Aula4_1_Modelos_ARIMA_SARIMA

August 5, 2020

1 Modelos ARIMA, SARIMA. Diagnóstico.

por **Cibele Russo**

Baseado em

- Moretting, P.A.; Toloi, C.M.C. "Análise de Séries Temporais". Blucher, 2004.
- Ehlers, R.S. (2009) Análise de Séries Temporais, http://www.icmc.usp.br/~ehlers/stemp/stemp.pdf. Acessado em 28/06/2020.

Implementações: - Brownlee, Jason. Introduction to time series forecasting with python: how to prepare data and develop models to predict the future. Machine Learning Mastery, 2017.

Leituras adicionais:

- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2018). Forecasting: principles and practice. OTexts.
- https://otexts.com/fpp2/non-seasonal-arima.html
- https://otexts.com/fpp2/seasonal-arima.html

Vamos fazer uma pequena revisão da aula anterior?

Sejam

- $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$
- $B^m Z_t = Z_{t-m}$ (Operador translação (defasagem, backshift))
- $F^m Z_t = Z_{t+m}$ (Operador translação para o futuro (forward))
- $\Delta = (1 - B)$ (Operador diferença)
- $SZ_t = (1 - B)^{-1} Z_t = \Delta^{-1} Z_t$ (Operador soma)

1.1 Modelos autorregressivos - AR(p)

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t$$

onde a_t é um ruído branco.

Sendo o operador autorregressivo estacionário de ordem p dado por

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p,$$

podemos reescrever o modelo AR(p) como

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

1.2 Modelos de médias móveis - MA(q)

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q) a_t$$

Assim

$$\tilde{Z}_t = \theta(B) a_t$$

onde $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$ é o operador de médias móveis de ordem q.

1.3 Modelos ARMA(p,q)

Os modelos ARMA(p,q) são dados na forma

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

ou podemos reescrever

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = \theta(B) a_t$$

em que

- $\phi(B)$ é o operador autorregressivo
- $\theta(B)$ é o operador de médias móveis

2 Modelos ARIMA (p,d,q)

Componentes de um modelo ARIMA (p,d,q):

- **AR (p)**: Componentes autorregressivas, utilizam a relação de dependência entre a observação corrente e as observações em um período prévio
- **Integrado (d)**: Diferenças para tornar a série estacionária
- **MA (q)**: Componentes de médias móveis, utilizam a dependência entre uma obervação e um erro residual de um modelo de média móvel aplicado a observações em atraso.

Considere que Z_t não é estacionária mas

$$W_t = \Delta^d Z_t$$

é uma série estacionária e utilizamos portanto um modelo ARMA(p,q) para W_t, ou seja,

$$\phi(B) W_t = \theta(B) a_t.$$

Se W_t for uma diferença de Z_t, então dizemos que Z_t segue um modelo autorregressivo *integrado* de médias móveis, ou um modelo ARIMA:

$$\phi(B) \Delta^d Z_t = \theta(B) a_t$$

de ordem (p,d,q) e escrevemos ARIMA (p,d,q) em que p e q são as ordens de $\phi(B)$ e $\theta(B)$, respectivamente.

3 Modelos SARIMA (p,d,q)x(P, D,Q)m

- **SARIMA: ARIMA com sazonalidade**
- Componente sazonal se repete a cada m observações ($m > 1$).
- Com dados mensais e $m = 12$, tipicamente espera-se que Z_t dependa de Z_{t-12} e talvez Z_{t-24} além de $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots$
- Tomar a primeira diferença $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$ não é suficiente para tornar a série (aproximadamente) estacionária.
- Considere as diferenças sazonais

  $$\Delta_m Z_t = (1 - B^m) Z_t = Z_t - Z_{t-m}$$

  sendo m o periodo da sazonalidade.
- A D-ésima diferença sazonal é denotada por Δ_m^D.
- Combinando-se diferenciação simples e sazonais obtem-se o operador $\Delta^d \Delta_m^D$.

Componentes de um modelo SARIMA (p,d,q)x(P,D,Q)m:

- (p, d, q): componentes não-sazonais
- $(P, D, Q)_m$: componentes sazonais

Aqui m é o período da sazonalidade.

$$\phi(B) \Phi(B^m) W_t = \theta(B) \Theta(B^m) a_t$$

onde

- $\phi(B) = (1 - \alpha_1 B - \ldots \alpha_p B^p)$

- $\Phi(B^m) = (1 - \phi_1 B^m - \ldots - \phi_p B^{P_m})$
- $W_t = \Delta^d \Delta^D Z_t = (1-B)^d (1-B^m)^D Z_t$
- $\theta(B) = (1 + \beta_1 B + \ldots + \beta_q B^q)$
- $\Theta(B^m) = (1 + \theta_1 B^m + \ldots + \theta_Q B^{Q_m})$

Exemplo: Série mensal com 1 diferença simples e 1 sazonal com período 12

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta_{12} Z_t &= (1-B)(1-B^{12})Z_t \\
&= (1 - B - B^{12} + B^{13})Z_t \\
&= Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13}
\end{aligned}$$

Exemplo: Modelo SARIMA(1,0,0) $\times$ $(0,1,1)_{12}$

$$\begin{aligned}
(1-\phi B)(1-B^{12})Z_t &= (1-\theta B^{12})a_t \\
Z_t &= Z_{t-12} + \phi(Z_{t-1} - Z_{t-13}) + a_t - \theta a_{t-12}
\end{aligned}$$

