**Questão 1**

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos (produzidos de forma independente um do outro) armazenados em um depósito onde, de acordo com os padrões de produção, espera-se um total de 20% de tubos defeituosos. Quando se encontram quatro ou mais tubos defeituosos, o processo de produção é interrompido para revisão. Qual é a probabilidade que isto aconteça desnecessariamente (ou seja, se a probabilidade de fabricação de um tubo defeituoso está dentro do esperado)?

Alternativas:

(a) $0,88$

(b) $0,12$

(c) $0,0016$

(d) $0,26$

(e) $0,03$

*Solução:* **Alternativa b.**

Tem-se que:

$$
\begin{aligned}
&n = 10 \\
&p = 0,2 \\
&X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o tubo é defeituoso,} \\ 0, & \text{se o tubo não é defeituoso.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Assim, pode-se definir a variável aleatória $Y$ (número de tubos defeituosos na amostra de tamanho $n = 10$) da seguinte forma:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n = 10, p = 0,2)$$

Desta forma, o que se quer calcular é:

$$P(Y \geq 4) = \sum_{y=4}^{10} \binom{10}{y} 0,2^y (1 - 0,2)^{10-y}.$$

Note que pode-se calcular de forma equivalente:

$$
\begin{aligned}
P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) &= 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)] \\
&= 1 - [0,11 + 0,26 + 0,31 + 0,20] \\
&= 1 - 0,88 = 0,12.
\end{aligned}
$$

**Questão 2**

Uma variável aleatória $X$ tem uma distribuição binomial e uma outra variável aleatória $Y$ tem distribuição de Poisson. As duas têm médias iguais a 3. É possível determinar qual variável aleatória tem maior variância?

Alternativas:

(a) Não, precisamos saber o número de ensaios de Bernoulli, $n$, para $X$.

(b) Não, precisamos saber o valor da taxa de ocorrência por unidade de tempo, $\lambda$, para $Y$.

(c) Sim, $Y$ tem uma variância maior.

(d) Sim, $X$ tem uma variância maior.

(e) Não, precisamos saber a probabilidade de sucesso, $p$, para $X$.

*Solução:* **Alternativa c.**

Tem-se que:

$$X \sim Binomial(n,p) \begin{cases} \mathbb{E}(X) & = np \\ \mathbb{V}(X) & = np(1-p) \end{cases} \qquad Y \sim Poisson(\lambda) \begin{cases} \mathbb{E}(Y) & = \lambda \\ \mathbb{V}(Y) & = \lambda \end{cases}$$

Comparando-se as variâncias, tem-se que

$$\mathbb{V}(X) \underset{np\,=\,3}{=} 3 * \underbrace{(1-p)}_{\text{probabilidade*}} < \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(Y).$$

*É um valor entre zero e um.

---

**Questão 3**

Um banco faz operações via Internet e supõe um modelo exponencial com média igual a $4/k$ para o tempo de conexão (em minutos, sendo $k = 1$ se o cliente for pessoa física e $k = 2$ se o cliente for pessoa jurídica. A porcentagem de pessoas físicas utilizando este sistema é 20%. Qual é a alternativa INCORRETA? Escolha uma:

Alternativas:

(a) O número de operações realizadas em um intervalo de uma hora possui distribuição de Poisson.

(b) A probabilidade de uma pessoa jurídica passar mais de dois minutos conectada é $0,37$.

(c) A probabilidade do tempo de conexão ser maior do que 4 minutos dado que já durou 2 minutos é diferente da probabilidade de conexão ser maior do que 2 minutos.

(d) A probabilidade de um cliente qualquer passar mais de dois minutos conectado é $0,42$.

(e) A probabilidade de uma pessoa física passar mais de dois minutos conectada é $0,61$.

