Introducción a las Ecuaciones Diferenciales en Ingeniería

Enfocándonos en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) y Aplicaciones

Guillermo Ibarra

12 de noviembre de 2014

Contenido

¿Qué son las Ecuaciones Diferenciales?

- ¿Qué significa fisicamente una derivada?
- ¿Cómo se representa matemáticamente?

Representación Matemática

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\sec}$$

$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{\sec}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}$$

Ecuaciones Diferenciales en Ingeniería

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \vec{f} \tag{2}$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) e = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \tag{3}$$

Ecuaciones Diferenciales en Ingeniería

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \vec{f} \tag{2}$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) e = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \tag{3}$$

Ecuaciones Diferenciales en Ingeniería

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{1}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \vec{f} \tag{2}$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) e = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \tag{3}$$

Ecuaciones Diferenciales en Ingeniería

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{1}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \vec{f} \tag{2}$$

Ecuación de Energía:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) e = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \tag{3}$$

Tipos de Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Tipos de Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Ecuaciones Diferenciales Parciales (PDEs)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Tipos de Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Ecuaciones Diferenciales Parciales (PDEs)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDEs)

$$dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dW_t$$

Orden y Grado de las Ecuaciones Diferenciales

Orden de una Ecuación Diferencial

- El orden es la **mayor derivada** que aparece en la ecuación.
- Ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Orden y Grado de las Ecuaciones Diferenciales

Orden de una Ecuación Diferencial

- El orden es la **mayor derivada** que aparece en la ecuación.
- Ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Grado de una Ecuación Diferencial

- El grado es el **exponente** de la derivada de mayor orden, suponiendo que la ecuación está en una forma polinómica.
- Ejemplo:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = 0$$

Ecuaciones Lineales vs. No Lineales

Ecuaciones Lineales

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

Ecuaciones Lineales vs. No Lineales

Ecuaciones Lineales

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

Ecuaciones No Lineales

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

Problemas de Valor Inicial (PVI) vs. Problemas de Valor en la Frontera (PVF)

Problemas de Valor Inicial (PVI)

- Definición: En un PVI, se da una condición inicial para la función en un solo punto.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Problemas de Valor Inicial (PVI) vs. Problemas de Valor en la Frontera (PVF)

Problemas de Valor Inicial (PVI)

- Definición: En un PVI, se da una condición inicial para la función en un solo punto.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Problemas de Valor en la Frontera (PVF)

- Definición: En un PVF, se dan condiciones en más de un punto, típicamente en los extremos de un intervalo.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(x), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en Ingeniería

- **Oscilador Armónico**:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

donde x es el desplazamiento y ω es la frecuencia angular.

- **Circuito RLC**:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

donde q es la carga, L la inductancia, R la resistencia y C la capacitancia.

Relevancia de las EDOs en Ingeniería

Aplicaciones de las EDOs

- Modelar sistemas dinámicos que evolucionan con el tiempo o el espacio.
- Predecir el comportamiento del sistema en el tiempo bajo diferentes condiciones.

Énfasis

- Las EDOs son fundamentales para la simulación de sistemas del mundo real.
- Permiten analizar y prever la respuesta de sistemas bajo diversas condiciones, como variaciones en fuerzas, cargas o factores ambientales.

¿Qué es un Problema de Valor Inicial?

Definición de PVI

- Un Problema de Valor Inicial (PVI) consiste en resolver una ecuación diferencial a partir de una **condición inicial** especificada en un punto.
- La condición inicial define el valor de la función en un punto específico, lo cual permite determinar una solución única.

Importancia

- Los PVI son esenciales para analizar sistemas dinámicos, ya que establecen el **estado inicial** del sistema.
- Permiten predecir la evolución del sistema en el tiempo a partir de ese estado inicial.

Ejemplos de PVI en Ingeniería

Ejemplo 1: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

- Modela el movimiento de una masa conectada a un resorte y un amortiguador, bajo una condición inicial de posición y velocidad.
- Representado por una ecuación diferencial de segundo orden que describe la dinámica del sistema.

Ejemplos de PVI en Ingeniería

Ejemplo 1: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

- Modela el movimiento de una masa conectada a un resorte y un amortiguador, bajo una condición inicial de posición y velocidad.
- Representado por una ecuación diferencial de segundo orden que describe la dinámica del sistema.

