Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Fundamentos de Probabilidade e Estatística para Ciência de Dados

Professor: Francisco A. Rodrigues

Exercícios Resolvidos: Aula 3

1 - Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição, de uma caixa que contém 5 bolas vermelhas e 4 pretas. Seja X a variável aleatória "número de bolas vermelhas retiradas no experimento". Determine a distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

Solução:

Temos uma caixa com 5 bolas vermelhas e 4 bolas pretas, e retiramos duas bolas sucessivamente sem reposição. Seja X a variável aleatória que representa o número de bolas vermelhas retiradas no experimento.

As possíveis quantidades de bolas vermelhas retiradas são $X = 0$, $X = 1$ e $X = 2$.

1. Probabilidade de $X = 0$ (nenhuma bola vermelha retirada)

Para $X = 0$, precisamos retirar duas bolas pretas. A probabilidade condicional de retirar a primeira bola preta e depois a segunda bola preta é:

$$P(X = 0) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

2. Probabilidade de $X = 1$ (uma bola vermelha e uma bola preta retiradas)

Para $X = 1$, podemos retirar uma bola vermelha e uma bola preta, em qualquer ordem. As probabilidades de cada uma das ordens são:

- Primeira bola vermelha e segunda bola preta:

$$P(\text{primeira vermelha e segunda preta}) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72}$$

- Primeira bola preta e segunda bola vermelha:

$$P(\text{primeira preta e segunda vermelha}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{72}$$

Portanto, a probabilidade total de $X = 1$ é:

$$P(X = 1) = \frac{20}{72} + \frac{20}{72} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

3. Probabilidade de $X = 2$ (duas bolas vermelhas retiradas)

Para $X = 2$, precisamos retirar duas bolas vermelhas. A probabilidade de retirar a primeira bola vermelha e depois a segunda bola vermelha é:

$$P(X = 2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

Distribuição de probabilidade de X

A distribuição de probabilidade de X é:

$$P(X = 0) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 1) = \frac{5}{9}, \quad P(X = 2) = \frac{5}{18}$$

2 - Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/2, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ -x/2 + 3/2, & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $P(X > 2 | 1 \leq X \leq 3)$.

Solução:
Usando a fórmula da probabilidade condicional:

$$\begin{aligned}
P(X>2|1\leq X\leq 3) &= \frac{P(X>2, 1\leq X\leq 3)}{P(1\leq X\leq 3)} \\
&= \frac{P(2\leq X\leq 3)}{P(1\leq X\leq 3)} \\
&= \frac{\int_2^3(-x/2+3/2)dx}{\int_1^2(1/2)dx+\int_2^3(-x/2+3/2)dx} \\
&= \frac{-x^2/4+3x/2\Big|_2^3}{x/2\Big|_1^2+(-x^2/4+3x/2)\Big|_2^3} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■