem mencionat anteriorment, els sistemes integrables constitueixen l'excepció. Afortunadament, molts problemes es poden reduir a una situació propera a un cas integrable que només difereix del cas integrable per un petit paràmetre. La idea immediata és aplicar un càlcul de perturbació. No obstant això, la teoria de perturbacions en mecànica clàssica és notablement complicada, especialment si la comparem amb el seu anàleg quàntic. De fet, a part d'algunes tècniques ad hoc, és necessari expressar l'Hamiltonià en variables angle-acció per poder procedir.

$$H = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \varphi) \quad (5.22)$$

$\theta, \phi, \omega$  ja no són variables angle-acció per al sistema perturbat. La metodologia consisteix a buscar una transformació canònica que faci passar  $H(I, \phi) \rightarrow H'(I')$ , amb noves variables angle-acció  $I'$ ,  $\phi'$ . En desenvolupar la funció generadora de la transformació canònica en ordres de  $\epsilon$ , s'obté una jerarquia d'equacions a resoldre. Malauradament, aviat es presenta una dificultat important: el problema dels petits denominadors. Si les freqüències bàsiques del moviment no perturbat són commensurables, apareixen petits denominadors. Algunes tècniques més sofisticades proporcionen millors resultats (Lindstedt-Poincaré), però la dificultat fonamental persisteix. La voluntat de pertorbjar per a totes les condicions iniciales està condemnada al fracàs.

En aquesta situació, aparentment desesperada, el resultat següent aporta una nova perspectiva encoratjadora. Suposem un sistema hamiltonià perturbat:

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \phi),$$

on l'Hamiltonià  $H_0(I)$  és analític i no degenerat ( $\det \left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right) \neq 0$ ), i la perturbació  $H_1(I, \phi)$  és  $C^r$  amb  $r > 2s$  i  $2\pi$ -periòdica en els angles.

**Teorema 6** Si la pertorbació és hamiltoniana, conservativa i prou petita, la majoria dels torus invariants no ressonants no són destruïts, sinó que només es deformen lleugerament. Així, en l'espai de fases del sistema pertorbat també hi ha torus invariants omplerts de manera densa per corbes quasiperiòdiques (amb un nombre de freqüències independents igual al nombre de graus de llibertat  $n$ ). Aquests torus invariants formen una majoria en el sentit que la mesura del complement de la seva unió és petita quan la pertorbació és petita.

Les dues idees que sustenten la demostració d'aquest teorema són, en primer lloc, l'abandonament de la voluntat de pertorbar per a totes les condicions inicials. De fet, es trien les condicions inicials que corresponen als bons torus al voltant dels quals la pertorbació pot tenir lloc. A continuació, es fa servir un desenvolupament perturbatiu superconvergent. (És una mica com el mètode de Newton per trobar els zeros d'una funció: cada aproximació es pren com a base per a l'etapa següent). L'error disminueix en  $e^{-e^n}$  i neutralitza els petits denominadors.

En aquesta part, hem presentat un resultat general, vàlid per a temps infinitament llargs. Tot i això, en la pràctica, sovint n'hi ha prou amb temps molt grans. El següent teorema dóna l'existència de "quasi constants del moviment" per al sistema pertorbat per a temps llargs. Suposem que l'Hamiltonià no pertorbat  $H_0(I)$  no té punts estacionaris i que la seva restricció a qualsevol pla de dimensió arbitrària només té punts estacionaris complexos aïllats (l'Hamiltonià és de vegades anomenat "steep").

**Teorema 7** Si l'Hamiltonià no pertorbat satisfà la condició anterior, llavors, per a una pertorbació prou petita,

$$|I(t) - I(0)| < \varepsilon^b$$

per  $0 \leq t \leq \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon^a}}$  per al sistema Hamiltonià pertorbat. On  $a$  i  $b$  són constants que depenen del Hamiltonià.

