

## 11-6. TEORÍA ELEMENTAL DE LAS TURBOMÁQUINAS

Las ecuaciones anteriores son más bien definiciones y fórmulas de comprobación. Ninguna de ellas relaciona la geometría de la máquina con las prestaciones que de ella se necesitan, por lo que es esencial buscar otras expresiones en función del diseño. Esto no resulta fácil mediante una teoría simple, por los complejos efectos viscosos que tienen lugar en la geometría tridimensional de las turbomáquinas. La teoría existente es todavía bastante elemental, y las mejoras de diseño se deben principalmente a ensayos y datos experimentales. De todas formas, estudios teóricos avanzados, apoyados en el uso de ordenador, se saldrían de la limitación prevista en este libro.

La ecuación de Euler que vamos a desarrollar, a pesar de sus hipótesis simplificativas, sigue siendo una buena herramienta para estimar el diseño de una turbomáquina y/o para predecir comportamientos de la misma.

### 11-6.1. Introducción

Antes de demostrar la ecuación de Euler, analicemos algunas cuestiones preliminares que nos ayudarán a comprender mejor el sentido físico de la misma.

#### Álabe fijo

Supongamos un chorro que acomete tangencialmente en 1 al álabe fijo de la fig.11-15.a. Si prescindimos del rozamiento del flujo con el álabe, la velocidad  $V_2$  de salida es la misma que la  $V_1$  de entrada. Cambia sin embargo su dirección y por tanto su cantidad de movimiento, lo que origina una fuerza  $F$  sobre el álabe. Esta fuerza, dada por la ecuación general (ec.3.18),

$$\vec{F} = \overrightarrow{p_1 \cdot S_1} + \overrightarrow{p_2 \cdot S_2} + \rho \cdot Q \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

valdría en este caso,

$$\vec{F} = \rho \cdot S \cdot V_1 \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

ya que las presiones relativas  $p_1$  y  $p_2$  son nulas:  $p_1 = p_2 = p_a = 0$ .

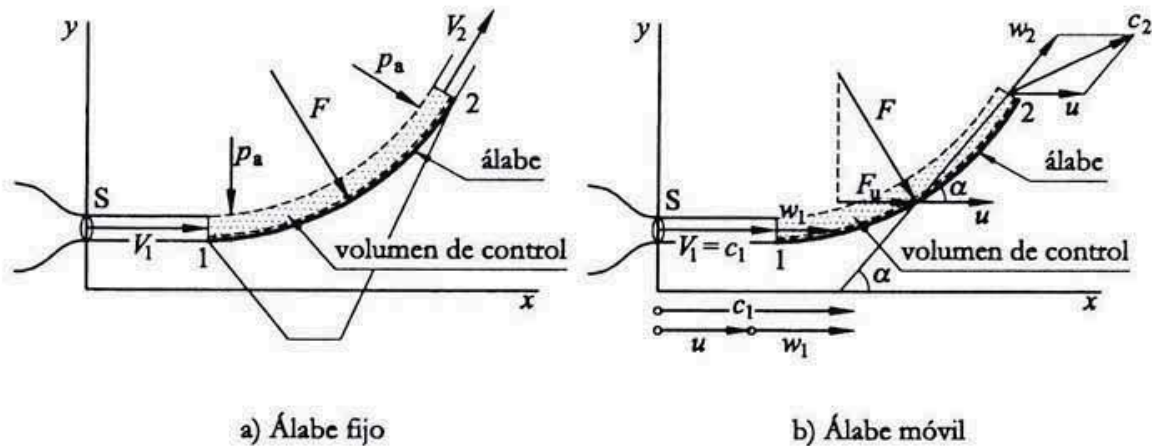


Figura 11-15

### Álabo móvil

Supongamos ahora que el álabo se mueve a la velocidad  $\vec{u}$ . El *volumen de control* (fig.11-15.b) se movería con él, por lo que el flujo no entra en el mismo a la *velocidad absoluta*  $\vec{c}_1$  sino a la *velocidad relativa*  $\vec{w}_1$ , diferencia entre  $\vec{c}_1$  y  $\vec{w}_1$ .

$$\vec{c}_1 = \vec{w}_1 + \vec{u}$$

que componen el triángulo de velocidades de entrada, aunque en este caso tienen igual dirección.

El caudal entrante en dicho *volumen de control*, que con  $u = 0$  era  $\rho \cdot S \cdot V_1$  (ó,  $\rho \cdot S \cdot c_1$ ), es ahora  $\rho \cdot S \cdot w_1$ . La diferencia entre el caudal que sale de la *tobera* fija ( $\rho \cdot S \cdot c_1$ ) y el que entra en el *volumen de control* móvil ( $\rho \cdot S \cdot w_1$ ) se utilizaría en alargar el chorro a la velocidad  $u$  (en realidad esto tiene poco sentido práctico).

Con relación al *álabo*, la velocidad de salida  $w_2$  es igual, prescindiendo del rozamiento del flujo, a la  $w_1$  de entrada. Como el álabo se mueve a la velocidad  $\vec{u}$ , un espectador fijo ve salir el flujo a la velocidad absoluta  $\vec{c}_2$ :

$$\vec{c}_2 = \vec{w}_2 + \vec{u}$$

que forman el triángulo de velocidades de salida.



La fuerza  $\vec{F}$  sobre el álabe, provocada por el caudal  $\rho \cdot S \cdot w_1$  que circula por el volumen de control al cambiar su dirección de  $\vec{w}_1$  a  $\vec{w}_2$ , valdría ahora (ec.3.18),

$$\vec{F} = \rho \cdot S \cdot w_1 \cdot (\vec{w}_1 - \vec{w}_2)$$

pues igual que antes las presiones relativas son nulas:  $p_1 = p_2 = p_a = 0$ . Es decir, que en el álabe fijo intervienen las velocidades absolutas  $\vec{c}$  y en el álabe móvil las velocidades relativas  $\vec{w}$ .

