



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

SARA GUIMARAES NEGREIROS

**PROPOSTA DE UM KIT EDUCATIVO
AUTOMATIZADO PARA O ESTUDO DO
MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL**

PAU DOS FERROS

2018

SARA GUIMARAES NEGREIROS

**PROPOSTA DE UM KIT EDUCATIVO
AUTOMATIZADO PARA O ESTUDO DO
MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL**

Monografia, apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Glaydson Francisco Barros de Oliveira (UFERSA)

Co-orientador: Prof. Me. Marco Diego Aurélio Mesquita (UFERSA)

PAU DOS FERROS

2018

SARA GUIMARAES NEGREIROS

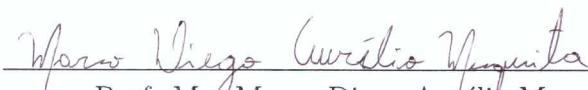
**PROPOSTA DE UM KIT EDUCATIVO
AUTOMATIZADO PARA O ESTUDO DO
MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL**

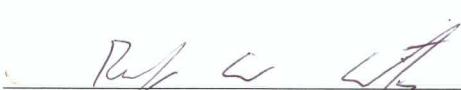
Monografia, apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Pau dos Ferros/RN, 11 de setembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Glaydson Francisco Barros de Oliveira
(UFERSA)


Prof. Me. Marco Diego Aurélio Mesquita
(UFERSA)


Prof. Dr. Rodrigo Soares Sementes
(UFERSA)

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

N385p Negreiros, Sara Guimaraes.
PROPOSTA DE UM KIT EDUCATIVO AUTOMATIZADO PARA
O ESTUDO DO MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL / Sara
Guimaraes Negreiros. - 2018.
81 f. : il.

Orientador: Glaydson Francisco Barros de
Oliveira.
Coorientador: Marco Diego Aurélio Mesquista.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-Árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2018.

1. Movimento de um projétil. 2. Automação. 3.
Mecânica Clássica. 4. Tracker. 5. Ensino. I.
Oliveira, Glaydson Francisco Barros de, orient.
II. Mesquista, Marco Diego Aurélio, co-orient.
III. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

*A todas as pessoas
que buscam fazer do
mundo um lugar
melhor*

AGRADECIMENTOS

Se vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes. Assim como Isaac Newton, ao se referir aos seus mentores com essa frase, uso-a para agradecer aos professores, orientadores e amigos, Glaydson Oliveira e Marco Mesquita por me ajudarem a tornar esse projeto possível. De modo singular, agradeço a Glaydson por me auxiliar a enxergar a essência do cálculo diferencial e agradeço a Marco por me auxiliar a desenvolver a perspectiva que um engenheiro deve ter na solução de problemas e elaboração de projetos.

Agradeço aos meus pais, Raimundo Negreiros e Lígia Guimarães, por também me carregarem nos ombros durante minha infância, período que não tinhámos transporte. Além de sempre incentivarem meus estudos e, na medida do possível, quase acompanharem minha rotina. Agradeço também a todos os demais familiares, em especial meu irmão, Raimundo Júnior, pela ajuda nos projetos.

Agradeço aos amigos cedidos pela UFERSA, mas também aos fora dela, por todas as madrugadas de estudo no campus, pela busca por justiça através de manifestações, pelas partidas de sinuca, pelas cervejas, por todas as reflexões e discussões que nos permitiram aceitar nossas diferenças, mas, acima de tudo, pela amizade.

Por fim, agradeço a todo o amor e carinho cedido pelos meus animais de estimação que me permitiram perceber que a vida é tão boa quanto a gente permite.

A vida é tão boa quanto a gente permite. Charles Bukowski

RESUMO

O desenvolvimento de estruturas voltadas para o ensino de ciência tem-se mostrado como uma das principais ferramentas didáticas utilizada para facilitar a compreensão de conceitos como as leis de Newton, a definição de força e energia, o cálculo do centro de massa com integrais triplas e como interpretá-lo e o estudo do movimento de um projétil com análise pelo cálculo integral. Assim, objetiva-se desenvolver uma estrutura de baixo-custo, mas sem perder a eficiência do sistema e garantindo a inserção de novas tecnologias. Por meio de impressão 3D, serviços de carpintaria e tornearia mecânica foi possível desenvolver o sistema físico, enquanto que a automação deste foi realizada com uso do microcontrolador ATmega328 e alguns periféricos. Apesar dos diversos estudos considerarem o movimento de um projétil sem a resistência do ar, estudou-se um modelo para resistências com baixa velocidade. Desse modo, por meio do *software Tracker* foi possível estudar o lançamento e obter uma constante denominada γ da força resistiva.

Palavras-chave: Movimento de um projétil. Automação. Mecânica Clássica. Tracker. Ensino.

ABSTRACT

The development of structures aimed at teaching science has been shown as one of the main didactic tools used to facilitate the understanding of concepts. This work aims to develop a low-cost structure, but without losing the efficiency of the system and ensuring an insertion of new technologies. By means of 3D editing, carpeting and mechanical turnery services were created the physical system, while the automation of this system was performed with the arduino microcontroller and some sensors. It is usually studied the movement of a projectile without resistance of the air, but was made the study with resistive force for low speeds too. Thus, through the *software Tracker* the launch study was carried out and obtained a constant called *gamma* of the resistive force.

Keywords: Motion of a projectile. Automation. Classical Mechanics. Tracker. Teaching.

LISTA DE TABELAS

- | | | |
|---|---|-------------|
| 1 | Análise da constante e força elásticas pela quantidade de ligas e a distensão | p. 24 |
| 2 | Símbolos e funções dos pinos do LCD | p. 79 |

LISTA DE FIGURAS

1	Lançador na base de lançamento	p. 20
2	Foguete	p. 22
3	Energias	p. 24
4	Catraca	p. 25
5	Lançador	p. 27
6	Vista lateral do lançador na base de lançamento	p. 30
7	Circuito para controle do LCD	p. 32
8	Fluxograma do funcionamento do lançador	p. 33
9	Fluxograma do funcionamento da etapa de distensão da catraca e ângulo da base	p. 34
10	Fluxograma do funcionamento da etapa para calibrar o motor NEMA .	p. 35
11	Fluxograma do funcionamento da etapa para configurar o ângulo de lançamento	p. 36
12	Fluxograma da obtenção dos dados	p. 37
13	Funcionamento do motor de passo	p. 38
14	Classificação dos motores de passo	p. 39
15	Estrutura dos motores de passo	p. 40
16	Circuito para controle do motor NEMA	p. 41
17	Fluxograma do controle do motor NEMA com o arduino	p. 41
18	Funcionamento do encoder	p. 42
19	Redução de rotações por minuto (rpm) com catracas para o encoder .	p. 43
20	Circuito para controle do encoder	p. 43

21	Fluxograma do controle do encoder com o arduino	p. 44
22	Dimensionamento da estrutura com base no ângulo de ataque	p. 46
23	Circuito para queda de tensão com LDR	p. 47
24	Fluxograma da análise de queda de tensão para determinar o local da queda	p. 47
25	Circuito chaveado com queda de tensão	p. 48
26	Fluxograma da análise de queda de tensão o arduino	p. 49
27	Arrasto no foguete	p. 50
28	Movimento curvilíneo	p. 51
29	Gráfico para o lançamento curvilíneo sem a resistência do ar	p. 54
30	Movimento curvilíneo com força resistiva	p. 55
31	Gráfico para o lançamento com a resistência do ar	p. 61
32	Análise com o Tracker	p. 67
33	Gráfico das velocidades	p. 69
34	Divisão do foguete	p. 75
35	Montagem do circuito para queda de tensão	p. 76
36	Análise do sistema catraca-cremalheira	p. 77
37	Montagens finais	p. 78
38	Circuito completo para automação do sistema	p. 80
39	Coleta de dados com o <i>software Tracker</i>	p. 81

LISTA DE SIGLAS

EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
RPM	Rotação Por Minuto
LCD	<i>Liquid Crystal Display</i>
LDR	<i>Light Dependent Resistor</i>

SUMÁRIO

1	<i>Introdução</i>	p. 15
2	<i>Objetivos</i>	p. 17
3	<i>Metodologia</i>	p. 18
4	<i>Descrição da construção do lançador</i>	p. 20
4.1	Foguete: cálculo do centro de massa com integrais triplas	p. 21
4.2	Trilho com cremalheira e catraca: energia mecânica, força elástica e movimento unidimensional	p. 23
4.3	Variação angular: movimento do projétil	p. 29
5	<i>Automação com arduino</i>	p. 31
5.1	Display LCD e etapas para controle do sistema	p. 31
5.2	Distensão da catraca com motor NEMA 23	p. 38
5.3	Determinação do ângulo para lançamento com encoder	p. 42
5.4	Sistema para detecção de interferência com laser e LDR	p. 44
5.5	Circuito chaveado com queda de tensão	p. 48
6	<i>Movimento do foguete</i>	p. 50
6.1	Movimento sem resistência do ar	p. 51
6.2	Movimento com força resistiva para baixas velocidades	p. 54
6.3	Movimento curvilíneo com força resistiva para velocidade de segunda ordem	p. 62
7	<i>Análise com o software Tracker</i>	p. 67

8 Considerações finais	p. 70
Referências Bibliográficas	p. 71
ANEXO A - Cálculo do centro de massa com integrais triplas do foguete	p. 73
ANEXO B: Montagem final do sistema	p. 76
ANEXO C: Configurações para o LCD	p. 79
ANEXO D: Circuito completo para automação do sistema	p. 80
ANEXO E: Coleta de dados com o <i>software Tracker</i>	p. 81

1 INTRODUÇÃO

No Brasil, o ensino de ciências sofre diversas dificuldades que alternam desde a falta de formação docente até a falta de equipamentos laboratoriais nas escolas públicas (DANTAS; MARTINS, 2008). Desse modo, a busca por equipamento de laboratório mostra-se uma das principais soluções para a problemática. No entanto, a aquisição nem sempre é satisfatória, tanto pelo custo, quanto pelas alternativas existentes no mercado que muitas vezes não apresentam as especificações necessárias para a prática almejada. Neste estudo, será desenvolvido um sistema que possibilite o desenvolvimento de atividades experimentais para Mecânica Clássica.

Apesar das atividades experimentais serem altamente atrativas para a maioria dos discentes, estas ainda são altamente limitadas pela falta de investimentos para aquisição de materiais (BUENO; KOVALICZN, 2008). O ensino com práticas ainda possibilita que o discente desenvolva um pensamento lógico que permite a ele desenvolver qualquer problemática relacionada. Entretanto, além da necessidade dessas práticas serem relacionadas com o conteúdo abordado em sala, é preciso que elas despertem interpretações e discussões, assim como não devem ser meramente ilustrativas.

As atividades práticas devem surgir de modo a enfatizar os conceitos expostos na teoria de modo que os alunos se sintam convictos dos conceitos e possam identificá-los. Assim, se desperta a curiosidade do aluno com o intuito de permitir que ele analise diversas situações e possa elaborar suas próprias conclusões, senso crítico, vivência e a curiosidade acerca da temática. Com a conclusão deste trabalho objetiva-se auxiliar no ensino de física de modo a facilitar a compreensão do discente. Além disso, busca-se o baixo custo no desenvolvimento da estrutura dessas atividades experimentais.

O sistema em si consiste em armazenar energia potencial elástica e depois transformá-la em energia cinética de modo a permitir que o foguete seja lançado. Dentre a aplicação da automação tem-se a interação com o usuário para calibrar o sistema, assim como calibrar a base, a obtenção de dados com maior precisão e a garantia de maior segu-

rança ao usuário por distender o elástico com o motor NEMA. A estrutura deste trabalho consiste em apresentar os objetivos do trabalho no capítulo 2, assim como a metodologia utilizada para alcance destes, no capítulo 3. No capítulo 4 apresenta-se o equipamento desenvolvido neste estudo que consiste em um aparato capaz de armazenar energia potencial elástica e utilizá-la para lançar um foguete cujo centro de massa está centrado nele com o intuito de garantir que o lançamento seja estável. . Para garantir maior segurança para o usuário, além de permitir dados mais precisos, realizou-se a automação conforme será descrito no capítulo 5.

