Introdução à teoria das probabilidades

Probabilidade condicional
o Teorema de Bayes

Francisco A. Rodrigues

Universidade de São Paulo

Probabilidade condicional

Sejam dois eventos A e B em um mesmo espaço amostral Ω. A probabilidade condicional de A dado que B ocorreu é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \tag{1}$$

É comum também escrevemos $P(A \cap B) = P(A, B)$.

Probabilidade condicional

Podemos demonstrar o teorema anterior da seguinte forma. Seja ω um elemento do espaço amostral Ω. Por exemplo, ω pode ser igual ao valor dois, observado na face de um dado, e $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vamos assumir que o evento $B \in \Omega$ é observado. Assim, podemos ter as seguintes situações:

1. $\omega \in B : P(\omega|B) = \alpha P(\omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, pois a informação sobre B pode alterar a probabilidade de ocorrência de ω. Por exemplo, se $\omega = 2$ e B representa a saída de um valor par, então a observação B aumenta a probabilidade de ocorrência de ω, isto é, $P(\omega) = 1/6$ e $P(\omega|B) = 1/3$.
2. $\omega \notin B : P(\omega|B) = 0$. Por exemplo, se B representa a saída de um número ímpar e $\omega = 2$, então a saída de B impossibilita a observação de ω.
3. $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega|B) = 1$.

Substituindo as duas primeiras relações na terceira, temos

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega|B) = 1 \implies 1 = \sum_{\omega\in B} P(\omega|B) + \sum_{\omega\notin B} P(\omega|B).$$

Mas $\sum_{\omega\notin B} P(\omega|B) = 0$,

$$1 = \sum_{\omega\in B} P(\omega|B) = \alpha \sum_{\omega\in B} P(\omega).$$

Probabilidade condicional

Além disso, $\sum_{\omega \in B} P(\omega) = P(B)$. Assim,

$$\alpha = \frac{1}{P(B)}.$$

No entanto, vimos que $P(\omega|B) = \alpha P(\omega)$. Logo,

$$\alpha = \frac{P(\omega|B)}{P(\omega)}.$$

Juntando essas duas equações anteriores, obtemos:

$$P(\omega|B) = \frac{P(\omega)}{P(B)}.$$

Para um evento geral $A \in \Omega$ e $\omega \in B$, podemos escrever:

$$P(A|B) = \sum_{\omega \in A \cap B} P(\omega|B) + \sum_{\omega \notin A \cap B} P(\omega|B).$$

O segundo termo é nulo, pois ω deve pertencer a A e B, simultaneamente, pois afirmamos que $\omega \in B$. Portanto,

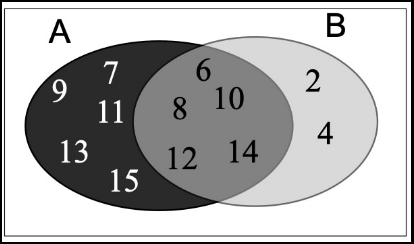
$$P(A|B) = \sum_{\omega \in A \cap B} P(\omega|B) = \sum_{\omega \in A \cap B} \frac{P(\omega)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Assim, provamos o teorema.

Probabilidade condicional

Exemplo: Calcule $P(A|B)$ onde:

- $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$,
- A : “sai um valor maior do que 5”
- B : “sai um valor par”,
- $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$.



Probabilidade condicional

Solução: Observando os conjuntos, temos que A tem dez elementos, enquanto que B possui sete:

$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{7}{15}.$$

Além disso,

$$A \cap B = \{6, 8, 10, 12, 14\}.$$

Assim,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/15}{7/15} = \frac{5}{7}.$$

Logo, a ocorrência de B aumenta a probabilidade de observação de A, isto é, $P(A|B) > P(A)$.

Probabilidade condicional

Exemplo: Uma empresa possui 100 funcionários. Alguns desses funcionários possuem curso superior (evento A), enquanto que outros, apenas o fundamental (evento B). Alguns são estagiários (evento C), enquanto que outros são efetivos (evento D). A tabela a seguir mostra a distribuição dos funcionários de acordo com essas categorias.

	A	B	Total
C	40	30	70
D	20	10	30
Total	60	40	100

Um funcionário é selecionado aleatoriamente e verifica-se que é estagiário. Qual é a probabilidade do funcionário ter curso superior?

Probabilidade condicional

Solução: Queremos calcular $P(A|C)$:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}.$$

Considerando a tabela com os dados, vemos que $P(A \cap C) = 40/100$, ou seja, essa é a fração de funcionários que possuem curso superior e são estagiários. Além disso, $P(C) = 70/100$, pois temos 40 estagiários com curso superior e 30 com ensino fundamental. Logo,

$$P(A|C) = \frac{40/100}{70/100} = \frac{4}{7} = 0,571.$$

Assim, dado que escolhemos um estagiário, a probabilidade de que ele tenha cursado o nível superior é igual 57%.

Eventos independentes

Teorema: A e B são eventos independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{2}$$

Eventos independentes

Exemplo: Suponha que dois dados são lançados. Sejam os eventos:

- A : "a soma dos dados é igual a seis".
- B : "o primeiro dado resultou no valor quatro".

