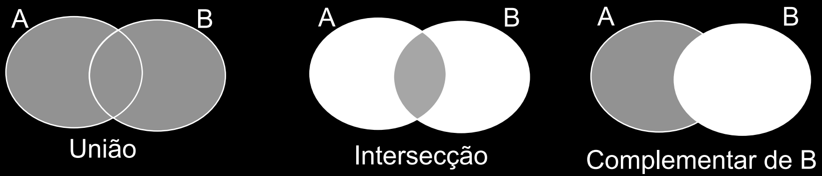
Introdução à teoria das probabilidades

Francisco A. Rodrigues

Universidade de São Paulo

Probabilidades

Para formularmos matematicamente a teoria das probabilidades, vamos considerar conceitos de teoria dos conjuntos.



Probabilidades

Exemplo: Sejam os conjuntos:

$$X = \{10, 20, 30\}, \quad Y = \{5, 10, 15, 20\}$$

Calcule: (a) $X \cup Y$, (b) $X \cap Y$, (c) X^c

Probabilidades

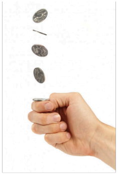
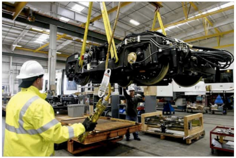
Exemplo: Sejam os conjuntos:

$$X = \{10, 20, 30\}, \quad Y = \{5, 10, 15, 20\}$$

Calcule: (a) $X \cup Y$, (b) $X \cap Y$, (c) X^c

Experimento aleatório

- Um experimento aleatório é um experimento que pode ser repetido inúmeras vezes sob as mesmas condições, sendo o seu resultado incerto.


Experimento aleatório

- **Lançamento de um dado:** quando você joga um dado, obtém uma sequência de valores.

$$X = [1, 4, 5, 6, 3, 1, 2, 3, 1, 6, 5, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 3, 4, 5, ..]$$

- Não é possível saber qual será o próximo valor. Mas podemos determinar a probabilidade de cada resultado possível.
- **Simulação:**

```
import random
moeda =['cara', 'coroa']
for i in range(0, 10):
    # lança a moeda
    saida = random.choice(moeda)
    print(saida)
```

Definição

- **Espaço amostral** (Ω): Representa o conjunto de todas as saídas possíveis de um experimento aleatório.

- **Evento** (A): é um elemento do espaço amostral.

- **Evento impossível** ($\emptyset$): é o evento que nunca ocorre.

- **Evento certo** (Ω): é o evento que irá ocorrer com certeza.

Definição

Relação entre eventos:

- $A \cup B$: é o evento que ocorre se A ou B (ou ambos) ocorrem.
- $A \cap B$: é o evento que ocorre se, e somente se, A e B ocorrem.
- $\bar{A} = A^c$: é o evento que ocorre se A não ocorre.

Exemplo:

Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral. Escreva na linguagem dos conjuntos:

- a) O evento A ocorre, mas B não ocorre.

Exemplo:

Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral. Escreva na linguagem dos conjuntos:

- b) Nenhum dos dois eventos ocorrem.

Exemplo:

Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral. Escreva na linguagem dos conjuntos:

- a) O evento A ocorre, mas B não ocorre.
  Nesse caso, temos que selecionar a parte de A que não está em B, pois apenas A ocorre. Para resolvermos esse problema, podemos usar o diagrama de Venn, conforme mostrado na figura. Portanto, a área em cinza é dada por $A \cap \bar{B}$, isto é, A ocorre e B não ocorre.

Exemplo:

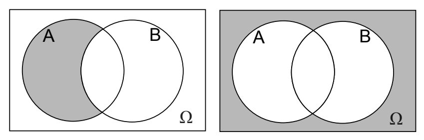
Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral. Escreva na linguagem dos conjuntos:

- b) Nenhum dos dois eventos ocorrem.
  Temos que considerar a região que não está em A e nem em B, isto é, $\bar{A} \cap \bar{B}$. Essa região é a área externa aos dois círculos que representam os eventos, conforme observamos na figura.

