Introdução à teoria das probabilidades

Modelos probabilísticos discretos

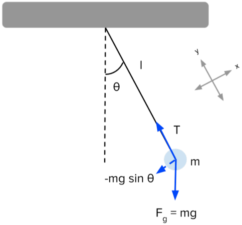
Francisco A. Rodrigues

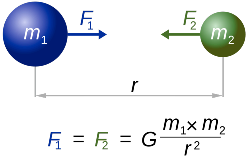
Universidade de São Paulo

Determinístico vs. Probabilístico

Modelo determinístico:

- Dadas as condições iniciais, podemos prever com exatidão o resultado de um experimento.



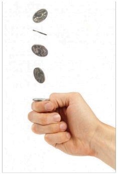
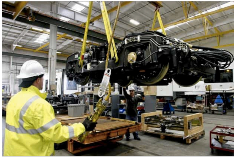


$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Determinístico vs. Probabilístico

Experimento aleatório:

- Um experimento aleatório é um experimento que pode ser repetido inúmeras vezes sob as mesmas condições, sendo o seu resultado incerto.


Determinístico vs. Probabilístico

- Quando você joga um dado, obtém uma sequência de valores.

$$X = [1, 4, 5, 6, 3, 1, 2, 3, 1, 6, 5, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 3, 4, 5, ..]$$

- Não é possível saber qual será o próximo valor. Mas podemos determinar a probabilidade de cada resultado possível.

```python
import random
moeda =['cara', 'coroa']
for i in range(0, 10):
    # lança a moeda
    saida = random.choice(moeda)
    print(saida)
```

Determinístico vs. Probabilístico

Modelos probabilísticos:

- Os resultados de cada experimento parecem imprevisíveis, mas quando um grande número de experimentos é analisado, surge um padrão.
- Não podemos determinar o valor exato do resultado de um experimento, mas sim as probabilidades de cada resultado possível.
- Exemplo:

$$P(X = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Modelos

- **Modelo determinístico**: dadas as condições iniciais de um experimento, podemos determinar o estado (por exemplo, posição, velocidade, voltagem) em qualquer instante de tempo.

- **Modelo probabilístico (estocástico)**: as saídas de cada experimento parecem imprevisíveis, mas quando se analisa um grande número de experimentos, um padrão emerge. Não podemos determinar exatamente o valor da próxima saída, mas podemos calcular a probabilidade de cada resultado.

Distribuição uniforme discreta

Se X é o valor que sai na face superior de um dado de seis faces, então a distribuição de probabilidade de X é dada por:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

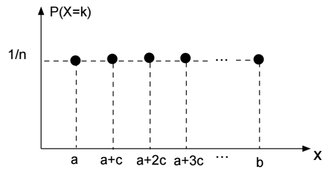
Notem que se o dado tiver mais faces, essa tabela será maior, o que pode dificultar a sua análise.

Distribuição uniforme discreta

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo os n valores $\{a, a+c, a+2c, \ldots, b-c, b\}$, $(a, b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $a < b)$. Dizemos que X segue o modelo uniforme discreto se atribui a mesma probabilidade $1/n$ a cada um desses valores. Isto é, sua distribuição de probabilidade é dada por

$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad x = a, a+c, a+2c, \ldots, b, \tag{1}$$

onde $n = 1 + (b-a)/c$.



Distribuição uniforme discreta

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo os n valores $\{a, a+c, a+2c, \ldots, b-c, b\}$, ($a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $a < b$). Então,

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \tag{2}$$

$$V(X) = \frac{c^2(n^2-1)}{12}, \tag{3}$$

onde $n = (b-a)/c + 1$.

Distribuição uniforme discreta

Para provar esse teorema, vamos definir a variável aleatória Y com n valores $\{1, 2, \ldots, n\}$ igualmente prováveis. Então, a esperança de Y:

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y = k) \\
&= \frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + n) \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}
$$

Podemos escrever X em termos de Y, isto é, $X = cY + (a - c)$, pois X assume os n valores $\{a, a + c, a + 2c, \ldots, b - c, b\}$, $(a, b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $a < b)$. Então:

$$
\begin{aligned}
E[X] = E[cY + (a - c)] &= cE[Y] + (a - c) = c\left(\frac{n+1}{2}\right) + (a - c) \\
&= \frac{c}{2}\left(\frac{b - a + c}{c} + 1\right) + a - c = \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}
$$

