



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Curso de Engenharia de Computação
CSD21 - Matemática Discreta
Prof. Luiz Celso Gomes Jr.

Lista de Exercícios #1

Guilmour H. D. Rossi¹

Março, 2016.

I) Usando os métodos de demonstração direta, contraposição ou contradição prove que:

A) A soma de dois números pares é par.

1. Prova: Suponha que somamos dois números pares.
2. Logo, $a + b$, com $a = 2k$ e $b = 2k'$ para a, b, k e $k' \in \mathbb{Z}$.
3. Então, $a + b = 2k + 2k'$.
4. Assim, $a + b = 2(k + k')$.
5. Logo, $a + b = 2c$, com $c = (k + k')$ e $c \in \mathbb{Z}$.
6. Portanto, o resultado é par.

B) O produto de dois números pares é par.

1. Prova: Suponha que multiplicamos dois números pares.
2. Logo, $a \cdot b$, com $a = 2k$ e $b = 2k'$ para a, b, k e $k' \in \mathbb{Z}$.
3. Então, $a \cdot b = (2k) \cdot (2k')$.
4. Assim, $a \cdot b = 2(2 \cdot k \cdot k')$.
5. Logo, $a \cdot b = 2c$, onde $c = (2 \cdot k \cdot k')$ e $c \in \mathbb{Z}$.
6. Portanto, o resultado é par.

¹contato@guilmour.com

C) $n! < n^n$. Se fatorarmos um número n , então ele será menor que n^n .

1. Prova: Supomos que $n!$ seja maior que n^n , em todo $n > 0$, para que $(n - 1)$ e $n \in \mathbb{Z}$.
2. Logo, $n! > n^n$.
3. Então, $n! - n^n > 0$.
4. Onde, $n! = n \cdot (n - 1)!$ e $n^n = n \cdot (n^{n-1})$.
5. Assim $(n \cdot (n - 1)!) - (n \cdot (n^{n-1})) > 0$.
6. Logo, $(n \cdot (k)) - (n \cdot (k')) > 0$, com $k = (n - 1)!$ e $k' = n^{n-1}$.
7. Então, $n \cdot (k - k') > 0$.
8. Se $n > 0$, obrigatoriamente $k - k' > 0$.
9. Logo, $(n - 1)! - n^{n-1} > 0$ sempre.
10. Logo, $0 - 1 > 0$, se aplicarmos o caso básico de $n = 1$.
12. O que é um absurdo, pois $-1 \not> 0$.
13. Portanto, $n! < n^n$.

D) A soma de três inteiros consecutivos é divisível por 3.

1. Prova: Supomos a soma de três números inteiros.
2. Então, $n + (n + 1) + (n + 2)$, com $n \in \mathbb{Z}$.
3. Assim, $n + (n + 1) + (n + 2) = (n + n + n) + (1 + 2)$, associativamente.
4. Logo, $n + (n + 1) + (n + 2) = (3n) + 3$.
5. Logo, $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$.
6. Então, $n + (n + 1) + (n + 2) = 3k$, tal que $k = (n + 1)$ e $k \in \mathbb{Z}$.
7. Portanto, a soma de três números inteiros consecutivos é divisível por 3.

E) Se n^2 é ímpar então n é ímpar.

1. Prova: Suponha que n é par.
2. Logo, $n = 2k$, com n e $k \in \mathbb{Z}$
3. Então, $n^2 = (2k)^2$.
4. Assim, $n^2 = (2k \cdot 2k)$.
5. Onde, $n^2 = 2(2 \cdot k^2)$.
6. Sendo, $n^2 = 2c$, com $c = (2 \cdot k^2)$ e $c \in \mathbb{Z}$.
7. Portanto, n^2 também é par. Provando por contraposição que se n^2 é ímpar então n também será ímpar.

F) Se $x \cdot y$ é ímpar então x e y são ambos ímpares.

1. Prova: Supomos que x e y são pares.
2. Logo, $x = 2k$ e $y = 2k'$, com x, y, k e $k' \in \mathbb{Z}$.
3. Então, $x \cdot y = 2k \cdot 2k'$.
4. Logo, $x \cdot y = (2 \cdot 2) \cdot (k \cdot k')$.
5. Assim, $x \cdot y = 2(2 \cdot k \cdot k')$.
6. Onde, $x \cdot y = 2c$, tal que $c = (2 \cdot k \cdot k')$ e $c \in \mathbb{Z}$.
7. Portanto $x \cdot y$ também é par. Então, por contraposição, temos que se o resultado de $x \cdot y$ é ímpar, logo x e y também são ambos ímpares.

G) Inteiros consecutivos não podem ser ambos pares.

1. Prova: Supomos que inteiros consecutivos são pares.
2. Então, $n = 2k$ e $(n + 1) = 2k'$, com n, k e $k' \in \mathbb{Z}$.
3. Logo, $n = 2k$ e $((2k) + 1) = 2k'$, substituindo.
4. Assim, $(2k + 1) = 2k'$.
5. Onde temos uma contradição; já que um número par não pode ser um número ímpar.