Exemplo:

Solução: Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral. Escreva na linguagem dos conjuntos:

- a) O evento A ocorre, mas B não ocorre.
  Nesse caso, temos que selecionar a parte de A que não está em B, pois apenas A ocorre. Para resolvermos esse problema, podemos usar o diagrama de Venn, conforme mostrado na figura. Portanto, a área em cinza é dada por $A \cap \bar{B}$, isto é, A ocorre e B não ocorre.
- b) Nenhum dos dois eventos ocorrem.
  Temos que considerar a região que não está em A e nem em B, isto é, $\bar{A} \cap \bar{B}$. Essa região é a área externa aos dois círculos que representam os eventos, conforme observamos na figura.



Eventos mutuamente exclusivos

Definição: Dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos (ou mutuamente excludentes) se $A \cap B = \emptyset$.

Axiomas da probabilidade

Definição: Sejam Ω o espaço amostral e A um evento em Ω. Então, uma função $P(\cdot)$ é denominada probabilidade se satisfaz:

- $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- Se $A_1, A_2, \ldots$ forem eventos mutuamente exclusivos, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, então:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \qquad (1)$$

Probabilidade clássica

Definição: Se um experimento aleatório tiver $n(\Omega)$ resultados mutuamente exclusivos e igualmente possíveis, e se um evento A conter $n(A)$ desses resultados, a probabilidade de ocorrência desse evento é definida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{2}$$

Essa definição foi proposta por Jacob Bernoulli (1655-1705) e Laplace (1749-1827).

Probabilidade clássica

Exemplo: Imagine uma urna com 5 bolas brancas e 3 pretas. Qual é a probabilidade de retirar uma bola branca?

Exemplo

Exemplo: Uma urna contém fichas numeradas de 1 a 20. Supondo que alguém escolha uma dessas fichas ao acaso, qual a probabilidade de que a ficha escolhida contenha um número maior que 9?

Exemplo

Solução: As fichas estão enumeradas de 1 a 20, então há 20 fichas no total. Os números maiores que 9 são 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20. Portanto, há 11 fichas que atendem a essa condição. Vamos definir o evento A como "escolher uma ficha com um número maior que 9". Logo,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{20} = 0,55.$$

Portanto, a probabilidade de escolher uma ficha que contenha um número maior que 9 é 11/20, ou 55%.

Probabilidade frequentista

Definição: A probabilidade de um evento é igual à sua frequência de ocorrência em um grande número de experimentos,

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}, \tag{3}$$

sendo que n_A é o número de vezes que o evento A ocorre em n experimentos.

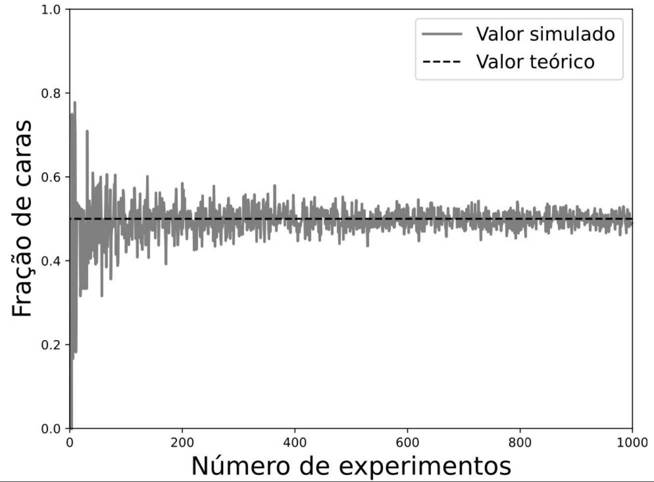
Probabilidade frequentista

A interpretação frequentista pode ser vista na prática através de simulação computacional. No código a seguir, consideramos o lançamento de uma moeda justa.

```
import random as random

ns = 1000 # número de lançamentos
moeda = ['cara', 'coroa']
nc = 0 # número de caras
for n in range(0,ns): # para ns lançamentos
    saida = random.choice(moeda) # lança a moeda
    if(saida == 'cara'): # se sai cara
        nc = nc + 1
print('Probabilidade = ', nc/ns)
```

Probabilidade frequentista



Exemplo

Considere o problema proposto pelo matemático suíço Jakob Bernoulli (1654-1705). Uma urna contém 3.000 bolas brancas e 2.000 bolas pretas. Calcule a probabilidade de retirar uma bola preta da urna.