Distribuição uniforme discreta

Vamos calcular a variância de Y. Para isso, o segundo momento de Y é dado por:

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(Y = k) \\ &= \frac{1}{n}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Assim, a variância de Y:

$$\begin{aligned} V[Y] &= E[Y^2] - E[Y]^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}$$

Calculando a variância de X:

$$V[X] = V(cY + (a-c)) = c^2 V(Y) = c^2 \left(\frac{n^2-1}{12}\right).$$

Distribuição uniforme discreta

Exemplo: Seja X uma variável aleatória que representa a saída em um dado de 12 faces, isto é, X tem distribuição uniforme discreta em $1, 2, \ldots, 12$, isto é, $a = 1$, $c = 1$ e $b = 12$ na equação (1). Assim,

$$P(X = k) = \frac{1}{12}, \quad k = 1, 2, \ldots, 12.$$

Calcule o valor médio e a variância de X.

Distribuição uniforme discreta

Solução: Usando o teorema anterior, para o valor esperado, temos:

$$E[X] = \frac{(1 + 12)}{2} = 6,5.$$

Como $n = 12$, a variância é dada por (ver equação (3)):

$$V(X) = \frac{12^2 - 1}{12} = \frac{143}{12} = 11,9.$$

Distribuição uniforme discreta

Podemos verificar esse resultado usando o código a seguir, onde obtemos uma média igual a $6,58$ e variância igual a 11.89, que são próximos dos valores teóricos.

```python
import random as random
import numpy as np
# inicializa o gerador de números aleatórios
np.random.seed(10)

n = 12 # número de faces do dado
dado = np.arange(1,n+1)
print('dado:', dado)
X = [] # armazena os valores
ns = 1000 # número de simulações
for i in range(0,ns):
    # sorteia uma face do dado
    x = random.choice(dado)
    X.append(x)
print('Média = ', np.mean(X)) # calcula a média
print('Variância = ', np.var(X)) # calcula a variância
```

Distribuição de Bernoulli

Dizemos que a variável aleatória X segue o modelo de Bernoulli se atribui 0 à ocorrência de um fracasso ou 1 à ocorrência de um sucesso, com p representando a probabilidade de sucesso, $0 \leq p \leq 1$, e $1 - p$ a probabilidade do fracasso. A distribuição de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1. \tag{4}$$

X	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

Distribuição de Bernoulli

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. Então:

$$E[X] = p, \tag{5}$$

$$V(X) = p(1 - p). \tag{6}$$

Distribuição de Bernoulli

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. Então:

$$E[X] = p, \tag{7}$$

$$V(X) = p(1-p). \tag{8}$$

Prova:

$$E[X] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p.$$

A variância:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p). \end{aligned}$$

Distribuição Binomial

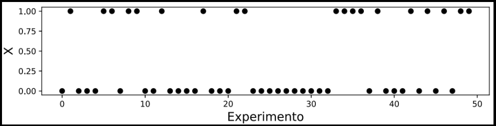
O processo estocástico de Bernoulli possui as seguintes propriedades:

- O experimento consiste de n tentativas repetidas.
- Cada tentativa gera um resultado que pode ser classificado como sucesso ou falha.
- A probabilidade de sucesso p se mantém constante de tentativa para tentativa.
- As tentativas são feitas de forma independente uma da outra.

Distribuição Binomial

```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
# inicializa o gerador de números aleatórios
np.random.seed(10)

n = 50 # número de experimentos
S = [] # lista que armazena as saídas
p = 0.4 # probabilidade de sucesso
for t in range(0,n):
    # gera uma saída: 0 ou 1
    if(np.random.uniform() < p):
        s = 1 # ocorre um sucesso
    else:
        s = 0 # ocorre uma falha
    S.append(s)
# mostra os resultados
plt.figure(figsize=(10,2))
plt.plot(range(0,n), S, 'ko')
plt.xlabel('Experimento', fontsize = 15)
plt.ylabel('X',fontsize = 15)
plt.show(True)
print(S)
```



Distribuição Binomial

Seja X uma variável aleatória baseada em n repetições de um processo de Bernoulli. Então a probabilidade de obtermos k sucessos em n repetições é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

onde

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

é uma combinação de n elementos tomados de k em k.