Aplicando o cálculo diferencial foram estudados três modelos que variam de acordo com as considerações feitas para a força de arrasto para descrever o movimento de partículas, conforme o capítulo 6. Em seguida, no capítulo 7, são apresentados os dados obtidos com o *software Tracker* para, por fim, serem apresentadas as considerações finais deste estudo no capítulo 8. No ANEXO A encontram-se os cálculos realizados para obtenção do centro de massa do foguete, no ANEXO B uma ilustração real da estrutura finalizada, no ANEXO C apresentam-se a pinagem do LCD utilizado na automação, no ANEXO D o circuito completo utilizado para implementar a automação e no ANEXO E a tela do *software Tracker* após a coleta de dados.

2 OBJETIVOS

Dado que o ensino de mecânica clássica pode ser auxiliado com demonstrações experimentais, o objetivo geral do presente trabalho trata de desenvolver um aparato experimental alternativo de baixo custo, capaz de ilustrar de forma prática questões envolvendo lançamento de projétil.

Sabe-se que o ensino de ciências exatas é comumente muito abstrato. Desse modo, o uso de práticas laboratoriais auxilia a didática do docente com o intuito de facilitar a compreensão dos discentes da Educação Básica e da Educação Superior.

Os objetivos específicos do projeto são:

- Desenvolver o sistema com base em conceitos de Mecânica Clássica;
- Desenvolver a estrutura do lançador automatizada com plataforma eletrônica *open-source* arduino;
- Obter um modelo matemático que melhor se ajuste à trajetória descrita pelo foguete;
- Realizar análise experimental.

3 METODOLOGIA

Para alcançarmos nossos objetivos foi necessária a realização das seguintes etapas:

1. Construção da base para lançamento do foguete

Os materiais utilizados para a realização desta etapa foram: compensados de madeira atuando como a base para as demais estruturas, placas de acrílico com dimensionamento apropriado para este projeto e de modo a permitirem a variação angular. Além disso, desenvolveram-se peças com tornearia mecânica para garantir que o ângulo da base de lançamento fosse fixado. A estrutura que permite a variação angular foi baseada em um trabalho de Negreiros e De Oliveira (2017) que possui metodologia similar à deste trabalho.

2. Desenvolvimento 3D das demais estruturas para a base

Posteriormente, por meio do *software Inventor Professional 2018*, sob a licença de estudante, foi possível desenvolver toda as demais estrutura como o trilho para encaixe do foguete, assim como o próprio foguete, a catraca, a estrutura para fixar o lançador na base de madeira, que atuam diretamente no armazenamento de energia potencial elástica para que esta seja convertida em energia cinética e permita o lançamento do foguete.

Todas as peças citadas foram obtidas por meio de impressão 3D com uso de filamento do PLA. Após adaptar essas estruturas na base realizou-se alguns ajustes de modo a implementar nesta uma estrutura fixa com ganchos para que o elástico fosse preso e distendido. Na escolha do material para armazenar a energia potencial elástica priorizou-se o uso de elástico de escritório devido a facilidade em encontrá-lo e por sua faixa de distensão ser adequada para este trabalho.

3. Automação do sistema

Para realizar a automação do sistema utilizou-se o arduino UNO, uma placa *open-source* de prototipagem com o microcontrolador ATmega328. A motivação para

sua utilização foi por ser um dos modelos mais difundidos nos projetos de eletrônica e automação de modo a facilitar a implementação neste trabalho. Além disso, algumas técnicas, como queda de tensão e utilização de transistores como chave, foram utilizadas com o intuito de substituir a utilização de diversos pinos digitais por apenas um analógico. A utilização do arduino UNO foi priorizada por ser uma das placas de menor custo para aquisição e por ela conseguir suprir as necessidades do projeto.

Com os métodos de automação empregados objetiva permitir que a catraca rotacione por meio de um motor de passo, detectar o instante em que o foguete deixa a base, assim como o instante e local de pouso por meio de sensores LDR e laser. Além disso, busca-se facilitar a utilização da atividade experimental pelo usuário com uso de um display LCD para passar mensagens que auxiliem o usuário no uso do sistema e permitir que ele configure as características do lançamento. As figuras dos circuitos foram realizadas pelo *software Fritzing 0.9.3 2016* disponível sob a licença GNU GPL v3.

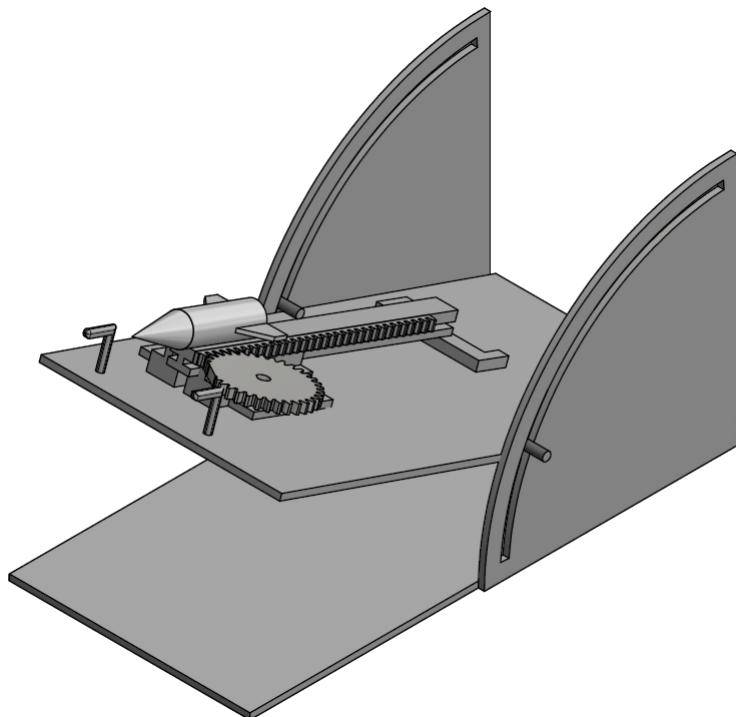
4. Análise computacional do experimento e elaboração de figuras

A análise experimental será realizada por meio dos *softwares Tracker 4.86 2014* disponível sob a licença GPL v3, *Excel 14.0.7212.5000 2010* e *MATLAB 8.3.0.523 2014*, ambos licenciados pela UFERSA, que atuam, respectivamente, na obtenção das coordenadas do lançamento, na análise estatística dessas coordenadas e na obtenção de gráficos para demais interpretações. Por fim, a elaboração das figuras foi feita, além do *Inventor*, utilizou-se o *software Inkscape 0.92.1 2017* também sob a licença GNU GPL v3.

4 DESCRIÇÃO DA CONSTRUÇÃO DO LANÇADOR

A elaboração do conjunto experimental foi possível com base em projetos mecânicos. Sendo o desenvolvimento do sistema dado por meio de impressão 3D, corte a laser, carpintaria e tornearia mecânica. O projeto final da estrutura finalizada está ilustrada na Figura 1. Além disso, no ANEXO B encontram-se as Figuras do estrutura finalizada e discussões acerca de como manusear o equipamento.

Figura 1: Lançador na base de lançamento



Fonte: Autoria própria, 2018

Neste capítulo, serão abordados pontos relevantes para a construção e descrição de algumas características do lançador. Na sessão 4.1, é descrito como foi feito o cálculo

da posição do centro de massa do foguete. Na sessão 4.2, discute-se sobre a energias potenciais, energia cinética, análise das características elásticas do material utilizado e estudo das forças que atuam no sistema. Por fim, na sessão 4.3 introduz-se os principais aspectos do movimento de um projétil.

4.1 Foguete: cálculo do centro de massa com integrais triplas

O centro de gravidade está relacionado com a interação entre o campo gravitacional e as características físicas do objeto, ou seja, essa interação varia de acordo com a forma deste. Para efeito de cálculo é possível considerar todas as forças peso atuantes no objeto em um único ponto, denominado centro de gravidade. Desde que se trabalhe com altitudes cuja variação da aceleração da gravidade, consequentemente a força peso, seja invariante, o centro de gravidade coincidirá com o centro de massa (YOUNG; FREEDMAN, 2008a).

Aqui será considerado que o objeto está sobre ação de um campo gravitacional uniforme, logo, o centro de gravidade coincide com o centro de massa – o ponto em que a massa do objeto pode ser restrita para que este passe a atuar como uma partícula. O centro de massa engloba as características do material utilizado e como ocorre a distribuição dele na estrutura. Para o foguete, foi utilizado o polímero PLA. Produzido com ácido lático a partir de fontes renováveis – mandioca, cana-de-açúcar, milho - e caracterizado, principalmente, por ser um termoplástico biodegradável (SANTANA, 2015). Este material possui distribuição uniforme ao longo de toda estrutura do foguete.

No foguete desenvolvido (Figura 2), foi realizada uma abertura em forma de T para permitir que ele possa ser encaixado no trilho móvel do lançador. Dividindo-se o foguete em formas geométricas conhecidas é possível determinar o centro de massa de cada uma delas através de integrais triplas e, considerando-as como massas pontuais, calcular o centro de massa do foguete. Para este estudo, as funções matemáticas que descrevem as formas do corpo sólido da Figura 2 possuem três variáveis independentes. Assim, para calcular cada coordenada z_i do centro de massa do foguete, equação 4.3, relaciona-se o momento de massa M_{xyi} , equação 4.1, com a massa M_i , equação 4.2. Segundo Thomas (2008) momento de massa e massa de um corpo D são dados, respectivamente, por

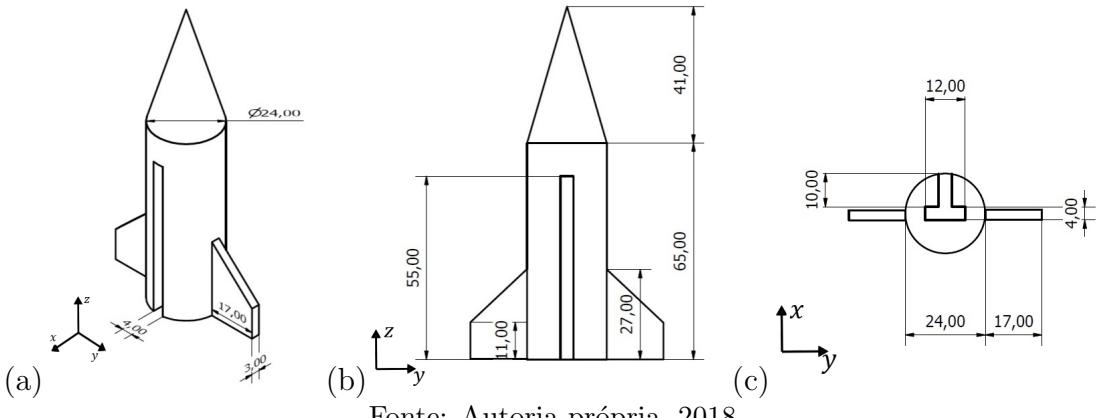
$$M_{xyi} = \int \int \int_D z \delta(x, y, z) dV \quad (4.1)$$

$$M_i = \int \int \int_D \delta(x, y, z) dV \quad (4.2)$$

$$\bar{z}_i = \frac{M_{xyi}}{M_i} \hat{k} \quad (4.3)$$

onde $D \in \Re^3$, $dV = dz dy dx$ e δ é a função de densidade.