La componente  $F_u$  de la fuerza  $\vec{F}$ , al desplazarse a la velocidad  $u$ , desarrollaría la potencia,

$$P = F_u \cdot u$$

potencia que ha de ser cedida lógicamente por el flujo.

### Rodete

La acción de un flujo sobre el álabe móvil de la fig.11-15.b no tiene sentido práctico, ya que el álabe se alejaría indefinidamente de la tobera y pronto el chorro dejaría de incidir sobre él. Pero si alrededor de una rueda

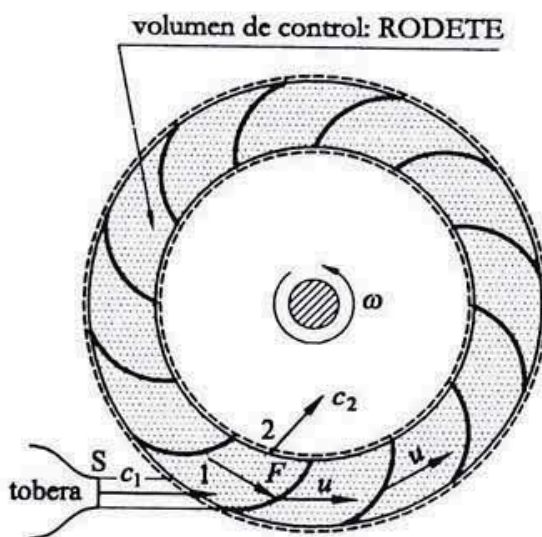


Figura 11-16

libre colocamos una serie de álabes simétricos, siempre habrá uno que sustituya al que se aleja; en tal caso, el conjunto de álabes formarán un todo, llamado rodete, que es el volumen de control a considerar (fig.11-16). El caudal másico de entrada en dicho volumen de control no es ahora  $\rho \cdot S \cdot w_1$  a pesar de que los álabes están en movimiento, sino  $\rho \cdot S \cdot c_1$  pues no hay alargamiento del chorro. Entra por tanto a la velocidad  $\vec{c}_1$  y sale a la velocidad  $\vec{c}_2$ , originando sobre el álabe la fuerza (ec.3.18),

$$\vec{F} = \overline{p_1 \cdot S_1} + \overline{p_2 \cdot S_2} + \rho \cdot S \cdot c_1 \cdot (\vec{c}_1 - \vec{c}_2) \quad (11.21)$$

y para el caso de la fig.11-16 ( $p_1 = p_2 = p_a = 0$ ),

$$\vec{F} = \rho \cdot S \cdot c_1 \cdot (\vec{c}_1 - \vec{c}_2)$$

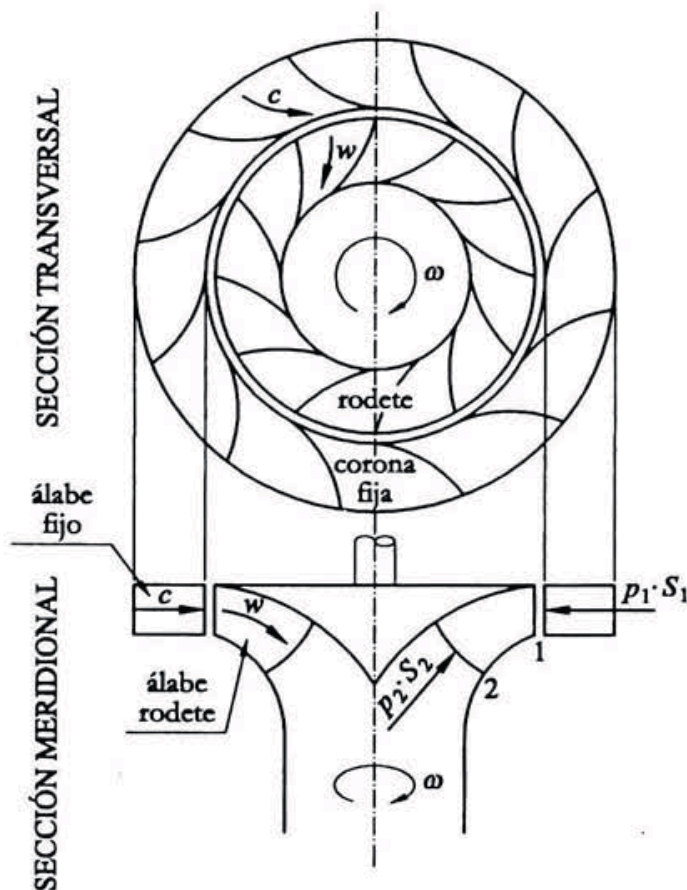


Figura 11-17

Lo más parecido en la práctica a la fig.11-16 es la *turbina Pelton* (fig.13-18).

El caso general y también más frecuente es que la (o las) tobera de la fig.11-16 sea sustituida por una *corona fija* de álabes (fig.11-17), dispuestos de manera que cada dos consecutivos formen una tobera en el caso de turbinas. Dicha *corona fija* es alimentada a través de una *cámara en espiral*, o *caracol* (fig.13-42). Este tipo de máquina es de *admisión total*: el flujo entra en *rodete* por toda su periferia.

### 11-6.2. Triángulos de velocidades

Los símbolos y nomenclatura que internacionalmente se vienen utilizando en turbomáquinas son los siguientes (figs.11-18 y 11-19):

$\vec{c}$  = velocidad absoluta (del flujo)

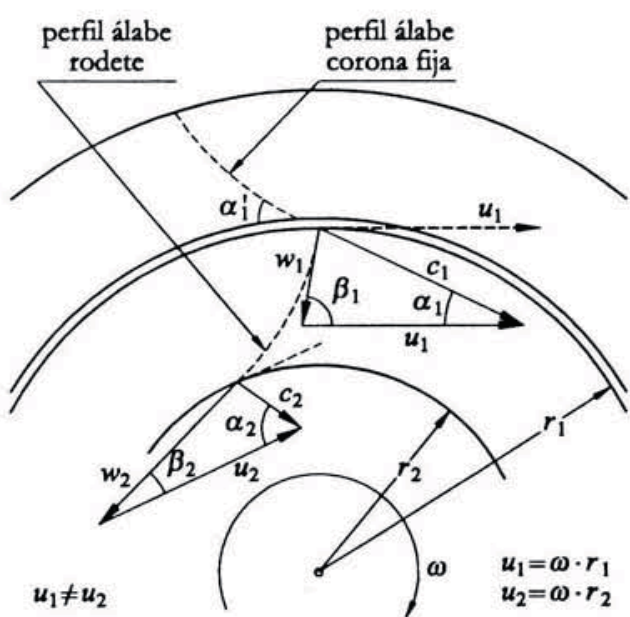
$\vec{w}$  = velocidad relativa (del flujo)

