Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Curso de Engenharia de Computação

CSD21 - Matemática Discreta

Prof. Luiz Celso Gomes Jr.

Lista de Exercícios #1

Guilmour H. D. Rossi[1]

Março, 2016.

I) Usando os métodos de demonstração direta, contraposição ou contradição prove que:

A) A soma de dois números pares é par.

1. Prova: Suponha que somamos dois números pares.
2. Logo, $a + b$, com $a = 2k$ e $b = 2k'$ para a, b, k e $k' \in \mathbb{Z}$.
3. Então, $a + b = 2k + 2k'$.
4. Assim, $a + b = 2(k + k')$.
5. Logo, $a + b = 2c$, com $c = (k + k')$ e $c \in \mathbb{Z}$.
6. Portanto, o resultado é par.

B) O produto de dois números pares é par.

1. Prova: Suponha que multiplicamos dois números pares.
2. Logo, $a \cdot b$, com $a = 2k$ e $b = 2k'$ para a, b, k e $k' \in \mathbb{Z}$.
3. Então, $a \cdot b = (2k) \cdot (2k')$.
4. Assim, $a \cdot b = 2(2 \cdot k \cdot k')$.
5. Logo, $a \cdot b = 2c$, onde $c = (2 \cdot k \cdot k')$ e $c \in \mathbb{Z}$.
6. Portanto, o resultado é par.

[1] contato@guilmour.com

C) **$n! < n^n$. Se fatorarmos um número n, então ele será menor que n^n.**

1. Prova: Supomos que $n!$ seja maior que n^n, em todo $n > 0$, para que $(n-1)$ e $n \in \mathbb{Z}$.

2. Logo, $n! > n^n$.

3. Então, $n! - n^n > 0$.

4. Onde, $n! = n \cdot (n-1)!$ e $n^n = n \cdot (n^{n-1})$.

5. Assim $(n \cdot (n-1)!) - (n \cdot (n^{n-1}) > 0$.

6. Logo, $(n \cdot (k)) - (n \cdot (k')) > 0$, com $k = (n-1)!$ e $k' = n^{n-1}$.

7. Então, $n \cdot (k - k') > 0$.

8. Se $n > 0$, obrigatoriamente $k - k' > 0$.

9. Logo, $(n-1)! - n^{n-1} > 0$ sempre.

10. Logo, $0 - 1 > 0$, se aplicarmos o caso básico de $n = 1$.

12. O que é um absurdo, pois $-1 \not> 0$.

13. Portanto, $n! < n^n$.

D) **A soma de três inteiros consecutivos é divisível por 3.**

1. Prova: Supomos a soma de três números inteiros.

2. Então, $n + (n+1) + (n+2)$, com $n \in \mathbb{Z}$.

3. Assim, $n + (n+1) + (n+2) = (n+n+n) + (1+2)$, associativamente.

4. Logo, $n + (n+1) + (n+2) = (3n) + 3$.

5. Logo, $n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)$.

6. Então, $n + (n+1) + (n+2) = 3k$, tal que $k = (n+1)$ e $k \in \mathbb{Z}$.

7. Portanto, a soma de três números inteiros consecutivos é divisível por 3.

E) **Se n^2 é ímpar então n é ímpar.**

1. Prova: Suponha que n é par.

2. Logo, $n = 2k$, com n e $k \in \mathbb{Z}$

3. Então, $n^2 = (2k)^2$.

4. Assim, $n^2 = (2k \cdot 2k)$.

5. Onde, $n^2 = 2(2 \cdot k^2)$.

6. Sendo, $n^2 = 2c$, com $c = (2 \cdot k^2)$ e $c \in \mathbb{Z}$.

7. Portanto, n^2 também é par. Provando por contraposição que se n^2 é ímpar então n também será ímpar.

F) **Se $x \cdot y$ é ímpar então x e y são ambos ímpares.**

1. Prova: Supomos que x e y são pares.

2. Logo, $x = 2k$ e $y = 2k'$, com x, y, k e $k' \in \mathbb{Z}$.

3. Então, $x \cdot y = 2k \cdot 2k'$.

4. Logo, $x \cdot y = (2 \cdot 2) \cdot (k \cdot k')$.

5. Assim, $x \cdot y = 2(2 \cdot k \cdot k')$.

6. Onde, $x \cdot y = 2c$, tal que $c = (2 \cdot k \cdot k')$ e $c \in \mathbb{Z}$.

7. Portanto $x \cdot y$ também é par. Então, por contraposição, temos que se o resultado de $x \cdot y$ é ímpar, logo x e y também são ambos ímpares.

G) **Inteiros consecutivos não podem ser ambos pares.**

1. Prova: Supomos que inteiros consecutivos são pares.

2. Então, $n = 2k$ e $(n + 1) = 2k'$, com n, k e $k' \in \mathbb{Z}$.

3. Logo, $n = 2k$ e $((2k) + 1) = 2k'$, substituindo.

4. Assim, $(2k + 1) = 2k'$.

5. Onde temos uma contradição; já que um número par não pode ser um número ímpar.

II) Prove usando indução matemática que:

A) **1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = $\mathbf{n^2}$.**

1. Passo básico: $P(n) = n^2$. $P(1) = 1^2 = 1$.

2. Hipótese: $P(k)$ é verdadeiro $\forall k \geq 1$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = \boxed{(k + 1)^2}$.