Figura 2: Foguete: (a)Vista militar; (b) Vista frontal; (c) Vista inferior



Fonte: Autoria própria, 2018

Neste caso, \bar{z}_i será a localização do centro de massa de cada forma geométrica no eixo \hat{k} . Os cálculos para cada forma geométrica nas quais o foguete pode ser dividido encontram-se no ANEXO A. Diante desses dados, é possível considerar que o foguete é formado por massas pontuais. Para concluir o cálculo da posição do centro de massa do foguete, ainda é necessário levar em consideração a abertura em T no corpo do foguete para mantê-lo no trilho durante o lançamento. Para esse novo sistema sabe-se que,

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4.4)$$

Desse modo, obtém-se um centro de massa de 50,3 mm. Como a altura do foguete é de 106 mm, este centro de massa não é o ideal, pois não está centralizado no objeto. A seguir será determinada a quantidade volumétrica de massa que deve ser retirado do foguete. A localização do centro de massa desta será em 20 mm no eixo \hat{k} , logo,

$$\bar{z}_i = 53 = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + m_4 z_4 + m_{subt} 20}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_{subt}} \implies m_{subt} = 3357,95 \text{ mm}^3$$

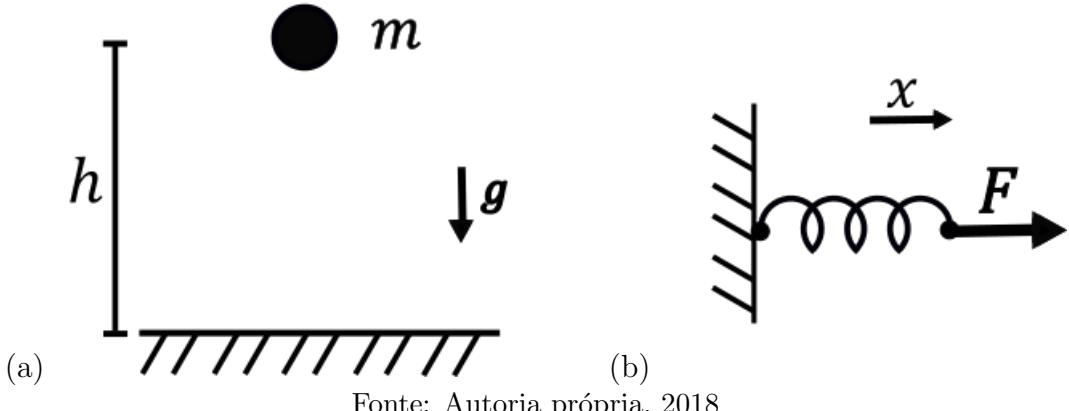
Ao centralizar a localidade do centro de massa no objeto garante-se que a trajetória realizada pelo foguete será estável, ou seja, ele não realizará uma trajetória com movimento de translação em relação a Terra, mas não realizará movimento de rotação em torno do seu centro de massa. Além disso, ao considerar o corpo como uma partícula facilitá-se a aplicação das técnicas para o estudo do movimento.

4.2 Trilho com cremalheira e catraca: energia mecânica, força elástica e movimento unidimensional

Os fenômenos físicos constantemente transformam energia potencial em energia cinética ou vice-e-versa. A energia potencial consiste no trabalho que determinada força realiza para mover um corpo e pode ser interpretada como o armazenamento de energia. Por sua vez, a energia cinética é a energia associada ao movimento no sistema. Nessa sessão tratar-se-á sobre a energia potencial, cuja forma mais conhecida é energia potencial gravitacional, ou seja, dado um objeto com massa m localizado a uma altura h acima do solo (Figura 3 (a)), a energia potencial gravitacional é definida algebraicamente por $E_p = mgh$ onde g é o módulo da aceleração da gravidade (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009).

A natureza elástica de alguns materiais permite que, quando aplicada determinada força, surja uma força restauradora proporcional à distensão ou compressão feita no material com a mesma intensidade e direção da força aplicada, porém, com o sentido contrário (Figura 3 (b)). Além disso, esses materiais também armazenam uma energia potencial elástica dada por $E_{pe} = Kx^2$ onde K é a constante elástica do material e x é a deformação realizada (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009).

Figura 3: Energias: (a) Energia potencial gravitacional; (b) Energia potencial elástica



Através de experimentos com o elástico utilizado no lançador foi possível montar a Tabela 1 definindo a força necessária para distender dois ou quatro elásticos em 10 cm e 20 cm. Para cada situação a constante elástica é obtida por meio da divisão da intensidade da força exercida em Newton pela distensão feita em metros.

Tabela 1: Análise da constante e força elásticas pela quantidade de ligas e a distensão

Quantidade de ligas	Constante elástica (N/m)	Distensão (cm)	Força elástica (N)
2	82,94	10	8,29
		20	16,59
4	138,96	10	13,90
		20	27,80

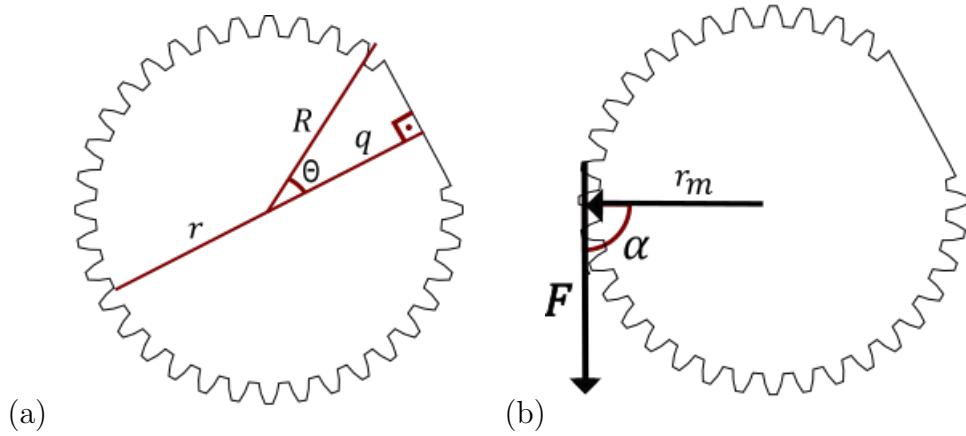
Fonte: Autoria própria, 2018

No lançador, a energia potencial elástica originada pela distensão do elástico é diretamente convertida em energia cinética pelo corte realizado na catraca, com raio externo de $R = 40,32\text{ mm}$ e raio interno de $r = 36,09\text{ mm}$. Essa modificação foi realizada com o objetivo de diminuir o tamanho mínimo necessário para que ela libere o trilho, ou seja, o tamanho de corte é um pouco maior de um dente ($R - q = 2,74\text{ mm}$), como mostra a Figura 4.

Desse modo, para Θ sabe-se que $\Theta = \arccos(q/R) = 21,26^\circ$. A distensão máxima realizada pela catraca com essas modificações será $S_{resultante} = S_{total} - S_{corte} = 2\pi r_m - r_m(2\Theta) = 21,2\text{ mm}$ onde r_m é o raio médio entre o raio externo e o raio interno. Além disso, sabe-se que cada passo do motor refere-se a $1,8^\circ$, logo, o equivalente da

distensão para cada passo é 1,2 mm

Figura 4: Catraca: (a) Especificações da catraca; (b) Torque gerado pela catraca



Fonte: Autoria própria, 2018

Em uma rotação completa a catraca realiza apenas a distensão de 21,2 cm e automaticamente libera o trilho. Esse sistema atua, portanto, como um sistema trava-destrava.

Com base na Tabela 1, utilizando dois elásticos obtém-se uma constante elástica de 82,94 N/m e com uma distensão de 21,2 cm, referente ao comprimento da cremalheira, obtém-se uma força elástica de 15,76 N. Sabe-se que a distensão do elástico ocorrerá com a transmissão entre o torque realizado pelo motor e a catraca. Sabendo que o torque é definido em notação vetorial por,

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_m \times \mathbf{F} \quad (4.5)$$

onde \mathbf{F} é a força e \mathbf{r}_m a distância ao eixo de rotação.

O módulo do torque exercido é dado por,

$$T = r_m F \sin \alpha \quad (4.6)$$

Sabe-se que $\sin \alpha = 1$, pois \mathbf{F} e \mathbf{r}_m possuem um ângulo de 90° entre si (Figura 4 (b)). Com essas condições, para o raio médio de $r_m = 38,2$ mm e uma força de 16,76 N obtém-se um torque de 6 kgfm. A obtenção do motor para girar a catraca foi realizada com base na magnitude desse torque.

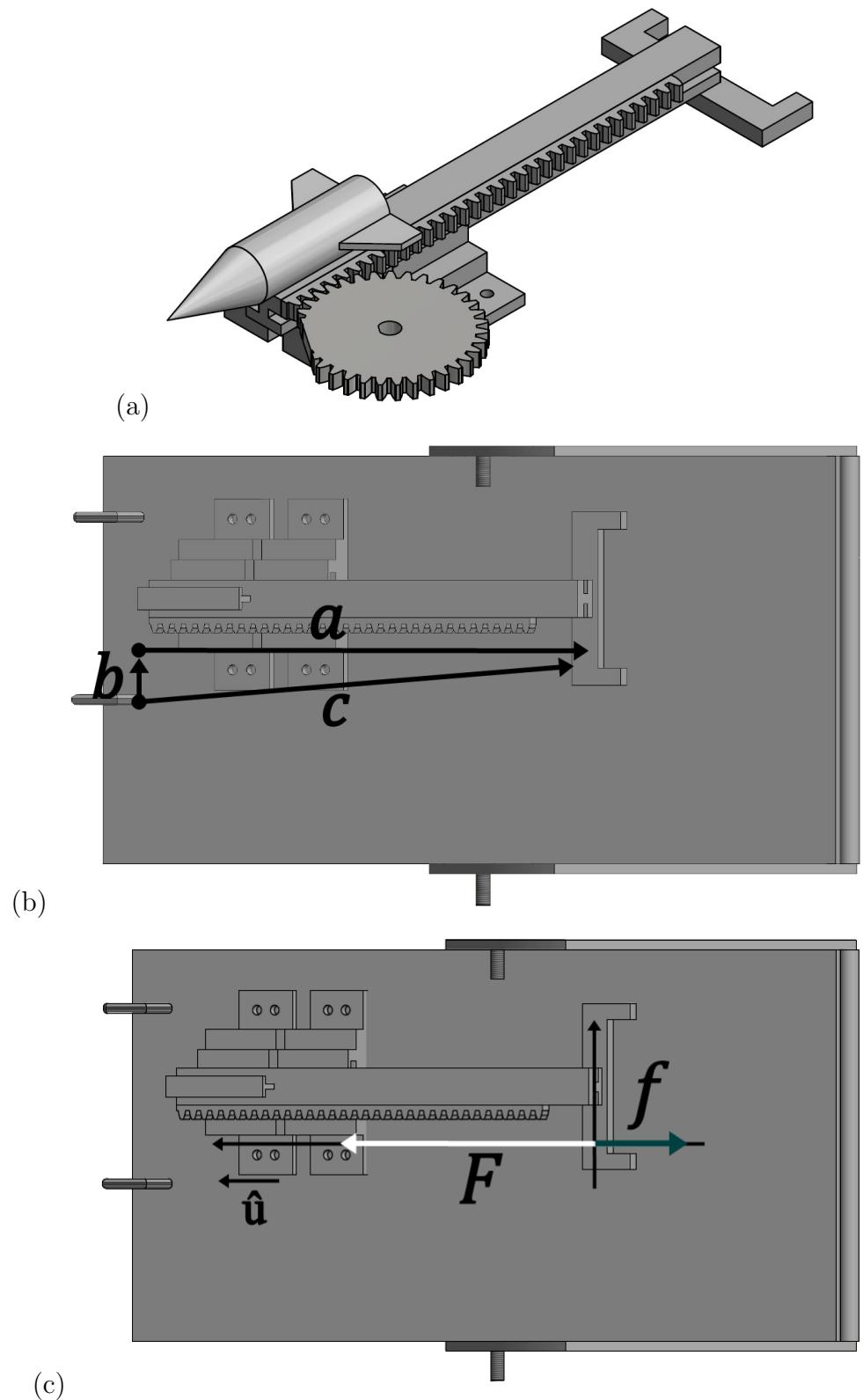
A vista militar do sistema que será responsável por distender o elástico é visto na Figura 5 (a) onde os elásticos são inseridos em uma estrutura fixa e em uma estrutura móvel. Na Figura 5 (b) o ponto que liga os vetores \mathbf{b} e \mathbf{c} representa a estrutura fixa

enquanto o ponto que liga os vetores \mathbf{a} e \mathbf{c} representa a estrutura móvel. Desse modo, enquanto o trilho se move na mesma direção de \mathbf{a} para gerar a energia potencial elástica, a distensão ocorre no mesmo sentido da reta \mathbf{c} . Para um deslocamento \mathbf{a}' no trilho obtém-se uma distensão em módulo de $c' = (a'^2 + b^2)^{1/2}$.