Observações

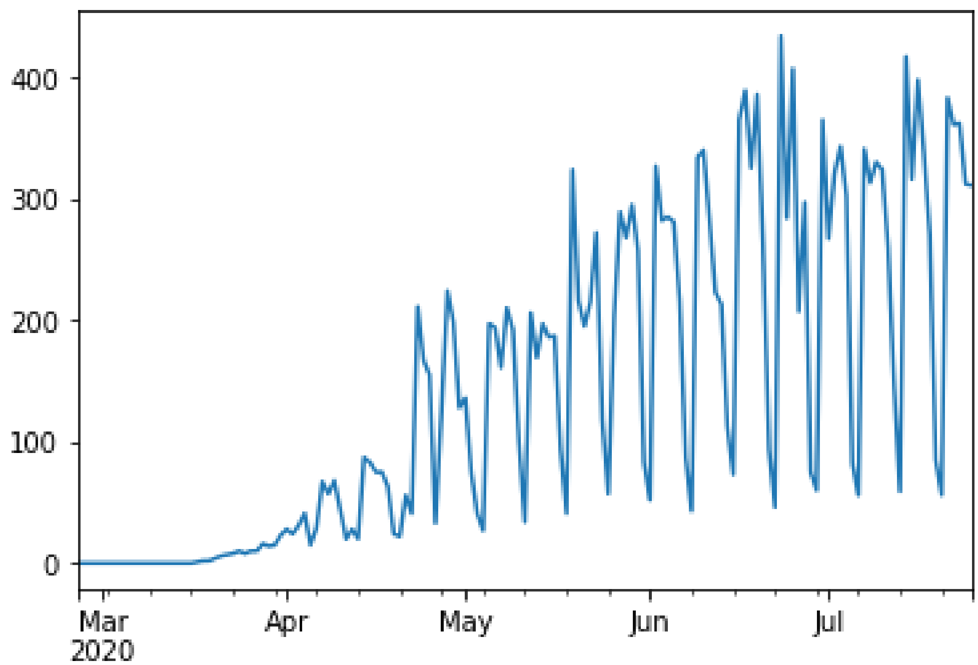
- Na prática os valores de d e D em geral não serão muito maiores do que 1 e um número pequeno de coeficientes será suficiente.
- Especificar os valores de d e D que tornam a série (aproximadamente) estacionária e remove a maior parte da sazonalidade.
- Os valores de p, P, q e Q devem ser especificados com base nas funções de autocorrelação e autocorrelação parcial da série diferenciada.
- Os valores de P e Q são especificados basicamente olhando-se para as defasagens $k = m, 2m, \ldots$.

3.1 Aplicação

[1]:
```
import pandas as pd
import numpy as np
%matplotlib inline

from statsmodels.tsa.statespace.sarimax import SARIMAX

from statsmodels.graphics.tsaplots import plot_acf,plot_pacf
from statsmodels.tsa.seasonal import seasonal_decompose
from pmdarima import auto_arima

# Ignorar warnings não prejudiciais
import warnings
warnings.filterwarnings("ignore")

np.random.seed(0)

pkgdir = '/home/cibele/CibelePython/AprendizadoDinamico/Data'
```

```
# Leitura dos dados de COVID-19 no estado de SP - vamos trabalhar com as mortes
covidSP = pd.read_csv(f'{pkgdir}/covidSP.csv', index_col='date',␣
 ↪parse_dates=True)

idx = pd.date_range(start=covidSP.index.min(), end=covidSP.index.max(), freq='D')
covidSP = covidSP.reindex(idx)
covidSP.fillna(0,inplace=True)

covidSP['deaths'].plot()
```

[1]: <matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot at 0x7f47e4184190>

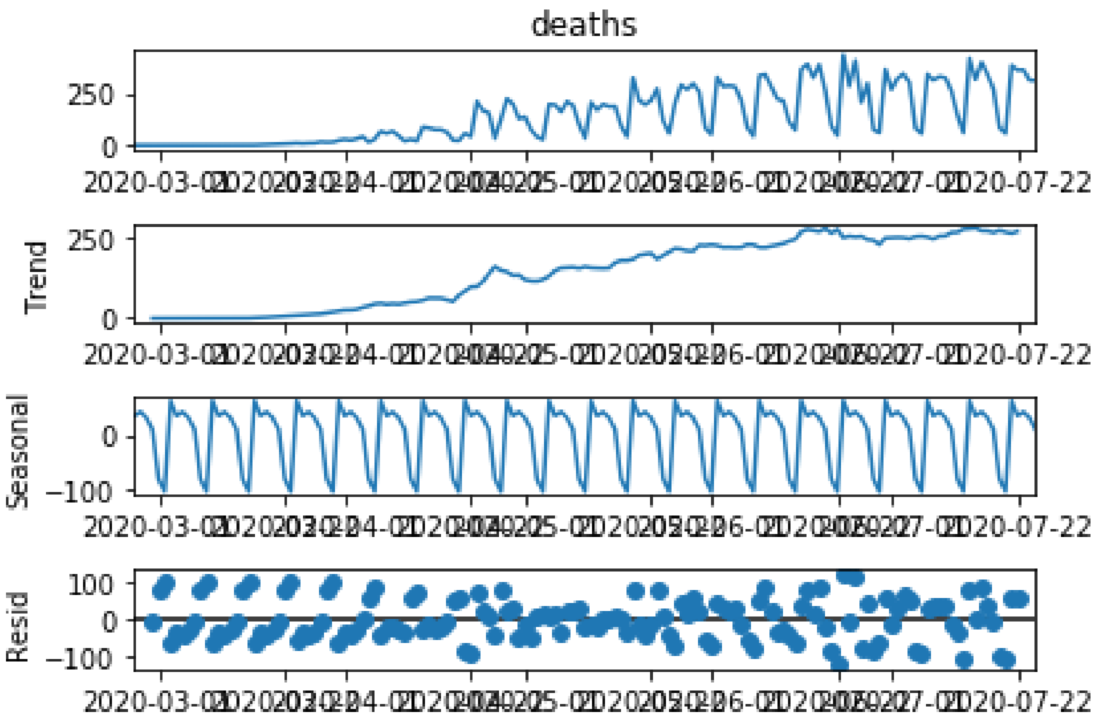


[2]:
```
covidSP.index.max()
```

[2]: Timestamp('2020-07-25 00:00:00', freq='D')

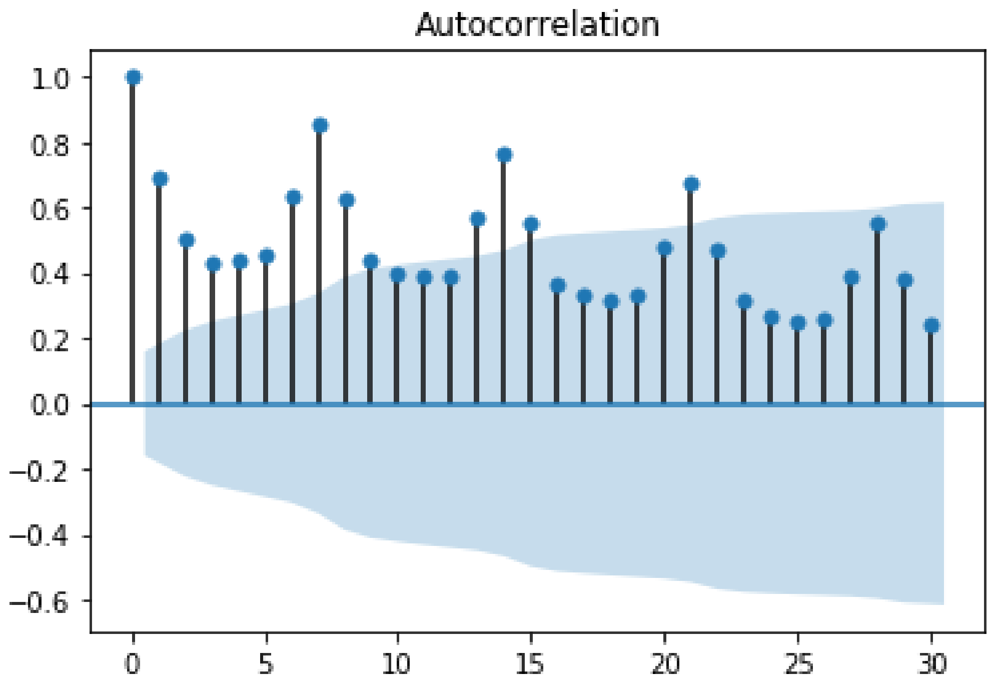
Vamos considerar a decomposição em sazonalidade e tendência em um modelo aditivo, nesse caso porque temos muitos zeros.

