Introdução à teoria das probabilidades

Função de distribuição

Francisco A. Rodrigues

Universidade de São Paulo

Função de distribuição

Definição: A função distribuição acumulada, ou simplesmente função de distribuição, de uma variável aleatória X é definida por:

$$F(x) = P(X \leq x), \tag{1}$$

Função de distribuição

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta. A função de distribuição é definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i). \tag{2}$$

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua. A função de distribuição é definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds. \tag{3}$$

Função de distribuição

Exemplo: Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição, de uma caixa que contém 5 bolas vermelhas e 4 pretas. Seja X a variável aleatória "número de bolas vermelhas retiradas no experimento". Determine a distribuição de probabilidade da variável aleatória X e sua função de distribuição.

Função de distribuição

Solução: Sejam os eventos:

$$\begin{cases} P_i\text{: “bola preta na retirada i”} \\ V_i\text{: “bola vermelha na retirada i”}. \end{cases}$$

A probabilidade associada a cada saída possível é calculada da seguinte forma:

$$P(X=0) = P((P_1, P_2)) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{72}.$$

$$P(X=1) = P((V_1, P_2) \cup (P_1, V_2)) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{40}{72}$$

$$P(X=2) = P((V_1, V_2)) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72}.$$

Assim, a distribuição de probabilidade:

X	0	1	2
$P(X=x)$	$12/72$	$40/72$	$20/72$

Função de distribuição

Para calcularmos a função de distribuição acumulada, precisamos somar em cada intervalo.

- Para $x < 0$, temos que $F(x) = 0$.
- Para $0 \leq x < 1$, temos:

$$F(x) = P(X = 0) = \frac{12}{72}.$$

- Para $1 \leq x < 2$:

$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{12}{72} + \frac{40}{72} = \frac{52}{72}.$$

- Para $x \geq 2$,

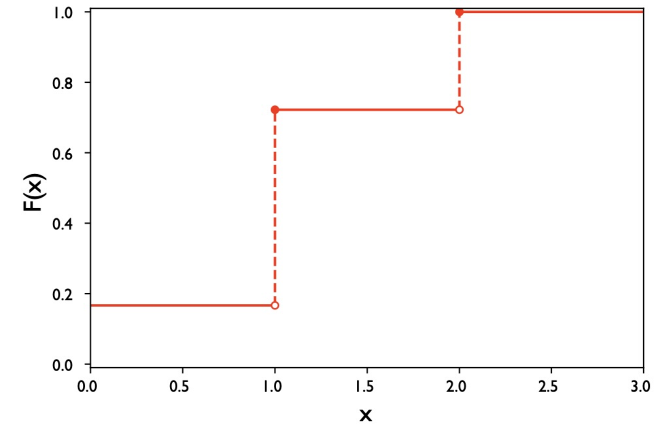
$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{12}{72} + \frac{40}{72} + \frac{20}{72} = 1.$$

Portanto, a função de distribuição acumulada da variável aleatória X é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 12/72 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 52/72 & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Função de distribuição

Gráfico da distribuição acumulada:



Função de distribuição

Exemplo: Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a função de distribuição de X.

Função de distribuição

Solução: Usando a definição da distribuição acumulada, se $x < a$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(s)ds = 0,$$

pois $f(x) = 0$ se $x < a$.
Se $a \leq x < b$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} ds = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} ds = \frac{x-a}{b-a}.$$

Caso $x \geq b$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-\infty}^{a} f(s)ds + \int_{a}^{b} f(s)ds + \int_{b}^{x} f(s)ds = \int_{a}^{b} f(s)ds = 1,$$

pois $f(s) > 0$ apenas para $s \in [a, b]$. Assim, temos:

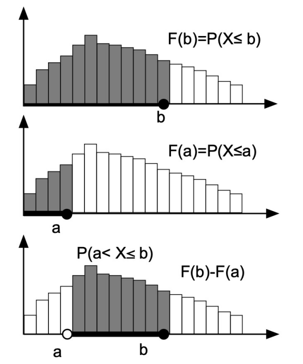
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b \\ 1 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

Função de distribuição

Teorema: A função de distribuição de uma variável aleatória X satisfaz as seguintes propriedades:

- $0 \leq F(x) \leq 1$,
- $F(x)$ é não decrescente,
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Função de distribuição



- Caso discreto: Seja X uma variável aleatória discreta. Então:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

- Caso contínuo: Seja X uma variável aleatória contínua.

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x).$$

Função de distribuição

O teorema é consequência da aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo.

$$F(x+\Delta x) = \int_{-\infty}^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{-\infty}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt. \quad (4)$$

Usando o teorema do valor médio para a integração, existe um valor real $c \in [x, x+\Delta x]$ tal que:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x.$$

Substituindo esse valor na equação (4):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c). \quad (5)$$

Mas como $c \in [x, x+\Delta x]$, temos que o limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$

Finalmente, resolvendo o limite na equação (5), obtemos:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Função de distribuição

Exemplo: Seja $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$ e $F(x) = 0$ para $x < 0$. Calcule $f(x)$.

Função de distribuição

Solução: Para encontrar a função densidade de probabilidade $f(x)$, derivamos $F(x)$ em relação a x:

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x).$$

Derivando,

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)$$

$$f(x) = 0 - (-\lambda e^{-\lambda x})$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Para $x < 0$, como $F(x) = 0$, temos $f(x) = 0$.
Portanto, a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Sumário

- Função de distribuição acumulada.