Como o movimento é unidimensional todas as forças que influenciam na análise do sistema atuam em uma única direção. Na Figura 4 (b), a força \mathbf{F} está orientada na mesma direção que \mathbf{a} da Figura 5 (b), conforme visto no diagrama vetorial da Figura 5 (c). Além disso, surge uma força de atrito \mathbf{f} que se opõe ao movimento que o trilho irá realizar devido à energia potencial elástica. Assim, a soma vetorial das forças atuantes no sistema é,

$$\mathbf{F}_{resultante} = \mathbf{F} + \mathbf{f} = \mathbf{F} + \mathbf{f}_{ar} + \mathbf{f}_{contato} \quad (4.7)$$

Figura 5: Lançador: (a) Vista militar; (b) Análise da distensão; (c) Diagramas das forças atuantes



Fonte: Autoria própria, 2018

Isaac Newton, em sua obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, definiu a força como uma taxa de variação da quantidade de movimento (YOUNG; FREEMAN, 2008a), porém, é habitual a definição de força como o produto da massa pela aceleração de um corpo. Ambas as definições referem-se ao movimento em uma direção $\hat{\mathbf{u}}$. Desse modo,

$$\frac{d\rho}{dt}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_{\text{resultante}} = m\mathbf{a} \text{ onde } \rho = m\mathbf{v} \quad (4.8)$$

Como a velocidade é uma taxa de variação da posição no tempo, isto é, $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$,

$$\mathbf{F}_{\text{resultante}} = \frac{d(mv)}{dt}\hat{\mathbf{u}} = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{u}} \quad (4.9)$$

A força elástica \mathbf{F} obedece à lei de Hooke que relaciona a distensão ou compressão realizada em um objeto com a constante elástica dele, esta, entretanto, varia de acordo com as propriedades físicas do objeto e apenas é precisa para pequenos deslocamentos. Supondo variações muito pequenas no valor da distensão é possível afirmar,

$$\mathbf{F} = K(x - l)\hat{\mathbf{u}} \quad (4.10)$$

onde K é a constante elástica e l é o comprimento no elástico em repouso.

Nas forças de atrito considera-se a resistência que o ar e a resistência que a superfície em contato com o trilho apresentarão, ambas em relação ao movimento do trilho. Para a força de atrito do ar, também conhecida como força de arrasto, supõe-se que ela é proporcional à velocidade, logo,

$$\mathbf{f}_{ar} = -\gamma v\hat{\mathbf{u}} \quad (4.11)$$

onde γ é uma constante de arrasto.

Entretanto, para a força de atrito de contato tem-se

$$\mathbf{f}_{\text{contato}} = -\mu_c \mathbf{N} \quad (4.12)$$

onde μ_c é uma constante de atrito cinético e $\mathbf{N} = m\mathbf{g}$ é a força normal do trilho.

Partindo das definições das equações 4.10, 4.11, 4.12 e 4.9,

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2x}{dt^2} &= K(x - l) - \gamma \frac{dx}{dt} - \mu_c N \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{K}{m}(x - l) - \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{\mu_c N}{m} \\
\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}(l - x) + \mu_c g &= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Supondo que as constantes γ e μ_c são muito pequenas, pois o sistema foi desenvolvido com o intuito de impedir interferência significativa dessas forças, a equação 4.13 torna-se,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}(l - x) = 0 \tag{4.14}$$

Fazendo $(x - l) = X$ onde $d^2x/dt^2 = d^2X/dt^2$ obtém-se,

$$\frac{d^2X}{dt^2} - \frac{K}{m}X = 0 \tag{4.15}$$

Sabe-se que essa equação diferencial representa um sistema que possui atuação apenas da massa e da mola cuja solução para a equação 4.15 é,

$$X(t) = A \sin(\omega t + \phi) \tag{4.16}$$

onde $A = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$, $\sin \phi = a_1/A$ e $\cos \phi = a_2/A$.

4.3 Variação angular: movimento do projétil

A estrutura para variação angular foi baseada no trabalho desenvolvido por Negreiros e De Oliveira (2017) e justifica-se diante da necessidade de analisar o alcance vertical em função do ângulo de lançamento. Para fixar o ângulo de lançamento na base foram desenvolvidos dois encaixes com rosca por meio de tornearia mecânica.

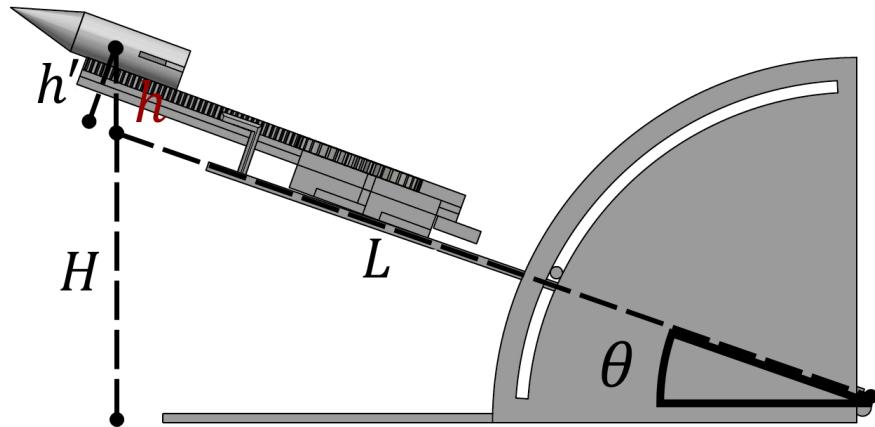
Para a vista lateral do sistema na Figura 6 percebe-se que o ponto em que o foguete deixa o lançador está a uma altura $h + H$ em relação ao solo. Supondo que h é muito próximo de $h' = 2\text{ cm}$, a altura do foguete pode ser obtida por

$$h + H = h + L \sin \theta \tag{4.17}$$

onde $L = 42,5 \text{ cm}$.

Para o ângulo de 45° a altura que o foguete ficará em relação ao solo pela equação 4.17 é de aproximadamente 32 cm .

Figura 6: Vista lateral do lançador na base de lançamento



Fonte: Autoria própria, 2018

O movimento de um projétil consiste em analisar o comportamento de corpos que ao serem lançados na superfície terrestre sofrem influência da aceleração gravitacional e realizam trajetórias parabólicas. Para análises mais precisas é necessário considerar a influência da força resistiva do ar, discussões acerca dos modelos para o movimento são realizadas no capítulo 6.

5 AUTOMAÇÃO COM ARDUINO

Este capítulo destina-se a descrever os equipamentos utilizados para automatizar o sistema. A descrição baseia-se em mostrar os princípios de funcionamento, os circuitos realizados para controle e os fluxogramas para o comportamento destes de acordo com a interação com o usuário. No ANEXO D encontra-se o circuito completo utilizado para automatizar o sistema.

Na sessão 5.1 descreve-se o funcionamento do display LCD cuja atuação consiste em transmitir as etapas de configurações necessárias para permitir o lançamento. Além disso, descreve-se também por meio de fluxogramas como essas etapas ocorrem a medida que ocorrem a interação com o usuário.

Na sessão 5.2 apresenta-se o funcionamento do motor de passo, além da motivação em utilizá-lo. Apesar de ser mais complexo, o seu controle é facilitado por meio de um driver conforme será visto no circuito. Além de permitir o lançamento com variação angular é preciso determinar o ângulo de lançamento. Desse modo, utilizou-se um sistema com redução de RPM e um encoder conforme será descrito na sessão 5.3.

A sessão 5.4 descreverá o dimensionamento de um sistema de detecção de interferência com o uso de laser e sensores LDR, assim como o funcionamento desses componentes e como ocorre a montagem do circuito. Por fim, na sessão 5.5 apresentar-se-á o funcionamento de um circuito com várias chaves e resistores cuja detecção da chave fechada consiste em analisar a queda de tensão equivalente.

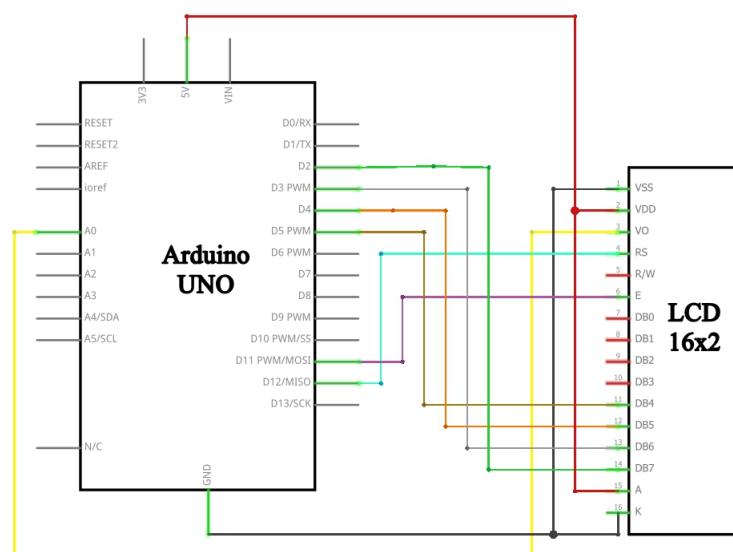
5.1 Display LCD e etapas para controle do sistema

O display LCD consiste em um monitor que forma a imagem a partir de cristais líquidos. Na ausência de corrente elétrica os cristais líquidos são transparentes e permitem a passagem de luz, porém, ao conduzirem corrente elétrica ocorre uma mudança em sua

estrutura molecular e estes se tornam opacos impedindo a passagem de luz.

Neste trabalho utilizou-se o LCD 16 × 2 - HD44780 cujos pinos possuem as funções e ligações apresentados na Tabela 2 do ANEXO B. Controla-se a intensidade do contraste da tela variando a resistência e, assim, a tensão no pino 3, logo, ele foi conectado a um pino analógico e atribuiu-se a este um valor nulo. A montagem deste display com o arduino é realizada conforme o circuito apresentado na Figura 7.

Figura 7: Circuito para controle do LCD

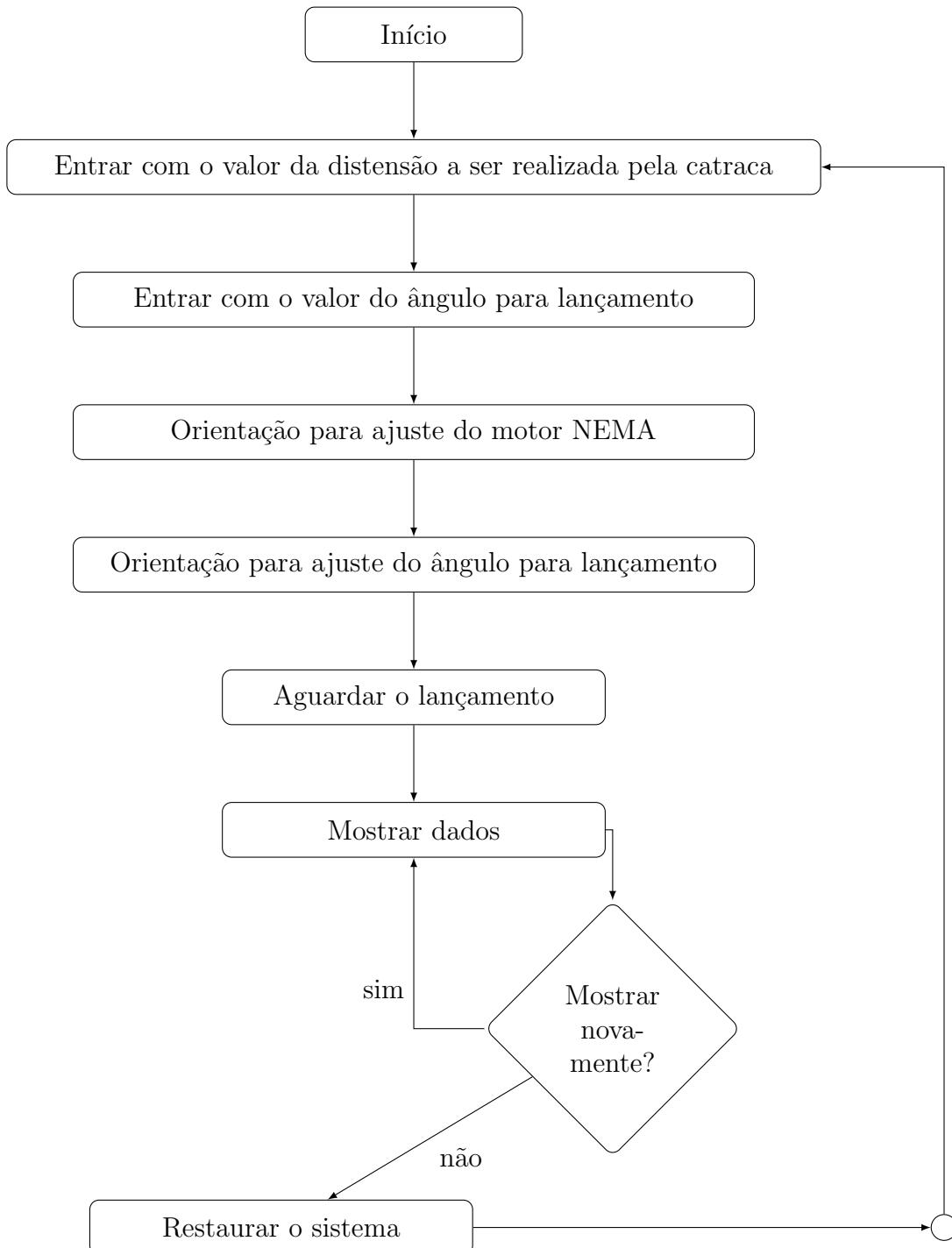


Fonte: Autoria própria, 2018

Antes de lançar o foguete é preciso que o usuário insira os parâmetros de distensão e ângulo de lançamento. Posteriormente, deve ocorrer interação com o sistema físico para calibrar o motor e o ângulo para lançamento. Em ambos os casos o display LCD fornecerá informações para auxiliar a calibragem do equipamento.