#### 5.5.4 Billar i Teorema KAM

Fins ara hem vist sistemes el comportament dinàmic dels quals és molt regular (periòdic, quasi-periòdic) o bé irregular (caòtic, segons els diversos criteris proposats). Existeixen sistemes encara més complicats on aquests dos casos extrems són l'excepció: són els sistemes mecànics no dissipatius. En general, per a aquests sistemes coexisteixen en l'espai de fase zones que corresponen a un moviment regular i altres a un moviment caòtic. La complexitat d'aquests sistemes és tal que encara es comprenen poc.

Per il·lustrar aquests fenòmens, considerarem el cas d'un billar, que és descrit per una aplicació que preserva les àrees

$$u_{n+1} = f(u_n, s_n) \quad (5.23)$$

$$s_{n+1} = g(u_n, s_n) \quad (5.24)$$

$s_n$  designant la posició sobre el bord de la partícula, i  $u_n = -\cos \theta_q$  on  $\theta_q$  és l'angle entre la velocitat i la tangent.

Tanmateix, els resultats que descriurem s'apliquen a qualsevol aplicació que preservi les àrees, com per exemple l'aplicació estàndard, on les funcions  $f$  i  $g$  són molt senzilles.

Volem reflectir la complexitat dels retrats de fase d'aquests sistemes.

Comencem pel cas més senzill, el del cercle. El seu retrat de fase és molt senzill. Això ve del fet que en aquest cas existeix una magnitud conservada: el moment angular. L'aplicació s'escriu llavors com

$$u_{n+1} = u_n \quad (5.25)$$

$$s_{n+1} = s_n + \omega(u_n) \quad (5.26)$$

on  $\omega$  és la funció que descriu la dinàmica del sistema tal que  $\frac{\partial \omega}{\partial u} > 0$

La variable  $s_n$  és de fet un angle, ja que defineix el mòdul de la longitud de la vora  $L = 2\pi$ .

Hi ha dos casos possibles:

1. Si  $\frac{\omega}{L}$  és un nombre racional, llavors, després d'un cert nombre d'iteracions, la variable  $s$  tornarà al seu valor inicial, i el moviment serà periòdic.
2. Si en canvi  $\frac{\omega}{L}$  és un nombre irracional, les iteracions successives de  $s_n$  omplen de manera densa l'interval  $[0, L]$ , i el moviment serà quasi-periòdic.

L'espai de fase  $(u, s)$  es veu així "omplert" per corbes invariants, en aquest cas els cercles  $u = \text{constant}$ . Sobre algunes d'aquestes corbes, el moviment és periòdic (és l'excepció en cert sentit), i sobre altres és quasi-periòdic. Aquesta estructura de l'espai de fase es tradueix en l'espai de configuració per l'existència d'una corba anomenada càustica, a la qual totes les trajectòries són tangents.

Només existeix un altre exemple conegut de billar amb parets suaus, la dinàmica del qual sigui tan simple com la del cercle: és el cas de l' $\text{el}\cdot\text{lipse}$ . En aquest cas, encara existeix una constant de moviment: el producte dels moments angulars respecte als focus. Es pot fer un canvi de variables jacobianes (canònic) de tal manera que en les noves variables  $u'_n = u'_n(u_n, s_n)$  i  $s'_n = s'_n(u_n, s_n)$ . Tindrem així també un espai de fase omplert per corbes invariants, topològicament equivalents a cercles, sobre les quals el moviment serà o bé periòdic o bé quasi-periòdic.

Els únics altres exemples de billars la dinàmica dels quals sigui tan simple són el rectangle i els tres tipus de triangles que cobreixen el pla. Aquests sistemes es diuen integrables, perquè després d'un canvi de variables, l'aplicació que els descriu es pot posar en la forma senzilla de les equacions (5.25),(5.26).

Es podria pensar que aquests sistemes seguiran sent simples si els pertorbem lleugerament. De fet, no és així. Imaginant, per exemple, que deformem lleugerament el cercle o l' $\text{el}\cdot\text{lipse}$ . La nova aplicació serà de la forma

$$u_{n+1} = u_n + \epsilon(u_n, s_n, \epsilon) \quad (5.27)$$

$$s_{n+1} = s_n + \omega(u_n) + \epsilon b(u_n, s_n, \epsilon) \quad (5.28)$$

amb un petit paràmetre  $\epsilon$  que descriu la deformació. Denotarem aquesta aplicació com  $T_\epsilon$ .

