Aprendizado de Máquina

Aula 1: Lógica

André C. P. L. F de Carvalho
ICMC/USP
andre@icmc.usp.br

Tópicos deste módulo

- Introdução
- Notação
- Regras de inferência
- Prova de teoremas
- Conclusão

Lógica

Se todos que estudam e entendem IA são aprovados

Asdrúbal estudou e entendeu IA

Logo

Asdrúbal será aprovado

Lógica

- Origem na filosofia grega
  - Logos: razão
- Filósofos indagavam se o logos:
  - Obedecia ou não a regras
  - Possuía ou não normas, princípios e critérios para o seu funcionamento
    - Lógica

Lógica

- Criada por Aristóteles (388 AC – 322 AC)
  - Foi aluno da academia de Platão
  - Pretendia por ordem nos conceitos utilizados pelas pessoas
  - Estabeleceu uma série de normas rígidas para que conclusões ou provas pudessem ser consideradas logicamente válidas

Lógica

- Importante área da matemática
  - Atraiu grande atenção no século XIX e começo do século XX
    - Procurava achar uma linguagem matemática para discutir o mundo
  - Ainda existem vários especialistas na área, especialmente em computação
    - Utilizam lógica para resolver problemas de computação

Existem várias lógicas

- Lógica proposicional
  - Afirmações são avaliadas como verdadeiras ou falsas
- Lógica de predicados
  - Afirmações contêm variáveis que denotam objetos
- Lógica de segunda ordem
  - Permite quantificar relações entre variáveis (∃ e ∀)
- Lógica de ordem superior
  - Aplica quantificadores a predicados e tem semântica mais forte

Existem várias lógicas

- Lógica temporal
  - Leva em conta aspectos temporais
- Lógica monotônica
  - Verdade de uma afirmação pode mudar quando novas informações são obtidas
- Lógica paraconsistente
  - Permite contradições
- Lógica nebulosa (fuzzy)
  - Um conceito pode ser pouco ou muito certo
- E muitas outras

Lógica

- Lógica é uma ferramenta importante em IA
  - Base de sistemas baseados em regras
    - Representam problemas utilizando regras do tipo ***se-então***
  - Permite representar formalmente conhecimento, facilitando sua manipulação
  - Aplicações:
    - Sistemas Baseados em Conhecimento (Especialistas), Prova de Teoremas, Sistemas de Diagnóstico

Lógica

- Linguagem para representação de conhecimento
  - Vantagem: concisa e universalmente conhecida
  - Desvantagem: pode desviar a atenção da aplicação para lógica matemática
- Toda expressão lógica é composta por:
  - Sintaxe = forma
  - Semântica = significado, interpretação

Sintaxe

- Componentes léxicos:
  - Termos
  - Predicados
  - Fórmulas atômicas
  - Literais
  - Conectivos lógicos

Definições de sintaxe

- Termo (símbolo):
  - Pode ser:
    - Objeto do mundo real (constante)
    - Variável
    - Função (utiliza **termos** como argumentos e retorna **termo** como resultado)
  - Ex: casa, x, f-maior(joão, josé)

Definições de sintaxe

- Predicado: utiliza termos como argumentos e retorna valores V ou F
  - Ex: cidade ()
- Fórmula atômica ::= predicado ([termo])
  - Um ou mais termos como argumento
  - Ex: cidade (Santos), irmao(Joao, Jose)
- Literal := fórmula atômica | ¬fórmula atômica
  - Ex: ¬estado(Santos)

Definições de sintaxe

- Conectivos lógicos
  - Operadores
    - Operador de conjunção: $\wedge$
    - Operador de disjunção: $\vee$
    - Operador de implicação: $\Rightarrow$
    - Operador de negação: $\neg$
  - Precedência de avaliação: $\neg \; \Rightarrow \; (\vee \; \wedge)$

Tabelas verdade

A	B	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\neg$ A
F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	F

Tabela verdade

- Operador de implicação ($\Rightarrow$)
  - Implicação a partir de um antecedente falso implica em qualquer coisa
  - Exemplo:
    - Se a lua é redonda, então a terra é redonda (V)
    - Se a lua é redonda, então a terra é quadrada (F)
    - Se a lua é quadrada, então a terra é redonda (V)
    - Se a lua é quadrada, então a terra é quadrada (V)

Tabela de equivalência

Propriedades	Expressão 1	$\Leftrightarrow$	Expressão 2
	$A \Rightarrow B$		$\neg A \vee B$
Comutatividade	$A \vee B$		$B \vee A$
	$A \wedge B$		$B \wedge A$
Associatividade	$A \vee (B \vee C)$		$(A \vee B) \vee C$
	$A \wedge (B \wedge C)$		$(A \wedge B) \wedge C$
Distributividade	$A \vee (B \wedge C)$		$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
	$A \wedge (B \vee C)$		$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
De Morgan	$\neg(A \vee B)$		$\neg A \wedge \neg B$
	$\neg(A \wedge B)$		$\neg A \vee \neg B$
Anulação	$\neg\neg A$		A

