Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Fundamentos de Probabilidade e Estatística para Ciência de Dados

Professor: Francisco A. Rodrigues

Exercícios Resolvidos: Aula 2

1 - Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém:

- 2 bolas brancas,
- 3 bolas pretas,
- 4 bolas verdes.

Qual a probabilidade de que ambas:

a) sejam verdes?

b) sejam da mesma cor?

Solução:
O total de bolas na urna é:

$$2+3+4=9.$$

(a) Probabilidade de ambas serem verdes:
A probabilidade de a primeira bola ser verde é:

$$P(1^{\text{a}} \text{ verde}) = \frac{4}{9}.$$

Se a primeira bola é verde, restam 3 bolas verdes entre as 8 restantes. Assim, a probabilidade de a segunda bola ser verde é:

$$P(2^{\text{a}} \text{ verde} \mid 1^{\text{a}} \text{ verde}) = \frac{3}{8}.$$

A probabilidade de ambas serem verdes é:

$$P(\text{ambas verdes}) = P(1^{\text{a}} \text{ verde}) \cdot P(2^{\text{a}} \text{ verde} \mid 1^{\text{a}} \text{ verde}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}.$$

(b) Probabilidade de ambas serem da mesma cor:
Agora, consideramos três casos:

- Ambas serem brancas:

$$P(1^{\text{a}} \text{ branca}) = \frac{2}{9}, \quad P(2^{\text{a}} \text{ branca} \mid 1^{\text{a}} \text{ branca}) = \frac{1}{8}.$$

$$P(\text{ambas brancas}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{72}.$$

- Ambas serem pretas:

$$P(1^{\text{a}} \text{ preta}) = \frac{3}{9}, \quad P(2^{\text{a}} \text{ preta} \mid 1^{\text{a}} \text{ preta}) = \frac{2}{8}.$$

$$P(\text{ambas pretas}) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{72}.$$

- Ambas serem verdes:

$$P(1^{\text{a}} \text{ verde}) = \frac{4}{9}, \quad P(2^{\text{a}} \text{ verde} \mid 1^{\text{a}} \text{ verde}) = \frac{3}{8}.$$

$$P(\text{ambas verdes}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{72}.$$

Somando as probabilidades:

$$P(\text{mesma cor}) = P(\text{ambas brancas}) + P(\text{ambas pretas}) + P(\text{ambas verdes}).$$

$$P(\text{mesma cor}) = \frac{2}{72} + \frac{6}{72} + \frac{12}{72} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}.$$

---

2 - Suponha que cartas numeradas de 1 a 10 são colocadas em um chapéu. Se retirarmos uma carta ao acaso e soubermos que o número é maior ou igual a 6, qual é a probabilidade condicional do número ser 10?

Solução:

Seja o espaço amostral $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. O evento A representa "o número é maior ou igual a 6", e o evento B representa "o número é 10".

O evento A pode ser descrito como:

$$A = \{6,7,8,9,10\}.$$

Portanto, o número de elementos em A é:

$$|A| = 5.$$

O evento B contém apenas o número 10, ou seja:

$$B = \{10\}.$$

Para calcular a probabilidade condicional $P(B \mid A)$, utilizamos a definição de probabilidade condicional:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Note que $B \cap A = B$, pois $B = \{10\} \subseteq A$. Assim:

$$P(B \cap A) = P(B) = \frac{1}{10}.$$

A probabilidade de A é:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Substituindo os valores:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

---

3 - Uma urna contém 5 bolas brancas, 4 bolas vermelhas e 3 bolas azuis. Extraem-se simultaneamente 3 bolas. Encontre a probabilidade de que:

- a) nenhuma seja vermelha;
- b) exatamente uma seja vermelha;
- c) todas sejam da mesma cor.

Solução:

O total de bolas na urna é:

$$5+4+3=12.$$

Ao extrair 3 bolas simultaneamente, a probabilidade de cada evento será calculada usando a definição clássica da probabilidade e probabilidade condicional.

a) Nenhuma seja vermelha

Para que nenhuma bola seja vermelha, todas as bolas devem ser brancas ou azuis. A probabilidade de isso ocorrer é:

$$P(\text{nenhuma vermelha}) = P(\text{1ª não vermelha}) \cdot P(\text{2ª não vermelha} \mid \text{1ª não vermelha}) \cdot P(\text{3ª não vermelha} \mid \text{1ª e 2ª não vermelhas}).$$

Há 8 bolas que não são vermelhas (5 brancas e 3 azuis). Portanto:

$$P(\text{1ª não vermelha}) = \frac{8}{12},$$

$$P(\text{2ª não vermelha} \mid \text{1ª não vermelha}) = \frac{7}{11},$$

$$P(\text{3ª não vermelha} \mid \text{1ª e 2ª não vermelhas}) = \frac{6}{10}.$$

Logo:

$$P(\text{nenhuma vermelha}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{336}{1320} = \frac{14}{55}.$$

b) Exatamente uma seja vermelha

Para que exatamente uma bola seja vermelha, uma bola será vermelha, e as outras duas serão não vermelhas (brancas ou azuis). A probabilidade é:

$$P(\text{exatamente uma vermelha}) = P(\text{1ª vermelha, 2ª e 3ª não vermelhas}) + P(\text{2ª vermelha, 1ª e 3ª não vermelhas}) + P(\text{3ª vermelha, 1ª e 2ª}$$

Calculamos apenas uma permutação (1ª vermelha, 2ª e 3ª não vermelhas), pois todas as outras terão a mesma probabilidade.

