Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Fundamentos de Probabilidade e Estatística para Ciência de Dados

Professor: Francisco A. Rodrigues

Exercícios Resolvidos: Aula 6

1 - O tempo que um funcionário gasta para reparar um aparelho de ar condicionado em uma empresa é uniformemente distribuído entre 1,5 e 4 horas. Calcule a probabilidade de que o funcionário conserte o próximo ar condicionado em menos de 3 horas.

Solução:
Seja X o tempo usado no reparo. Então:

$$P(X < 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx = \int_{1,5}^{3} \frac{1}{4-1,5}dx = \frac{3-1,5}{2,5} = 0,6.$$

Logo, a probabilidade de que o funcionário termine o reparo em menos de 3 horas é igual a 60%.

2 - Uma fábrica usa garrafas de refrigerante de 260 ml. Uma máquina é usada para encher essas garrafas. Assumindo que a quantidade fornecida pela máquina tem distribuição normal com média 250 ml e desvio padrão de 10 ml, qual é a percentagem de garrafas que transbordarão?

Solução:
Seja X a variável aleatória que representa a quantidade de refrigerante por garrafa. Vamos calcular $P(X > 260)$.

$$\begin{aligned}
P(X > 260) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{260-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Z > \frac{260-250}{10}\right) \\
&= 0,158.
\end{aligned}$$

Portanto, em torno de 16% das garrafas transbordarão.

3 - No desenvolvimento de um novo foguete, engenheiros inserem dois tanques de combustível, sendo um deles ativo e o outro usado como reserva, que é acionado caso ocorra uma falha no primeiro tanque. Suponha que em uma missão espacial necessita de 50 horas de voo para ser finalizada. De acordo com o fabricante do tanque, o tempo médio antes de ocorrer uma falha é de 100 horas. Calcule a probabilidade de que a missão será bem-sucedida. Assuma que o tempo de funcionamento de cada tanque apresenta distribuição exponencial.

Solução:

Lembrando: Uma variável aleatória contínua X tem distribuição gama com parâmetros $\lambda > 0$ e $\alpha > 0$, se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde Γ é a função gama:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \tag{2}$$

Notem que se $\alpha = 1$, temos a distribuição exponencial.

Como temos dois tanques, para que o sistema todo falhe devem ocorrer dois eventos (duas falhas), sendo que o tempo associado a cada um deles segue o modelo exponencial. Logo, o tempo para o sistema falhar segue uma distribuição gama com $\alpha = 2$ (notem que é a soma de duas distribuições exponenciais). Como o tempo médio para ocorrer uma falha em cada tanque é igual a 100 horas, temos que $\lambda = 1/100$. Assim, se a variável aleatória X representa o tempo de funcionamento dos tanques de combustível, vamos calcular a probabilidade usando a equação (1):

$$\begin{aligned} P(X > 50) &= 1 - P(X < 50) \\ &= 1 - \int_0^{50} \left(\frac{1}{100^2} \right) \frac{x^{2-1} e^{-x/100}}{\Gamma(2)} dx \\ &= 1 - \int_0^{50} \frac{x e^{-x/100}}{10000(1!)} dx \\ &= 1 - 0,09 \\ &= 0,91. \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade da missão ser bem sucedida é igual a 91%.