Esses eventos são independentes?

Eventos independentes

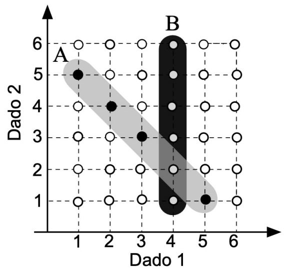
Solução: Na figura são mostrados os evento A e B. Assim,

$$P(A \cap B) = P((4,2)) = \frac{1}{36} = 0,028.$$

O produto das probabilidades associadas a cada evento,

$$P(A) \times P(B) = \frac{5}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{30}{1296} = 0,023.$$

Como $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, então podemos afirmar que A e B não são independentes. De fato, se no primeiro dado saiu o valor 4 (evento B ocorreu) então isso restringe as saídas possíveis para que o evento A seja observado. Logo, a ocorrência do evento B influencia a probabilidade de ocorrência de A.



Teorema de Bayes

- O Teorema de Bayes foi proposto pelo reverendo Thomas Bayes (1701-1761), sendo publicado apenas após sua morte, que ocorreu em 1761.
- Bayes afirmou que "*Probabilidade é uma opinião metódica e inferência de dados nada mais é do que a revisão de tal opinião com novas informações relevantes*".
- Formulação matemática: Pierre Simon, Marquês de Laplace.

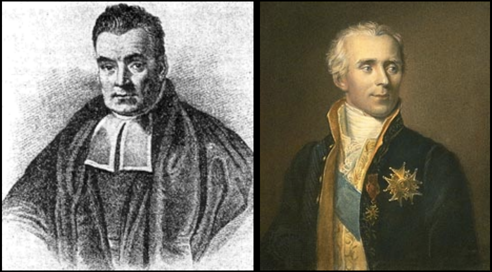
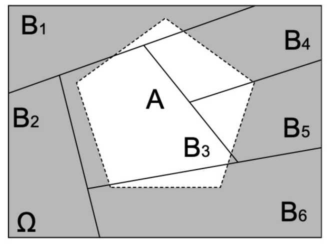


Figura: Bayes e Laplace.

Partição do espaço amostral

Definição: Os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ formam uma partição do espaço amostral se:

- $B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i, j = 1, \ldots, n,$
- $\cup_{i=1}^{n} B_i = \Omega,$
- $P(B_i) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$



Partição do espaço amostral

Teorema: Seja A um evento no espaço amostral Ω e seja $B_1, \ldots, B_n$ uma partição amostral de Ω. Podemos escrever A considerando tal partição:

$$A = \cup_{i=1}^{n} A \cap B_i. \tag{3}$$

Teorema da Probabilidade Total

Teorema: Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_n$ uma partição do espaço amostral Ω. Então, qualquer evento $A \in \Omega$ pode ser escrito como:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i). \tag{4}$$

Teorema de Bayes

Exemplo: Moedas de ouro e prata são colocas em 3 urnas, conforme a tabela a seguir.

Urna	Moedas de ouro	Moedas de prata
Urna I	4	8
Urna II	3	9
Urna III	6	6

Cada urna tem uma probabilidade de ser escolhida:

$$\begin{cases} P(I) = 1/2 \\ P(II) = 1/4 \\ P(III) = 1/4. \end{cases}$$

Qual é a probabilidade de selecionarmos uma moeda de ouro?

Teorema de Bayes

Solução: Para resolver esse problema, vamos definir o evento A como "escolhe-se uma moeda de ouro". Para retirar uma moeda de ouro, podemos selecionar qualquer uma das urnas. Ou seja, podemos escrever:

$$P(A) = P(A, I) + P(A, II) + P(A, III),$$

onde $P(A, I)$ representa a probabilidade de escolher uma moeda de ouro e a urna I. Usando probabilidade condicional, temos:

$$P(A) = P(A|I)P(I) + P(A|II)P(II) + P(A|III)P(III).$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$P(A) = \frac{4}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{12} \times \frac{1}{4} + \frac{6}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{17}{48} = 0,35.$$

Ou seja, a probabilidade de escolhermos uma moeda de ouro é igual a 35%, sendo que não indicamos qual das urnas foi a escolhida.

Teorema de Bayes

Teorema: Seja $B_1, B_2, \ldots, B_n$ uma partição do espaço amostral Ω e A um evento em Ω. Então

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

A prova desse teorema considera o teorema da probabilidade total e a probabilidade condicional. Ou seja, escrevemos:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Teorema de Bayes

Exemplo: Um laboratório que faz testes sanguíneos apresenta eficácia de 95% na detecção de uma certa doença quando, de fato, a pessoa está doente (verdadeiro positivo). A taxa de falsos positivos, ou seja, quando o teste afirma que o paciente tem a doença, embora seja saudável, é de 2%. Se 0,1% da população realmente tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha a doença dado que o teste foi positivo?

Teorema de Bayes

Solução: Vamos definir os eventos:

- A : "o paciente tem a doença",
- B : "o teste foi positivo".