$\vec{u}$  = velocidad tangencial (del rodete)

$\alpha$  = ángulo que forma la velocidad absoluta  $\vec{c}$  con la tangencial  $\vec{u}$

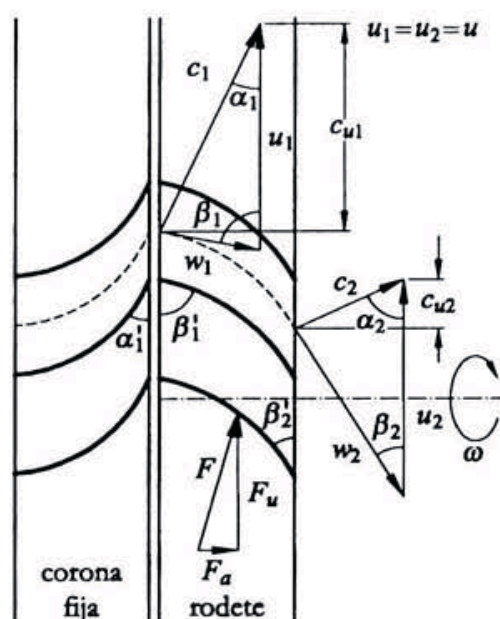
$\beta$  = ángulo que forma la velocidad relativa  $\vec{w}$  con  $(-\vec{u})$ .





PORCIÓN AMPLIADA (fig. 11-17)

Figura 11-18



TURBINA AXIAL DE VAPOR

Figura 11-19

Todo ello con subíndice <sub>(1)</sub> para el borde de entrada de los álabes del *rodete* y con subíndice <sub>(2)</sub> para el borde de salida.

En ocasiones, el ángulo  $\alpha_1$  del triángulo de entrada coincide prácticamente con el  $\alpha_1'$  que tienen los álabes de la *corona fija* a la salida (figs. 11-18 y 11-19); en cualquier caso, éste tiene una marcada influencia sobre aquél. Como el *rodete* está girando a la velocidad angular  $\omega$ , sus álabes tienen en los puntos de entrada la velocidad tangencial  $\vec{u}_1$  ( $u_1 = \omega \cdot r_1$ ). Así pues, el álabes recibe el flujo a la velocidad relativa  $\vec{w}_1$ , diferencia vectorial de  $\vec{c}_1$  y  $\vec{u}_1$ :

$$\vec{c}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1$$

Para que no haya choques con los álabes del rodete, éstos han de construirse en línea con  $\vec{w}_1$ ; es decir, con la inclinación teórica  $\beta_1$  ( $\beta_1' \approx \beta_1$ ).

De igual forma, a la salida del álabes se tiene:

$$\vec{c}_2 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2$$

Quiere decir que a la entrada existe un triángulo de velocidades, cuyos lados son  $c_1$ ,  $u_1$  y  $w_1$ ; y en el recorrido del flujo por el rodete, dicho triángulo va cambiando de forma, resultando al final el de salida, de lados  $c_2$ ,  $u_2$  y  $w_2$ .

### 11-6.3. Ecuación de Euler

En el caso más general de las turbomáquinas de *reacción*, en las que las presiones de entrada y de salida, 1 y 2, del rodete son diferentes ( $p_1 \neq p_2$ ), la fuerza  $\vec{F}$  que actúa sobre los álabes del mismo vendría dada por la expresión (ec.11.21):

$$\vec{F} = \overline{p_1 \cdot S_1} + \overline{p_2 \cdot S_2} + \dot{m} \cdot (\vec{c}_1 - \vec{c}_2)$$

Ahora bien, las fuerzas  $p_1 \cdot S_1$  y  $p_2 \cdot S_2$  que actúan respectivamente sobre las secciones de entrada y de salida del *volumen de control* definido por los álabes del *rodete*, o son paralelas al eje (fig.11-7) o cortan perpendicularmente al eje (fig.11-8) o cortan oblicuamente al eje (fig.11-9). En cualquier caso, sus proyecciones sobre la dirección de  $\vec{u}$  son nulas y/o su momento respecto al eje de giro es nulo: no contribuyen al par motor. Este par es pues provocado (tanto en las turbomáquinas de acción como en las de reacción) sólo por las fuerzas,  $\dot{m} \cdot \vec{c}_1$  y  $\dot{m} \cdot \vec{c}_2$ .

Según qué turbomáquinas, las fuerzas  $\dot{m} \cdot \vec{c}_1$  y/o  $\dot{m} \cdot \vec{c}_2$  pueden tener componentes sólo sobre dos ejes: la dirección de  $\vec{u}$  y el eje de giro en las axiales, y la dirección de  $\vec{u}$  y el radio en las radiales. En las mixtas, existen las tres componentes, tangencial, axial y radial.

En cualquier caso, las componentes tangenciales  $\dot{m} \cdot c_{u1}$  y  $\dot{m} \cdot c_{u2}$  son las únicas que producen *trabajo* cuando el *rodete* gira. El momento resultante respecto del eje de giro, o par motor  $M$ , que originan estas fuerzas sería la diferencia entre el momento  $M_1$  a la entrada y el momento  $M_2$  a la salida:

$$M_i = M_1 - M_2 = \dot{m} \cdot c_{u1} \cdot r_1 - \dot{m} \cdot c_{u2} \cdot r_2 \quad (11.22)$$

Se entiende que este momento, o par motor, es interior al eje, y no el exterior que se mide fuera de la máquina (ec.11.11).