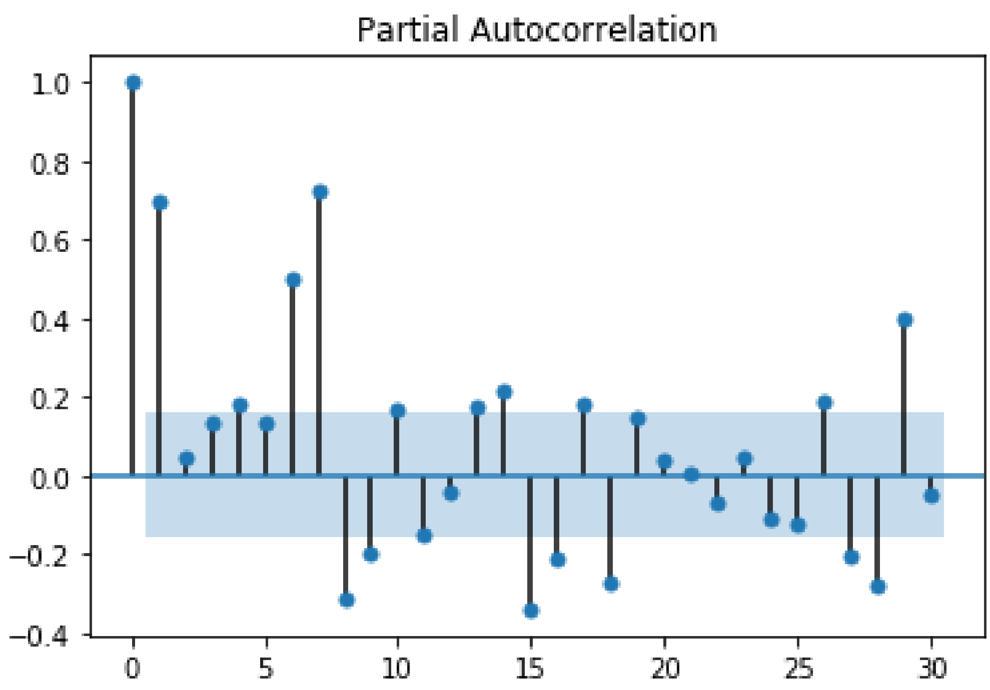
[3]:
```
result = seasonal_decompose(covidSP['deaths'], model='additive')
result.plot();
```



Aparentemente há sazonalidade nos dados, devido à sistemática de notificações

[4]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from statsmodels.graphics.tsaplots import plot_acf,plot_pacf # para determinar␣
 ↪(p,q)

# Correlograma

plot_acf(covidSP['deaths'], lags=30)
plot_pacf(covidSP['deaths'], lags=30)
plt.show()
```





[5]:
```
# Ajuste de modelo SARIMA
```

```python
auto_arima(covidSP['deaths'],seasonal=True,m=7).summary()


stepwise_fit = auto_arima(covidSP['deaths'], start_p=0, start_q=0,
                          max_p=6, max_q=3, m=7,
                          seasonal=True,
                          trace=True,
                          error_action='ignore',
                          suppress_warnings=True,
                          stepwise=True)

stepwise_fit.summary()
```

```
Performing stepwise search to minimize aic
Fit ARIMA(0,0,0)x(1,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1503.140, BIC=1515.019,
Time=0.202 seconds
Fit ARIMA(0,0,0)x(0,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1546.346, BIC=1552.285,
Time=0.022 seconds
Fit ARIMA(1,0,0)x(1,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1506.697, BIC=1518.577,
Time=0.217 seconds
Fit ARIMA(0,0,1)x(0,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1504.764, BIC=1516.643,
Time=0.190 seconds
Fit ARIMA(0,0,0)x(0,1,0,7) [intercept=False]; AIC=1553.312, BIC=1556.281,
Time=0.010 seconds
Fit ARIMA(0,0,0)x(0,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1505.935, BIC=1514.844,
Time=0.117 seconds
Fit ARIMA(0,0,0)x(1,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1506.823, BIC=1515.733,
Time=0.296 seconds
Fit ARIMA(0,0,0)x(2,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1501.191, BIC=1516.040,
Time=0.571 seconds
Fit ARIMA(0,0,0)x(2,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1500.211, BIC=1512.091,
Time=0.373 seconds
Fit ARIMA(1,0,0)x(2,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1497.094, BIC=1511.944,
Time=0.512 seconds
Fit ARIMA(1,0,0)x(2,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1498.545, BIC=1516.364,
Time=0.713 seconds
Fit ARIMA(1,0,0)x(1,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1500.782, BIC=1515.631,
Time=0.338 seconds
Fit ARIMA(2,0,0)x(2,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1495.055, BIC=1512.874,
Time=0.724 seconds
Fit ARIMA(2,0,0)x(1,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1502.469, BIC=1517.319,
Time=0.313 seconds
Fit ARIMA(2,0,0)x(2,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1496.087, BIC=1516.875,
Time=0.956 seconds
Fit ARIMA(2,0,0)x(1,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1498.097, BIC=1515.916,
Time=0.371 seconds
Fit ARIMA(3,0,0)x(2,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1491.535, BIC=1512.324,
```