Após a conclusão desta etapa aguarda-se o lançamento que ao ser permitido, o sistema irá obter as informações da variação temporal e do alcance do lançamento para apresentar no display a opção de visualizar esses dados e dos parâmetros iniciais ou de restaurar o sistema. No fluxograma da Figura 8 são apresentadas as principais etapas para realizar um lançamento.

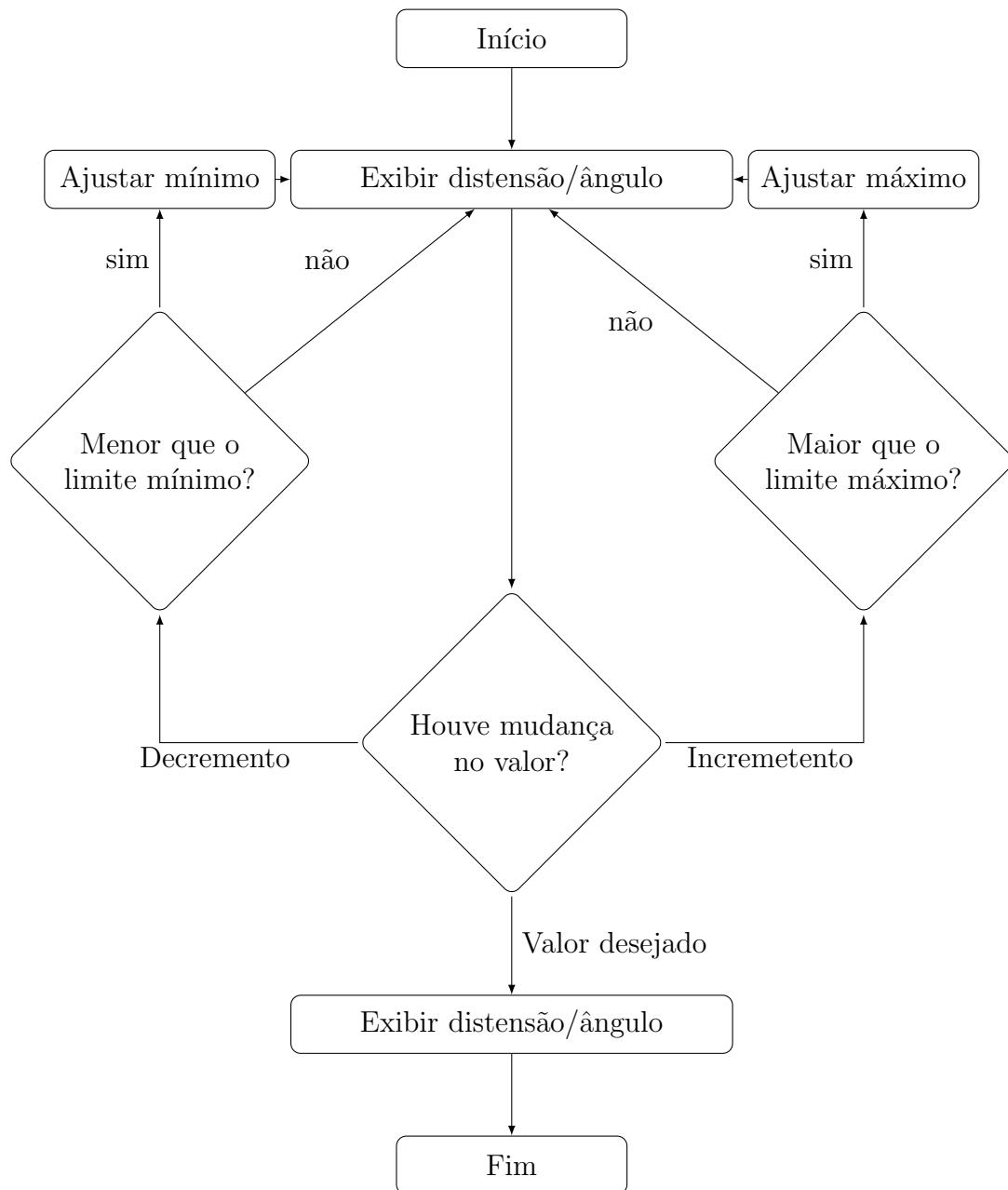
Figura 8: Fluxograma do funcionamento do lançador



Fonte: Autoria própria, 2018

Entretanto, a medida que ocorrem interações com o usuário podem surgir configurações que não são permitidas para o sistema. As configurações para a distensão da catraca e o ângulo do lançamento são comuns e estão apresentadas no fluxograma da Figura 9.

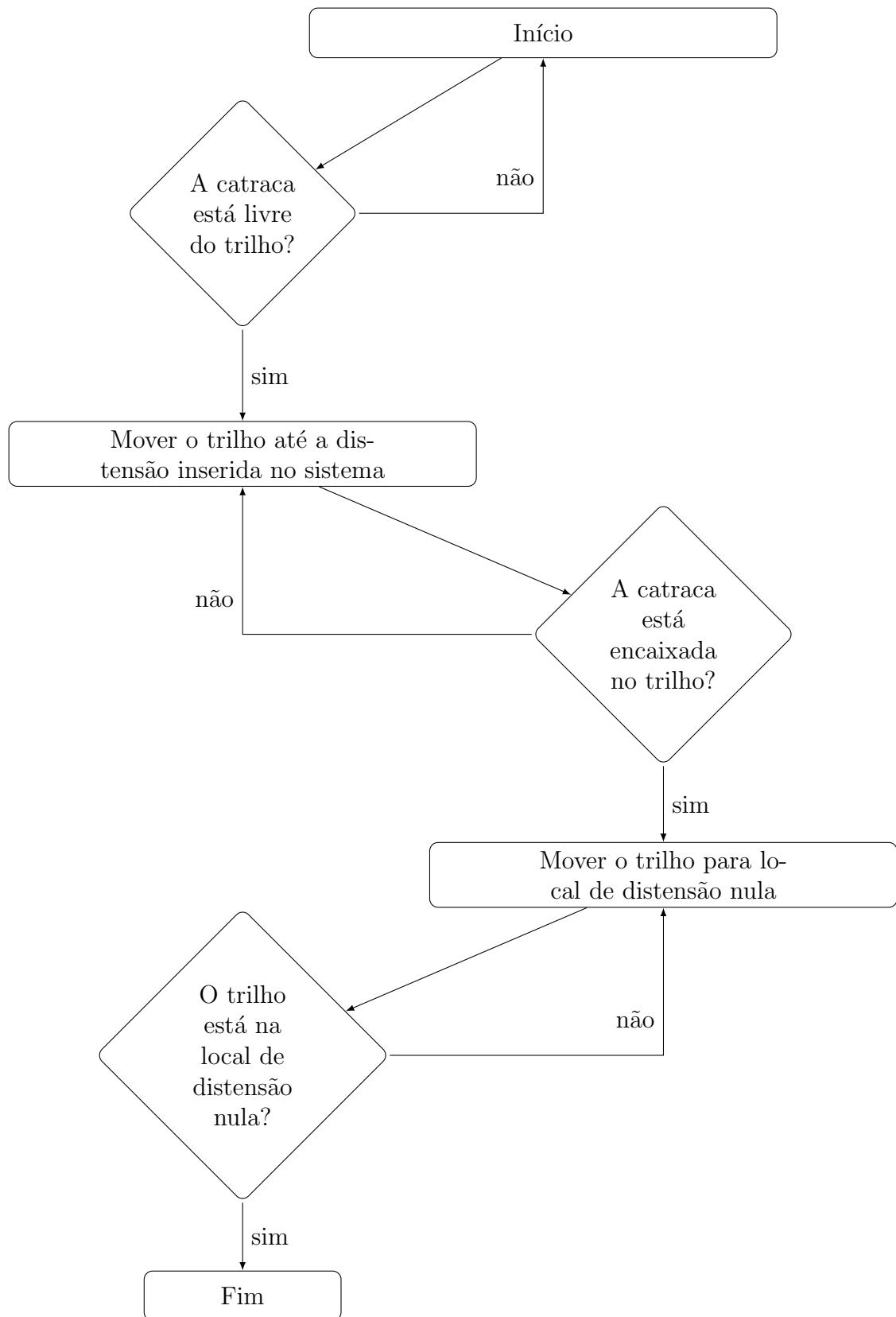
Figura 9: Fluxograma do funcionamento da etapa de distensão da catraca e ângulo da base



Fonte: Autoria própria, 2018

Posteriormente, o motor NEMA deve possuir a distensão que irá realizar no trilho configurada conforme o fluxograma da Figura 10.

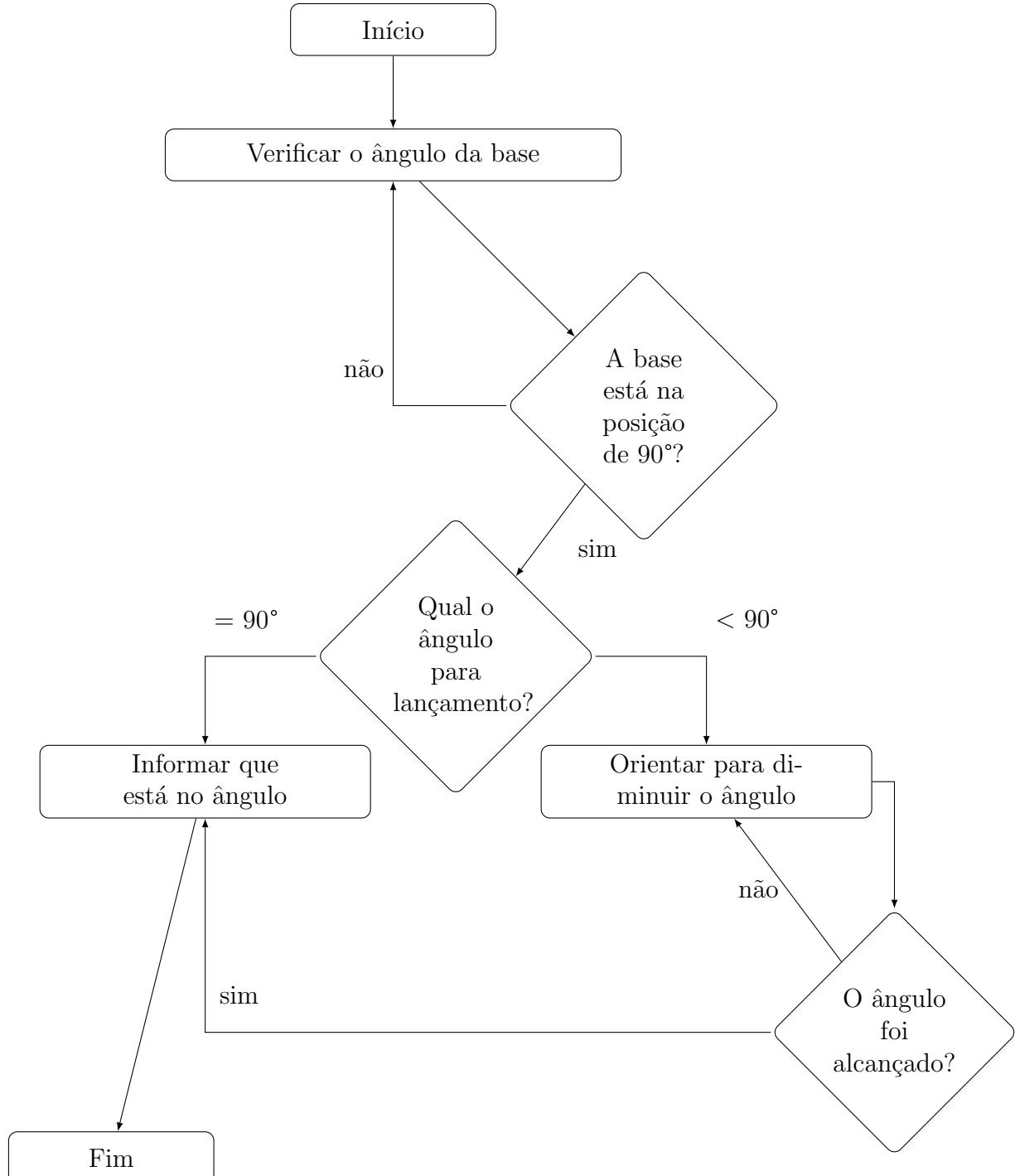
Figura 10: Fluxograma do funcionamento da etapa para calibrar o motor NEMA