En turbinas, el momento disminuye a lo largo del rodete y el par motor  $M$  resulta positivo ( $M > 0$ ); y en bombas ocurre lo contrario ( $M < 0$ ). Si multiplicamos la ec.11.22 por la velocidad angular  $\omega$ , obtenemos la potencia desarrollada por (o sobre) el rodete, o potencia interior en el eje:

$$P_i = M_i \cdot \omega = \dot{m} \cdot c_{u1} \cdot r_1 \cdot \omega - \dot{m} \cdot c_{u2} \cdot r_2 \cdot \omega$$

$$P_i = \dot{m} \cdot (c_{u1} \cdot u_1 - c_{u2} \cdot u_2) \quad (11.23)$$

Dividiendo por  $\dot{m}$  obtenemos la energía que se consigue de cada kg de fluido que pasa por el interior del *rodete* (trabajo técnico, o *trabajo interior en el eje*  $W_i$ ):

$$W_i = c_{u1} \cdot u_1 - c_{u2} \cdot u_2 \quad (11.24)$$

En función de los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  adopta la forma,

$$W_i = g \cdot H_i = u_1 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha_1 - u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \alpha_2 \quad (11.25)$$

Si el desarrollo anterior se hace para una bomba en lugar de para una turbina, se llega lógicamente a la misma expresión (ec.11.25). Ocurre sin embargo que, al aplicarla tal cual a una bomba, el trabajo  $W_i$  resultará lógicamente negativo.

La ec.11.25 se conoce como *ecuación fundamental de las turbomáquinas*, o *ecuación de Euler* (Léonhard Euler, 1707-1783). Conviene señalar de la misma que,

- a) es aplicable tanto a flujos incompresibles como compresibles;
- b) no depende de la trayectoria del fluido dentro del *rodete*, pues sólo depende de las condiciones de entrada (1) y de salida (2) del mismo;
- c) es aplicable con independencia de las condiciones más o menos favorables de funcionamiento.

El estudio que hemos realizado es muy elemental. No incluye el análisis de las pérdidas; aunque, una vez calculadas o establecidas experimentalmente por otra vía, sí que podrían considerarse, lo que afectaría a los trián-

gulos de velocidades y con ello a la *ecuación de Euler* (ec.11.25). En la misma se supone que los álabes son una guía perfecta para el flujo, lo que no es cierto a menos que imaginemos infinitos álabes sin espesor material. Esta hipótesis se conoce como *teoría unidimensional* y/o *teoría del número infinito de álabes*; en ocasiones se utiliza en la ec.11.25 la notación  $W_{i,\infty}$  para la hipótesis de infinitos álabes, y  $W_{i,z}$  para una realidad de  $z$  álabes.

Si la velocidad tangencial de entrada ( $u_1$ ) varía mucho de unos puntos a otros según la distancia al eje de giro (fig.11-20), saldrían diferentes triángulos de entrada; y lo mismo ocurrirá a la salida (véanse perfiles del álabe en la fig.1 del próximo ejercicio).

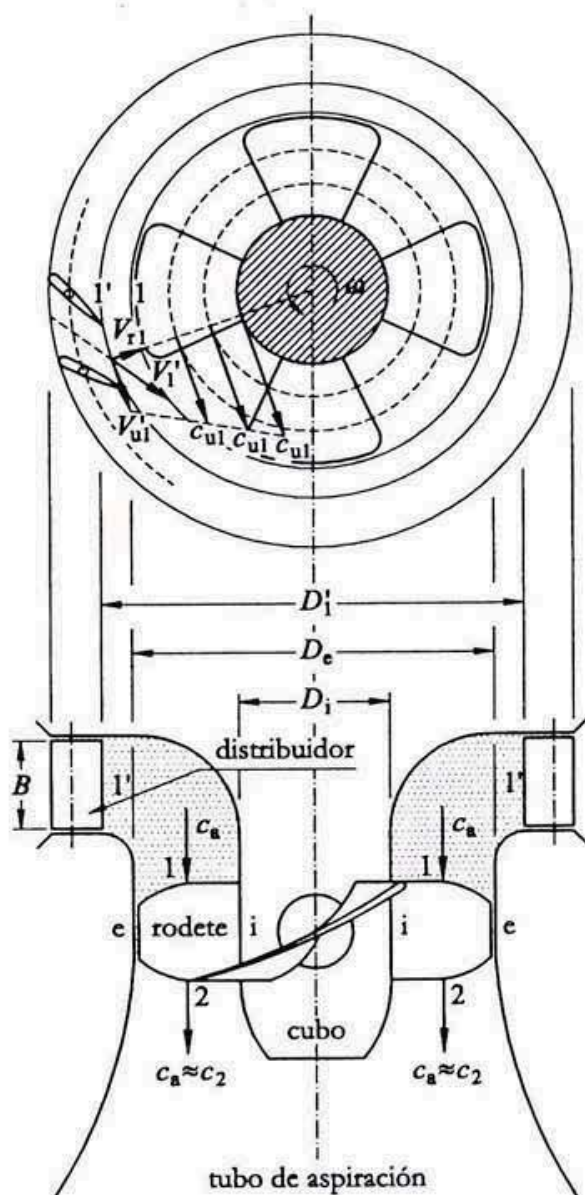


Figura 11-20. Turbina Kaplan

La ecuación del par (ec. 11.22) puede aplicarse también a partes fijas de la turbomáquina. Entre dos secciones 1' y 2' tendríamos:

$$M = M_{1'} - M_{2'};$$

$$M = \dot{m} \cdot V_{u1'} \cdot r_{1'} - \dot{m} \cdot V_{u2'} \cdot r_{2'}.$$

1) Si hay paletas que modifiquen la velocidad del flujo y/o su cantidad de movimiento, como ocurre en el distribuidor de una turbina Francis por ejemplo, el momento respecto al eje de rotación varía en el recorrido ( $M_{1'} \neq M_{2'}$ ), lo que provoca par:  $M \neq 0$ .