```
Time=0.798 seconds
Fit ARIMA(3,0,0)x(1,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1496.157, BIC=1513.976,
Time=0.464 seconds
Fit ARIMA(3,0,0)x(2,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1492.478, BIC=1516.237,
Time=1.040 seconds
Fit ARIMA(3,0,0)x(1,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1493.818, BIC=1514.606,
Time=0.522 seconds
Fit ARIMA(4,0,0)x(2,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1488.717, BIC=1512.476,
Time=1.013 seconds
Fit ARIMA(4,0,0)x(1,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1493.623, BIC=1514.412,
Time=0.419 seconds
Fit ARIMA(4,0,0)x(2,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1490.135, BIC=1516.864,
Time=1.496 seconds
Fit ARIMA(4,0,0)x(1,1,1,7) [intercept=True]; AIC=1490.818, BIC=1514.577,
Time=0.671 seconds
Fit ARIMA(5,0,0)x(2,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1490.106, BIC=1516.835,
Time=1.150 seconds
Fit ARIMA(4,0,1)x(2,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1488.725, BIC=1515.453,
Time=1.636 seconds
Fit ARIMA(3,0,1)x(2,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1490.816, BIC=1514.575,
Time=1.214 seconds
Fit ARIMA(5,0,1)x(2,1,0,7) [intercept=True]; AIC=1490.307, BIC=1520.005,
Time=2.158 seconds
Total fit time: 18.537 seconds
```

[5]:
```
<class 'statsmodels.iolib.summary.Summary'>
"""
                                     SARIMAX Results
================================================================================
=========
Dep. Variable:                                   y   No. Observations:
151
Model:             SARIMAX(4, 0, 0)x(2, 1, 0, 7)   Log Likelihood
-736.359
Date:                             Tue, 28 Jul 2020   AIC
1488.717
Time:                                     14:27:29   BIC
1512.476
Sample:                                          0   HQIC
1498.371
                                             - 151
Covariance Type:                               opg
===============================================================================
                 coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
-------------------------------------------------------------------------------
intercept     16.9028      5.491      3.078      0.002       6.140      27.665
ar.L1          0.2212      0.072      3.065      0.002       0.080       0.363
```

```
ar.L2          0.1651      0.071      2.325      0.020       0.026       0.304
ar.L3         -0.2270      0.086     -2.652      0.008      -0.395      -0.059
ar.L4          0.1806      0.075      2.412      0.016       0.034       0.327
ar.S.L7       -0.6434      0.073     -8.836      0.000      -0.786      -0.501
ar.S.L14      -0.2184      0.095     -2.288      0.022      -0.406      -0.031
sigma2      1579.5096    162.146      9.741      0.000    1261.709    1897.310
================================================================================
===
Ljung-Box (Q):                       31.23   Jarque-Bera (JB):
14.88
Prob(Q):                              0.84   Prob(JB):
0.00
Heteroskedasticity (H):               8.88   Skew:
0.49
Prob(H) (two-sided):                  0.00   Kurtosis:
4.23
================================================================================
===

Warnings:
[1] Covariance matrix calculated using the outer product of gradients (complex-
step).
"""
```

[6]:
```
len(covidSP)
```

[6]: 151

[7]:
```
len(covidSP)*0.8
```

[7]: 120.80000000000001

[19]:
```
# Set one year for testing
treino = covidSP.iloc[:120]
teste = covidSP.iloc[120:]
```

[20]:
```
modelo = SARIMAX(treino['deaths'],order=(4,0,0),seasonal_order=(2,1,0,7))
resultado = modelo.fit()
resultado.summary()
```

[20]:
```
<class 'statsmodels.iolib.summary.Summary'>
"""
                                     SARIMAX Results
================================================================================
=========
Dep. Variable:                            deaths   No. Observations:
120
```

```
Model:              SARIMAX(4, 0, 0)x(2, 1, 0, 7)   Log Likelihood
-579.563
Date:                            Tue, 28 Jul 2020   AIC
1173.126
Time:                                    14:28:28   BIC
1192.218
Sample:                                02-26-2020   HQIC
1180.874
                                     - 06-24-2020
Covariance Type:                              opg
==============================================================================
                 coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
ar.L1          0.4488      0.086      5.195      0.000       0.279       0.618
ar.L2          0.0923      0.095      0.969      0.332      -0.094       0.279
ar.L3         -0.1258      0.114     -1.100      0.271      -0.350       0.098
ar.L4          0.3270      0.082      3.978      0.000       0.166       0.488
ar.S.L7       -0.6338      0.084     -7.569      0.000      -0.798      -0.470
ar.S.L14      -0.2600      0.090     -2.901      0.004      -0.436      -0.084
sigma2      1614.8275    162.428      9.942      0.000    1296.474    1933.181
================================================================================
===
Ljung-Box (Q):                       39.78   Jarque-Bera (JB):
22.69
Prob(Q):                              0.48   Prob(JB):
0.00
Heteroskedasticity (H):              24.88   Skew:
0.53
Prob(H) (two-sided):                  0.00   Kurtosis:
4.92
================================================================================
===