Usando as informações do problema, temos:

$$P(B|A) = 0,95; \quad P(A) = 0,001; \quad P(B|A^c) = 0,02.$$

Usando o Teorema Bayes:

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \\
&= \frac{0,95 \times 0,001}{0,95 \times 0,001 + 0,02 \times 0,999} \\
&= 0,045.
\end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de que o paciente realmente esteja doente dado que o teste foi positivo é igual a 4,5%. Notem que mesmo sendo baixa, essa probabilidade é muito maior do que a probabilidade de que uma pessoa qualquer tenha a doença, que é igual a 0,1%. Logo, a positividade do teste fez a probabilidade aumentar 45 vezes.

Teorema de Bayes

Exemplo: Suponha que temos três moedas idênticas no formato, mas sendo que a primeira moeda tem duas caras, a segunda tem duas coroas e a terceira é uma moeda justa, com uma cara em uma face e uma coroa na outra. As moedas são misturadas em uma caixa. Se retiramos uma moeda e mostramos uma cara, qual é a probabilidade de que a outra face contenha uma coroa, ou seja, qual a probabilidade de que essa seja a moeda justa?

Teorema de Bayes

Solução: Vamos definir os eventos:

- CC : “a moeda tem duas caras”,
- RR : “a moeda tem duas coroas”,
- CR : “a moeda é justa”,
- C : “é mostrada uma cara”.

Usando o teorema de Bayes, a probabilidade de que a moeda é justa dado que uma cara foi mostrada é calculada por:

$$P(CR|C) = \frac{P(C|CR)P(CR)}{P(C|CR)P(CR) + P(C|CC)P(CC) + P(C|RR)P(RR)}.$$

As probabilidades são dadas por:

$$P\left(C|CR\right) = 1/2; \quad P\left(C|CC\right) = 1; \quad P\left(C|RR\right) = 0.$$

Esta última probabilidade é nula porque não podemos mostrar uma cara se a moeda tem duas coroas. Assim, substituindo os valores, temos:

$$P\left(CR|C\right) = \frac{1/2 \times 1/3}{1/2 \times 1/3 + 1 \times 1/3 + 0 \times 1/3} = \frac{1}{3}.$$

Notem que o valor mais intuitivo seria 1/2, pois se uma face da moeda escolhida contém uma cara, então essa moeda só poderia ser a moeda com duas caras ou a moeda justa. No entanto, a informação dada sobre um dos lados da moeda muda o espaço amostral e, portanto, as probabilidades.

Teorema de Bayes

Exemplo: Suponha que cinco lâmpadas perfeitas são misturadas com duas lâmpadas defeituosas, que não funcionam. Para encontrar as lâmpadas defeituosas, temos que testar uma a uma, sem substituição. Qual é a probabilidade de encontrarmos as duas lâmpadas defeituosas nos dois primeiros testes?

Teorema de Bayes

Solução: Seja o evento D_i: "selecionamos a lâmpada defeituosas no teste i". Assim, queremos calcular $P(D_1 \cap D_2)$, isto é, a probabilidade de que as duas primeiras lâmpadas apareçam nos dois primeiros testes. Usando probabilidade condicional, temos:

$$P(D_2|D_1) = \frac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1)}.$$

Portanto, como temos sete lâmpadas, sendo duas defeituosas:

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2|D_1) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{21}.$$

Notem que $P(D_2|D_1)$ é a probabilidade de selecionarmos a segunda lâmpada defeituosa dado que a primeira foi defeituosa. Portanto, se a primeira foi defeituosa, restou apenas uma lâmpada defeituosa em um total de seis.

Teorema de Bayes

Exemplo: Temos duas urnas, I e II. A urna I contém 2 bolas pretas e 3 bolas brancas. A urna II contém uma bola preta e uma bola branca. Uma urna é selecionada ao acaso, com a mesma probabilidade, e uma de suas bolas é escolhida. Dado que uma bola preta foi retirada, qual é a probabilidade de que a urna I foi escolhida?

Teorema de Bayes

Solução: A urna I contém duas bolas pretas e três bolas brancas. A urna II contém uma bola preta e uma bola branca. Vamos definir os eventos:

- I :"a urna I foi escolhida".
- A : "uma bola preta é retirada",

Assim, a probabilidade de escolhermos a urna I dado que uma bola preta foi retirada:

$$P(I|A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|I)P(I)}{P(A)},$$

mas $P(A) = P(A \cap I) + P(A \cap I^c)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap I) + P(A \cap I^c) \\ &= P(A|I)P(I) + P(A|I^c)P(I^c) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{20}, \end{aligned}$$

pois assumimos $P(I) = P(I^c) = 1/2$.

$$P(I|A) = \frac{P(A|I)P(I)}{P(A)} = \frac{2/5 \times 1/2}{9/20} = \frac{1/5}{9/20} = \frac{4}{9}.$$

Portanto, a probabilidade de que a urna I foi selecionada dado que retiramos uma bola preta é igual a 0,44.

Sumário

- Probabilidade condicional.
- Lei da probabilidade total.
- Teorema de Bayes.