3.1. $P(k + 1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1)$.

3.2. $= k^2 + (2(k + 1) - 1)$.

3.3. $= k^2 + (2k + 2 - 1)$.

3.4. $= k^2 + 2k + 1$.

3.5. $= \boxed{(k + 1)^2}$.

B) $\mathbf{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1}}$ **- 1.**

1. Passo básico: $P(n) = 2^{n+1} - 1$. $P(1) = 2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 3 = 1 + 2$.

2. Hipótese: $P(k)$ é verdadeiro $\forall k \geq 1$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1 = \boxed{2^{n+2} - 1}$.

3.1. $P(k+1) = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n + 2^{n+1}$.

3.2. $= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$.

3.3. $= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1$.

3.4. $= 2(2^{n+1}) - 1$.

3.5. $= 2^{n+1+1} - 1$.

3.6. $= \boxed{2^{n+2} - 1}$.

C) $\mathbf{1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}$**.**

1. Passo básico: $P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. $P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

2. Hipótese: $P(k)$ é verdadeiro $\forall k \geq 1$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \boxed{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

3.1. $P(k+1) = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1)$.

3.2. $= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$.

3.3. $= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$.

3.4. $= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$.

3.5. $= \frac{n^2+3n+2}{2}$.

3.6. $= \boxed{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

D) $\mathbf{2^n > n}$**.**

1. Passo básico: $P(n) = 2^n > n$. $P(1) = 2^1 > 1 = 2 > 1$.

2. Hipótese: $P(k) = 2^k > k$. $\forall k \geq 1$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = \boxed{2^{k+1} > (k+1)}$.

3.1. $P(k) = 2^k > k$.

3.2. $= 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k$.

3.3. $= 2^{k+1} > k + k$.

3.4. $= \boxed{2^{k+1} > (k+1)}$, já que $k \geq 1$.

E) $\mathbf{2^{2n}}$ **- 1 é divisível por 3.**

1. Passo básico: $P(n) = 2^{2n} - 1$; $P(1) = 2^{2\cdot(1)} - 1 = 4 - 1 = 3$; $\frac{3}{3} = 1$.

2. Hipótese: $P(k) = 2^{2k} - 1 = 3b$, $\forall b, k \geq 1 \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 2^{2(k+1)} - 1 = \boxed{3c}$, com $c \in \mathbb{Z}$.

3.1. $P(k+1) = 2^{2(k+1)} - 1$.

3.2. $\qquad = 2^{2k+2} - 1$.

3.3. $\qquad = 2^{2k} \cdot 2^2 - 1$.

3.4. $\qquad = 2^{2k} - 1 \cdot 2^2$.

3.5. $\qquad = 3b \cdot 2^2$, da nossa hipótese indutiva.

3.6. $\qquad = 3b \cdot 2 \cdot 2$.

3.7. $\qquad = 3(b \cdot 2 \cdot 2)$.

3.6. $\qquad = \boxed{3c}$, com $c = (b \cdot 2 \cdot 2)$.

F) $\mathbf{n^2 > 3n}$ **para** $\mathbf{n \geq 4}$**.**

1. Passo básico: $P(n) = n^2 > 3n$; $P(4) = 4^2 > 3(4) = 16 > 12$.

2. Hipótese: $P(k) = k^2 > 3k$, $\forall k \geq 4$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $(k+1)^2 > \boxed{3(k+1)}$.

3.1. $P(k+1) = (k+1)^2$.

3.2. $\qquad = k^2 + 2k + 1$.

3.3. $\qquad > 3k + 2k + 1$, pela hipótese da indução.

3.4. $\qquad \geq 3k + 8 + 1$, pois $k \geq 4$.

3.5. $\qquad \geq 3k + 9$.

3.6. $\qquad > 3k + 9 - 6$.

3.7. $\qquad > 3k + 3$.

3.8. $\qquad > \boxed{3(k+1)}$.

G) $\mathbf{2^{n+1} < 3^n}$ **para n > 1.**

1. Passo básico: $P(n) = 2^{n+1} < 3^n$; $P(2) = 2^{2+1} < 3^2 = 2^3 < 3^2 = 8 < 9$.

2. Hipótese: $P(k) = 2^{k+1} < 3^k$, $\forall k > 1 \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 2^{(k+1)+1} < 3^{k+1} = \boxed{2^{k+2} < 3^{k+1}}$.

3.1. $P(k) = 2^{k+1} < 3^k$.

3.2 $\quad = 2 \cdot 2^{k+1} < 2 \cdot 3^k$.

3.3 $\quad = 2^{k+1+1} < 3^{k+1}$.

3.4 $\quad = \boxed{2^{k+2} < 3^{k+1}}$.

H) $\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$**.**

1. Passo básico: $P(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; $P(1) = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1(2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

2. Hipótese: $P(k) = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ é verdadeiro $\forall k \geq 1$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

3.1. $P(k+1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ k^3 + (k+1)^3$.

3.2. $\quad = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$, pela hipótese indutiva.

3.3 $\quad = (k+1)^2(\frac{k^2}{4} + k + 1)$.

3.4 $\quad = (k+1)^2(\frac{k^2+4k+4}{4})$.

3.5 $\quad = \boxed{\frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}}$.