Warnings:
[1] Covariance matrix calculated using the outer product of gradients (complex-
step).
"""
```

[21]:
```
# Obtain predicted values
inicio=len(treino)
fim=len(treino)+len(teste)-1
previsões = resultado.predict(start=inicio, end=fim, dynamic=False,␣
 ↪typ='levels').rename('Previsões SARIMA(4,0,0)(2,1,0,7) ')
previsões.index = teste.index
```

[22]:
```
previsões
```

[22]:
```
2020-06-25    281.647730
2020-06-26    269.846630
2020-06-27    254.587739
2020-06-28     89.881562
2020-06-29     51.072325
2020-06-30    367.430604
2020-07-01    339.439646
2020-07-02    295.031000
2020-07-03    300.278990
2020-07-04    240.853932
2020-07-05     95.737342
2020-07-06     52.655518
2020-07-07    390.979550
2020-07-08    329.437368
2020-07-09    296.509061
2020-07-10    309.765052
2020-07-11    250.767011
2020-07-12     92.099081
2020-07-13     49.569630
2020-07-14    392.552129
2020-07-15    320.817755
2020-07-16    291.543211
2020-07-17    295.396052
2020-07-18    247.608194
2020-07-19     92.531794
2020-07-20     50.791342
2020-07-21    385.166447
2020-07-22    328.629830
2020-07-23    294.094592
2020-07-24    301.846078
2020-07-25    246.872410
Freq: D, Name: Previsões SARIMA(4,0,0)(2,1,0,7) , dtype: float64
```

Passar dynamic = False significa que as previsões em cada ponto são geradas usando o histórico completo até aquele ponto (todos os valores defasados).

Passar typ = 'levels' prevê os níveis das variáveis endógenas originais. Se tivéssemos usado o padrão typ = 'linear' , teríamos visto previsões lineares em termos de variáveis endógenas diferenciadas.

Para obter mais informações sobre esses argumentos, visite https://www.statsmodels.org/stable/generated/statsmodels.tsa.arima_model.ARIMAResults.predict.html

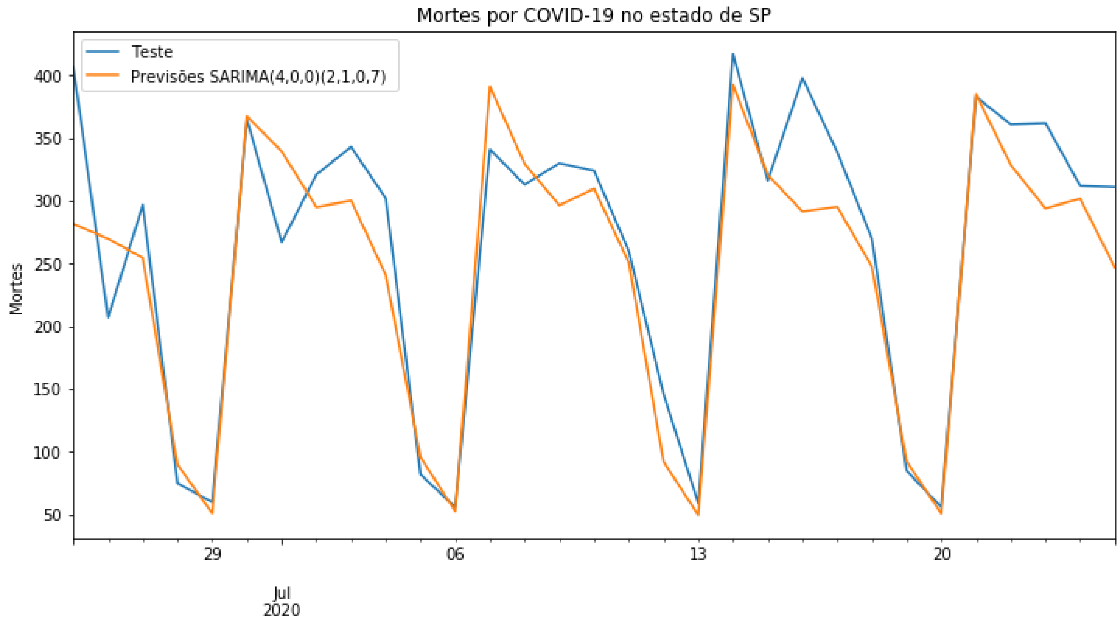
[23]:
```
for i in range(len(previsões)):
    print(f"predicted={previsões[i]:<11.10}, expected={teste['deaths'][i]}")
```

```
predicted=281.6477298, expected=407.0
predicted=269.8466302, expected=207.0
predicted=254.5877393, expected=297.0
```

```
predicted=89.88156203, expected=75.0
predicted=51.07232507, expected=60.0
predicted=367.4306045, expected=365.0
predicted=339.4396462, expected=267.0
predicted=295.0309998, expected=321.0
predicted=300.2789901, expected=343.0
predicted=240.8539324, expected=302.0
predicted=95.73734246, expected=82.0
predicted=52.65551772, expected=56.0
predicted=390.9795502, expected=341.0
predicted=329.4373678, expected=313.0
predicted=296.5090613, expected=330.0
predicted=309.7650522, expected=324.0
predicted=250.7670109, expected=260.0
predicted=92.0990814 , expected=146.0
predicted=49.56962993, expected=59.0
predicted=392.5521292, expected=417.0
predicted=320.8177552, expected=316.0
predicted=291.5432112, expected=398.0
predicted=295.3960515, expected=339.0
predicted=247.608194 , expected=270.0
predicted=92.53179371, expected=85.0
predicted=50.79134169, expected=56.0
predicted=385.1664472, expected=383.0
predicted=328.6298295, expected=361.0
predicted=294.0945923, expected=362.0
predicted=301.8460781, expected=312.0
predicted=246.8724104, expected=311.0
```

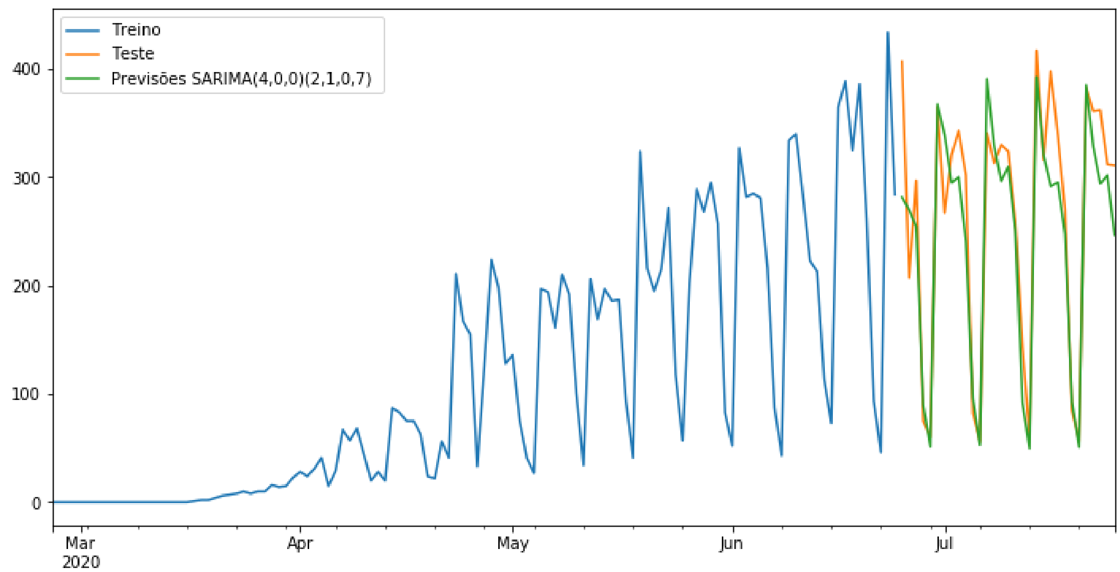
[24]:

```
# Plot predictions against known values
title = 'Mortes por COVID-19 no estado de SP'
ylabel='Mortes '
xlabel=''

ax = teste['deaths'].plot(legend=True,figsize=(12,6),title=title, label='Teste')
previsões.plot(legend=True)

ax.autoscale(axis='x',tight=True)
ax.set(xlabel=xlabel, ylabel=ylabel);
```



[25]:
```
treino['deaths'].plot(legend=True, label='Treino')
teste['deaths'].plot(legend=True, label='Teste')
previsões.plot(legend=True, figsize=(12,6))
```

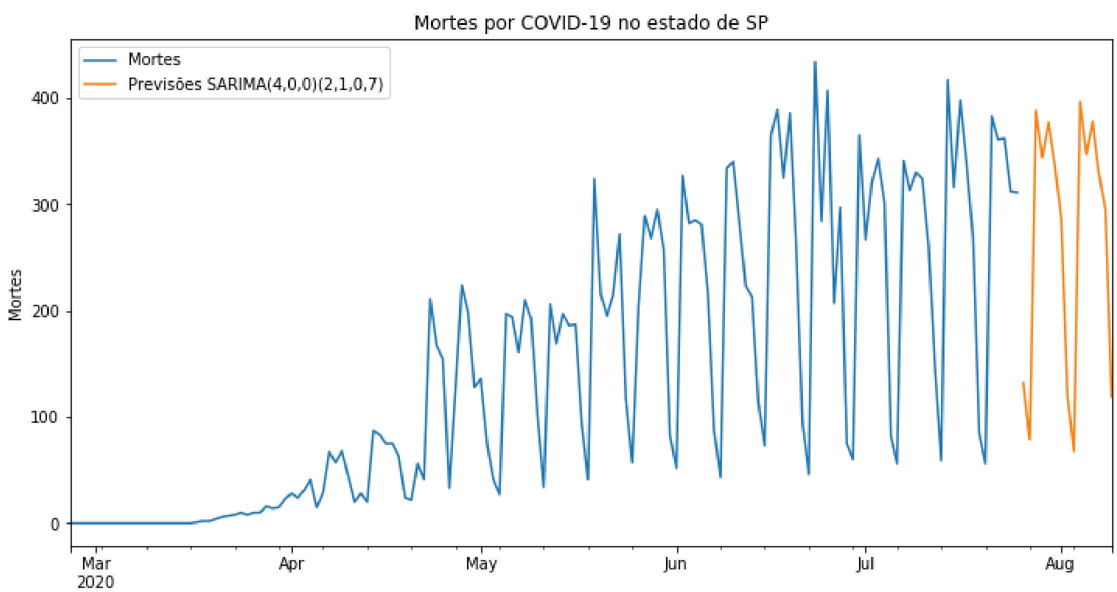
[25]: <matplotlib.axes._subplots.AxesSubplot at 0x7f47dbacd710>



3.1.1 Previsões para dados cujos tempos ainda não estão nas bases

[37]:
```
modelo = SARIMAX(covidSP['deaths'],order=(4,0,0),seasonal_order=(2,1,0,7))
resultados = modelo.fit()
fcast = resultados.predict(len(covidSP),len(covidSP)+14,typ='levels').
 ↪rename('Previsões SARIMA(4,0,0)(2,1,0,7)')
```

[27]:
```
title = 'Mortes por COVID-19 no estado de SP'
ylabel='Mortes'
xlabel=''

ax = covidSP['deaths'].plot(legend=True,figsize=(12,6),title=title,␣
 ↪label='Mortes')
fcast.plot(legend=True)
ax.autoscale(axis='x',tight=True)
ax.set(xlabel=xlabel, ylabel=ylabel);
```



Exercício: É possível melhorar as previsões para os dados de PETR4 com o SARIMA sazonal?

3.2 Diagnóstico em modelos SARIMA

3.2.1 Métricas

[32]:
```
from sklearn.metrics import mean_squared_error

error = mean_squared_error(teste['deaths'], previsões)
print(f'EQM SARIMA(4,0,0)(2,1,0,7): {error:11.10}')
```

```
EQM SARIMA(4,0,0)(2,1,0,7):  2095.03279
```

[33]:
```
from statsmodels.tools.eval_measures import rmse

error = rmse(teste['deaths'], previsões)
print(f'REQM SARIMA(4,0,0)(2,1,0,7): {error:11.10}')
```

```
REQM SARIMA(4,0,0)(2,1,0,7): 45.77152816
```

3.2.2 Análise de resíduos

Considere inicialmente um modelo ARIMA

$$\phi(B)W_t = \theta(B)a_t$$

com $W_t = \Delta^d Z_t$ supondo que a_t é um ruído branco.

Se o modelo for verdadeiro, então os erros verdadeiros $a_t = \theta^{-1}(B)\phi(B)W_t$ devem ser um ruído branco.

Uma análise equivalente poderia ser feita para modelos mais gerais SARIMA.

Quando o modelo é estimado, ou seja, quando são obtidos $\widehat{\phi}$ e $\widehat{\phi}$, as quantidades

$$\widehat{a}_t = \widehat{\theta}^{-1}(B)\widehat{\phi}(B)W_t$$

são chamadas de **resíduos**. Se o modelo for correto, eles devem ser aproximadamente não correlacionados.

Uma forma de analisar os resíduos ajustados é simplesmente considerar

$$r_t = Z_t - \widehat{Z}_t$$

e podemos analisar a distribuição, estatísticas descritivas, a autocorrelação dos resíduos e verificar se existe algum padrão nos mesmos.

Leitura adicional: https://otexts.com/fpp2/residuals.html

[42]:
```
# Uma forma de obter os resíduos pelo ajuste do modelo

