Introdução à teoria das probabilidades

Variáveis aleatórias multidimensionais

Francisco A. Rodrigues

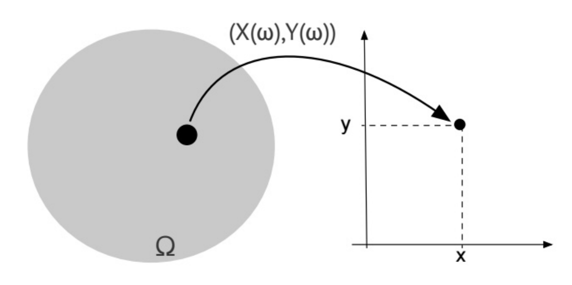
Universidade de São Paulo

Variáveis aleatórias multidimensionais

Seja ϵ um experimento aleatório associado a um espaço amostral Ω. Sejam $X_1 = X_1(\omega), X_2 = X_2(\omega), \ldots$, funções que associam um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$. Denominamos vetor aleatório o conjunto $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots]$.

Variáveis aleatórias multidimensionais

Seja ϵ um experimento aleatório associado a um espaço amostral Ω. Sejam $X_1 = X_1(\omega), X_2 = X_2(\omega), \ldots$, funções que associam um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$. Denominamos vetor aleatório o conjunto $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots]$.



Variáveis aleatórias multidimensionais discretas

Sejam X e Y variáveis aleatórias associadas a um espaço amostral Ω. O par (X, Y) será uma variável aleatória discreta bidimensional se os valores possíveis forem finitos ou infinito enumeráveis. A cada resultado possível (x_i, y_j), $i, j = 1, 2, \ldots$, associamos um número

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

satisfazendo:

- $0 \leq P(X = x_i, Y = y_j) \leq 1$ para todo (x_i, y_j), $i, j = 1, 2, \ldots$.
- $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$

Variáveis aleatórias multidimensionais discretas

Exemplo: Suponha que duas bolas são escolhidas sem reposição de uma urna com 5 bolas brancas e 10 pretas. Seja a variável aleatória $X_i = 1$ se a i-ésima selecionada é branca ou $X_i = 0$, se essa bola é preta, onde $i = 1, 2, \ldots, 15$. Determine a distribuição de probabilidade de (X_1, X_2).

Variáveis aleatórias multidimensionais discretas

Solução: Vamos calcular as probabilidades.

- Primeira bola branca e a segunda bola preta:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{5}{15} \times \frac{10}{14} = \frac{50}{210} = \frac{5}{21}.$$

- Primeira bola branca e a segunda bola branca:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{20}{210} = \frac{2}{21}.$$

- Primeira bola preta e a segunda bola branca:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{50}{210} = \frac{5}{21}.$$

- Primeira bola preta e a segunda bola preta:

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{90}{210} = \frac{9}{21}.$$

Esses resultados podem ser organizado na tabela a seguir.

$X_1 X_2$	0	1
0	$9/21$	$5/21$
1	$5/21$	$2/21$

Variável aleatória contínua bidimensional

Sejam X e Y variáveis aleatórias associadas a um espaço amostral Ω. O par (X, Y) será uma variável aleatória contínua bidimensional se (X, Y) tomar todos os valores em algum conjunto não enumerável do $\mathbb{R}^2$. A esse par, associamos uma função densidade de probabilidade conjunta que satisfaz:

- $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

Variável aleatória contínua bidimensional

Exemplo: Suponha que a variável aleatória contínua bidimensional (X, Y) tenha função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2 + y^2), & -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifique se $f(x, y)$ é uma função densidade de probabilidade conjunta e calcule $P(X \geq 0, 0 \leq Y \leq 1/2)$.

Variável aleatória contínua bidimensional

Solução: Vemos que $f(x,y) \geq 0$ para em $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$, pois $f(x,y)$ é uma função quadrática. Logo, a primeira condição, dada pela definição anterior, é satisfeita. Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{3}{8}(x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_{x=-1}^{1} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}+2y^2\right) dy \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{2y}{3}+\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-1}^{1} \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{8}{3}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $f(x,y)$ é uma função densidade de probabilidade conjunta.