Fonte: Autoria própria, 2018

Possuindo também o ângulo de lançamento é necessário calibrar o ângulo da base de lançamento conforme as orientações apresentadas no fluxograma da Figura 11.

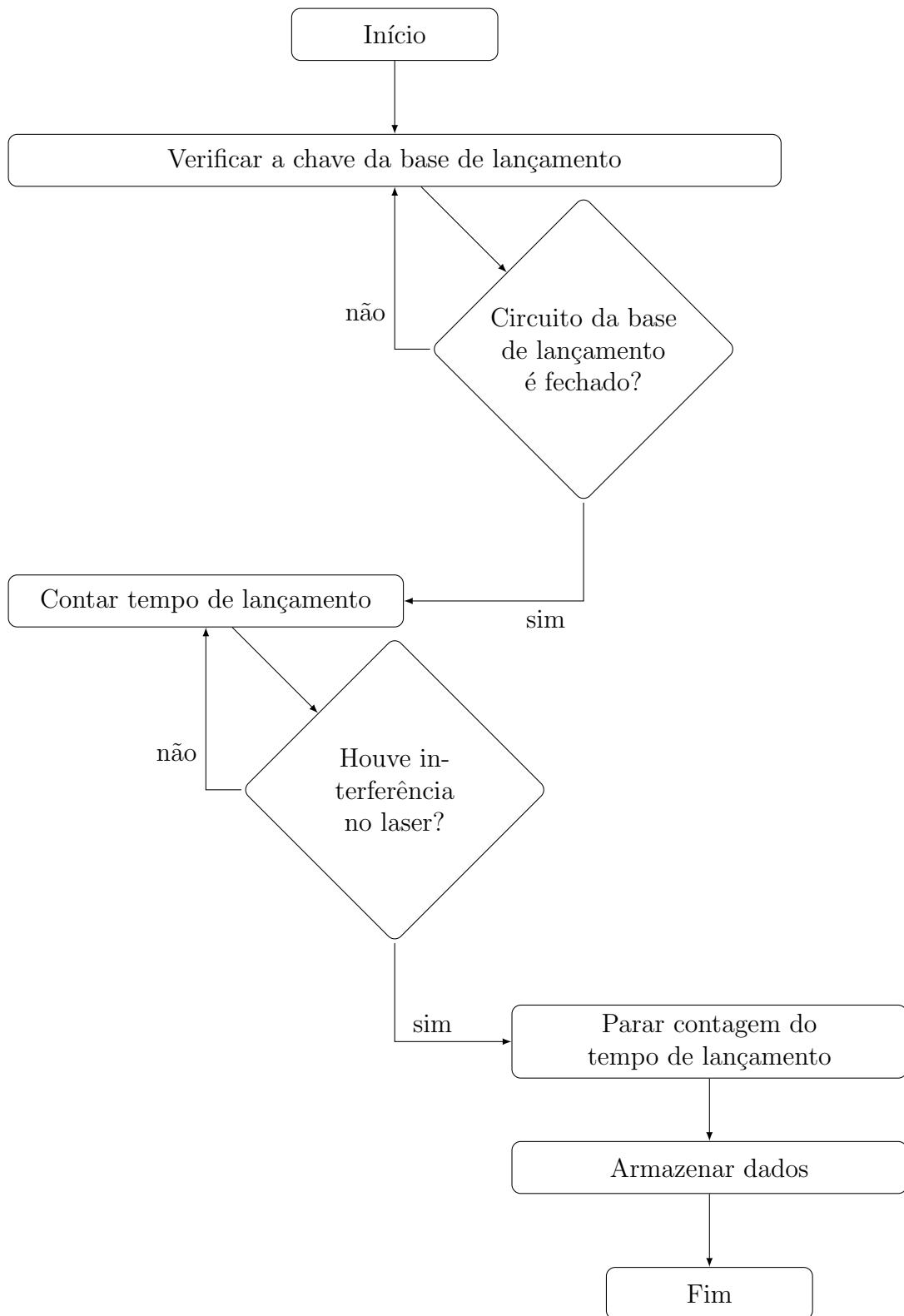
Figura 11: Fluxograma do funcionamento da etapa para configurar o ângulo de lançamento



Fonte: Autoria própria, 2018

Ao permitir que o lançamento ocorra, é preciso que ocorram as etapas do fluxograma da Figura 12 para obtenção dos dados do lançamento, ou seja, apenas quando todos os dados forem colhidos será permitido que o usuário possa visualizá-los.

Figura 12: Fluxograma da obtenção dos dados

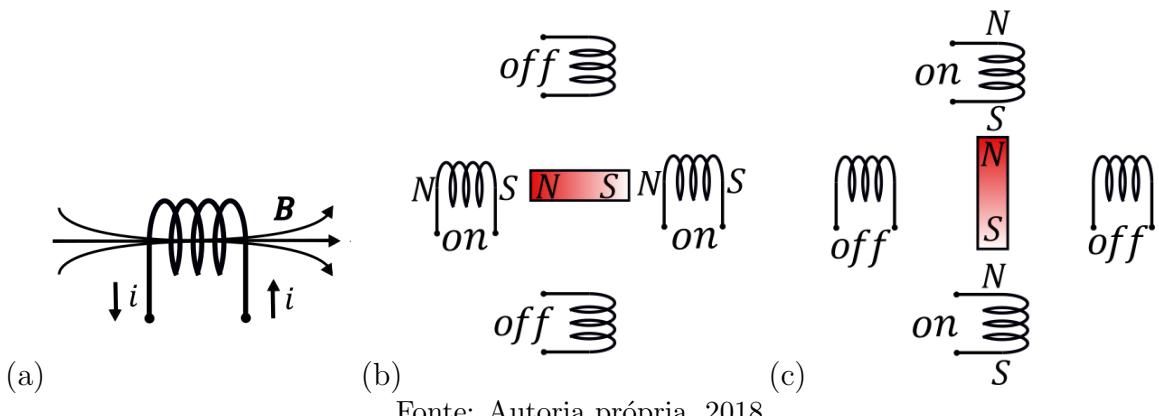


Fonte: Autoria própria, 2018

5.2 Distensão da catraca com motor NEMA 23

Assim como a maioria dos motores, os motores de passo também atuam como transdutores eletromecânicos, transformando pulsos elétricos em rotações mecânicas. O funcionamento dos motores de passo é baseado na aplicação de conceitos eletromagnéticos. Sabe-se que quando uma corrente elétrica (i) percorre continuamente um solenoide, ocorre a produção de um campo magnético (B) uniforme no interior deste (Figura 13 (a)). A direção desse campo magnético pode ser invertida com a inversão do sentido da corrente. Com alguns solenoides é possível controlar a posição de um imã permanente conforme mostram as Figuras 13 (b), (c).

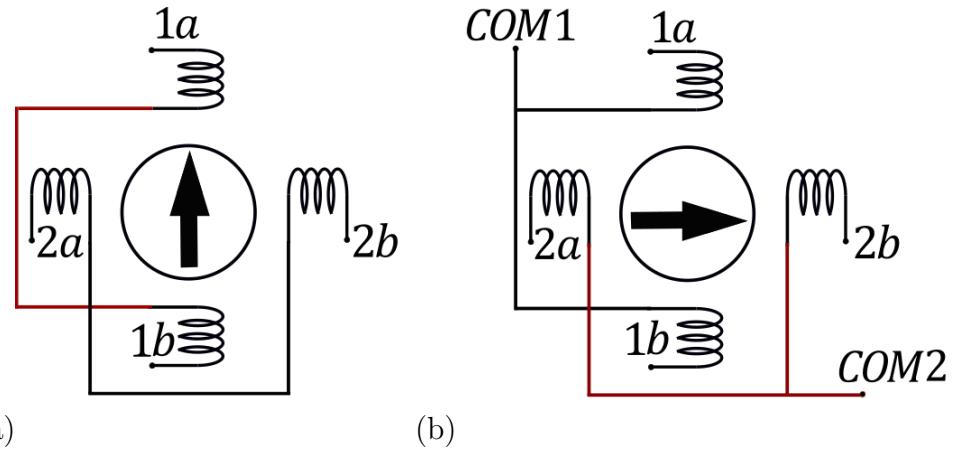
Figura 13: Funcionamento do motor de passo: (a) Solenoide percorrido por uma corrente; (b) Posição (1) de um imã permanente; (c) Posição (2) de um imã permanente



Os motores de passo podem ser diferenciados entre si pelo modo como as ligações com os solenoides são feitas. Para os motores com enrolamento similar ao apresentado na Figura 14 (a) tem-se dois solenoides, 1 e 2, sendo divididos em 1a, 1b e 2a, 2b. Neste caso, para inverter a polaridade do campo magnético é preciso inverter a corrente aplicada aos solenoides. Os motores com essas características são definidos como bipolares e possuem 4 fios.

Já para os motores unipolares (Figura 14 (b)) tem-se uma derivação central em cada uma das bobinas, $COM1$ e $COM2$. A polaridade do campo magnético vai depender de qual derivação é alimentada. Desse modo, o campo magnético é invertido sem a necessidade de inverter a corrente, ou seja, a polaridade do solenoide é fixa, apenas varia a alimentação ou não da derivação central.