Sintaxe

- Quantificadores
  - Quantificador universal ($\forall x(exp)$):
    - Expressão exp é verdadeira para todo valor de x
    - Ex: $\forall x$ [pena (x) $\Rightarrow$ passaro (x)]
  - Quantificador existencial ($\exists x(exp)$):
    - Expressão exp é verdadeira para pelo menos um valor de x
    - Ex: $\exists$ x [poe_ovo (x) $\wedge$ $\neg$(passaro (x))]

Sintaxe

- Componente estrutural
  - Fórmula Bem Formada (FBF): expressão formada de acordo com a gramática:
    - FBF ::= Literal | FBF $\wedge$ FBF | FBF $\vee$ FBF | $\neg$ FBF | FBF $\Rightarrow$ FBF | $\forall$x (FBF) | $\exists$x (FBF)
      - Ex: (voa (pardal) $\wedge$ pena (pardal)) $\Rightarrow$ passaro (pardal)
    - FBF é geralmente abreviado para **expressão**

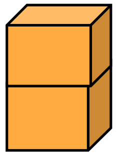
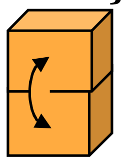
Sintaxe

- Sentença: FBF em que todas as variáveis estão no escopo de quantificadores
    - Ex: $\forall x[(voa\ (x) \wedge tem\_pena\ (x) \Rightarrow passaro(x)]$
- Cláusula: FBF formada por disjunção de literais
    - Ex: $passaro\ (pardal) \vee irmao\ (joao, maria)$

Semântica

- Relaciona termos e predicados de expressões lógicas a algo conhecido
  - Associa termos a objetos de um domínio ou mundo (real ou imaginário)
  - Associa predicados a relações de um mundo

Lógica *X* Mundo real

Lógica	Mundo real
Termos	**Objetos**
A	
B	
Predicados	**Relações**
sobre (A, B)	 Relação “sobre”

Semântica

- Modelo: interpretação para um mundo de termos e predicados de uma expressão
    - Expressão é verdadeira para objetos e relações de um mundo
- Axiomas: expressões previamente definidas como verdadeiras
    - Ex: passaro (pardal)

Teste rápido

- Qual a lógica que permite contradições?

  a) Lógica de predicados

  b) Lógica fuzzy

  c) Lógica temporal

  d) Lógica paraconsistente

Teste rápido

- Qual a lógica que permite contradições?

  a) Lógica de predicados

  b) Lógica fuzzy

  c) Lógica temporal

  d) Lógica paraconsistente

Prova de teoremas

- Teorema:
  - Expressão que pode ser provada verdadeira a partir de um conjunto de axiomas
  - Segue logicamente dos axiomas
    - Por meio de um procedimento de prova
- Procedimento de prova:
  - Aplica regras válidas de inferência aos axiomas e às expressões resultantes
- Regras válidas de inferência:
  - Produzem novas expressões a partir das expressões existentes
  - Modelo das expressões anteriores é também válido para as novas expressões

Prova de teoremas

- Inferência é um problema de busca
  - Nó inicial:
    - Informação fornecida ao procedimento de prova
  - Nó alvo ou objetivo:
    - Conclusão desejada
  - Operadores que geram sucessores de nós:
    - Aqueles que geram uma nova expressão aplicando alguma regra de inferência à sequência atual

Regras de inferência

- Utilizadas para provar teoremas
- Provar teorema é diferente de:
  - Provar que uma expressão é válida
    - Verdadeira (V) para todas as interpretações dos símbolos
  - Provar que uma expressão é satisfatória
    - Verdadeira (V) para alguma possível interpretação dos símbolos

Regras de inferência

- Regras de inferência mais utilizadas
  - Modus ponens
  - Resolução
  - Modus tolens

Modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ A \Rightarrow B \end{array}}{B}$$

Ex:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{pena (pardal)} \\ \text{pena (pardal)} \Rightarrow \text{passaro (pardal)} \end{array}}{\text{passaro (pardal)}}$$

Regra mais direta

Exercício

- Dadas as regras:
  - Quem joga lixo na rua é mal educado
  - Quem é mal educado não pode viver em sociedade
  - Quem não pode viver em sociedade deveria viver em uma caverna
  - Quem vive em uma caverna fica louco
- Provar por Modus Ponens que quem joga lixo na rua fica louco

Resolução

Ex:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{bebe (Zuzu)} \vee \text{estuda (Zuzu)} \\ \neg\ \text{estuda (Zuzu)} \vee \text{dorme (Zuzu)}\end{array}}{\text{bebe (Zuzu)} \vee \text{dorme (Zuzu)}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee \cancel{B} \\ \cancel{\neg B} \vee C\end{array}}{A \vee C}$$

resolvente

Resolução

Ex:

$$\begin{array}{c} \text{bebe (Zuzu)} \lor \text{estuda (Zuzu)} \\ \neg\ \text{estuda (Zuzu)} \lor \text{dorme (Zuzu)} \\ \hline \text{bebe (Zuzu)} \lor \text{dorme (Zuzu)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \lor \cancel{B} \\ \cancel{\neg B} \lor C \\ \hline A \lor C \end{array}$$

resolvente

Podem existir N disjunções em qualquer uma das cláusulas (inclusive nenhuma)