2) Si no hay paletas, o habiéndolas no modifican el momento ( $M_{1'} = M_{2'}$ ), el par motor resulta nulo ( $M = 0$ ):

$$\dot{m} \cdot V_{u1'} \cdot r_{1'} - \dot{m} \cdot V_{u2'} \cdot r_{2'} = 0$$

$$V_u \cdot r = \text{const} \quad (11.26)$$



Este movimiento ha de ser desde luego de rotación alrededor de un eje para que haya componente tangencial  $V_u$ . En turbomáquinas puede tener lugar por ejemplo entre la salida del distribuidor y la entrada en rodete en las turbinas Kaplan (fig.11-20) y en el conducto de acceso a una bomba centrífuga (prerrotación).

En general, el movimiento que satisface la ec.11.26, se llama *vórtice libre*, en el cual la componente tangencial  $V_u$  de la velocidad varía inversamente con el radio. Todo lo contrario del *vórtice forzado* descrito en el epígrafe 2-2.2, en el que la velocidad tangencial  $u$  varía directamente con el radio. Como ejemplo de *vórtice libre* tenemos también los remolinos en los ríos y la rotación que aparece al final del vaciado de una bañera.

## EJERCICIO

La turbina Kaplan de la fig.13-67 corresponde a la hidroeléctrica ASCHACH (Austria). Los datos son:  $H = 17,5$  m,  $Q = 478$  m<sup>3</sup>/s,  $n = 68,2$  rpm y  $P_e \approx 100000$  CV ( $\eta = 0,897$ ). Las dimensiones del rodete son: en la parte exterior  $D_e = 8,4$  m y en la parte interior  $D_i = 3,4$  m (fig.2). La velocidad absoluta de salida  $c_2$  se prevé, para estas condiciones de diseño, paralela al eje de giro ( $\alpha_2 \approx 90^\circ$ ). Estimando el rendimiento hidráulico  $\eta_h = 0,944$ , calcúlense los triángulos de velocidades a la entrada y a la salida del rodete en los tres puntos siguientes:

- a) en el extremo del álabe ( $r_e = D_e/2 = 4,2$  m)
- b) en el interior ( $r_i = D_i/2 = 1,7$  m)
- c) en el punto intermedio.

Hágase un dibujo aproximado de dichos triángulos y del perfil del álabe.

## Solución

*Componente axial  $c_a$  en el rodete (fig.2):*

$$Q = S \cdot c_a = \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2) \cdot c_a; \quad 478 = \pi \cdot (4,2^2 - 1,7^2) \cdot c_a$$

$$c_a = 10,3 \text{ m/s}$$

*Velocidad tangencial (por ser axial,  $u_1 = u_2 = u$ )*

$$u = \omega \cdot r = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot D \cdot 68,2}{60} = 3,57 \cdot D = 7,14 \cdot r$$

$$u_e = 30,00 \text{ m/s}$$

$$u_m = 21,06 \text{ m/s}$$

$$u_i = 12,14 \text{ m/s}$$

*Componente tangencial  $c_{u1}$  entrada rodete (fig.1):*

Teniendo en cuenta la ec.11.12 ( $H_t = \eta_h \cdot H$ ) y la ecuación de Euler (ec. 11.25),

$$W_t = u_1 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha_1 - u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \alpha_2$$

obtenemos ( $\alpha_2 = 90^\circ$ , y, por ser axial,  $u_1 = u_2 = u$ ),

$$g \cdot \eta_h \cdot H = u \cdot c_{u1}; \quad g \cdot 0,944 \cdot 17,5 = 7,14 \cdot r \cdot c_{u1}$$

$$c_{u1} = 22,7/r \quad (1)$$

$$c_{u1e} = 5,40 \text{ m/s}$$

$$c_{u1m} = 7,69 \text{ m/s}$$

$$c_{u1i} = 13,35 \text{ m/s}$$

*Velocidad absoluta de entrada (fig.1)*

$$c_1 = \sqrt{c_a^2 + c_{u1}^2} = \sqrt{10,3^2 + c_{u1}^2}$$

$$c_{1e} = 11,63 \text{ m/s}$$

$$c_{1m} = 12,86 \text{ m/s}$$

$$c_{1i} = 16,86 \text{ m/s}$$

*Angulo  $\beta_1$  del álabe a la salida ( $\alpha_2 = 90^\circ$ , fig.1):*

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{c_a}{u - c_{u1}} = \frac{10,3}{u - c_{u1}}$$

$$\operatorname{tg} \beta_{1e} = 0,419; \quad \beta_{1e} = 22,7^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_{1m} = 0,770; \quad \beta_{1m} = 37,6^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_{1i} = -8,48; \quad \beta_{1i} = 96,7^\circ$$

*Angulo  $\beta_2$  del álabe a la salida ( $\alpha_2 = 90^\circ$ , fig.1):*

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{c_a}{u} = \frac{10,3}{u}$$

$$\operatorname{tg} \beta_{2e} = 0,343; \quad \beta_{2e} = 18,9^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_{2m} = 0,489; \quad \beta_{2m} = 26,1^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_{2i} = 0,848; \quad \beta_{2i} = 40,3^\circ$$



