

Colpier Clément  
Fornara Thibault  
Pellegrino Guillaume  
Renard Charles

26/01/13



Projet de Mathématiques appliquées  
PR3003

-

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Déterminer l'équation différentielle vérifiée par <math>M(t)=(x(t),y(t))</math>.</b>	<b>4</b>
1.0.1	Projection du Poids sur la composante tangentielle . . . . .	5
1.0.2	Projection de la tension du ressort su la composante tangentielle . . . . .	5
1.0.3	Détermination de $a_t$ . . . . .	6
1.0.4	Détermination de l'équation différentielle . . . . .	6

# 1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $M(t)=(x(t),y(t))$ .



La masselotte M se déplace uniquement selon la composante tangentielle. Pour déterminer l'équation différentielle on va donc particulièrement s'intéresser à l'équation sur la composante tangentielle. Pour cela, on commence à faire la somme des forces s'exerçant sur la composante tangentielle  $\vec{u}_t$  et normale  $\vec{u}_n$  :

$$\begin{cases} P_t + T_t = ma_t \\ P_n + R_n + T_n = 0 \end{cases}$$

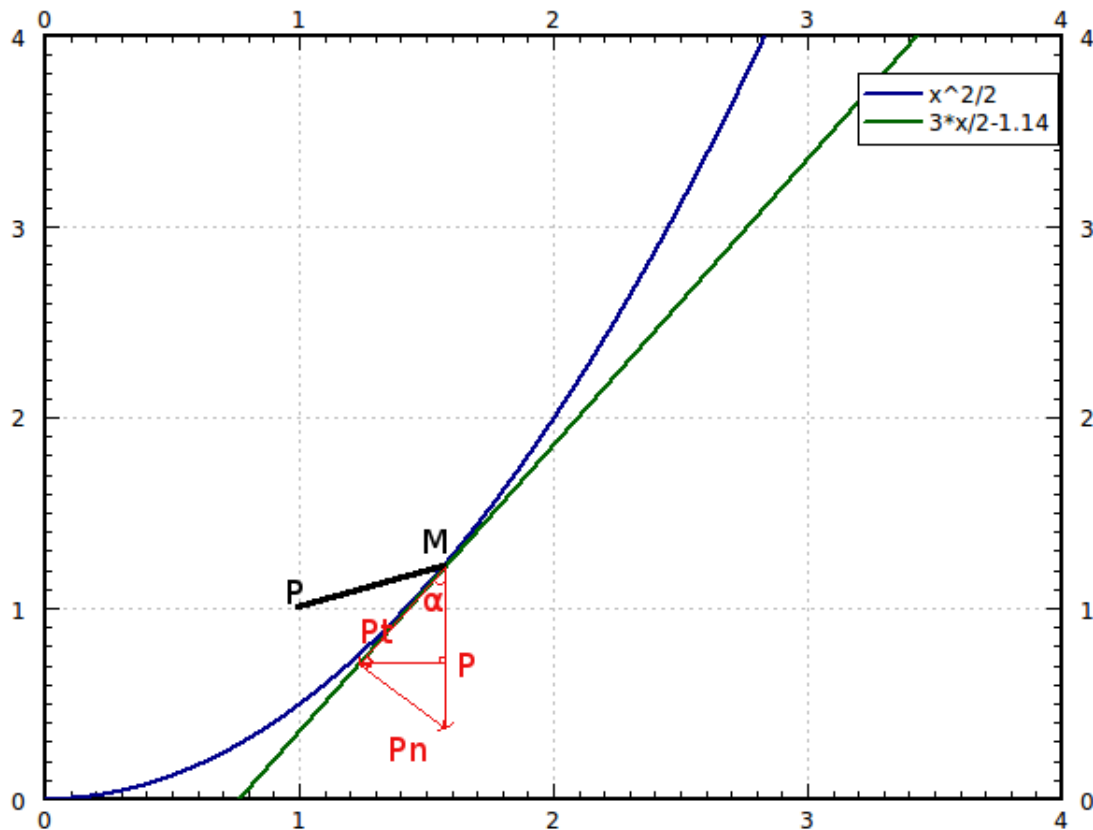
On s'intéresse à l'équation :

$$P_t + T_t = ma_t$$

Pour déterminer l'équation différentielle, on doit alors projeter  $\vec{T}$  et  $\vec{m}g$  sur  $\vec{u}_t$ .

On projette  $\vec{m}g = -mg.\vec{u}_y$  sur  $\vec{u}_t$

### 1.0.1 Projection du Poids sur la composante tangentielle



On remarque sur le graphique que  $P_t = P \cdot \cos(\alpha)$

On cherche à déterminer  $\alpha$ . On calcule la pente  $a$  de la tige parabolique.  $a = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x^2/2}{\partial x} = x$

En  $M(x_0, y_0)$  la pente  $a$  de la tige parabolique vaut donc  $x_0$ . Cette pente  $a$  nous permet de calculer l'angle  $\alpha$ .