Distribuição Binomial

Exemplo: A probabilidade de que uma peça será aceita em uma linha de produção é igual a $\frac{3}{4}$. Determine a probabilidade de que exatamente duas dentre quatro peças serão aceitas.

Distribuição Binomial

Solução: Nesse caso, temos $n = 4$, $k = 2$ e $p = \frac{3}{4}$. Assim,

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^{4-2} = \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128} = 0,21.$$

Logo, a probabilidade de que duas, dentre quatro peças, sejam aceitas é igual a $0,21$.

Distribuição Binomial

Exemplo: A probabilidade de que um estudante seja aprovado em um processo seletivo é igual 0,4. Se 15 estudantes estão realizando a prova, qual a probabilidade de que:

a) Exatamente 5 sejam aprovados?

b) Pelo menos 10 sejam aprovados?

c) De 3 a 8 pessoas sejam aprovados?

Distribuição Binomial

Seja X é uma variável aleatória com distribuição binomial e parâmetros n e p, então

$$E[X] = np, \tag{10}$$

$$V[X] = np(1 - p) \tag{11}$$

Distribuição Binomial

Para demonstrar esse teorema, vamos definir a variável aleatória que indica a ocorrência de um sucesso, que ocorre com probabilidade p, também chamada de função indicadora. Assim,

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se um sucesso ocorre na i-ésima repetição,} \\ 0 & \text{se não ocorre.} \end{cases}$$

Logo, Y_i segue o modelo de Bernoulli.

$$P(Y_i = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1.$$

De acordo com as equações (7) e (8), temos:

$$E[Y_i] = p, \quad V[Y_i] = p(1-p).$$

Podemos escrever o número de sucessos X em termos de Y_i:

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n, \tag{12}$$

pois Y_i indica uma ocorrência do sucesso na tentantiva i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Calculando a esperança em ambos os lados da equação (12), temos:

$$\begin{aligned} E[X] &= E[Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n] \\ &= E[Y_1] + E[Y_2] + \ldots + E[Y_n] \\ &= p + p + \ldots + p = np. \end{aligned}$$

Distribuição Binomial

De maneira similar, calculando a variância de X:

$$\begin{aligned} V(X) &= V(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n) \\ &= V(Y_1) + V(Y_2) + \ldots + V(Y_n) \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

No caso da variância, usamos o fato de que se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, então $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. Isto é,

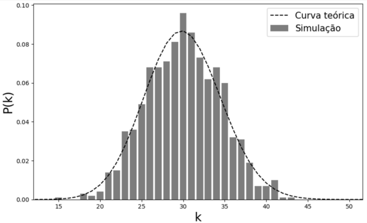
$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - (E[(X+Y])^2 \\ &= E[X^2 + 2XY + Y^2] - E[X]^2 - 2E[X]E[Y] - E[Y]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 + E[Y^2] - E[Y]^2 + 2E[XY] - 2E[X]E[Y] \\ &= V(X) + V(Y) + 2E[XY] - 2E[X]E[Y]. \end{aligned}$$

Assim, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ se, e somente se, $E[XY] = E[X]E[Y]$. Com isso, provamos o teorema anterior.

Distribuição Binomial

```python
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import binom
import math
np.random.seed(42)

n = 100 # número de lançamentos
p = 0.3 # probabilidade de sair cara
Pk = np.zeros(n)
vk = np.arange(0,n)
ns = 1000 # número de simulações
# simula a distribuição binomial
for j in range(0,ns): # realiza ns simulações
    S = 0 # número de sucessos
    for i in range(0,n): # para n lançamentos
        if(np.random.uniform() <= p): # se sair um sucesso
            S = S + 1
    Pk[S] = Pk[S] + 1
Pk=Pk/sum(Pk) # normaliza a distribuição de probabilidade
# mostra os resultados da simulações
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.xlim(0.8*np.min(vk[Pk>0]),1.2*np.max(vk[Pk>0]))
plt.bar(vk, Pk, color ='gray', label='Simulação')
# mostra a curva teorica
Pkt = np.zeros(n+1) # valores teóricos da probabilidade
vkt = np.arange(0,n+1) # variação em k
for k in range(0,n+1): # varia de 0 ate n
    C = (math.factorial(n)/(math.factorial(n-k)*math.factorial(k)))
    Pkt[k] = C*(p**k)*(1-p)**(n-k)
plt.plot(vkt, Pkt, color ='black', linestyle = 'dashed', label='Curva teórica')
plt.xlabel('k', fontsize = 20)
plt.ylabel('P(k)',fontsize = 20)
plt.legend(fontsize = 15)
plt.savefig('binomial.svg')
plt.show(True)
```



