Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Fundamentos de Probabilidade e Estatística para Ciência de Dados
Professor: Francisco A. Rodrigues

Exercícios Resolvidos: Aula 7

1 - Uma empresa é formada por 100 funcionários. Alguns desses funcionários possuem curso superior, enquanto que outros, apenas o ensino fundamental. Alguns são estagiários, enquanto que outros são efetivos. Sejam as variáveis aleatórias X e Y, onde X representa o nível de escolaridade ($X = \{$fundamental, superior $\}$) e Y representa o tipo de contrato ($Y = \{$estagiário, efetivo$\}$). Os dados sobre (X,Y) são mostrados a seguir.

XY	Estagiário	Efetivo
Superior	40	30
Fundamental	20	10

Por exemplo, 40 funcionários possuem o ensino fundamental e são estagiários, enquanto que 10 possuem ensino superior e são efetivos. Calcule:

a) dado que um funcionário escolhido aleatoriamente é estagiário, qual é a probabilidade de que ele/ela tenha nível superior?

b) dado que um funcionário tem nível superior, qual é a probabilidade de que ele/ela seja efetivo?

Solução:
Vamos determinar as distribuições de probabilidade marginais de X e Y, sendo:

$$P(X=x) = \sum_j P(X=x, Y=y_j), \quad P(Y=y) = \sum_i P(X=x_i, Y=y).$$

Na tabela a seguir indicamos essas distribuições de probabilidades.

XY	Estagiário	Efetivo	$P(X=x)$
Superior	40/100	30/100	70/100
Fundamental	20/100	10/100	30/100
$P(Y=y)$	60/100	40/100	100/100

a) Assim, dado que um funcionário escolhido aleatoriamente é estagiário, a probabilidade de que ele/ela tenha nível superior:

$$\begin{aligned} P(X=\text{Superior}|Y=\text{Estagiário}) &= \frac{P(X=\text{Superior}, Y=\text{Estagiário})}{P(Y=\text{Estagiário})} \\ &= \frac{40/100}{60/100} \\ &= \frac{4}{6} \\ &= 0,67. \end{aligned}$$

b) De maneira semelhante, dado que um funcionário tem nível superior, a probabilidade de que ele/ela seja efetivo:

$$\begin{aligned} P(Y=\text{Efetivo}|X=\text{Superior}) &= \frac{P(X=\text{Superior}, Y=\text{Efetivo})}{P(X=\text{Superior})} \\ &= \frac{30/100}{70/100} \\ &= \frac{3}{7} \\ &= 0,43. \end{aligned}$$

2 - Seja a variável aleatória bidimensional (X,Y) com função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(xy + e^{-x}), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine o valor da constante c e as funções densidade de probabilidade marginais. Calcule também $P(X > 1/2)$ e $P(Y < 1/4)$.

Solução:
Para encontrar a constante c, temos:

$$\int_0^1 \int_0^1 c(xy + e^{-x}) dx dy = 1$$

$$c \int_0^1 \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{e^{-x}}{(-1)} \right) \Bigg|_{x=0}^{1} dy = 1$$

$$c \int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{e} + 1 \right) dy = 1$$

$$c \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y}{e} + y \right) \Bigg|_{y=0}^{1} = 1$$

$$c \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{e} \right) = 1$$

$$c = \frac{4e}{5e - 4}.$$

A função de densidade de probabilidade marginal de X:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^1 f(x,y) dy \\
&= \int_0^1 c(xy + e^{-x}) dy \\
&= c \left(\frac{xy^2}{2} + e^{-x} y \right) \Bigg|_{y=0}^{1} \\
&= c \left(\frac{x}{2} + e^{-x} \right) \\
&= \left(\frac{4e}{5e-4} \right) \left(\frac{x}{2} + e^{-x} \right).
\end{aligned}$$

A função de densidade de probabilidade marginal de Y:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^1 f(x,y) dx \\
&= \int_0^1 c(xy + e^{-x}) dx \\
&= c \left(\frac{x^2 y}{2} - e^{-x} \right) \Bigg|_{x=0}^{1} \\
&= c \left(\frac{y}{2} - (e^{-1} - 1) \right) \\
&= \left(\frac{4e}{5e-4} \right) \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{e} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, vamos calcular as probabilidades. Para isso, podemos usar a ferramenta *WolframAlpha*[1] para resolver as integrais.

$$\begin{aligned}
P(X > 1/2) &= \int_{1/2}^1 f_X(x) dx \\
&= \int_{1/2}^1 \left(\frac{4e}{5e-4} \right) \left(\frac{x}{2} + e^{-x} \right) dx \\
&= \frac{16 - 16\sqrt{e} - 3e}{16 - 20e} \\
&= 0,483.
\end{aligned}$$

[1] WolframAlpha: `https://www.wolframalpha.com`.

$$
\begin{aligned}
P(Y < 1/4) &= \int_0^{1/4} f_Y(y)dy \\
&= \int_0^{1/4} \left(\frac{4e}{5e-4}\right)\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{e} + 1\right) dy \\
&= \frac{16-17e}{64-80e} \\
&= 0,196.
\end{aligned}
$$