En effet, on remarque graphiquement que  $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$ . On en déduit :  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right)$

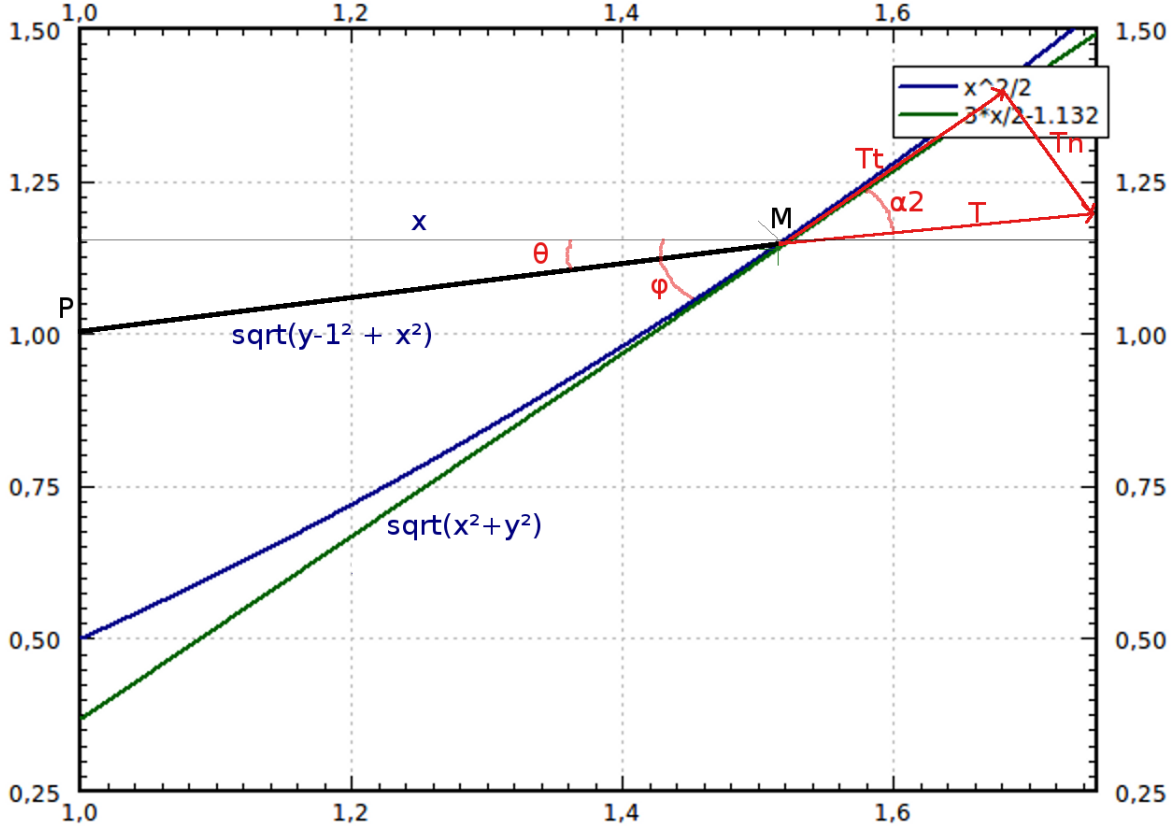
Au final on trouve donc :  $P_t = P \cdot \cos(\tan^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right))$

Or  $\cos(\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  On en déduit donc :  $P_t = P \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}$  D'où :

$$P_t = P \cdot \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}$$

### 1.0.2 Projection de la tension du ressort sur la composante tangentielle

On projette désormais  $\vec{T}$  sur  $\vec{u}_t$ .



$$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{(1-y)^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}}$$

$$\text{Et : } T_t = T \cdot \cos(\alpha_2) = T \cdot \cos(\phi - \theta) = T[\cos(\phi) \cdot \cos(\theta) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)]$$

On en déduit :

$$T_t = T \left[ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sin(\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})) \cdot \sin(\cos^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}})) \right]$$

$$\text{Or : } \sin(\cos^{-1}(u)) = \sqrt{1-u^2}$$

On trouve donc :

$$T_t = T \left[ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right]$$

### 1.0.3 Détermination de $a_t$

On a vu dans la première équation que  $a_n = 0$ . On en déduit :  $||\vec{a}|| = a_t$  On peut ainsi écrire :  $a_t = ||\vec{a}||$

$$\text{Or } ||\vec{a}|| = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\partial t}$$

On trouve :

$$a_t = \ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(Equation de Charles)

### 1.0.4 Détermination de l'équation différentielle

A l'aide de ce qu'on a calculé précédemment on développe l'équation  $mg_t + T_t = ma_t$  pour déterminer l'équation différentielle. On obtient alors :

$$mg \cdot \frac{x}{1+x^2} + k(l-l_0) \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^4/4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^4/4}} \right] - m\ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{m\dot{x}^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

Equa diff de Charles :

$$\ddot{x} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{5x^3/8+x^2/4+\dot{x} \cdot x}{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{l_0(5x^3/4+x^2/2)}{2\sqrt{1+x^4/4}\sqrt{1+x^2}} = 0$$