Distribuição Multinomial

Seja X_i a variável aleatória que representa o número de saídas do evento i em n experimentos. Cada saída X_i ocorre com probabilidade p_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Então, a probabilidade de observar o vetor aleatório $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k)$ é dada por:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}, \tag{13}$$

onde

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

O termo

$$\frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!}$$

é a permutação de n elementos com repetição.

Distribuição Multinomial

Exemplo: Três jogadores de cartas iniciam uma série de jogos. A probabilidade do jogador A ganhar um jogo é igual 20%, enquanto que a probabilidade de que B vença é igual a 30% e para o jogador C, 50%. Se eles jogarem seis jogos, qual é a probabilidade de que A vença um jogo, B vença dois jogos e C vença três jogos?

Distribuição Multinomial

Solução: Como temos três saídas possíveis e os jogos são independentes, temos um exemplo de aplicação da distribuição multinomial. Seja X_A, X_B e X_C as variáveis aleatórias que representam o número de vitórias de A, B e C, respectivamente. Assim, usando a equação (13):

$$P(X_A = 1, X_B = 2, X_C = 3) = \frac{6!}{1!2!3!}(0,2)^1(0,3)^2(0,5)^3 = 0,135.$$

Distribuição Multinomial

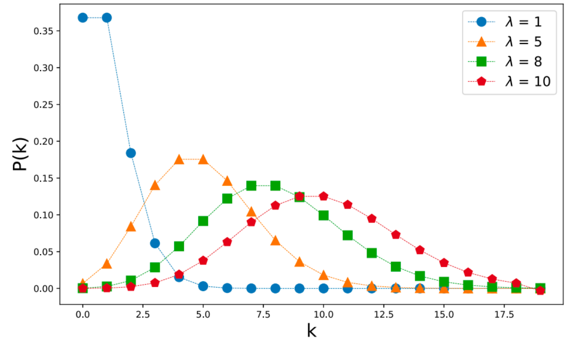
Podemos simular esse problema considerando o código a seguir. Para uma execução, obtemos o valor $0,136$, que é próximo da probabilidade teórica.

```
import numpy as np
# inicializa o gerador de números aleatórios
np.random.seed(101)
#probabilidades
pA = 0.2 # prob. do evento A
pB = 0.3 # prob. do evento B
pC = 0.5 # prob. do evento C
nsim = 1000 # número de simulações
ns = 0 # número de sucessos
for s in range(0,nsim):
    # número de vitórias de cada jogador
    nA = 0; nB = 0; nC = 0;
    # para os 6 jogos
    for n in range(0,6):
        num = np.random.uniform()
        if(num <= pA):
            nA = nA + 1
        else:
            if(num < pA + pB):
                nB = nB + 1
            else:
                nC = nC + 1
    # se A vence uma partida, B duas e C três
    if(nA == 1 and nB == 2 and nC == 3):
        ns = ns + 1
print('P(XA=1,XB=2,XC=3)=',ns/nsim)
```

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória discreta X segue o modelo de Poisson com taxa $\lambda > 0$ se

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$



Distribuição de Poisson

Exemplo: Em uma central de atendimento ao cliente chegam, em média, 120 mensagens por hora. Qual a probabilidade de que:

a) em um minuto não chegue nenhuma mensagem?

b) em 2 minutos chegam 2 mensagens?

c) em t minutos não chegue nenhuma mensagem?

Distribuição de Poisson

Solução: a) em um minuto não chegue nenhuma mensagem?
Como a taxa λ está em horas, precisamos convertê-la para minutos, pois queremos calcular a probabilidade de que em um minuto não chegue nenhuma mensagem. Usando regra de três:

$$120 \text{ emails} \rightarrow 60 \text{ minutos}$$

$$\lambda \text{ emails} \rightarrow 1 \text{ minuto}$$

Ou seja,

$$1 \times 120 = \lambda \times 60$$
$$\lambda = \frac{120}{60}$$
$$\lambda = 2 \text{ emails por minuto.}$$

Portanto,

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = 0,135.$$

Portanto, a probabilidade de que em um minuto não chegue nenhuma mensagem é próxima de 13%.