resíduos = resultados.resid
```

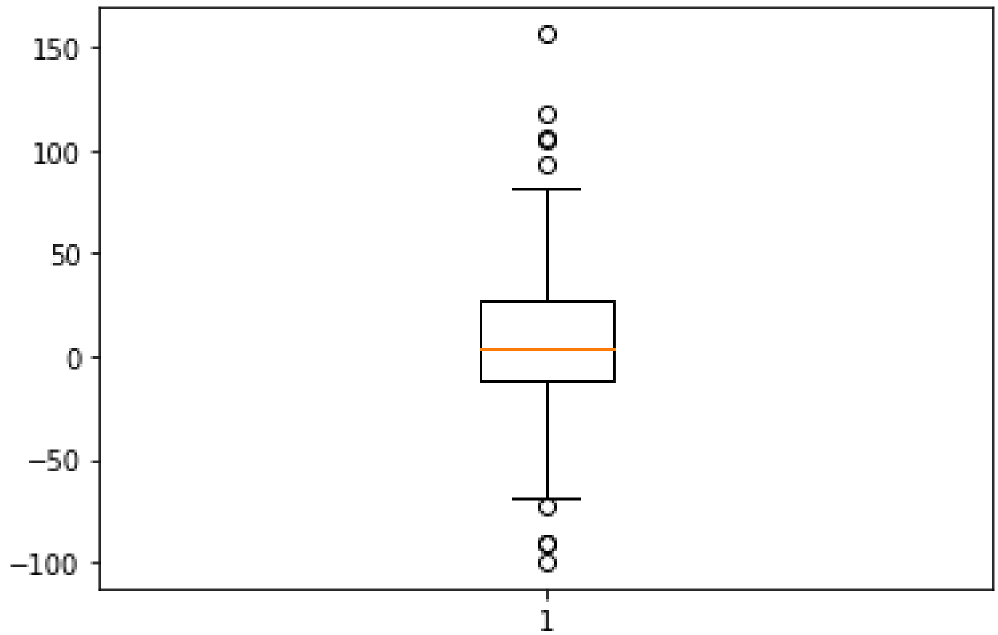
[43]:
```
resíduos.describe()
```

[43]:
```
count    151.000000
mean       7.862332
std       39.791391
min      -99.803076
25%      -11.536740
50%        3.228347
75%       27.442638
max      156.477289
```

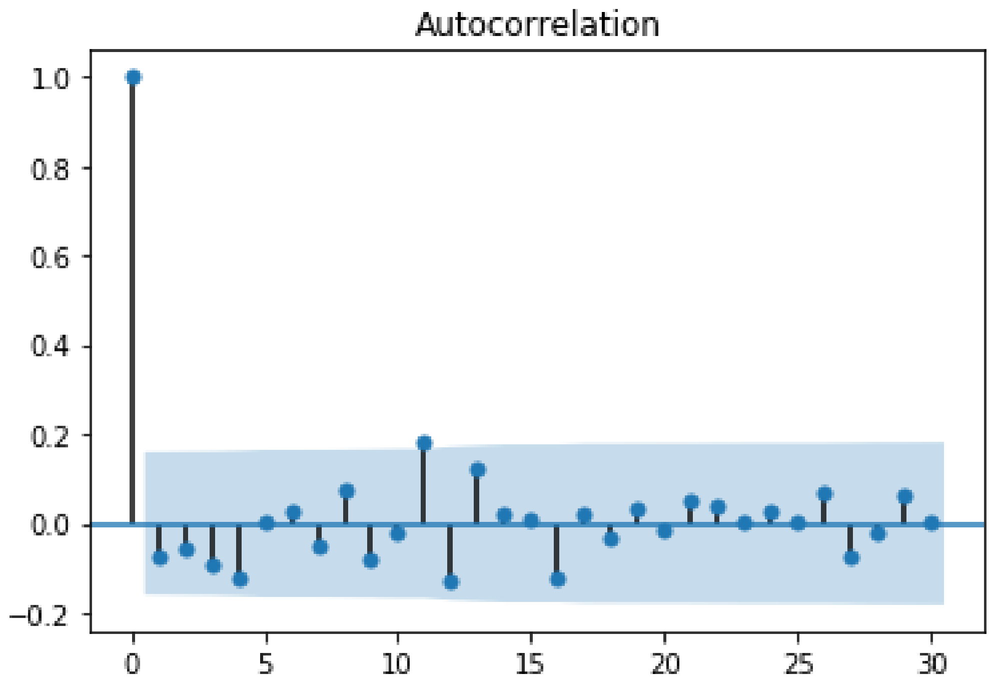
```
dtype: float64
```

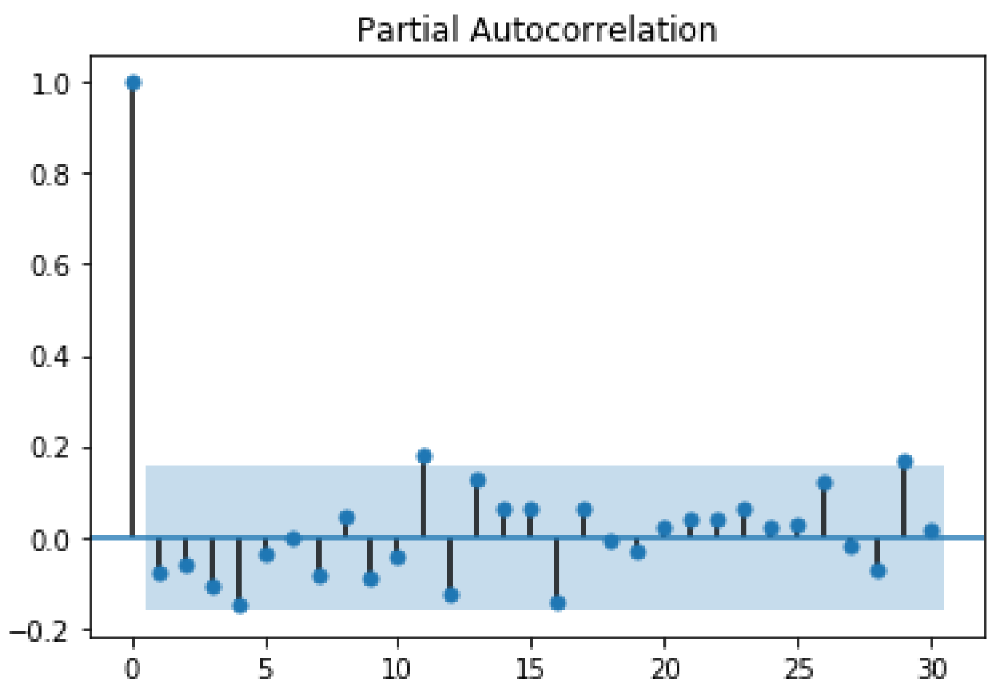
[44]:
```python
plt.boxplot(resíduos)
```

[44]:
```
{'whiskers': [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f47d97af890>,
  <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f47d97afdd0>],
 'caps': [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f47d956da50>,
  <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f47d939f810>],