II) Prove usando indução matemática que:

A) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

1. Passo básico: $P(n) = n^2$. $P(1) = 1^2 = 1$.
2. Hipótese: $P(k)$ é verdadeiro $\forall k \geq 1$ com $k \in \mathbb{Z}$.
3. Mostrar que $P(k + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = \boxed{(k + 1)^2}$.
- 3.1. $P(k + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1)$.
- 3.2. $= k^2 + (2(k + 1) - 1)$.
- 3.3. $= k^2 + (2k + 2 - 1)$.
- 3.4. $= k^2 + 2k + 1$.
- 3.5. $= \boxed{(k + 1)^2}$.

B) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

1. Passo básico: $P(n) = 2^{n+1} - 1$. $P(1) = 2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 3 = 1 + 2$.

2. Hipótese: $P(k)$ é verdadeiro $\forall k \geq 1$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1 = \boxed{2^{n+2} - 1}$.

3.1. $P(k+1) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1}$.

3.2. $= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$.

3.3. $= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1$.

3.4. $= 2(2^{n+1}) - 1$.

3.5. $= 2^{n+1+1} - 1$.

3.6. $= \boxed{2^{n+2} - 1}$.

C) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Passo básico: $P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. $P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

2. Hipótese: $P(k)$ é verdadeiro $\forall k \geq 1$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

3.1. $P(k+1) = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1)$.

3.2. $= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$.

3.3. $= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$.

3.4. $= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$.

3.5. $= \frac{n^2+3n+2}{2}$.

3.6. $= \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

D) $2^n > n$.

1. Passo básico: $P(n) = 2^n > n$. $P(1) = 2^1 > 1 = 2 > 1$.

2. Hipótese: $P(k) = 2^k > k$. $\forall k \geq 1$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = \boxed{2^{k+1} > (k+1)}$.

3.1. $P(k) = 2^k > k$.

3.2. $= 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k$.

3.3. $= 2^{k+1} > k + k$.

3.4. $= \boxed{2^{k+1} > (k+1)}$, já que $k \geq 1$.

E) $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

1. Passo básico: $P(n) = 2^{2n} - 1$; $P(1) = 2^{2 \cdot (1)} - 1 = 4 - 1 = 3$; $\frac{3}{3} = 1$.

2. Hipótese: $P(k) = 2^{2k} - 1 = 3b$, $\forall b, k \geq 1 \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 2^{2(k+1)} - 1 = \boxed{3c}$, com $c \in \mathbb{Z}$.

3.1. $P(k+1) = 2^{2(k+1)} - 1$.

3.2. $= 2^{2k+2} - 1$.

3.3. $= 2^{2k} \cdot 2^2 - 1$.

3.4. $= 2^{2k} - 1 \cdot 2^2$.

3.5. $= 3b \cdot 2^2$, da nossa hipótese indutiva.

3.6. $= 3b \cdot 2 \cdot 2$.

3.7. $= 3(b \cdot 2 \cdot 2)$.

3.6. $= \boxed{3c}$, com $c = (b \cdot 2 \cdot 2)$.

F) $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

1. Passo básico: $P(n) = n^2 > 3n$; $P(4) = 4^2 > 3(4) = 16 > 12$.

2. Hipótese: $P(k) = k^2 > 3k$, $\forall k \geq 4$ com $k \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $(k+1)^2 > \boxed{3(k+1)}$.

3.1. $P(k+1) = (k+1)^2$.

3.2. $= k^2 + 2k + 1$.

3.3. $> 3k + 2k + 1$, pela hipótese da indução.

3.4. $\geq 3k + 8 + 1$, pois $k \geq 4$.

3.5. $\geq 3k + 9$.

3.6. $> 3k + 9 - 6$.

3.7. $> 3k + 3$.

3.8. $> \boxed{3(k+1)}$.

G) $2^{n+1} < 3^n$ para $n > 1$.

1. Passo básico: $P(n) = 2^{n+1} < 3^n$; $P(2) = 2^{2+1} < 3^2 = 2^3 < 3^2 = 8 < 9$.

2. Hipótese: $P(k) = 2^{k+1} < 3^k, \forall k > 1 \in \mathbb{Z}$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 2^{(k+1)+1} < 3^{k+1} = \boxed{2^{k+2} < 3^{k+1}}$.

3.1. $P(k) = 2^{k+1} < 3^k$.

3.2 $= 2 \cdot 2^{k+1} < 2 \cdot 3^k$.

3.3 $= 2^{k+1+1} < 3^{k+1}$.

3.4 $= \boxed{2^{k+2} < 3^{k+1}}$.

H) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1. Passo básico: $P(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; $P(1) = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1(2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

2. Hipótese: $P(k) = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ é verdadeiro $\forall k \geq 1$.

3. Mostrar que $P(k+1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

3.1. $P(k+1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$.