Distribuição de Poisson

b) em 2 minutos chegam 2 mensagens?

$$120 \text{ emails} \rightarrow 60 \text{ minutos}$$

$$\lambda \text{ emails} \rightarrow 2 \text{ minutos}$$

$$\lambda = \frac{2 \times 120}{60} = 4 \text{ mensagens a cada 2 minutos.}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-4}4^2}{2!} = 0,14.$$

c) em t minutos não chegue nenhuma mensagem?
Usando regra de três, temos:

$$120 \text{ emails} \rightarrow 60 \text{ minutos}$$

$$\lambda \text{ emails} \rightarrow t \text{ minutos}$$

Resolvendo:

$$\lambda = \frac{120 \times t}{60} = 2t.$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2t}(2t)^0}{0!} = e^{-2t}.$$

Logo, a probabilidade de não chegar nenhuma mensagem em t minutos decresce exponencialmente com o tempo, medido em minutos.

Distribuição de Poisson

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson. Então,

$$E[X] = \lambda, \tag{15}$$

$$V(X) = \lambda. \tag{16}$$

Prova:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Logo,

$$E[X] = \lambda.$$

Distribuição de Poisson

No caso da variância, vimos que $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$. Assim:

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{k^2\lambda^k}{k(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!}.$$

Fazendo $u = k - 1$, temos:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(u+1)\lambda^{u+1}}{u!} \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda} \left(\frac{u\lambda^{u+1} + \lambda^{u+1}}{u!} \right) \\
&= \lambda \sum_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda} \left(\frac{u\lambda^{u} + \lambda^{u}}{u!} \right) \\
&= \lambda \sum_{u=0}^{\infty} u \frac{e^{-\lambda}\lambda^u}{u!} + \lambda \sum_{u=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^u}{u!} \\
&= \lambda(\lambda) + \lambda(1) \\
&= \lambda^2 + \lambda.
\end{aligned}$$

Assim,

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

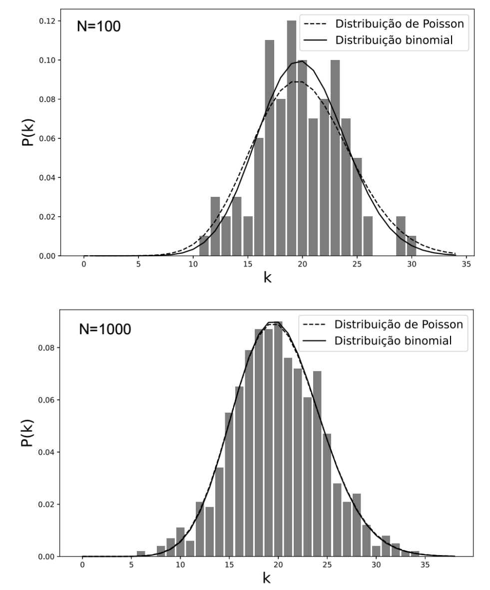
Distribuição de Poisson

Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial e p a probabilidade de sucesso. Então,

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

onde $\lambda = np$ é constante.

Distribuição de Poisson



Distribuição de Poisson

Exemplo: Suponha que em um hospital, o número médio de pacientes que chega à emergência é de 120 por dia. Queremos calcular a probabilidade de que cheguem exatamente 10 pacientes em uma hora.

Distribuição de Poisson

Solução: Primeiro, precisamos converter a taxa média de chegadas de pacientes para uma base horária. Sabemos que há 24 horas em um dia, então a taxa de chegadas por hora λ_{hora} é:

$$\lambda_{\text{hora}} = \frac{120 \text{ pacientes/dia}}{24 \text{ horas/dia}} = 5 \text{ pacientes/hora}$$

Agora que temos a taxa correta, podemos aplicar a fórmula da distribuição de Poisson para calcular a probabilidade de que exatamente 10 pacientes cheguem em uma hora:

$$P(X = 10) = \frac{\lambda_{\text{hora}}^{10} e^{-\lambda_{\text{hora}}}}{10!} = \frac{5^{10} e^{-5}}{10!} \approx 0,0018$$

A probabilidade de que exatamente 10 pacientes cheguem à emergência em uma hora é aproximadamente 1,8%.