A probabilidade de a 1ª bola ser vermelha é:

$$P(\text{1ª vermelha}) = \frac{4}{12}.$$

Dado que a 1ª é vermelha, a probabilidade de a 2ª ser não vermelha é:

$$P(\text{2ª não vermelha} \mid \text{1ª vermelha}) = \frac{8}{11}.$$

Dado que a 1ª é vermelha e a 2ª não vermelha, a probabilidade de a 3ª ser não vermelha é:

$$P(\text{3ª não vermelha} \mid \text{1ª vermelha e 2ª não vermelha}) = \frac{7}{10}.$$

Logo, para a permutação 1ª vermelha, 2ª e 3ª não vermelhas:

$$P(\text{1ª vermelha, 2ª e 3ª não vermelhas}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10}.$$

Como há 3 permutações possíveis, a probabilidade total é:

$$P(\text{exatamente uma vermelha}) = 3 \cdot \left(\frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \right) = 3 \cdot \frac{224}{1320} = \frac{672}{1320} = \frac{28}{55}.$$

c) Todas sejam da mesma cor

Para que todas as bolas sejam da mesma cor, as 3 bolas podem ser brancas, vermelhas ou azuis. Calculamos as probabilidades separadamente.

Todas brancas: A probabilidade de todas serem brancas é:

$$P(\text{todas brancas}) = P(\text{1ª branca}) \cdot P(\text{2ª branca} \mid \text{1ª branca}) \cdot P(\text{3ª branca} \mid \text{1ª e 2ª brancas}),$$

$$P(\text{todas brancas}) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22}.$$

Todas vermelhas: A probabilidade de todas serem vermelhas é:

$$P(\text{todas vermelhas}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{24}{1320} = \frac{1}{55}.$$

Todas azuis: A probabilidade de todas serem azuis é:

$$P(\text{todas azuis}) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{6}{1320} = \frac{1}{220}.$$

Somando as probabilidades:

$$P(\text{todas da mesma cor}) = \frac{1}{22} + \frac{1}{55} + \frac{1}{220} = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}.$$

---

4 - A probabilidade de um indivíduo da classe A comprar um carro é de 3/4, da B é de 1/5 e da C é de 1/20. As probabilidades de os indivíduos comprarem um carro da marca x são 1/10, 3/5 e 3/10, dado que sejam de A, B e C, respectivamente. Certa loja vendeu um carro da marca x. Qual a probabilidade de que o indivíduo que o comprou seja da classe B?

Solução:
Sejam os eventos:

- A, B, C: os eventos de que o indivíduo seja da classe A, B ou C, respectivamente.
- X: o evento de que o indivíduo comprou um carro da marca x.

Queremos calcular a probabilidade de o indivíduo ser da classe B, dado que comprou um carro da marca x, ou seja, $P(B \mid X)$.
Pelo Teorema de Bayes:

$$P(B \mid X) = \frac{P(X \mid B) \cdot P(B)}{P(X)}$$

Onde:

- $P(X \mid B) = \frac{3}{5}$ é a probabilidade de um indivíduo da classe B comprar um carro da marca x,
- $P(B) = \frac{1}{5}$ é a probabilidade de um indivíduo ser da classe B,
- $P(X)$ é a probabilidade total de um indivíduo comprar um carro da marca x, que pode ser calculada pela fórmula da probabilidade total:
$$P(X) = P(X \mid A) \cdot P(A) + P(X \mid B) \cdot P(B) + P(X \mid C) \cdot P(C)$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{5}, \quad P(C) = \frac{1}{20}$$
$$P(X \mid A) = \frac{1}{10}, \quad P(X \mid B) = \frac{3}{5}, \quad P(X \mid C) = \frac{3}{10}$$

Calculando $P(X)$:

$$P(X) = \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{20}\right)$$
$$P(X) = \frac{3}{40} + \frac{3}{25} + \frac{3}{200}$$

Somando as frações com denominador comum:

$$P(X) = \frac{3}{40} + \frac{24}{200} + \frac{3}{200} = \frac{3}{40} + \frac{27}{200}$$

Convertendo para um denominador comum de 200:

$$P(X) = \frac{15}{200} + \frac{27}{200} = \frac{42}{200} = \frac{21}{100}$$

Agora, aplicamos o Teorema de Bayes para calcular $P(B \mid X)$:

$$P(B \mid X) = \frac{\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{21}{100}} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{21}{100}} = \frac{3}{25} \cdot \frac{100}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Portanto, a probabilidade de que o indivíduo que comprou o carro seja da classe B é:

$$P(B \mid X) = \frac{4}{7}$$