*Solução:* **Alternativa c.**

Pode-se definir, segundo o problema:

$$X \sim Exponencial\left(\lambda = \frac{k}{4}\right): \text{ tempo de conexão}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{4}{k}, \begin{cases} k = 1, & \text{se pessoa física,} \\ k = 2, & \text{se pessoa jurídica.} \end{cases}$$

$$Y \sim Bernoulli(p = 0,2), \begin{cases} Y = 1, & \text{se pessoa física,} \\ Y = 0, & \text{se pessoa jurídica.} \end{cases}$$

Tem-se que:

- Em um Processo de Poisson, o número de eventos tem distribuição de Poisson e o intervalo entre os eventos tem distribuição Exponencial.
- Como a distribuição Exponencial tem falta de memória, $P(X > 4|X > 2) = P(X > 2)$.
- $P(X > 4 \cap Y = 1|X > 2) + P(X > 4 \cap Y = 0|X > 2) =$
  $= P(X > 4|X > 2, Y = 1)P(Y = 1) + P(X > 4|X > 2, Y = 0)P(Y = 0) =$
  $= P(X > 2|Y = 1)P(Y = 1) + P(X > 2|Y = 0)P(Y = 0) =$
  $= P(X > 2|Y = 1) * 0,2 + P(X > 2|Y = 0) * 0,8 =$
  $= e^{-\frac{1}{4}*2} * 0,2 + e^{-\frac{1}{2}*2} * 0,8 =$
  $= 0,61 * 0,2 + 0,37 * 0,8 =$
  $= 0,12 + 0,30 = 0,42.$

---

**Questão 4**

O tempo de vida de um certo componente (designado por $A$) é uma variável aleatória tendo distribuição normal com média $7000h$ e desvio padrão $900h$. Um concorrente desenvolveu um componente mais simples (designado por $B$), afirmando que seu tempo de vida também segue uma distribuição normal, mas com média de $6500h$ e desvio padrão de $1400h$. Componentes são adquiridos em grandes lotes e quanto maior for a proporção de componentes com tempo de vida superior a $9000h$, melhor é o lote. Sob condições descritas, qual afirmação é verdadeira? Escolha uma:

Alternativas:

(a) Não é possível afirmar qual dos dois componentes é melhor porque ambos têm probabilidade de durar mais de $9000h$.

(b) O componente $B$ é melhor porque tem maior probabilidade de durar mais de $9000h$ do que o componente $A$.

(c) O componente $A$ é melhor porque tem menor variabilidade.

(d) Não é possível afirmar qual dos dois componentes é melhor porque não sabemos o número de componentes dos lotes.

(e) Nenhuma das anteriores.

*Solução:* **Alternativa b.**

Tem-se que:

$A \sim Normal(7000, 900)$
$B \sim Normal(6500, 1400)$.

Assim, fazendo a padronização, tem-se:

$$P(A > 9000) \approx P\left(Z_A > \frac{9000 - 7000}{900}\right) = P(Z_A > 2,2) = 0,013$$
$$P(B > 9000) \approx P\left(Z_B > \frac{9000 - 6500}{1400}\right) = P(Z_B > 1,79) = 0,037,$$

isto é, a probabilidade de que o componente $B$ tenha um tempo de vida superior a $9000h$ é maior que a mesma probabilidade para o componente $A$.

---

**Questão 5**

Uma fábrica de tubos resolveu instalar uma norma de qualidade para melhorar seu processo de produção e minimizar as perdas por fabricação de tubos defeituosos. Após esse processo ter sido implantado, espera-se que a proporção de tubos fabricados com defeito caia para 10%. Para verificar tal fato, um inspetor extraiu 1000 tubos (produzidos de forma independente um do outro) e observou o número de defeituosos. Qual a probabilidade aproximada de ele encontrar mais de 110 defeituosos, se a probabilidade de fabricar um item defeituoso realmente caiu para 10%?

Alternativas:

(a) $0,10$

(b) $0,135$

(c) $0,146$

(d) $0,854$

(e) $0,456$

*Solução:* **Alternativa c.**

Pode-se definir a variável aleatória $X$ (número de tubos defeituosos na amostra de tamanho $n = 1000$) da seguinte forma:

$$X \sim Binomial(n = 1000, p = 0,1).$$

Note que $n$ é grande. Assim, usando o Teorema Central do Limite (TCL),

$$X \approx Normal(np = 100, np(1-p) = 90).$$

Fazendo a padronização, tem-se:

$$P(X > 110) \approx P\left(Z \frac{110 - 100}{\sqrt{90}}\right) = 0,146.$$

---