Resolução

A regra modus ponens é um caso especial da regra da resolução

$$
\begin{array}{l}
\text{pena (pardal)} \\
\neg\text{pena (pardal)} \vee \text{passaro (pardal)} \\
\qquad\qquad \Leftrightarrow \\
\text{pena (pardal)} \\
\text{pena (pardal)} \Rightarrow \text{passaro (pardal)}
\end{array}
$$

Modus tolens

Ex: pena (cachorro) $\Rightarrow$ passaro (cachorro)
$\neg$passaro (cachorro)

$\neg$pena (cachorro)

Regra modus tolens é um caso especial da regra da Resolução

$$\frac{\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

Resolução

Regra modus tolens é um caso especial da regra da Resolução

$$\text{pena (pardal)} \Rightarrow \text{passaro (pardal)}$$
$$\neg\ \text{passaro (pardal)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\neg\ \text{pena (pardal)} \vee \text{passaro (pardal)}$$
$$\neg\ \text{passaro (pardal)}$$

Prova de teoremas

- Estratégias para provar teoremas
  - Prova por exaustão:
    - A partir dos axiomas, aplicar regras de inferência sobre as expressões existentes
      - Esperando eventualmente deduzir o teorema
  - Prova por refutação:
    - Provar que a negação do teorema não é verdadeira

Passos para prova por refutação

1 - Assumir que a negação do teorema é verdadeira

2 - Mostrar que os axiomas juntos com a negação do teorema levam a uma contradição

3 - Concluir que a negação do teorema não pode ser verdadeira, pois leva a uma contradição

4 - Concluir que o teorema é verdadeiro porque sua negação não pode ser verdadeira

Exercício

- Dados os axiomas abaixo, prove que pardal é um pássaro utilizando prova por refutação
    - Axiomas:

      a) $\neg$ pena (pardal) $\vee$ passaro (pardal)

      b) pena (pardal)
    - Teorema:

      passaro (pardal)

Exercício

1) Assumir que a negação do teorema é verdadeira

c) ¬ passaro (pardal)

2) Mostrar contradição

2.1 ¬ pena (pardal) ∨ passaro (pardal)

pena (pardal)

---

passaro (pardal)

2.2 ¬ passaro (pardal)

passaro (pardal)

2.3 nil (cláusula vazia)

Contradição

Exercício

- Forma de reconhecer que um teorema foi provado:
  - Esperar até resolução ser aplicada a uma literal e sua negação
    - Resultado é uma cláusula vazia (nil)
    - Garante que o teorema foi provado
- Refazer o exercício 1 utilizando prova por exaustão

Exercício 2

- Dados os axiomas abaixo, provar por refutação que Asdrubal vai passar
  - Axiomas:

    a) Estuda (Asdrubal)

    b) ¬ lê (Asdrubal) ∨ sabido (Asdrubal)

    c) ¬ lê (Asdrubal) ∨ limpo (Asdrubal)

    d) ¬ sabido (Asdrubal) ∨ passa (Asdrubal)

    e) ¬ estuda (Asdrubal) ∨ lê (Asdrubal)
  - Teorema:

    passa (Asdrubal)

Exercício 3

- Dados os axiomas abaixo, prove que p é verdade usando prova por refutação
    - Axiomas:

        a) $q \wedge \neg r \Rightarrow p$

        b) $s \Rightarrow p$

        c) $\neg s \Rightarrow q$

        d) $\neg t \Rightarrow r$

        e) $\neg q$

Observações

- O que fazer para o caso abaixo?
  - $\neg \exists x[estudaIA(x) \Rightarrow reprovaIA(x)]$
- Para usar resolução, os axiomas têm que estar na forma de cláusulas
  - Necessário transformar axiomas originais em axiomas equivalentes na forma de cláusulas

Exercício 4

- Transformar para a forma de cláusulas os axiomas:
    - Um tijolo está sobre alguma coisa que não é uma pirâmide
    - Não existe nada que um tijolo esteja sobre, que esteja sobre o tijolo
    - Não existe nada que seja um tijolo e não seja um tijolo

Algoritmo para transformação

1) Eliminar implicações
2) Mover negações para fórmulas atômicas
3) Eliminar quantificadores existenciais
4) Renomear variáveis quantificadas para evitar repetição de um quantificador universal
5) Mover quantificadores universais para a esquerda
6) Mover disjunções para os literais
7) Eliminar conjunções
8) Renomear variáveis quantificadas para evitar repetição de um quantificador universal
9) Eliminar quantificadores universais

Conclusão

- Lógica
- Terminologia
- Regras de inferência
- Prova de Teoremas
    - Manipulação simbólica

Fim do módulo