Exemplo

Solução: A probabilidade de sortearmos uma bola preta, usando a definição clássica, é dada por:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2000}{2000 + 3000} = 0,4,$$

onde A é o evento "retirar uma bola preta". Se simularmos esse experimento, considerando o código a seguir, realizando a retirada 100 vezes, obtemos o valor $f_A = 0,38$, sendo f_A a frequência que o evento A ocorre. Notem que esse valor varia de uma execução para outra, pois estamos considerando um experimento aleatório.

Probabilidade frequentista

Solução: Simulando:

```python
import random
# B: bola branca, P: bola preta
# consideramos 3 mil bolas brancas e 2 mil pretas
urna = ['B']*3000 + ['P']*2000 # cria a lista urna
nsim = 100 # número de retiradas
fA = 0 # frequência de bolas pretas
for i in range(0,nsim):
    bola = random.choice(urna) # sorteia uma bola
    if(bola == 'P'): # se a bola for preta
        fA = fA + 1
fA = fA/nsim
print('Frequência de bolas pretas:', fA)
```

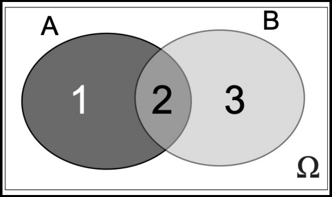
Probabilidade da união de dois eventos

Theorem

Para dois eventos A e B em um mesmo espaço amostral Ω,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{4}$$

Probabilidade frequentista



$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B).$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)) \\ &= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \end{aligned}$$

Então:

$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B), \implies P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$

$$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + P(A \cap B) + [P(B) - P(A \cap B)].$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Probabilidade frequentista

Exemplo: Em uma escola particular, dentre todos os alunos que procuram ajuda, 63% precisam de aulas de reforço em matemática, 34% precisam de ajuda em inglês e 27% precisam de aulas adicionais tanto em matemática quanto em inglês. Qual é a percentagem de alunos que precisam de ajuda em matemática ou em inglês (ou em ambas disciplinas)?

Exemplo

Solução: Sejam os eventos:

- M : "estudantes precisam de ajuda em matemática",
- I : "estudantes precisam de ajuda em inglês".

Assim, temos:

$$P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I).$$

Considerando o enunciado do problema, temos $P(M) = 0,63$, $P(I) = 0,34$ e $P(M \cap I) = 0,27$. Assim,

$$P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,63 + 0,34 - 0,27 = 0,70.$$

Portanto, 70% dos alunos precisam de ajuda em matemática ou inglês (ou tanto em matemática quanto em inglês).

Teorema

Sejam A e B eventos em um mesmo espaço amostral Ω e $\emptyset$ é o evento impossível. Seja ainda $A^c = \bar{A}$ o complementar de A. Então:

- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(A) = 1 - P(A^c)$,
- Se $A \in B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Teorema

Para provarmos esse teorema, temos:

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$P(A \cup \emptyset) = P(A),$$

$$P(A) + P(\emptyset) - P(A \cap \emptyset) = P(A),$$

$$P(A) + P(\emptyset) = P(A),$$

$$P(\emptyset) = 0,$$

pois $P(A \cap \emptyset) = 0$, uma vez que A e $\emptyset$ nunca ocorrem ao mesmo tempo ($A \cap \emptyset = \emptyset$), pois $\emptyset$ é o evento impossível.
No caso da segunda propriedade:

$$A \cup A^c = \Omega \implies P(A \cup A^c) = P(\Omega) \implies P(A) = 1 - P(A^c),$$

pois $P(\Omega) = 1$ e $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$.
Finalmente, temos que se $A \in B$, então, $B = A \cup (A^c \cap B)$. Logo,

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B).$$

Assim, como $P(A^c \cap B) \geq 0$, então $P(A) \leq P(B)$.

Sumário

- Teoria dos conjuntos.
- Probabilidades.