Figura 14: Classificação dos motores de passo: (a) Distribuição para motor bipolar; (b) Distribuição para motor unipolar



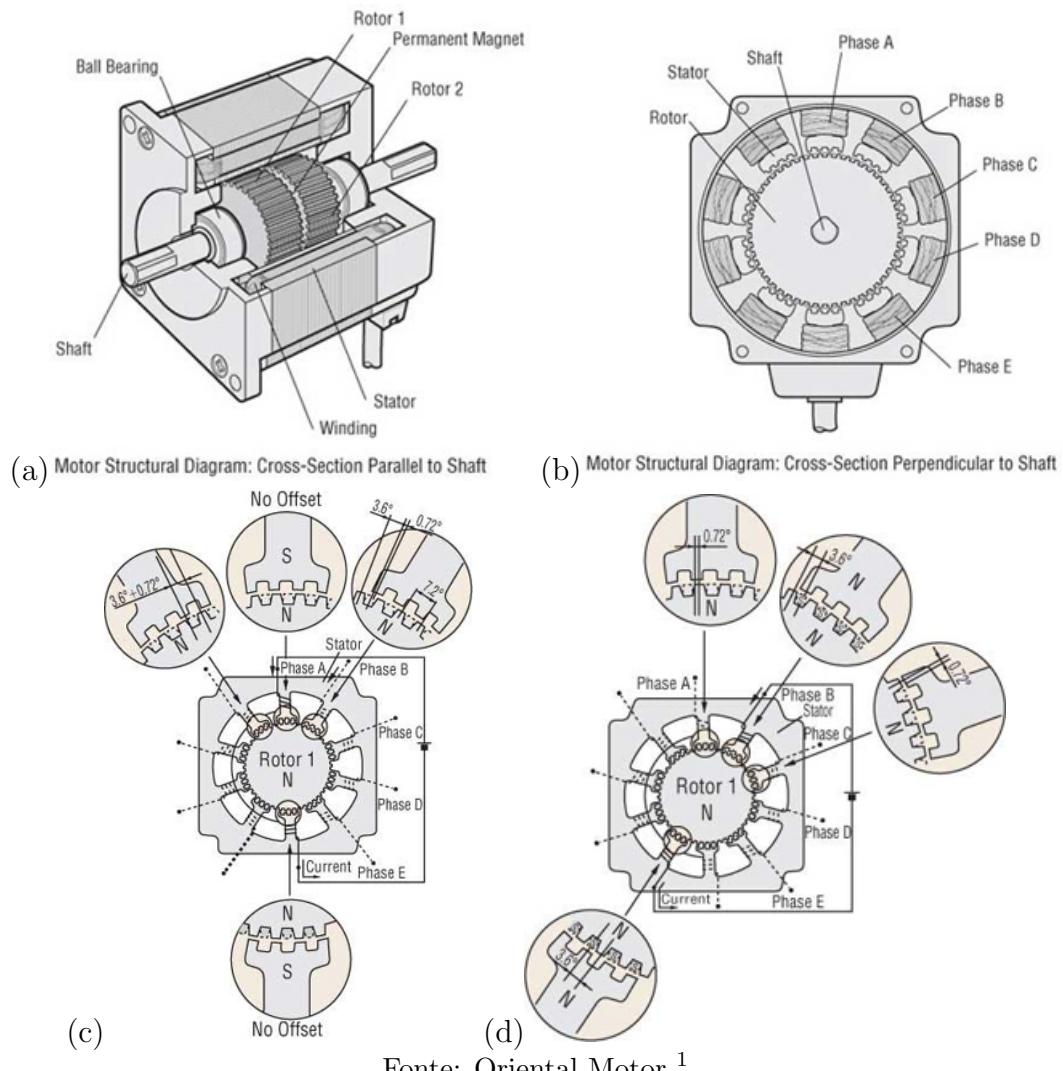
Fonte: Autoria própria, 2018

Comparando um motor unipolar e um motor bipolar de mesmo tamanho é nítida a necessidade de menos espiras ou fio com espessura menor para o motor unipolar. Assim, diminui-se a indutância desses motores se comparados aos bipolares. Com a indutância reduzida, diminui-se também a intensidade do campo magnético e, consequentemente, a força que atrai o imã permanente. Como resultado, o torque gerado pelo motor é menor.

A estrutura de um motor de passo baseia-se em dois rotores e um estator com dez pólos magnéticos, cada pólo com seu Enrolamento (*Winding*). Para o rotor há a subdivisão deste em Rotor 1 (*Rotor 1*), Rotor 2 (*Rotor 2*) e um Imã Permanente (*Permanent Magnet*). Assim, por meio de um Rolamento de Esferas (*Ball Bearing*) o Eixo (*Shaft*) realiza o movimento giratório (Figura 15 (a)). Além disso, tanto o rotor como o estator são multidentados, enquanto o primeiro é magnetizado axialmente, isto é, se o rotor 1 é o pólo norte, o rotor 2 será o pólo sul, o segundo é dividido em 10 pólos cuja polaridade irá variar de acordo com a corrente que percorre cada espira (Figura 15 (b)).

Quando uma Corrente (*Current*) percorre no Pólo A (*Phase A*) os polos são polarizados para sul e atraem o rotor 1, enquanto repelem o rotor 2. Essas duas forças contrárias mantêm o rotor estacionário, Sem Movimento (*No Offset*), (Figura 15 (c)). Nesse momento, o Pólo B (*Phase B*) não está excitado e os dentes estão desalinhados com o rotor 2, mas quando a corrente deixa de percorrer A e percorre B tem-se uma polarização norte em B que implica no alinhamento com o rotor 1 por atração e desalinhamento com o rotor 1 por repulsão (Figura 15 (d)).

Figura 15: Estrutura dos motores de passo: (a) Diagrama estrutural; (b) Estrutura do motor; (c) Excitação do pólo A; (d) Excitação do pólo B



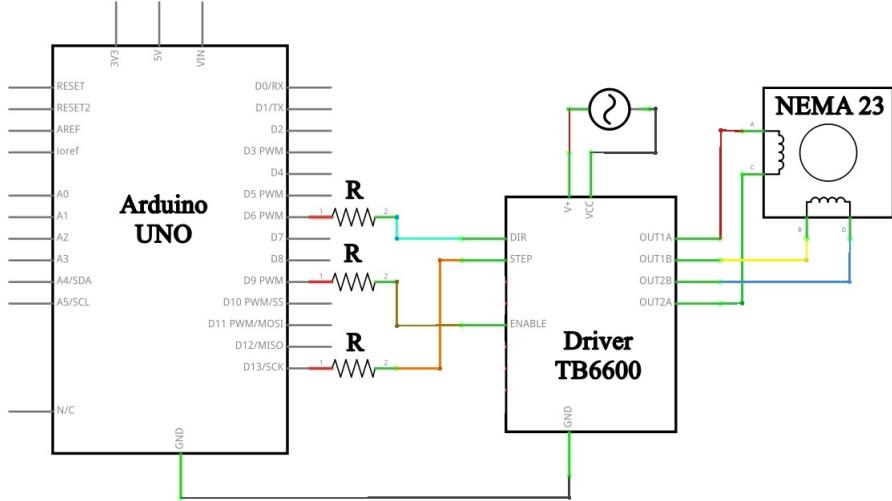
Fonte: Oriental Motor ¹

A alta aplicação dos motores de passo é justificada, principalmente, por eles serem mais precisos que os motores de corrente contínua e dispensarem o uso de potenciômetros ou codificadores. Essa característica ocorre devido ao fato do motor girar em passos discretos bem definidos.

O controle do motor NEMA WS23-0150-30-4 pode ser realizado conectando os solenoides ao driver TB6600. Conectando os pinos de direção (*direction*), pulso *pulse* e habilitação *enable* à pinos digitais no arduino é possível controlar o motor conforme ilustrado no circuito da Figura 16. Nesta sessão $R = 1k\ \Omega$.

¹Disponível em: <<http://www.orientalmotor.com/stepper-motors/technology/stepper-motor-overview.html>>. Acesso em maio de 2018.

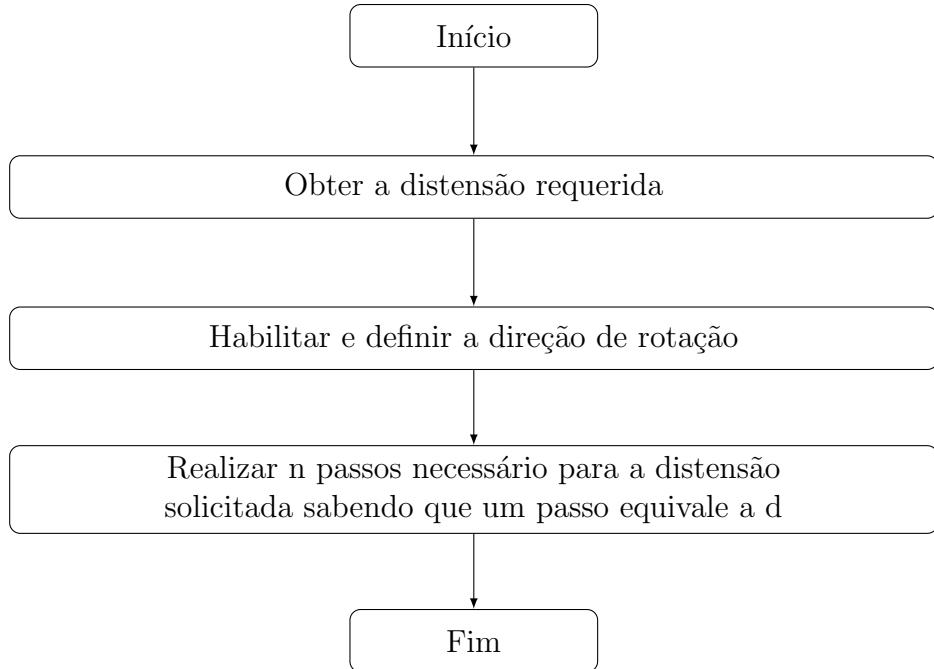
Figura 16: Circuito para controle do motor NEMA



Fonte: Autoria própria, 2018

O controle da rotação realizada pelo motor para gerar a distensão solicitada pelo usuário é feito conforme o fluxograma da Figura 17. Além disso, sabe-se que 360° equivalem a $2\pi R$ onde r_m é o raio médio da catraca utilizada, logo, cada passo (pulso no arduino) no motor é de $1,8^\circ$ e equivale a uma distensão de $d = 1,8(2\pi r_m)/360$.

Figura 17: Fluxograma do controle do motor NEMA com o arduino



Fonte: Autoria própria, 2018

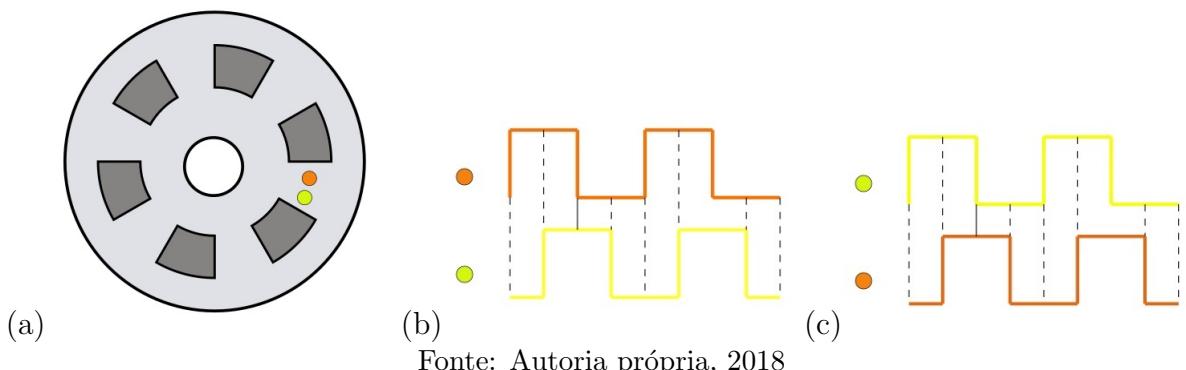
5.3 Determinação do ângulo para lançamento com encoder

O encoder KY-040 é um dispositivo eletrônico utilizado para medir a posição angular de um eixo em rotação. Ao rotacionar o eixo do encoder gera-se um sinal digital detectado pela conexão deste dispositivo a dois pinos digitais do arduino. Esse sinal gera pulsos quadrados de ondas.

O eixo do encoder consiste em um disco que possui áreas de contato separadas entre si e dois pinos individuais de contato Figura 18 (a). Ao serem conectados ao arduino vão gerar dois pulsos quadrados de onda a medida que o eixo rotaciona e ocorre o contato entre as áreas e os pinos. Os dois sinais gerados possuem defasagem de 90° entre si.

Através dos pinos pode-se detectar um passo para determinar tanto a posição como o sentido de rotação. Para representar apenas a posição basta analisar os pulsos gerados por qualquer um dos pinos. Porém, para o sentido de rotação, horário ou anti-horário, é preciso analisar os pulsos dos dois pinos. Supondo que em ambos os casos o encoder esteja na posição da Figura 18 (a), para uma rotação horária geram-se os pulsos da Figura 18 (b), enquanto que para uma rotação anti-horária geram-se os pulsos da Figura 18 (c).

