Introdução à teoria das probabilidades

Valor Esperado e Variância

Esperança de uma variável aleatória discreta

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidade $P(X = x)$. O valor esperado (médio) ou esperança matemática de X é definido por:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i). \tag{1}$$

Esperança de uma variável aleatória discreta

Exemplo: Seja X o valor que sai na face superior de um dado. Calcule o valor esperado de X.

Esperança de uma variável aleatória discreta

Exemplo: Seja X o valor que sai na face superior de um dado.
Calcule o valor esperado de X.
A distribuição de probabilidade de X é dada por:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

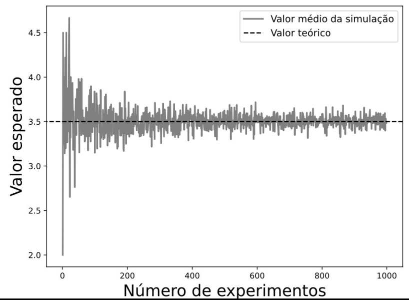
$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Note que $3,5$ não é um valor possível de X.

Esperança de uma variável aleatória discreta

```
from random import randint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
np.random.seed(42)

medias = []
S = range(1,1000) # número de simulações
for s in S: # simula
    saidas_dado = []
    for n in range(0,s):# para s simulações
        # guarda o valor na face do dado
        saidas_dado.append(randint(1, 6))
    # armazena o valor esperado
    medias.append(np.mean(saidas_dado))
# mostra os resultados
plt.figure(figsize=(8,6))
```



Esperança de uma variável aleatória discreta

Exemplo: Uma padaria produz pães que proporcionam um lucro de R$ 1,00, quando vendidos, ou um prejuízo de R$ 0,50, caso não sejam vendidos. Se a probabilidade de vender um pão é igual a 0,8, qual o lucro médio da padaria?

Esperança de uma variável aleatória discreta

Solução: A distribuição de probabilidade do lucro é dada na tabela a seguir. Notem que o prejuízo é assumido como um valor negativo, pois leva a uma perda de receita pela padaria.

X	-0,5	1,0
$P(X = x_i)$	0,2	0,8

Assim, o lucro médio:

$$E[X] = 1 \times 0,8 - 0,5 \times 0,2 = 0,7.$$

Portanto, o lucro esperado por cada pão vendido é igual a R$ 0,70.

Esperança de uma variável aleatória discreta

```python
import numpy as np

Ns = 1000 # número de simulações
p = 0.8 # probabilidade de vender um pão
lucro = 1 # lucro por pão
prejuizo = 0.5 # prejuízo por pão
ganho = 0 # lucro médio
for s in range(0,Ns):
    # se vende um pão
    if np.random.uniform() < p:
        ganho = ganho + lucro
    # caso contrário
    else:
        ganho = ganho - prejuizo
print('Lucro médio: ', ganho/Ns)
```

Esperança de uma variável aleatória contínua

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$. O valor esperado (médio) ou esperança matemática de X é definido por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{2}$$

Esperança de uma variável aleatória contínua

Exemplo: A variável aleatória X tem função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o valor esperado de X.

Esperança de uma variável aleatória contínua

Exemplo: A variável aleatória X tem função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o valor esperado de X.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^{2} x \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^4}{12}\Big|_{-1}^{2} = \frac{15}{12} = 1,25.$$

Valor esperado

Definição: Seja $g(X)$ uma função da variável aleatória discreta X. Então, o valor esperado de $g(X)$ é definido por:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P(X = x_i). \tag{3}$$

Valor esperado

Exemplo: Lançamos dois dados e observamos a variável aleatória X, que é igual a 1 se o valor observado na soma de dois dados for par, ou igual a zero, caso contrário. Calcule a esperança de $g(X) = X + 2$.

Exemplo

Solução: Há 36 saídas possíveis. Assim,

X	0	1
$P(X = x_i)$	$18/36$	$18/36$

O valor esperado $E[g(X)] = E[X + 2]$:

$$E[g(X)] = \sum_{k=0}^{1}(k+2)P(X = k) = (0+2)\times\frac{18}{36}+(1+2)\times\frac{18}{36} = \frac{90}{36} = 2,5.$$

Valor esperado

Definição: Seja $g(X)$ uma função da variável aleatória contínua X com função de densidade de probabilidade $f(x)$. Então, o valor esperado de $g(X)$ é definido por:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx. \tag{4}$$

Valor esperado

Exemplo: A variável aleatória X tem função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o valor esperado de $g(X) = 2X + 1$.

Valor esperado

Exemplo: A variável aleatória X tem função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o valor esperado de $g(X) = 2X + 1$.

$$E[g(X)] = \int_{-1}^{2} (2x+1)\frac{x^2}{3} dx = \frac{2x^4}{12} + \frac{x^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = 3,5.$$

Valor esperado

Teorema: Seja X uma variável aleatória.

- Se $X = c$, onde c é uma constante, então

$$E[X] = E[c] = c. \tag{5}$$

- Seja c uma constante, então:

$$E[cX] = cE[X]. \tag{6}$$

- O valor esperado é uma função linear. Sejam a e b constantes, então:

$$E[aX + b] = aE[X] + b. \tag{7}$$

Valor esperado

Para demonstrarmos a primeira propriedade:

$$E[c] = \sum_{i=1}^{\infty} cP(X = x_i) = c \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = c.$$

Para a segunda propriedade, temos:

$$E[cX] = \sum_{i=1}^{\infty} cx_i P(X = x_i) = c \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = cE[X].$$

Finalmente, vamos demonstrarmos que o valor esperado é uma função linear:

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \sum_{i=1}^{\infty} (ax_i + b) P(X = x_i) \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) + b \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) \\ &= aE[X] + b. \end{aligned}$$

Valor esperado

Exemplo: Se uma variável aleatória X apresenta valor esperado $E[X] = 2$, calcule $E[2X + 5]$.

