Exercício 4 - Lista 2

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias com média 0 e variância σ^2.

- Qual a covariância de $X_1 + 2X_2$ e $4X_1 - 3X_2$?
- Qual é a correlação entre essas variáveis?

Solução: Sejam $U = X_1 + 2X_2$ e $V = 4X_1 - 3X_2$.

$$
\begin{aligned}
Cov(U,V) &= \mathbb{E}[UV] - \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[(X_1+2X_2)V] - \mathbb{E}[X_1+2X_2]\mathbb{E}[V] \\
&= \mathbb{E}[X_1V + 2X_2V] - \Big\{\Big[\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[2X_2]\Big]\mathbb{E}[V]\Big\} \\
&= \mathbb{E}[X_1V] + 2\mathbb{E}[X_2V] - \Big\{\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[V] + 2\mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[V]\Big\} \\
&= \mathbb{E}[X_1V] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[V] + 2\Big\{\mathbb{E}[X_2V] - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[V]\Big\} \\
&= Cov(X_1,V) + 2Cov(X_2,V)
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov(X_1,V) &= Cov(X_1, 4X_1 - 3X_2) = \mathbb{E}[X_1(4X_1 - 3X_2)] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[4X_1 - 3X_2] \\
&= \mathbb{E}[X_1 4X_1 - 3X_1X_2] - \Big\{\mathbb{E}[X_1]\Big[\mathbb{E}[4X_1] - \mathbb{E}[3X_2]\Big]\Big\} \\
&= 4\mathbb{E}[X_1X_1] + 3\mathbb{E}[X_2X_1] - \Big\{4\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_1] - 3\mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_1]\Big\} \\
&= 4\mathbb{E}[X_1X_1] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_1] - 3\Big\{3\mathbb{E}[X_2X_1] - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_1]\Big\} \\
&= 4Cov(X_1,X_1) - 3Cov(X_2,X_1)
\end{aligned}
$$

Como:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2,$$

temos que $Cov(X_1,X_1) = \mathbb{V}(X_1)$. Em particular, neste exercício,

$$Cov(X_1,X_1) = \mathbb{E}[X_1X_1] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_1] \overset{\mathbb{E}[X_1]=0}{=} \mathbb{E}[X_1^2]$$

Além disso X_1 e X_2 são independentes e portanto, $Cov(X_2,X_1) = 0$, então:

$$Cov(X_1,V) = 4\mathbb{V}(X_1) \tag{2}$$

Temos também que,

$$
\begin{aligned}
Cov(X_2,V) &= Cov(X_2, 4X_1 - 3X_2) = \mathbb{E}[X_2(4X_1 - 3X_2)] - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[4X_1 - 3X_2] \\
&= \mathbb{E}[X_2 4X_1 - 3X_2X_2] - \Big\{\mathbb{E}[X_2]\Big[\mathbb{E}[4X_1] - \mathbb{E}[3X_2]\Big]\Big\} \\
&= 4\mathbb{E}[X_2X_1] + 3\mathbb{E}[X_2X_2] - \Big\{4\mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_1] - 3\mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_2]\Big\} \\
&= 4\mathbb{E}[X_2X_1] - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_1] - 3\Big\{3\mathbb{E}[X_2X_2] - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_2]\Big\} \\
&= Cov(X_2,X_1) - 3Cov(X_2,X_2)
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, $Cov(X_2,X_2) = \mathbb{V}(X_2)$ e $Cov(X_1,X_2) = 0$ e portanto,

$$Cov(X_2,V) = -3\mathbb{V}(X_2) \tag{3}$$

Substituindo (2) e (3) em (1), temos:

$$Cov(U,V) = Cov(X_1,V) + 2Cov(X_2,V) = 4\mathbb{V}(X_1) + 2[-3\mathbb{V}(X_2)] = 4\sigma^2 - 6\sigma^2 = -2\sigma^2$$

Correlação

Para calcular a correlação de U e V, precisamos das respectivas variâncias que são dadas por:

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(X_1 + 2X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(2X_2) + 2Cov(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1) + 4\mathbb{V}(X_2) = 5\sigma^2 \tag{4}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(V) &= \mathbb{V}(4X_1 - 3X_2) = \mathbb{V}(4X_1) + \mathbb{V}(3X_2) - 2Cov(4X_1, 3X_2) \\ &= 16\mathbb{V}(X_1) + 9\mathbb{V}(X_2) = 16\sigma^2 + 9\sigma^2 = 25\sigma^2 \end{aligned} \tag{5}$$

E portanto,

$$Corr(U, V) = \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{\mathbb{V}(U)\mathbb{V}(V)}} = \frac{-2\sigma^2}{\sqrt{5\sigma^2 25\sigma^2}} = -\frac{2}{5\sqrt{5}}$$