Velocidad relativa de entrada (fig.1):

$$w_1 = \frac{c_a}{\sin \beta_1} = \frac{10,3}{\sin \beta_1}$$

$$w_{1e} = 26,7 \text{ m/s}$$

$$w_{1m} = 16,9 \text{ m/s}$$

$$w_{1i} = 10,4 \text{ m/s}$$

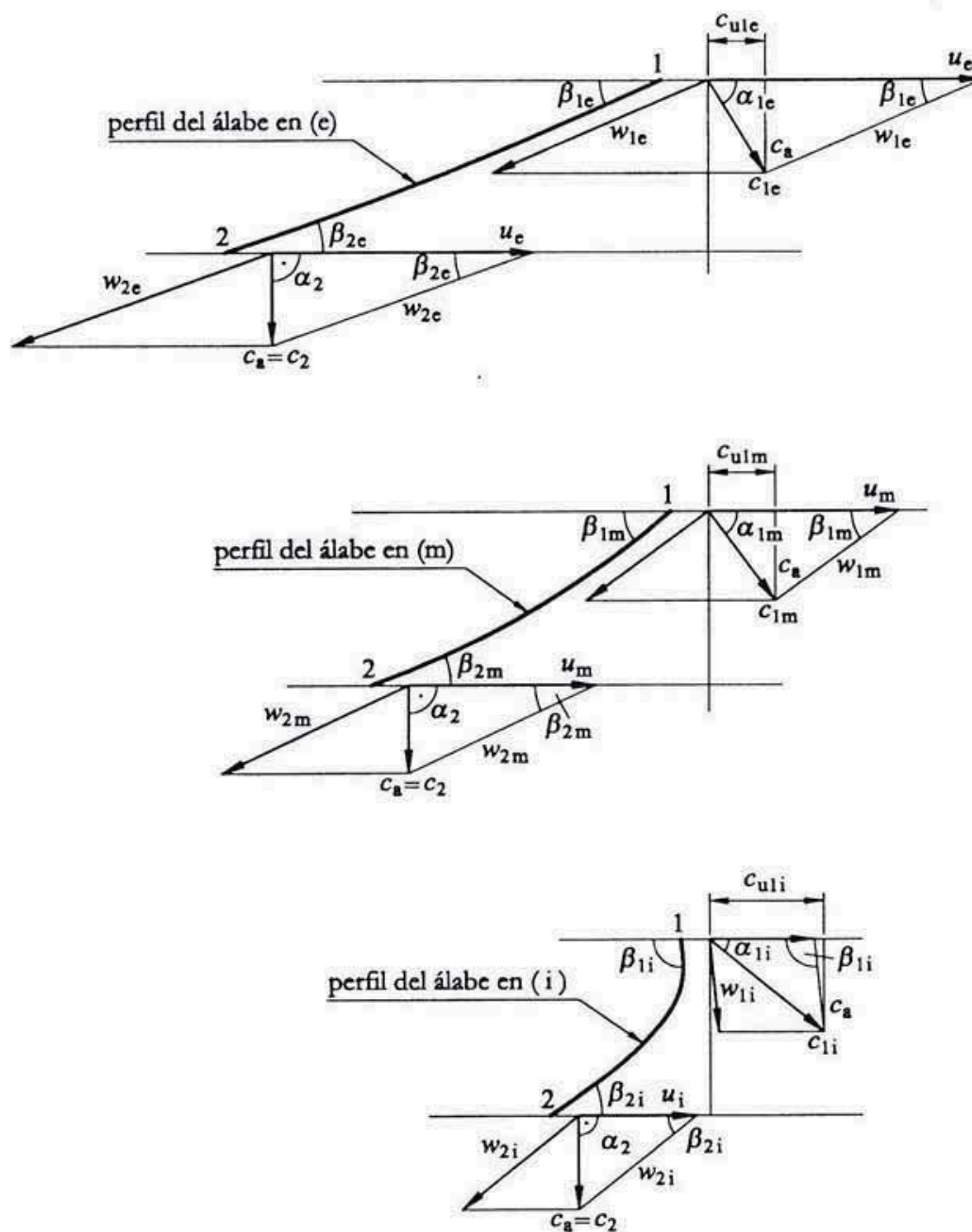


Figura 1

Velocidad relativa de salida ( $\alpha_2 = 90^\circ$ , fig.1):

$$w_2 = \frac{c_a}{\sin \beta_2} = \frac{10,3}{\sin \beta_2}$$

$$w_{2e} = 31,8 \text{ m/s}$$

$$w_{2m} = 23,4 \text{ m/s}$$

$$w_{2i} = 15,9 \text{ m/s}$$

La fig.1 muestra los perfiles del álabe en la parte exterior (e), en el punto medio (m) y en la parte interior (i). En la fig.2 se dibuja la forma aproximada del álabe, superponiendo los tres perfiles. Aunque es un cálculo puramente teórico, nos da una idea bastante acertada del diseño de estas turbinas.

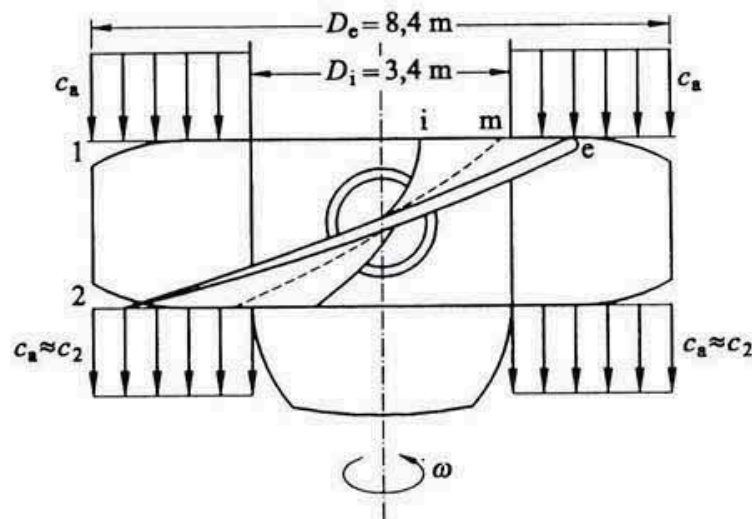


Figura 2

## EJERCICIO

Los álabes directrices de la turbina Kaplan del ejercicio anterior tienen, para el caudal de  $478 \text{ m}^3/\text{s}$  con el que se estudió dicho ejercicio, una inclinación tal, que obligan al flujo a salir del distribuidor formando  $38^\circ$  con el radio. Si el diámetro a la salida del distribuidor es  $D_1 = 9,2 \text{ m}$ , calcúlese la velocidad de salida  $V_1$  y la altura  $B$  del álabe (fig.11-20). Calcúlese también la presión en 1', suponiendo despreciables las pérdidas de carga en el distribuidor.