3.2. $= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$, pela hipótese indutiva.

3.3 $= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right)$.

3.4 $= (k+1)^2 \left(\frac{k^2+4k+4}{4} \right)$.

3.5 $= \boxed{\frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}}$.

III) Resolva as relações de recorrência:

A) $S(1) = 1$ $S(n) = S(n - 1) + 2n - 1$ para $n \geq 2$.

1. Expandir: $S(2) = S(1) + 2 \cdot (2) - 1 = 4 = 2^2$.

1.1. $S(3) = S(2) + 2 \cdot (3) - 1 = 4 + 5 = 9 = 3^2$.

1.2. $S(4) = S(3) + 2 \cdot (4) - 1 = 9 + 7 = 16 = 4^2$.

1.3. $S(5) = S(4) + 2 \cdot (5) - 1 = 16 + 9 = 25 = 5^2$.

2. Supor: $S(n) = n^2$.

3. Verificar:

3.1. Passo básico: $P(n) = n^2$. $P(2) = 2^2 = 4$.

3.2. Hipótese: $P(k) = k^2$, $\forall k \geq 2$ e $k \in \mathbb{Z}$.

3.3. Mostrar que $P(k + 1) = \boxed{(k + 1)^2}$.

3.3.1. $P(k + 1) = P((k + 1) - 1) + 2(k + 1) - 1$.

3.3.2. $= P(k) + 2k + 2 - 1$.

3.3.3. $= k^2 + 2k + 1$, pela hipótese indutiva.

3.3.4. $= \boxed{(k + 1)^2}$.

B) $S(1) = 2$ $S(n) = 2S(n - 1) + 2^n$ para $n \geq 2$.

1. Expandir: $S(2) = 2 \cdot S(1) + 2^2 = 2 \cdot (2) + 2^2 = 4 + 4 = 8$.

1.1. $S(3) = 2 \cdot S(2) + 2^3 = 2 \cdot (8) + 2^3 = 16 + 8 = 24$.

1.2. $S(4) = 2 \cdot S(3) + 2^4 = 2 \cdot (24) + 2^4 = 48 + 16 = 64$.

1.3. $S(5) = 2 \cdot S(4) + 2^5 = 2 \cdot (64) + 2^5 = 128 + 32 = 160$.

2. Supor: $S(n) = 2^n \cdot n$.

3. Verificar:

3.1. Passo básico: $P(n) = 2^n \cdot n$. $P(2) = 2^2 \cdot (2) = 8$.

3.2. Hipótese: $P(k) = 2^k \cdot k$, $\forall k \geq 2$ e $k \in \mathbb{Z}$.

3.3. Mostrar que $P(k + 1) = \boxed{2^{k+1} \cdot (k + 1)}$.

3.3.1. $P(k + 1) = 2 \cdot P((k + 1) - 1) + 2^{k+1}$.

3.3.2. $= 2 \cdot P(k) + 2^{k+1}$.

3.3.3. $= 2 \cdot (2^k \cdot k) + 2^{k+1}$, pela hipótese indutiva.

3.3.4. $= 2^{k+1} \cdot k + 2^{k+1}$.

3.3.4. $= \boxed{2^{k+1} \cdot (k + 1)}$.

c) $S(1) = 1$ $S(n) = 2S(n - 1) + 1$ para $n \geq 2$.

1. Expandir: $S(2) = 2 \cdot S(1) + 1 = 2 \cdot (1) + 1 = 3 = 2^2 - 1$.

1.1. $S(3) = 2 \cdot S(2) + 1 = 2 \cdot (3) + 1 = 7 = 2^3 - 1$.

1.2. $S(4) = 2 \cdot S(3) + 1 = 2 \cdot (7) + 1 = 15 = 2^4 - 1$.

1.3. $S(5) = 2 \cdot S(4) + 1 = 2 \cdot (15) + 1 = 31 = 2^5 - 1$.

2. Supor: $S(n) = 2^n - 1$.

3. Verificar:

3.1. Passo básico: $P(n) = 2^n - 1 = 2^2 - 1 = 3$.

3.2. Hipótese: $P(k) = 2^k - 1$, $\forall k \geq 2$ e $k \in \mathbb{Z}$.

3.3. Mostrar que $P(k + 1) = \boxed{2^{k+1} - 1}$.

3.3.1. $P(k + 1) = 2 \cdot P((k + 1) - 1) + 1$.

3.3.2. $\quad \quad \quad = 2 \cdot P(k) + 1$.

3.3.3. $\quad \quad \quad = 2 \cdot (2^k - 1) + 1$, pela hipótese indutiva.

3.3.4. $\quad \quad \quad = 2 \cdot 2^k - 2 + 1$.

3.3.4. $\quad \quad \quad = \boxed{2^{k+1} - 1}$.