Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Fundamentos de Probabilidade e Estatística para Ciência de Dados
Professor: Francisco A. Rodrigues

Exercícios Resolvidos: Aula 5

1 - Considere uma urna com 7 bolas pretas, 5 bolas vermelhas e 8 bolas brancas.

a) Se cinco bolas são retiradas com reposição, qual é a probabilidade de sortearmos 2 bolas brancas?

b) Se cinco bolas são retiradas sem reposição, qual é a probabilidade de sortearmos 2 bolas brancas?

c) Qual é a probabilidade de que a quarta bola retirada seja a primeira vermelha?

d) Qual é a probabilidade de que vamos precisar de 8 lançamentos para obtermos cinco bolas pretas, sendo a oitava bola a quinta bola preta? Assuma que as bolas são retiradas com reposição.

Solução:

Nesse exercício, temos que considerar diversos modelos probabilísticos.

a) No primeiro caso, precisamos usar a distribuição binomial, pois queremos determinar a probabilidade de duas bolas brancas em cinco tentativas, sendo as tentativas independentes, pois estamos considerando retiradas com reposição. Assim, se X for o número de bolas brancas retiradas:

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{8}{20}\right)^2\left(1-\frac{8}{20}\right)^{5-2}=0,345.$$

b) Como agora as retiradas são sem reposição, temos que a variável X, que conta o número de bolas brancas retiradas, segue o modelo hipergeométrico. Assim:

$$P(X=2)=\frac{\binom{8}{2}\binom{12}{3}}{\binom{20}{5}}=0,397.$$

c) Seja X o número de tentativas para que a primeira bola vermelha seja sorteada. Ou seja, devemos considerar o modelo geométrico. Usando as informações do exercício, temos:

$$P(X=4)=\left(1-\frac{5}{20}\right)^{4-1}\left(\frac{5}{20}\right)=0,105.$$

d) Nesse caso, temos que usar a distribuição binomial negativa. Temos que quatro bolas pretas são retiradas nos primeiros sete lançamentos. No oitavo lançamento, ocorre a quinta bola preta. Assim:

$$P(X=8)=\left[\binom{8-1}{5-1}\left(\frac{7}{20}\right)^{5-1}\left(1-\frac{7}{20}\right)^{(8-1)-(5-1)}\right]\left(\frac{7}{20}\right)=0,050.$$

Notem que $P(X=k)$ tem diferentes interpretações nesse exercício. No item (a), $P(X=k)$ representa a probabilidade de ocorrer k sucessos em n tentativas, em (b) é a probabilidade de termos k sucessos em n retiradas sem reposição, no item (c) $P(X=k)$ representa a probabilidade do primeiro sucesso ocorrer no experimento k, em (d) é a probabilidade de serem necessários k experimentos para ocorrer n sucessos, sendo que $n-1$ sucessos ocorrem em $k-1$ tentativas e o n-ésimo sucesso ocorre na tentativa k. Portanto, o significado da probabilidade calculada depende do modelo que está sendo considerado.

2 - Numa linha adutora de água, de 60 km de extensão, ocorrem 30 vazamentos no período de um mês. Qual a probabilidade de ocorrer, durante o mês, pelo menos 3 vazamentos num certo setor de 3 km de extensão?

Solução:

Este problema pode ser modelado por um processo de Poisson, já que os vazamentos ocorrem de forma aleatória e independente ao longo da extensão da linha adutora.

A taxa média de vazamentos por quilômetro é:

$$\lambda_{\text{km}} = \frac{30 \text{ vazamentos}}{60 \text{ km}} = 0{,}5 \text{ vazamentos por km.}$$

Para um setor de 3 km de extensão, a taxa esperada de vazamentos (λ) é:

$$\lambda = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 \text{ vazamentos.}$$

A fórmula da probabilidade para o número de eventos k em um intervalo de tempo ou espaço para um processo de Poisson é:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

onde λ é a taxa esperada e k é o número de eventos.

Queremos calcular a probabilidade de ocorrer pelo menos 3 vazamentos, ou seja:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2).$$

Calculamos $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ e $P(X = 2)$ substituindo os valores na fórmula de Poisson:

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1{,}5^0 e^{-1{,}5}}{1} = e^{-1{,}5},$$

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \frac{1{,}5^1 e^{-1{,}5}}{1} = 1{,}5 \cdot e^{-1{,}5},$$

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{1{,}5^2 e^{-1{,}5}}{2} = \frac{2{,}25 \cdot e^{-1{,}5}}{2} = 1{,}125 \cdot e^{-1{,}5}.$$

Agora somamos as probabilidades:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2),$$

$$P(X < 3) = e^{-1{,}5} + 1{,}5 \cdot e^{-1{,}5} + 1{,}125 \cdot e^{-1{,}5} = (1 + 1{,}5 + 1{,}125) \cdot e^{-1{,}5}.$$

Simplificando:

$$P(X < 3) = 3{,}625 \cdot e^{-1{,}5}.$$

Usamos a aproximação $e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231$:

$$P(X < 3) \approx 3{,}625 \cdot 0{,}2231 = 0{,}8096.$$

Finalmente, calculamos $P(X \geq 3)$:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0{,}8096 = 0{,}1904.$$