## Solución



*Componente tangencial  $V_{u1'}$  de la velocidad  $V_{1'}$*

Aplicamos la ec.11.26 al *vórtice libre* que se forma entre 1' y 1 (fig.11-20), teniendo en cuenta la ec.1 del ejercicio anterior ( $c_{u1} = 22,7/r$ ):

$$V_{u1'} \cdot r_{1'} = c_{u1} \cdot 9,2/2 = 22,70$$

$$V_{u1'} = 4,93 \text{ m/s}$$

*Componente radial  $V_{r1'}$  de la velocidad  $V_{1'}$*

$$\frac{V_{u1'}}{V_{r1'}} = \operatorname{tg} 38^\circ; \quad V_{r1'} = \frac{4,93}{\operatorname{tg} 38^\circ}$$

$$V_{r1'} = 6,3 \text{ m/s}$$

*Velocidad salida distribuidor  $V_{1'}$*

$$V_{1'} = \frac{V_{u1'}}{\operatorname{sen} 38^\circ} = \frac{4,93}{\operatorname{sen} 38^\circ} = 8,0 \text{ m/s}$$

*Altura B del álabe (despreciando el grosor de los álaves):*

$$Q = S \cdot V_{r1'} = \pi \cdot D_{1'} \cdot B \cdot V_{r1'}$$

$$478 = \pi \cdot 9,2 \cdot B \cdot 6,3$$

$$B = 2,63 \text{ m}$$

*Presión a la salida del distribuidor*

$$\frac{p_{1'}}{\gamma} = H - \frac{V_{1'}^2}{2g} = 17,5 - \frac{8^2}{2g} = 14,24 \text{ m}$$

### 11-6.4. Segunda forma de la ecuación de Euler

Un mejor o peor diseño de la turbomáquina, unas condiciones de trabajo fuera de diseño, y/o la intervención o no de rozamientos y choques internos, originan diferentes formas de los triángulos de velocidades. Ahora bien, sea cual fuere esta forma, se cumplirá siempre la condición geométrica (fig.11-21):

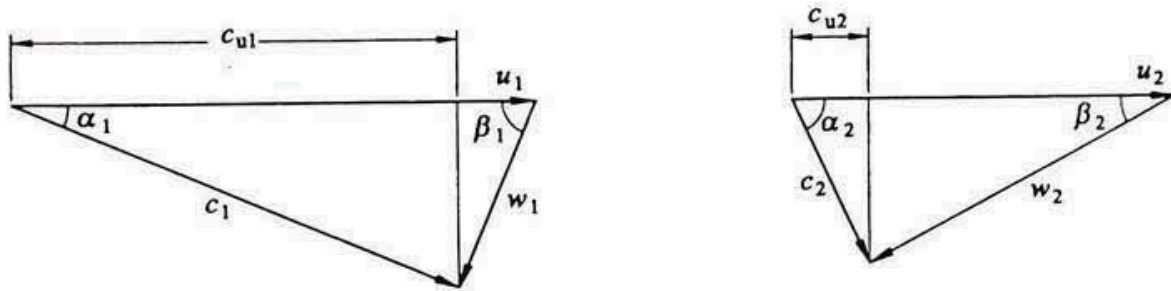


Figura 11-21

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2 \cdot u_1 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2 \cdot u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \alpha_2$$

$$\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = u_1 \cdot c_1 \cdot \cos \alpha_1 - u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \alpha_2 \quad (11.27)$$

que comparada con la ec.11.25, proporciona otra forma de expresar la *ecuación de Euler*:

$$W_i = g \cdot H_i = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (11.28)$$

En turbinas, el trabajo  $W_i$  es positivo, lo que, a la vista de la ecuación anterior, se consigue más fácilmente mediante una disposición de flujo hacia dentro (centrípetas):  $u_1 > u_2$  (fig.11-17). En bombas, el trabajo  $W_i$  es negativo, y una disposición de flujo hacia fuera (centrífugas) resulta ahora más adecuada; sobre todo si se quieren conseguir presiones elevadas. Para alturas  $H$  pequeñas, tanto en turbinas como en bombas, convendrá el flujo axial:  $u_1 = u_2$ ; en este caso la ec.11.28 toma la forma:

$$W_i = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

Aplicando la ecuación de la energía entre la entrada 1 y la salida 2 del *rodete*, se obtiene para las turbomáquinas hidráulicas:

$$W_i = \left( \frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z \right)_1 - \left( \frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z \right)_2 - W_{r12}$$



Lógicamente,  $W_{r12}$  representa sólo la pérdida de carga en el rodete. Despreciando tanto ésta como la diferencia de cotas ( $z_1 - z_2 \approx 0$ ), se obtiene en primera aproximación:

$$W_r = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad (11.29)$$

Quiere decir que una parte de la energía que el flujo intercambia con el rodete es cinética,

$$E_c = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \quad (11.30)$$

y la otra es de presión<sup>(1)</sup>,

$$E_p = \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad (11.31)$$

En las turbinas de acción,  $p_1 = p_2$ ; en tal caso,  $E_p = 0$ : toda la energía cedida por el flujo al rodete es cinética.

Comparando las ecs. 11.28 y 11.29, se obtiene la expresión,

$$E_p = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (11.32)$$

que relaciona, en un caso general, la energía de presión que intercambian el flujo y el rodete, con las velocidades tangenciales y relativas de entrada y de salida. En turbomáquinas axiales ( $u_1 = u_2$ ),

$$E_p = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (11.33)$$

la variación de energía de presión en el rodete se traduce en una variación en sentido contrario de la energía cinética relativa del flujo.

---

(1) NOTA. En las turbomáquinas térmicas serían *entalpías* en lugar de *energías de presión*.