Variável aleatória contínua bidimensional

No caso da probabilidade pedida, temos:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 0, 0 \leq Y \leq 1/2) &= \int_0^{1/2} \int_0^{\infty} f(x,y) dxdy \\
&= \int_0^{1/2} \int_0^{1} \frac{3}{8}(x^2 + y^2) dxdy \\
&= \frac{3}{8} \int_0^{1/2} \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \bigg|_{x=0}^{1} dy \\
&= \frac{3}{8} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy \\
&= \frac{3}{8} \left(\frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_{y=0}^{1/2} \\
&= \frac{3}{8} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) \\
&= \frac{5}{64}.
\end{aligned}$$

Distribuição de probabilidade marginal

Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. Então, a distribuição de probabilidade marginal de X é definida por:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) \tag{1}$$

e a de Y:

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j). \tag{2}$$

Distribuição de probabilidade marginal

Exemplo: Suponha que duas bolas são escolhidas sem reposição de uma urna com 5 bolas brancas e 10 pretas. Seja a variável aleatória $X_i = 1$ se a i-ésima selecionada é branca ou $X_i = 0$ se essa bola é preta. Determine a distribuição de probabilidade marginal de X_1 e X_2.

$X_1 X_2$	0	1
0	9/21	5/21
1	5/21	2/21

Distribuição de probabilidade marginal

Solução:

$X_1 X_2$	0	1	$P(X_1 = x)$
0	$9/21$	$5/21$	$2/3$
1	$5/21$	$2/21$	$1/3$
$P(X_2 = x)$	$2/3$	$1/3$	1

Probabilidade condicional

Seja o vetor aleatório bidimensional (X, Y). A probabilidade condicional de $X = x$ dado que $Y = y$ foi observada é dada por:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \quad P(Y = y) > 0. \qquad (3)$$

Probabilidade condicional

Exemplo: Suponha que duas bolas são escolhidas sem reposição de uma urna com 5 bolas brancas e 10 pretas. Seja a variável aleatória $X_i = 1$ se a i-ésima selecionada é branca ou $X_i = 0$ se essa bola é preta. Determine as distribuições de probabilidade condicional $P(X_1|X_2 = x)$ e $P(X_2|X_1 = x)$.

Probabilidade condicional

Solução: Vimos anteriormente que a distribuição de probabilidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X_1, X_2) e as respectivas distribuições de probabilidade marginais são dadas pela tabela a seguir.

$X_1 X_2$	0	1	$P(X_1 = x)$
0	$9/21$	$5/21$	$2/3$
1	$5/21$	$2/21$	$1/3$
$P(X_2 = x)$	$2/3$	$1/3$	1

Temos:

$$P(X_1 = 0|X_2 = 0) = \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 0)}{P(X_2 = 0)} = \frac{9/21}{2/3} = \frac{9}{14}.$$

$$P(X_1 = 0|X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 1)}{P(X_2 = 1)} = \frac{5/21}{1/3} = \frac{5}{7}.$$

Repetindo esse mesmo procedimento para os demais casos, temos a distribuição de probabilidade condicional $P(X_1 = x|X_2 = y)$, $x = 0, 1$ e $y = 0, 1$:

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$
$P(X_1 = 0\|X_2 = x)$	$9/14$	$5/7$
$P(X_1 = 1\|X_2 = x)$	$5/14$	$2/7$

Probabilidade condicional

E a distribuição de probabilidade condicional $P(X_2 = x|X_1 = y)$, onde $x = 0, 1$ e $y = 0, 1$:

	$X_1 = 0$	$X_2 = 1$
$P(X_2 = 0\|X_1 = x)$	$9/14$	$5/7$
$P(X_2 = 1\|X_1 = x)$	$5/14$	$2/7$

Notem que a soma das colunas da tabela são iguais a um, isto é,

$$\begin{cases} \sum_x P(X_1 = x|X_2 = y) = 1, & y = 0, 1 \\ \sum_y P(X_2 = y|X_1 = x) = 1, & x = 0, 1. \end{cases}$$