Mentre la forma del billar obtingut segueixi sent suau, les funcions  $a$  i  $b$  seran prou diferenciables. Un teorema famós anomenat KAM (per Kolmogorov, Arnold, Moser) en un context més general, i de Lazutkin pel cas que ens interessa, afirma el següent si  $\epsilon$  és petit:

Existeixen encara corbes invariants sobre les quals el moviment serà quasi-periòdic, corresponents a un nombre de rotació dels  $s_n$ ,  $\Omega_\epsilon$ , irracional respecte a  $L_\epsilon$ . Aquestes corbes seran lleugeres deformacions de les presents per a  $\epsilon = 0$  per les quals  $\frac{\omega}{L}$  és prou irracional, és a dir, mal aproximat per nombres racionals. Aquestes corbes ompliran gairebé tot l'espai, en el sentit que la resta de l'espai de fase tindrà una àrea d'ordre  $\epsilon$ .

Cal destacar que un punt que parteixi entre dues d'aquestes corbes romandrà entre elles. A dues dimensions, aquestes corbes constitueixen per tant barreres.

És molt important per a l'aplicabilitat d'aquest teorema que la perturbació sigui suau. Si, per exemple, considerem el cas d'un billar amb forma de tall de pastís, és a dir, un sector angular limitat per un arc de cercle, el sistema és integrable quan el centre del cercle coincideix amb el vèrtex del sector. Però si movem una mica el centre del cercle cap a fora, el moviment es torna caòtic. Aquesta perturbació no era suau.

**Teorema 8** *Si  $e$  i  $g$  són suficientment petits, existeixen sempre corbes invariants per a  $T$  properes als cercles (invariants de  $T$ ) i el moviment sobre aquestes corbes és una rotació d'angle  $\omega$  irracional (diòfantic). La mesura del complement d'aquestes corbes és d'ordre  $e$ .*

*L'espai està cobert per corbes invariants. Si fem un tall en  $r$ , és a dir, amb  $\theta$  fixat, tenim un conjunt de Cantor.*

## 5.6 Caos quàntic

Un tema que suscita molt interès és el caos quàntic. Què entenem per caos quàntic?

Sabem que els sistemes clàssics a més graus de llibertat descrits per la mecànica clàssica poden mostrar un comportament caòtic.

A primera vista, sembla que tot sigui diferent, ja que la teoria quàntica és lineal, mentre que el caos tal com l'hem descrit depèn crucialment de la no linealitat de les equacions. Per això, alguns pensen que no

pot haver-hi caos pròpiament dit en mecànica quàntica, sinó només traces de caos clàssic, en virtut del principi de correspondència.

Algunes característiques d'aquest fenomen s'han establert prou bé. Les explicarem mitjançant un exemple, el dels billars.

Sigui una partícula lliure que es mou en un domini  $\Omega$  del pla, amb frontera  $\partial\Omega$ . Clàssicament, el seu moviment està completament determinat quan es precisa el tipus de col·lisió que sofreix amb la paret. Generalment, es consideren aquestes col·lisions com elàstiques, de manera que es conserva la velocitat tangent a la paret.

Quànticament, l'Hamiltonià vindrà donat per:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta,$$

i les col·lisions elàstiques es tradueixen per una funció d'ona que es cancel·la a la frontera  $\partial\Omega$ .

Considerem el cas on  $\Omega$  varia d'un cercle a un estadi. Quan  $\Omega$  és un cercle, el moment angular es conserva, hi ha tantes constants del moviment com graus de llibertat. La dinàmica clàssica és per tant integrable i no presenta caos (Fig. 5.19). En el cas de l'estadi, en canvi, ja no hi ha cap altra constant del moviment que l'energia, el sistema és ergòdic i presenta el caos determinista. Per tant, és fortament caòtic.

En altres casos, per exemple si l'embolcall té forma de lenticular, el comportament és intermediari. Hi ha zones de l'espai de fase on el moviment és quasi—periòdic, i altres on és caòtic. Això es veu clarament en construir una secció de Poincaré, representant la posició de la partícula sobre la frontera en el moment del xoc, així com la seva velocitat tangent.