Ejemplo 2: Distribución Inicial de Temperatura en Sistemas Térmicos

- Describe la evolución de la temperatura en un sistema a partir de una distribución inicial conocida.
- Útil en el análisis de transferencia de calor y enfriamiento de materiales.

Introducción a los Métodos de Solución

Métodos de Solución para Ecuaciones Diferenciales

- Los métodos de solución se dividen en dos tipos principales:
  - **Métodos Analíticos**: Buscan soluciones exactas en forma de expresiones matemáticas.
  - **Métodos Numéricos**: Aproximan soluciones mediante cálculos iterativos, útiles cuando no es posible una solución exacta.

Comparación de Métodos Analíticos y Numéricos

Cuándo Utilizar Cada Método

- **Métodos Analíticos**:
  - Útiles cuando la ecuación es simple y tiene una solución exacta conocida.
  - Ejemplo: Ecuaciones lineales de primer orden, como $\frac{dy}{dx} = ky$, que se resuelve como $y = Ce^{kx}$.

- **Métodos Numéricos**:
  - Necesarios cuando la ecuación es compleja o no tiene solución analítica.
  - Ejemplo: Método de Euler o Runge-Kutta para sistemas no lineales o ecuaciones de segundo orden sin soluciones exactas.

Métodos Analíticos – Separación de Variables

Explicación

- La separación de variables es una técnica para resolver ecuaciones diferenciales donde las variables se pueden separar en lados opuestos de la ecuación.
- Permite resolver ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$.

Ejemplo: Crecimiento o Decaimiento Poblacional

- Ecuación: $\frac{dP}{dt} = kP$, donde k es una constante de crecimiento o decaimiento.

Proceso de Solución Paso a Paso

1. **Separar Variables**: $\frac{1}{P}\,dP = k\,dt$

Proceso de Solución Paso a Paso

1. **Separar Variables**: $\frac{1}{P}\,dP = k\,dt$
2. **Integrar Ambos Lados**:

$$\int \frac{1}{P}\,dP = \int k\,dt$$

Proceso de Solución Paso a Paso

1. **Separar Variables**: $\frac{1}{P}\,dP = k\,dt$
2. **Integrar Ambos Lados**:

$$\int \frac{1}{P}\,dP = \int k\,dt$$

3. **Resolver la Integral**:

$$\ln(P) = kt + C$$

Proceso de Solución Paso a Paso

1. **Separar Variables**: $\frac{1}{P}\,dP = k\,dt$
2. **Integrar Ambos Lados**:

$$\int \frac{1}{P}\,dP = \int k\,dt$$

3. **Resolver la Integral**:

$$\ln(P) = kt + C$$

4. **Despejar** P:

$$P = Ce^{kt}$$

donde C es una constante determinada por una condición inicial.

Métodos Numéricos – Método de Euler

Método de Euler Adelante (Explícito)

- Aproximación paso a paso para resolver EDOs de la forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$.
- Fórmula de actualización:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Algoritmo para el Método de Euler

Entradas

- Ecuación diferencial expresada como $f(x, y)$
- Condición inicial: y_0
- Valor inicial de la variable independiente: x_0
- Tamaño del paso: h
- Valor final de la variable independiente: x_n

Salida

- Valores aproximados de y en puntos discretos de x, formando la secuencia aproximada $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Algoritmo para el Método de Euler

1. **Inicializar:** Establecer $y_i = y_0$ y $x_i = x_0$.
2. **Iterar:** Para $i = 0$ hasta $n - 1$, donde $n = \frac{x_n - x_0}{h}$:
   - Calcular la pendiente en el punto inicial: pendiente $= f(x_i, y_i)$
   - Calcular el siguiente valor de y: $y_{i+1} = y_i + h \cdot \text{pendiente}$
   - Actualizar el valor de x: $x_{i+1} = x_i + h$
3. **Salida:** Proporciona la secuencia aproximada $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Introducción a los Métodos Numéricos Avanzados

En este conjunto de métodos, exploramos tres enfoques avanzados para la solución numérica de EDOs:

- **Método de Euler Atrás (Backward Euler)**: Un método implícito útil para ecuaciones rígidas.
- **Método de Euler Modificado (Heun)**: Un método de predictor-corrector que mejora la precisión.
- **Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4)**: Un método de alta precisión que evalúa múltiples puntos intermedios.