 'boxes': [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f47d956dc10>],
 'medians': [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f47d939fd50>],
 'fliers': [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f47d97afe50>],
 'means': []}
```



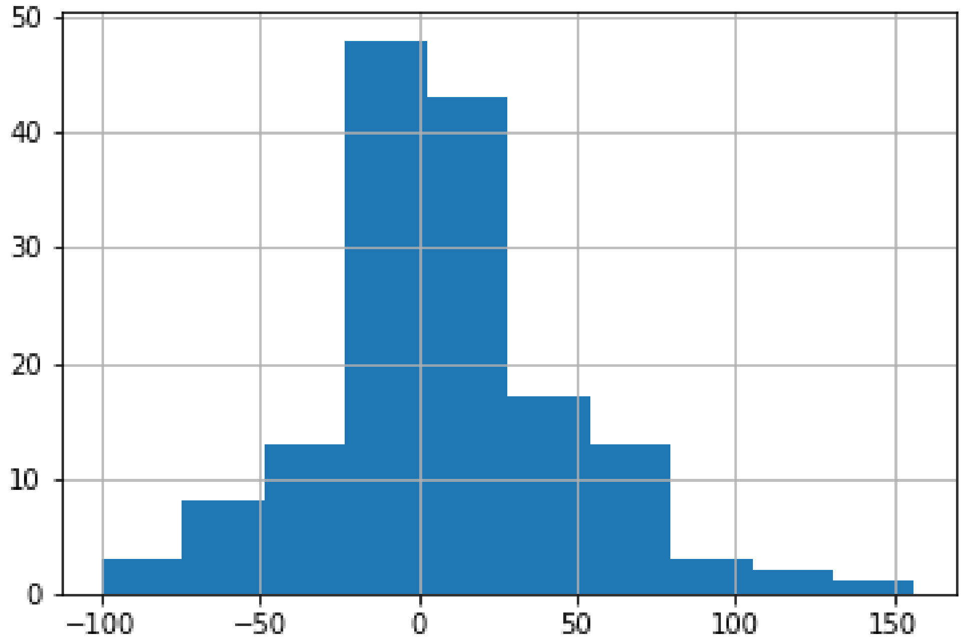
[45]:
```python
plot_acf(resíduos, lags=30)
plot_pacf(resíduos, lags=30)
plt.show()
```

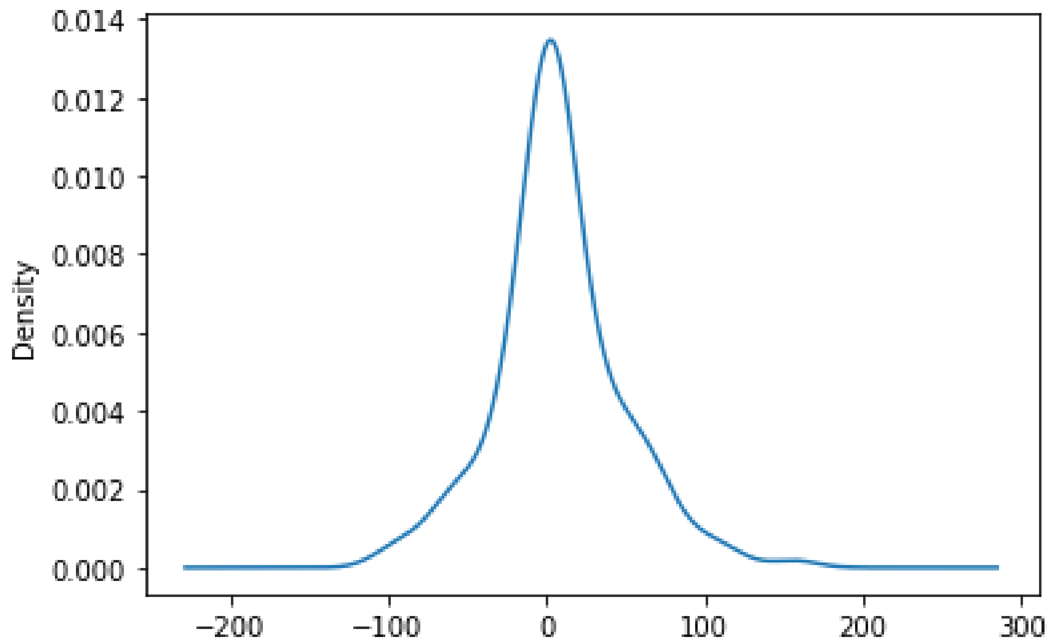




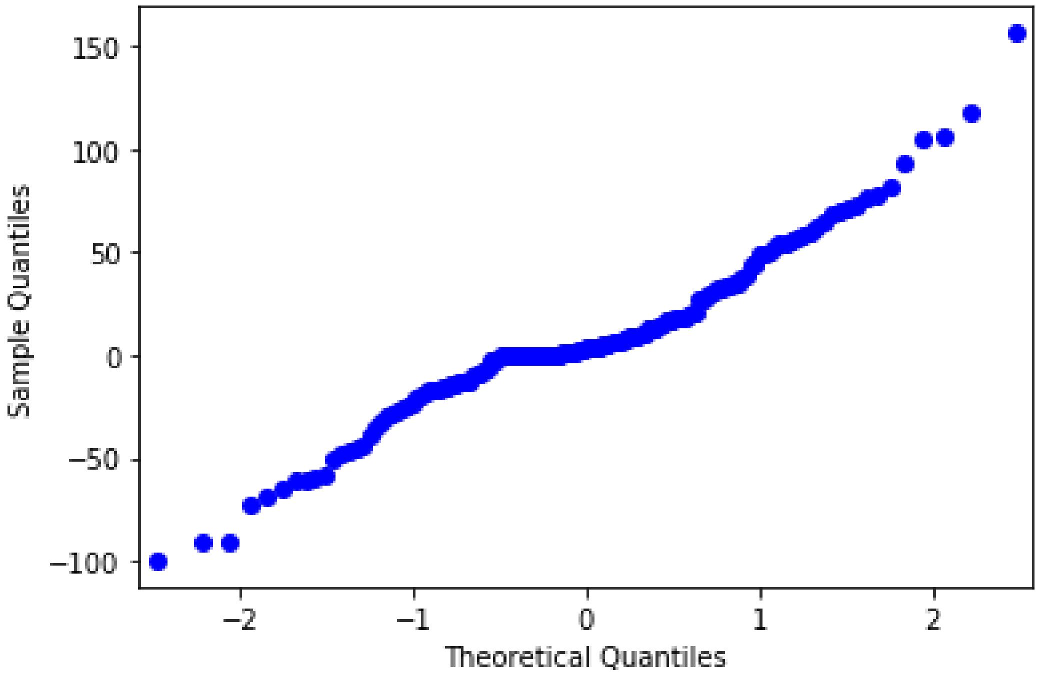
[46]:
```
from matplotlib import pyplot
```

```
resíduos.hist()

pyplot.show()
resíduos.plot(kind='kde')
pyplot.show()
```





[47]:
```python
from statsmodels.graphics.gofplots import qqplot

qqplot(resíduos)
pyplot.show()
```



Exercício: O que aconteceria com os resíduos se um modelo incorreto tivesse sido ajustado?

[ ]:
```python

```