Quànticament, es poden calcular per exemple les energies pròpies  $E_i$  i les funcions pròpies:

$$H\psi_i = E_i\psi_i.$$

Es pot escriure  $E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}$ , on  $L$  és una longitud característica de l'embolcall i  $k_i$  un nombre d'ona. El límit clàssic  $\hbar \rightarrow 0$  és equivalent a  $L \rightarrow \infty$ , és a dir, a una ampliació del domini.

Si  $\Omega$  és un cercle, les funcions pròpies es donen per funcions de Bessel  $J_p(k; r)$  (on  $p$  és el moment angular), com  $J_p(k_i) = 0$ , la qual cosa determina les energies pròpies  $k_i$ , si es coneixen els zeros d'aquesta funció de Bessel. En el cas d'un estadi o d'una altra forma, ja no hi ha cap fórmula simple i només es poden calcular numèricament els nivells d'energia (problema altament no trivial).

Considerem les energies ordenades per ordre creixent

$$E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_n \leq \dots \quad (5.29)$$

podem associar la densitat d'estats

$$N(E) = \sum_i \delta(E - E_i) \quad (5.30)$$

funció esglaonada que salta cada cop que  $E$  travessa un valor propi.

El comportament mitjà d'aquesta corba s'obté prenent el límit  $\hbar \rightarrow 0$ , els nivells s'apropen cada cop més

$$N(E) = \sum_i \theta\left(\frac{2mL^2}{\hbar^2}E - k_i^2\right) \quad (5.31)$$

Quan  $E \rightarrow \infty$  tenim  $N(E) \sim n(E)$  i llavors

$$n(E) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2p \int_{\Lambda} \frac{d^2q}{\hbar^2} \theta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) = |\Lambda| \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (5.32)$$

Aquesta funció  $n(E)$  variarà d'un sistema a un altre.

Què passa amb les fluctuacions al voltant d'aquesta mitjana? Haurien de revelar la naturalesa quàntica del sistema, és a dir, el fet que la corba  $N(E)$  és discontínua. Si volem analitzar aquestes fluctuacions sense referir-nos al comportament mitjà, que no és universal, hem de fer un canvi de variables.

$$\epsilon_i = n(E_i) \quad (5.33)$$

En aquestes noves variables, la densitat mitjana d'estat és  $\epsilon$ , és a dir, l'espai mitjà dels nivells és un. Aleshores podem estudiar el comportament estadístic de les variables  $\epsilon_i$ . Una de les magnituds més estudiades és la distribució de probabilitat dels espais  $s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$  entre nivells veïns

$$p(s)ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{número de } s_i \in (s, s + ds), 1 \leq i \leq N \quad (5.34)$$

Observem els resultats següents:

1. Cercle (integrable)

$$p(s) = e^{-s} \quad (5.35)$$

Distribució poissoniana.  $p(0) = 1 > 0$ , els nivells tendeixen a atreure's.

2. Estadi (completament caòtica)

$$p(s) \sim se^{-\frac{\pi}{4}s^2} \quad (5.36)$$

Distribució de Wigner.  $p(0) = 0$ , els nivells es repel·leixen

3. Altres formes (mixtes)

Distribució més intermèdia, sense una forma analítica simple.

És remarcable la universalitat dels comportaments observats. Sempre es detecta la distribució poissoniana quan el sistema és clàssicament integrable, i la distribució de Wigner quan el sistema és completament caòtic.

En aquest últim cas, tots els resultats es poden explicar mitjançant matrius aleatòries. L'estadística dels nivells sembla ser la mateixa que s'obté representant l'Hamiltonià com una matriu  $N \times N$  aleatòria amb elements  $h_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{N}}$  on les variables  $a_{ij} = a_{ji}$ , són variables aleatòries independents.

$N$  es pren molt gran.

Aquestes propietats estadístiques s'observen en els nivells d'energia de nuclis complexos. El problema obert és explicar aquests resultats de manera analítica.