Distribuição geométrica

Dizemos que a variável aleatória discreta X segue uma distribuição geométrica se:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2 \ldots . \tag{18}$$

Distribuição geométrica

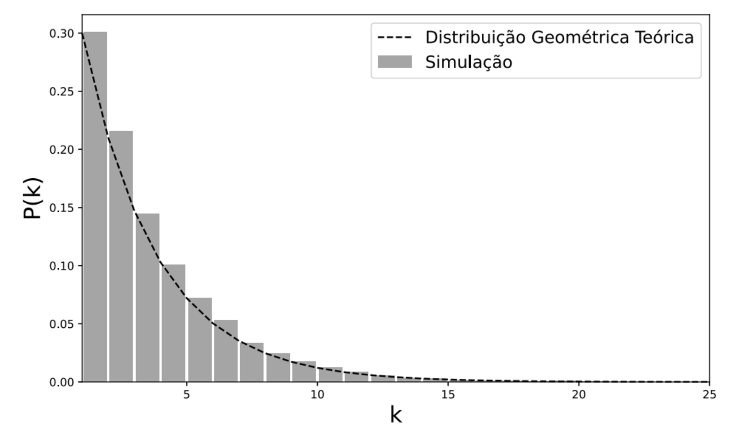
```python
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.stats import geom
np.random.seed(10)

p = 0.3 # probabilidade de um sucesso
X = [] # Armazena o número de experimentos
ns = 10000 # número de simulações
for i in range(0,ns):# para ns simulações
    k = 0 # número de experimentos
    s = False # variável que indica uma falha
    while s == False: # enquanto não sair um sucesso
        r = np.random.uniform() # sorteia um numero entre 0 e 1
        if(r <= p): # se for um sucesso
            s = True # indica um sucesso
        k = k + 1 # incrementa o número de experimentos
    X.append(k) # guarda o número de experimentos

k = np.arange(0, np.max(X))
# mostra os resultados da simulação
plt.figure(figsize=(10,6))
count, bins, ignored = plt.hist(X, bins=k, density=True,
                                color='gray',alpha=0.7,
                                rwidth=0.9, label='Simulação')
plt.xlabel('k', fontsize = 20)
plt.ylabel('P(k)',fontsize = 20)

# mostra a distribuicao teórica
x = np.arange(1,np.max(k)+5)
px = geom(p)
plt.plot(x,px.pmf(x), '--', color ='black',
         label='Distribuição Geométrica Teórica')
plt.xlim(1,max(x))
plt.legend(fontsize =15)
plt.savefig('geometric.svg')
plt.show(True)
```

Distribuição geométrica



Distribuição geométrica

Exemplo: A probabilidade de sair cara em um lançamento é igual a $p = 0,3$. Qual é a a probabilidade de que saia a primeira cara no quinto lançamento?

Distribuição geométrica

Solução: Nesse caso, temos quatro lançamentos como coroa e o último como cara. Seja X o número de lançamentos necessários. Então

$$P(X = 5) = p(1-p)^{5-1} = 0,3(1-0,3)^4 = 0,072.$$

Podemos interpretar essa probabilidade como sendo a fração de vezes em que lançamos uma moeda e a primeira cara sai no quinto lançamento.

Distribuição geométrica

Exemplo: Suponha que temos uma urna com 36 bolas, sendo 27 bolas brancas e 9 pretas. Bolas são retiradas até que uma bola preta apareça. Qual é a probabilidade de que precisaremos de mais de seis retiradas para sortear a primeira bola preta?

Distribuição geométrica

Solução: Seja X o número de retiradas necessárias. Então, vamos calcular:

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{9}{36}\right)\left(1 - \frac{9}{36}\right)^{k-1} = 0,178.$$

Assim, a probabilidade de que precisaremos de mais de seis lançamentos é aproximadamente igual a 18%.