Probabilidade condicional

Seja (X, Y) uma vetor aleatório bidimensional contínuo com função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$. Sejam $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ as funções densidade de probabilidade marginais de X e Y, respectivamente. Então, a função densidade de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$ é definida por:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \qquad f_Y(y) > 0, \tag{4}$$

e a função densidade de probabilidade condicional de Y dado que $X = x$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \qquad f_X(x) > 0. \tag{5}$$

Probabilidade condicional

Exemplo: Seja a variável aleatória bidimensional (X, Y) com função densidade de probabilidade conjunta,

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x^3 + y^3), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Calcule $P(X > 1/2 | Y = y)$
b) Determine $P(0 < X < 1/2 | 0 < Y < 1/2)$.
c) Calcule $P(Y < 2/3 | X = 1/2)$.

Probabilidade condicional

Solução: a) Calcule $P(X > 1/2|Y = y)$,
Usando a definição anterior, temos:

$$
\begin{aligned}
P(X > 1/2|Y = y) &= \int_{1/2}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx \\
&= \int_{1/2}^{1} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx \\
&= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{1/2}^{1} 2(x^3 + y^3)dx \\
&= \frac{1}{\int_0^1 2(x^3 + y^3)dx} \left(\frac{2x^4}{4} + 2y^3 x) \right) \Big|_{x=1/2}^{1} \\
&= \frac{1}{2y^3 + 1/2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{16} \right) + 2y^3 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2y^3 + 1/2} \left(y^3 + \frac{15}{32} \right) \\
&= \frac{y^3 + 15/32}{2y^3 + 1/2}.
\end{aligned}
$$

Probabilidade condicional

b) Determine $P(0 < X < 1/2 | 0 < Y < 1/2)$.
Temos:

$$\begin{aligned}
P(0 < X < 1/2 | 0 < Y < 1/2) &= \frac{P(0 < X < 1/2, 0 < Y < 1/2)}{P(0 < Y < 1/2)} \\
&= \frac{\int_0^{1/2} \int_0^{1/2} f(x, y) dxdy}{\int_0^{1/2} f_Y(y) dy} \\
&= \frac{\int_0^{1/2} \int_0^{1/2} 2(x^3 + y^3) dxdy}{\int_0^{1/2} \left(\int_0^1 2(x^3 + y^3) dx \right) dy} \\
&= \frac{1/32}{9/32} \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Probabilidade condicional

c) Calcule $P(Y < 2/3 | X = 1/2)$.
Nesse caso, temos que o valor $X = 1/2$ foi observado. Assim,

$$
\begin{aligned}
P(Y < 2/3 | X = 1/2) &= \int_{-\infty}^{2/3} f_Y(y|x = 1/2)dy \\
&= \int_0^{2/3} \left[\frac{f(x = 1/2, y)}{f_X(x = 1/2)} \right] dy \\
&= \int_0^{2/3} \left(\frac{2((1/2)^3 + y^3)}{\int_0^1 2((1/2)^3 + y^3)dy} \right) dy \\
&= \frac{1}{3/4} \int_0^{2/3} \left(\frac{1}{4} + 2y^3 \right) dy \\
&= \frac{4}{3} \left(\frac{43}{162} \right) \\
&= \frac{86}{243}.
\end{aligned}
$$

Independência

Dizemos que as variáveis aleatórias X e Y são independentes se, e somente se,

- Caso discreto:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j), \quad \forall i \neq j. \tag{6}$$

- Caso contínuo:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{7}$$

Independência

Exemplo: Seja o vetor aleatório bidimensional (X, Y) com função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(xy + y^2) & 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifique se X e Y são independentes.

Independência

Solução: Vamos calcular as funções de densidade de probabilidade marginais. Para X:

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{5}(xy + y^2)dy = \frac{3x}{10} + \frac{1}{5}.$$

Para a variável Y:

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{3}{5}(xy + y^2)dx = \frac{6}{5}y(y+1).$$

Multiplicando,

$$f_x(x)f_Y(y) = \frac{6}{5}\left(\frac{3x}{10} + \frac{1}{5}\right)y(y+1) \neq f(x,y).$$

Logo, as variáveis aleatórias X e Y não são independentes.

Sumário

- Variáveis aleatórias multidimensionais.
- Probabilidade marginal.
- Probabilidade condicional.