## EJERCICIO

Calcúlese para la turbina Kaplan de los dos últimos ejercicios,

- energía entregada por el flujo al rodete,
- energías de velocidad y de presión a la entrada del rodete
- energía cinética y energía de presión entregadas al rodete
- el grado de reacción

## Solución

a) *Energía entregada por el flujo al rodete* (ec.11.12):

$$H_t = \eta_h \cdot H = 0,944 \cdot 17,5 = 16,52 \text{ m}$$

b) *Energías de velocidad y de presión a la entrada del rodete*

Conocemos la velocidad absoluta de entrada ( $c_{1e} = 11,63 \text{ m/s}$ ,  $c_{1m} = 12,86 \text{ m/s}$ ;  $c_{1e} = 16,86 \text{ m/s}$ ) y la de salida ( $c_2 = 10,3 \text{ m/s}$ ), en cuyo caso,

$$c_2^2/2g = 10,3^2/2g = 5,41 \text{ m}$$

$$c_{1e}^2/2g = 11,63^2/2g = 6,89 \text{ m}$$

$$c_{1m}^2/2g = 12,86^2/2g = 8,43 \text{ m}$$

$$c_{1i}^2/2g = 16,86^2/2g = 14,49 \text{ m}$$

$$p_{1e}/\gamma = 17,5 - 6,89 = 10,61 \text{ m}$$

$$p_{1m}/\gamma = 17,5 - 8,43 = 9,07 \text{ m}$$

$$p_{1i}/\gamma = 17,5 - 14,49 = 3,01 \text{ m}$$

c) *Energía cinética y energía de presión entregadas al rodete* (ecs.11.29 y 11.30):

$$H_c = c_1^2/2 - c_2^2/2$$

$$H_p = H_t - H_c$$

$$H_{ce} = 6,89 - 5,41 = 1,48 \text{ m}$$

$$H_{pe} = 16,52 - 1,48 = 15,04 \text{ m}$$

$$H_{cm} = 8,43 - 5,41 = 3,02 \text{ m}$$

$$H_{pm} = 16,52 - 3,02 = 13,50 \text{ m}$$

$$H_{ci} = 14,49 - 5,41 = 9,08 \text{ m}$$

$$H_{pi} = 16,52 - 9,08 = 7,44 \text{ m}$$

*Presión a la salida del rodete* (ec.11.31):

$$H_p = (p_1 - p_2)/\gamma; \quad p_2/\gamma = p_1/\gamma - H_p$$

$$p_{2e}/\gamma = p_{1e}/\gamma - H_{pe} = 10,61 - 15,04 = -4,43 \text{ m}$$

$$p_{2m}/\gamma = p_{1m}/\gamma - H_{pm} = 9,07 - 13,50 = -4,43 \text{ m}$$

$$p_{2i}/\gamma = p_{1i}/\gamma - H_{pi} = 3,01 - 7,44 = -4,43 \text{ m}$$

Es decir que a la salida del rodete, o a la entrada de tubo de descarga, la presión es la misma e inferior a la atmosférica.



En la figura siguiente se han dibujado, entre la entrada y la salida del rodete, la *línea de energía* (LE) con relación al plano de referencia que pasa por 1 ( $z_1 = 0$ ), y la *línea piezométrica* (LP): la velocidad  $c_1$  es mayor en las proximidades del cubo (i) y, como contrapartida, la presión  $p_1$  es menor. A la salida, tanto la velocidad como la presión, se mantienen sensiblemente constantes.

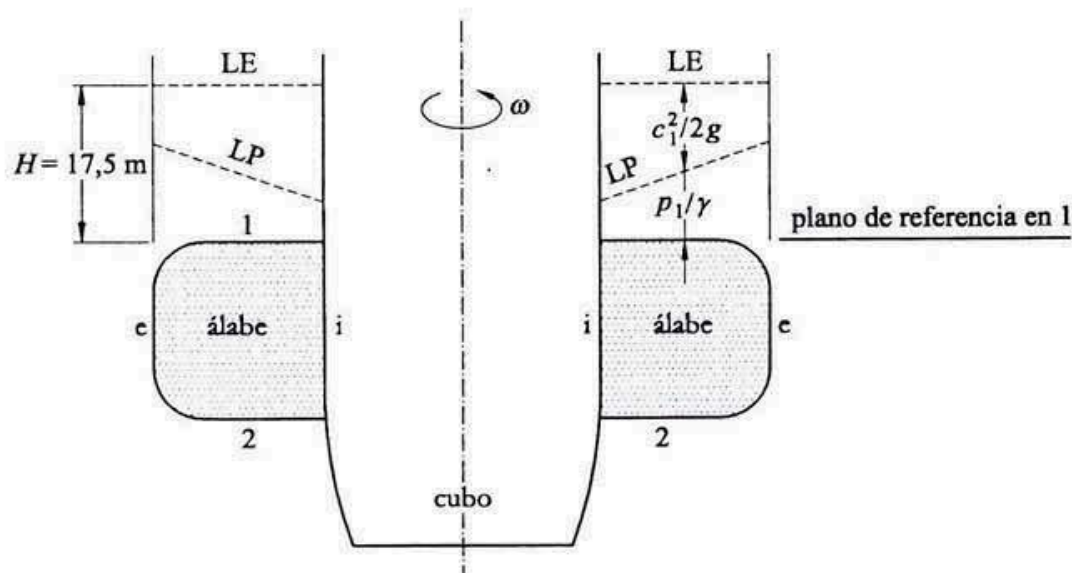
d) *Grado de reacción* (ec.11.1:  $\varepsilon = H_p / H_t$ ):

$$\varepsilon_e = 15,04/16,52 = 0,910$$

$$\varepsilon_m = 13,50/16,52 = 0,817$$

$$\varepsilon_i = 7,44/16,52 = 0,450$$

El grado de reacción medio sería,  $\varepsilon = 0,73$ .



## 11-7. SEMEJANZA EN TURBOMÁQUINAS

### 11-7.1. Condiciones de semejanza

Las leyes de semejanza son una buena herramienta para analizar el comportamiento de las turbomáquinas, ya sea para comparar entre sí las de una misma familia geoméricamente semejante o para analizar una de ellas cuando se la hace funcionar en condiciones diferentes. Además, el ensayo con modelos sigue siendo el procedimiento habitual para el diseño definitivo de las turbomáquinas.