Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Fundamentos de Probabilidade e Estatística para Ciência de Dados
Professor: Francisco A. Rodrigues

Exercícios Resolvidos: Aula 4

1 - Uma livraria mantém os registros das vendas diárias dos livros. Com os dados, construiu a seguinte distribuição de probabilidade da variável aleatória $X =$ número de livros vendidos por semana:

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$0,05$	$0,15$	$0,42$	$0,20$	$0,08$	$0,10$

Responda às seguintes questões:

a) Calcule a probabilidade de vender mais que 2 livros por semana.

b) Calcule a probabilidade de vender no máximo 1 livro por semana.

c) Calcule o número esperado de livros vendidos por semana.

d) Calcule a variância dos livros vendidos por semana.

e) Seja $Y = 3X^2 + X - 2$ o lucro da livraria em função dos livros vendidos. Qual o lucro esperado da livraria?

Solução: a) Probabilidade de vender mais que 2 livros por semana
A probabilidade de $X > 2$ é dada pela soma das probabilidades dos valores de X maiores que 2:

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

Substituindo os valores:

$$P(X > 2) = 0,20 + 0,08 + 0,10 = 0,38$$

b) Probabilidade de vender no máximo 1 livro por semana
A probabilidade de $X \leq 1$ é dada pela soma das probabilidades dos valores de X menores ou iguais a 1:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

Substituindo os valores:

$$P(X \leq 1) = 0,05 + 0,15 = 0,20$$

c) Número esperado de livros vendidos por semana
O número esperado $E(X)$ é dado por:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{5} x_i p(x_i)$$

Substituindo os valores:

$$E(X) = (0 \cdot 0,05) + (1 \cdot 0,15) + (2 \cdot 0,42) + (3 \cdot 0,20) + (4 \cdot 0,08) + (5 \cdot 0,10)$$
$$E(X) = 0 + 0,15 + 0,84 + 0,60 + 0,32 + 0,50 = 2,41$$

Portanto, o número esperado de livros vendidos por semana é $E(X) = 2,41$.
d) Variância dos livros vendidos por semana
A variância $\mathrm{Var}(X)$ é calculada por:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Primeiro, calculamos $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{5} x_i^2 p(x_i)$$

Substituindo os valores:

$$E(X^2) = (0^2 \cdot 0,05) + (1^2 \cdot 0,15) + (2^2 \cdot 0,42) + (3^2 \cdot 0,20) + (4^2 \cdot 0,08) + (5^2 \cdot 0,10)$$
$$E(X^2) = 0 + 0,15 + 1,68 + 1,80 + 1,28 + 2,50 = 7,41$$

Agora, substituímos para encontrar a variância:

$$\mathrm{Var}(X) = 7,41 - (2,41)^2 = 7,41 - 5,8081 = 1,6019$$

Logo, a variância é $\mathrm{Var}(X) = 1,6019$.
e) Lucro esperado da livraria
Seja $Y = 3X^2 + X - 2$, o lucro da livraria em função do número de livros vendidos. O valor esperado de Y é:

$$E(Y) = E(3X^2 + X - 2)$$

Utilizando a linearidade da esperança:

$$E(Y) = 3E(X^2) + E(X) - 2$$

Substituímos os valores $E(X^2) = 7,41$ e $E(X) = 2,41$:

$$E(Y) = 3(7,41) + 2,41 - 2$$

$$E(Y) = 22,23 + 2,41 - 2 = 22,64$$

Portanto, o lucro esperado da livraria é $E(Y) = 22,64$.

2 - Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calcule a distribuição acumulada de X.

Solução:
Para $-1 \leq x < 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(s)ds \\ &= \int_{-1}^{x} (s+1)ds \\ &= \frac{s^2}{2} + s\Big|_{-1}^{x} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2. \end{aligned}$$

Para $0 \leq x < 1$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(s)ds \\ &= \int_{-1}^{0} (s+1)ds + \int_{0}^{x} (1-s)ds \\ &= \left(\frac{s^2}{2} + s\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(s - \frac{s^2}{2}\right)\Big|_{0}^{x} \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \\ &= 1 - \frac{(1-x)^2}{2}. \end{aligned}$$

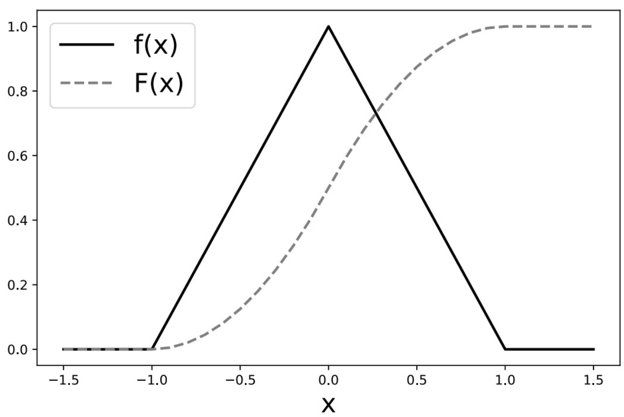
Para $x \geq 1$, temos que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-1}^{0} (s+1)ds + \int_{0}^{1} (1-s)ds = 1.$$

Portanto, a função de distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2, \quad -1 < x \leq 0 \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, \quad 0 \leq x < 1 \\ 1, \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Essa função é mostrada na figura a seguir.



3 - Uma empresa vai iniciar a produção de um novo motor, que é composto, principalmente, por duas peças, que denominamos A e B. Vamos supor que se ambas a peças são defeituosas, a empresa tem um prejuízo de R$ 50. Se a peça B é defeituosa, é possível reparar o produto e obter ainda um lucro de R$ 50. Se A é defeituosa, é possível reparar o produto e obter um lucro de R$ 100. Se ambas a peças são perfeitas, o lucro é de R$ 150. Seja X a variável aleatória que representa o lucro obtido. A probabilidade associada a cada uma das situações é dada a seguir:

$$P(X=150)=P(A\cap B)=0,60.$$

$$P(X=50)=P(A\cap B^c)=0,05.$$

$$P(X=100)=P(A^c\cap B)=0,10.$$

$$P(X=-50)=P(A^c\cap B^c)=0,25.$$

Calcule o lucro médio e o desvio padrão do lucro.

Solução:

Usando a definição do valor esperado, temos:

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i P(X = x_i) = 150 \times 0,60 + 50 \times 0,05 + 100 \times 0,10 - 50 \times 0,25 = 90$$

Portanto, o lucro esperado por peça é igual a R$ 90. Esse seria o lucro obtido em média, por peça, quando um número elevado de peças é produzido.

Para calcularmos a variância, usamos:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 = \sum_{x_i} x_i^2 P(X = x_i) - E[X]^2 \\ &= 150^2 \times 0,60 + 50^2 \times 0,05 + 100^2 \times 0,10 + (-50)^2 \times 0,25 - (90)^2 \\ &= 6160. \end{aligned}$$

O desvio padrão é igual à raíz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = 78,48$$

Assim, o desvio padrão é igual a R$ 78,48.