Distribuição geométrica

Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica. Então,

$$E[X] = \frac{1}{p}, \tag{19}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}. \tag{20}$$

Distribuição geométrica

Para verificar esse teorema, usamos a definição do valor esperado de uma variável aleatória:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k-1}.$$

Fazendo $x = 1 - p$,

$$\begin{aligned} E[X] &= (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}x^k \\ &= (1-x)\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= (1-x)\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Notem que usamos a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$. Usando o mesmo raciocínio para a variância, vamos obter:

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Distribuição binomial negativa

Seja X o número de repetições necessárias a fim de que ocorram exatamente r sucessos de modo que o $r-$ésimo sucesso ocorra na k-ésima tentativa. Então,

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}, \quad k=r,r+1,\ldots. \tag{21}$$

Distribuição binomial negativa

Exemplo: Uma série da liga de futebol amador de uma cidade, o time que ganhar quatro jogos em sete será o vencedor. Suponha que o time A tenha probabilidade $p = 0,6$ de ganhar do time B.
a) Qual é a probabilidade de que A vença a série em seis jogos?
b) Qual é a probabilidade de que A perca a série em cinco jogos?
c) Qual é a probabilidade de que A vença a série?

Distribuição binomial negativa

Solução: a) Qual é a probabilidade de que A vença a série em seis jogos?
Para que A vença em seis jogos, esse time deve vencer $r = 4$ partidas e perder duas, sendo que a última partida necessariamente deve ser uma vitória do time A. Assim,

$$P(X = 6) = \left(\binom{6-1}{4-1} (0,6)^{4-1} (1-0,6)^{(6-1)-(4-1)} \right) \times 0,6 = 0,207.$$

Logo, a probabilidade é próxima de 21%.
b) Qual é a probabilidade de que A perca a série em cinco jogos?
A probabilidade de que o time A perca um jogo é igual a $1 - 0,6 = 0,4$. Seja X o número de jogos necessários para o time B vencer a série em cinco jogos. Assim, dentre 4 jogos iniciais, B vence 3 e perde 1. No último jogo, B consegue mais uma vitória e finaliza a série. Assim, a probabilidade de B vencer a série em cinco jogos é dada por:

$$P(X = 5) = \left[\binom{4}{3} (0,4)^3 (1-0,4)^{4-3} \right] \times 0,4 = 0,061.$$

Logo, a probabilidade de A perder a série em 5 jogos é próxima de 6%.

Distribuição binomial negativa

c) Qual é a probabilidade de que A vença a série?
Para que A vença a série, A deve (i) vencer quatro jogos em sequência, ou (ii) vencer quatro jogos e perder um jogo, ou (iii) vencer quatro jogos e perder dois jogos, ou (iv) vencer quatro jogos e perder três jogos.

$$\begin{aligned} P(\text{“A vencer a série”}) &= P(X \geq 4) \\ &= \sum_{k=4}^{7} \binom{k-1}{4-1} (0,6)^{3-1} (1-0,6)^{(k-1)-(4-1)} \times 0,6 \\ &= 0,71. \end{aligned}$$

Notem que a probabilidade de A vencer a série é maior do que a de A vencer apenas um dos jogos.

Distribuição hipergeométrica

Considere um conjunto de N objetos, dos quais N_1 são do tipo 1 e $N_2 = N - N_1$ são do tipo 2. Para um sorteio de n objetos ($n < N$) sem reposição, seja X a variável aleatória que define o número de objetos do tipo 1 sorteados. Então, a probabilidade de sortearmos k objetos do tipo 1:

$$P(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots n. \tag{22}$$

Distribuição hipergeométrica

Exemplo: Em uma fábrica de sucos, garrafas de um litro são embaladas em caixas de 25 unidades. Para aceitar esse lote, o funcionário de uma loja sorteia cinco garrafas e mede a quantidade de líquido que cada garrafa contém. Se dentre as cinco garrafas sorteadas, no máximo duas apresentarem menos de um litro de suco, o lote é aceito. Sabendo-se que um lote tem quatro garrafas com menos de um litro de suco, qual é a probabilidade desse lote ser aceito?

Distribuição hipergeométrica

Solução: Seja X a variável aleatória que representa o número de garrafas com menos de um litro sorteadas. Assim, temos:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{21}{5}}{\binom{25}{5}} - \frac{\binom{4}{1}\binom{21}{4}}{\binom{25}{5}} \\ &= 0,98. \end{aligned}$$

Logo, temos 98% de probabilidade de aceitar o lote.

Sumário

- Modelo Uniforme.
- Modelo de Bernoulli.
- Distribuição Binomial.
- Distribuição Geométrica.
- Distribuição Poisson.
- Distribuição Binomial Negativa.
- Distribuição Hipergeométrica.