Valor esperado

Exemplo: Se uma variável aleatória X apresenta valor esperado $E[X] = 2$, calcule $E[2X + 5]$.
Usando as propriedades definidas anteriormente,

$$E[2X + 5] = 2E[X] + 5 = 2 \times 2 + 5 = 9.$$

Momento estatístico

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta com valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. O momento de ordem n de X é definido por:

$$E(X^n) = \sum_{i=1}^{k} x_i^n P(X = x_i). \tag{8}$$

Momento estatístico

Definição: Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade $f(x)$. O momento estatístico de ordem n de X é definido por:

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx. \tag{9}$$

Momento estatístico

Exemplo: Sejam as variáveis aleatórias X e Y com distribuições de probabilidade:

X	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$

Y	-2	-1	0	1	2
$P(Y = y)$	0	$1/4$	$1/2$	$1/4$	0

Calcule $E[X]$, $E[Y]$, $E[X^2]$ e $E[Y^2]$.

Momento estatístico

Solução: Os valores esperados de X e Y:

$$E[X] = -2 \times \frac{1}{5} - 1 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 0,$$

$$E[Y] = -2 \times 0 - 1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times 0 = 0.$$

Portanto, X e Y apresentam o mesmo valor esperado. Vamos calcular o segundo momento de X e Y:

$$E[X^2] = (-2)^2 \times \frac{1}{5} + (-1)^2 \times \frac{1}{5} + 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

$$E[Y^2] = (-2)^2 \times 0 + (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2 \times 0 = \frac{2}{4} = 0,5.$$

Momento central

Definição: Seja X uma variável aleatória.

- Seja X é uma variável aleatória discreta. O momento central de ordem n $(n > 0)$ de X é definido por:

$$\mu_n = E[(X - E[X])^n] = \sum_{x_i} (x_i - E[X])^n P(X = x_i), \quad (10)$$

- Seja X é uma variável aleatória contínua. O momento central de ordem n $(n > 0)$ de X é definido por:

$$\mu_n = E[(X - E[X])^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^n f(x) dx. \quad (11)$$

Variância de uma variável aleatória

Definição: A variância da variável aleatória X é definida por:

$$V(X) = \sigma^2 = E[(X - E[X])^2]. \tag{12}$$

O desvio padrão é igual à raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}. \tag{13}$$

Variância de uma variável aleatória

Teorema: Seja X uma variável aleatória com valor esperado $E[X]$. Então,

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2. \tag{14}$$

Variância de uma variável aleatória

Teorema: Seja X uma variável aleatória com valor esperado $E[X]$. Então,

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2. \tag{15}$$

Para demonstrarmos esse teorema, basta expandirmos a definição

da variância:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2. \end{aligned}$$

Variância de uma variável aleatória

Exemplo: Seja a v.a. X cuja distribuição de probabilidade é dada a seguir. Calcule $V(X)$.

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,51	0,38	0,10	0,01

Variância de uma variável aleatória

Exemplo: Seja a v.a. X cuja distribuição de probabilidade é dada a seguir. Calcule $V(X)$.

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,51	0,38	0,10	0,01

Temos:

$$E[X] = 0 \times 0,51 + 1 \times 0,38 + 2 \times 0,10 + 3 \times 0,01 = 0,61,$$

$$E[X^2] = 0^2 \times 0,51 + 1^2 \times 0,38 + 2^2 \times 0,10 + 3^2 \times 0,01 = 0,87.$$

Logo,

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 0,87 - (0,61)^2 = 0,498.$$

Variância de uma variável aleatória

Exemplo: Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a variância de X.

Variância de uma variável aleatória

Solução: Vamos calcular o valor esperado de X:

$$E[X] = \int_0^1 x(x)dx + \int_1^2 x(2-x)dx = \frac{1}{3} + 3 - \frac{7}{3} = 1.$$

No caso do segundo momento estatístico de X, temos:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(x)dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx = \frac{7}{6}.$$

Assim, a variância de X é dada por:

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6}.$$

Variância

Definição: Seja $g(X)$ uma função da variável aleatória X.Então,

$$V[g(X)] = E[g(X)^2] - E[g(X)]^2. \tag{16}$$

Teorema: Seja X uma variável aleatória e a e b constantes. Então,

$$V(aX + b) = a^2 V(X). \tag{17}$$

Variância

Definição: Seja $g(X)$ uma função da variável aleatória X.Então,

$$V[g(X)] = E[g(X)^2] - E[g(X)]^2. \tag{18}$$

Teorema: Seja X uma variável aleatória e a e b constantes. Então,

$$V(aX + b) = a^2 V(X). \tag{19}$$

Usando a equação (18), onde $g(X) = aX + b$, temos:

$$\begin{aligned}
V(aX + b) &= E[(aX + b)^2] - E[aX + b]^2 \\
&= E[a^2X^2 + 2aXb + b^2] - (aE[X] + b)^2 \\
&= a^2E[X^2] + 2abE[X] + b^2 - a^2E[X]^2 - 2abE[X] - b^2 \\
&= a^2E[X^2] - a^2E[X] \\
&= a^2(E[X^2] - E[X]^2) \\
&= a^2V(X).
\end{aligned}$$

Variância

Exemplo: A variância de uma variável aleatória X é igual a $V(X) = 4$. Calcule $V(2X + 5)$.

Variância

Exemplo: A variância de uma variável aleatória X é igual a $V(X) = 4$. Calcule $V(2X+5)$.
Usando o teorema anterior, temos:

$$V(2X+5) = 2^2V(X) = 4(4) = 16.$$

Sumário

- Valor esperado
- Variância
- Momento estatístco