Estos métodos ofrecen diferentes ventajas en términos de estabilidad y precisión para resolver problemas de ecuaciones diferenciales en ingeniería y ciencias.

Método de Euler Atrás (Backward Euler)

Introducción

- El método de Euler Atrás es un método **implícito** para resolver ecuaciones diferenciales.
- Se utiliza comúnmente para ecuaciones **rígidas** debido a su estabilidad incondicional.
- Aunque es más complejo que el método de Euler Adelante, es ideal para problemas que requieren estabilidad a mayores tamaños de paso.

Fórmula de Actualización

- La fórmula de actualización para el método de Euler Atrás es:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

- Se requiere resolver y_{n+1} implícitamente, ya que aparece en ambos lados de la ecuación.

Algoritmo para el Método de Euler Atrás

Entradas

- Ecuación diferencial $f(x, y)$
- Condición inicial y_0
- Valor inicial x_0
- Tamaño de paso h
- Valor final x_n

Procedimiento

1. **Inicializar:** Establecer $y_i = y_0$ y $x_i = x_0$.
2. **Iterar:** Para $i = 0$ hasta $n - 1$:
   - Resolver la ecuación implícita para y_{i+1}:
   $$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$
   - Actualizar x: $x_{i+1} = x_i + h$
3. **Salida:** Secuencia aproximada $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Método de Euler Modificado (Heun)

Introducción

- El método de Euler Modificado, también conocido como **Método de Heun**, es un método de **predictor-corrector**.
- Este método mejora la precisión sobre el método de Euler Adelante al promediar la pendiente inicial y la pendiente corregida.
- Es un método explícito, adecuado para problemas no rígidos.

Fórmula de Actualización

- El método de Heun utiliza dos pasos:
  1. **Paso Predictor:** $y_{\text{pred}} = y_n + hf(t_n, y_n)$
  2. **Paso Corrector:** $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{\text{pred}}))$
- La pendiente se corrige usando la media entre el valor inicial y el valor predicho.

Algoritmo para el Método de Euler Modificado (Heun)

Entradas

- Ecuación diferencial $f(x, y)$
- Condición inicial y_0
- Valor inicial x_0
- Tamaño de paso h
- Valor final x_n

Procedimiento

1. **Inicializar:** Establecer $y_i = y_0$ y $x_i = x_0$.
2. **Iterar:** Para $i = 0$ hasta $n - 1$:
   - **Paso Predictor:** Calcular $y_{\text{pred}} = y_i + hf(x_i, y_i)$
   - **Paso Corrector:** Calcular $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{\text{pred}}))$
   - Actualizar x: $x_{i+1} = x_i + h$
3. **Salida:** Secuencia aproximada $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4)

Introducción

- El método de Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4) es un método explícito de alta precisión para resolver EDOs.
- Evalúa la pendiente en cuatro puntos intermedios y pondera los resultados para alcanzar una precisión de cuarto orden.
- Es uno de los métodos más utilizados para problemas donde la precisión es importante y la estabilidad condicional es aceptable.

RK4 Fórmula de Actualización

- El método RK4 calcula k_1, k_2, k_3, k_4 y luego actualiza y_{n+1} como:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

- Este método pondera cada pendiente para mejorar la precisión.

Algoritmo para el Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4)

Entradas

- Ecuación diferencial $f(x, y)$
- Condición inicial y_0
- Valor inicial x_0
- Tamaño de paso h
- Valor final x_n

RK4 Procedimiento

1. **Inicializar:** Establecer $y_i = y_0$ y $x_i = x_0$.
2. **Iterar:** Para $i = 0$ hasta $n - 1$:
   - Calcular:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

   - Calcular el siguiente valor de y:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

   - Actualizar x: $x_{i+1} = x_i + h$
3. **Salida:** Secuencia aproximada $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

¡Gracias!

¿Preguntas?

`https://github.com/guillermoibarra/taller-fim-2024`