Figura 18: Funcionamento do encoder: (a) Estrutura do encoder; (b) Rotação em sentido horário; (c) Rotação em sentido anti-horário



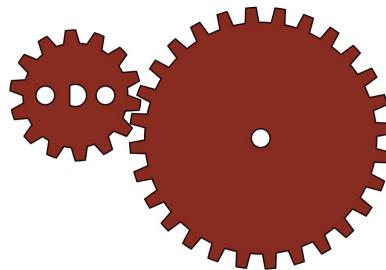
Fonte: Autoria própria, 2018

Para realizar uma volta completa neste encoder ocorrem 20 passos, logo, cada passo equivale a 18° , porém, essa variação é muito alta para o sistema. Realizando uma redução de rotações por minuto de 1:2, ou seja, conectam-se duas catracas onde uma possui um raio de R e uma quantidade n de dentes enquanto a outra possui um raio de $2R$ e uma quantidade de $2n$ no número de dentes.

A esquematização deste sistema apresentada na Figura 19 onde a catraca maior

será conectada à base de lançamento e a catraca menor será conectada ao encoder. Desse modo, à medida que a catraca maior realiza uma volta serão realizadas duas voltas na catraca menor, ou seja, cada volta no encoder será equivalente apenas a 180° na base de lançamento. Assim, cada passo do encoder passa a ser equivalente a 9° para o ângulo de lançamento.

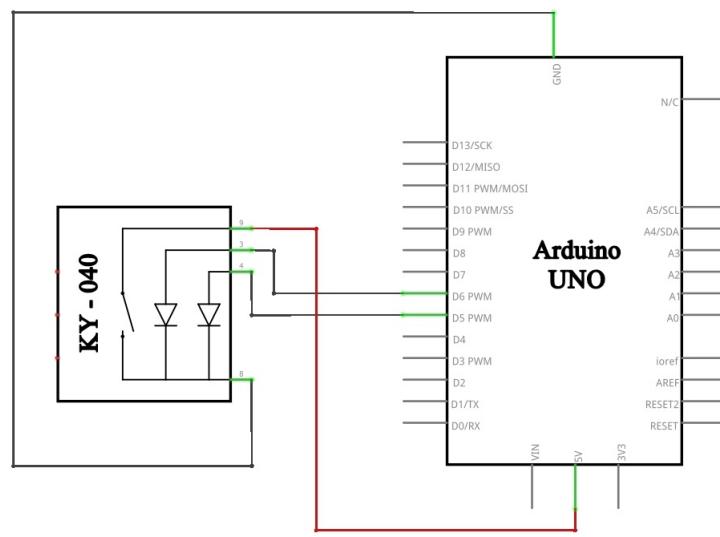
Figura 19: Redução de rotações por minuto (rpm) com catracas para o encoder



Fonte: Autoria própria, 2018

Para a obtenção dos dados do encoder basta conectar o encoder ao Arduino UNO. Para a obtenção dos dados do encoder basta conectar o encoder ao Arduino UNO. Conecte os pinos 9, 3, 4 e 8 do KY-040 ao Arduino UNO conforme o diagrama da Figura 20.

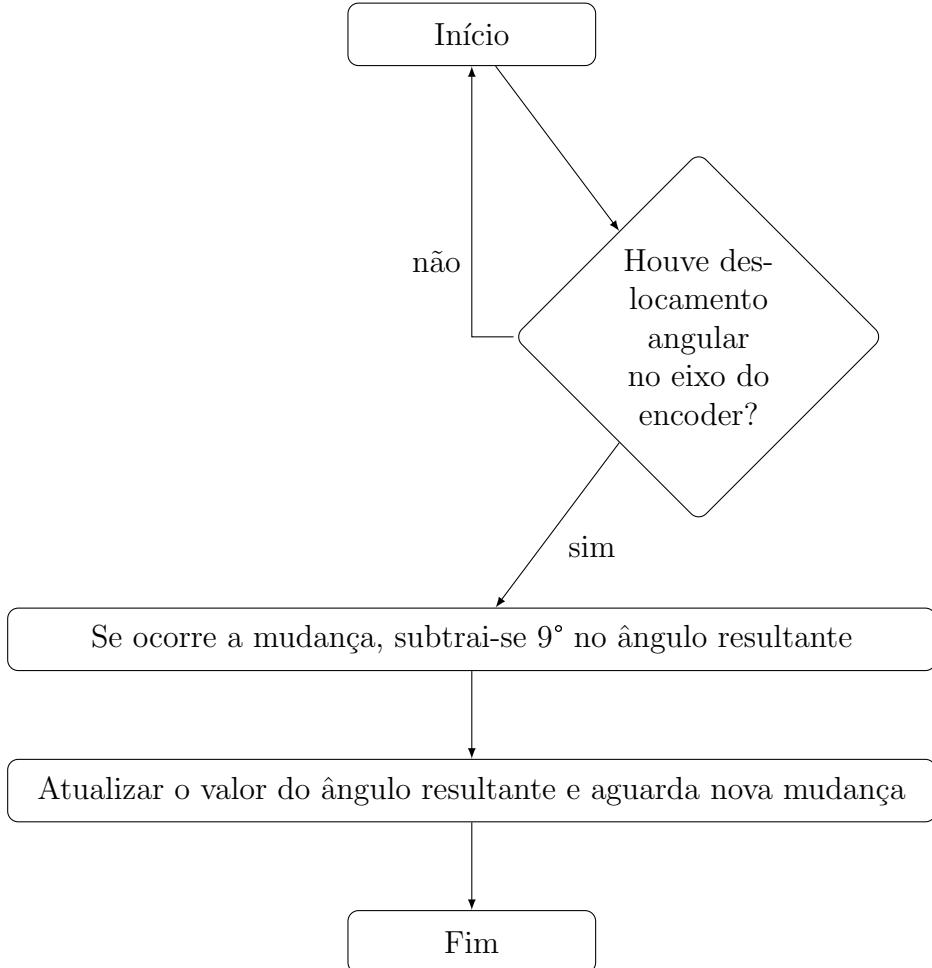
Figura 20: Circuito para controle do encoder



Fonte: Autoria própria, 2018

A obtenção dos dados do encoder é feita conforme o fluxograma apresentado na Figura 21.

Figura 21: Fluxograma do controle do encoder com o arduino



Fonte: Autoria própria, 2018

5.4 Sistema para detecção de interferência com laser e LDR

Ao transitarem de uma órbita interna para uma externa ou de uma externa para a interna os elétrons vão absorver ou emitir energia, respectivamente. A esse processo de absorção ou emissão de energia associam-se os fótons, ou seja, as partículas que transmitem a radiação eletromagnética (YOUNG; FREEDMAN, 2008b).

Os dois processos citados são tidos como espontâneos, ocorrem sem necessidade de um agente externo. Por outro lado, é comum que os elétrons estejam inseridos em uma órbita que necessite de mais energia que a sua. Assim, estão propensos a emitirem radiação eletromagnética e reduzirem o raio de sua órbita. Esse processo, entretanto, costuma ser demorado. Para estimular o decaimento energético desse elétron, é emitido um fóton que o faz passar para uma órbita menor e emitir também um fóton idêntico ao que estimulou o elétron (BAGNATO, 2001). Desse modo, originam-se dois fótons que serão responsáveis

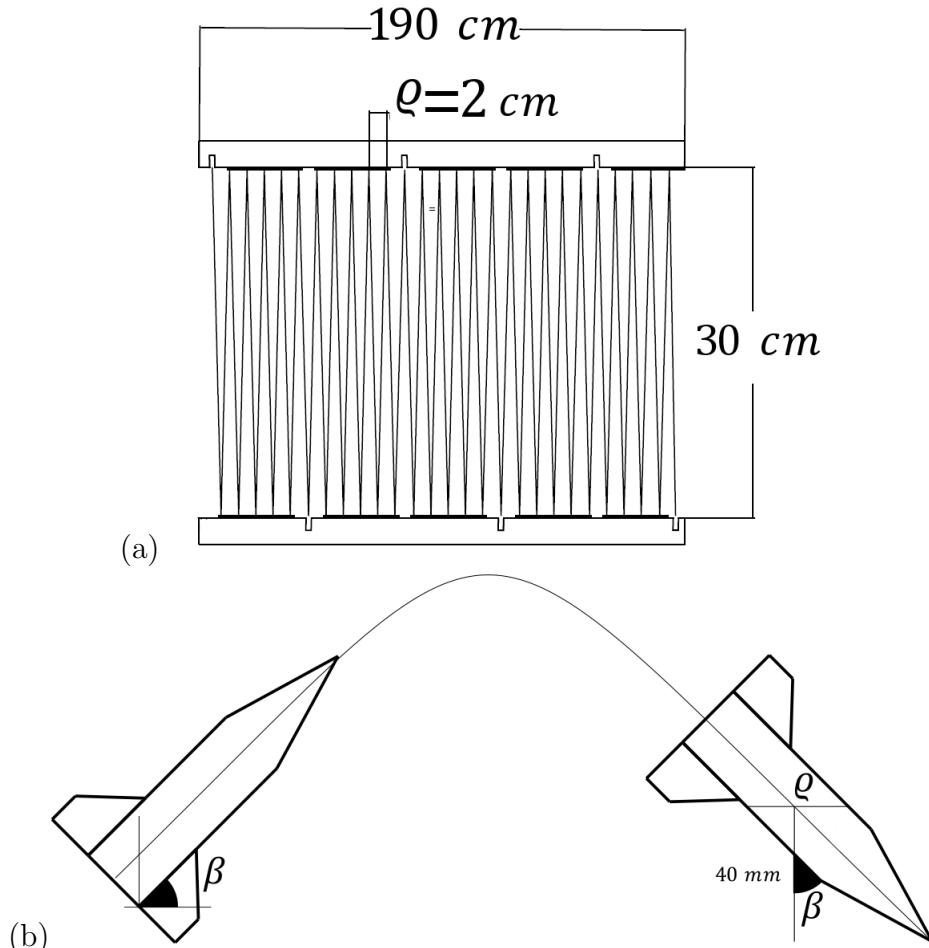
por outras emissões estimuladas.

Contabilizando diversas emissões como estas se tem um conjunto de fótons, todos idênticos entre si. Esse conjunto representa a ocorrência do surgimento de um feixe de luz - o laser. Em sua constituição o laser possui um meio ativo com átomos e moléculas em estado de excitação. Este meio ativo pode ser gasoso, líquido ou sólido. Por meio de um agente externo a energia é fornecida ao sistema e os átomos adquirem elétrons em estados excitados. Após o início da emissão estimulada, surgem os primeiros fótons e com o uso de espelhos possibilita-se a realização de múltiplas reflexões. Por fim, esses fótons ultrapassam um local denominado ressonador óptico e com um alto quantitativo dessas partículas é possível observar a formação de um feixe de luz (BAGNATO, 2001).

Na construção da estrutura de pouso do foguete de dimensão $190\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ (Figura 22) (a)) foram fixados uma série de espelhos dimensionados de modo a receber múltiplas reflexões do feixe de luz proveniente de um laser. Os espelhos são representados como a estrutura em com preenchimento em preto, enquanto que o laser ou LDR por um retângulo vazado na estrutura, por fim, o feixe de luz é indicado pela linha que segue entre os espelhos. Levando em consideração a perda de energia durante cada interação do feixe com o espelho, foi localizado em uma extremidade da estrutura um sensor LDR de área suficiente para receber o feixe do laser, a saber, 4 mm .

O espaçamento consecutivo entre os pontos de interação do espelho e o feixe de luz, δ , foi ajustado de modo a sempre ocorrer a interceptação no feixe pelo foguete na configuração ilustrada na Figura 22 (b). Para este estudo considerou-se que os feixes de luz estariam distanciados em $4,5\text{ cm}$ do solo. Como ϱ assume valor mínimo que para o ângulo de lançamento igual a 90° , para o caso do foguete descendo na vertical, considerou-se $\varrho = 20\text{ mm}$ referente a 4 mm menor que o diâmetro do cilindro do foguete sendo que os 4 mm atuam como uma margem de garantia para que o foguete cause interferência no feixe.

Figura 22: Dimensionamento da estrutura com base no ângulo de ataque: (a) Caminho percorrido pelo laser com variável de largura; (b) Ângulo de ataque no foguete



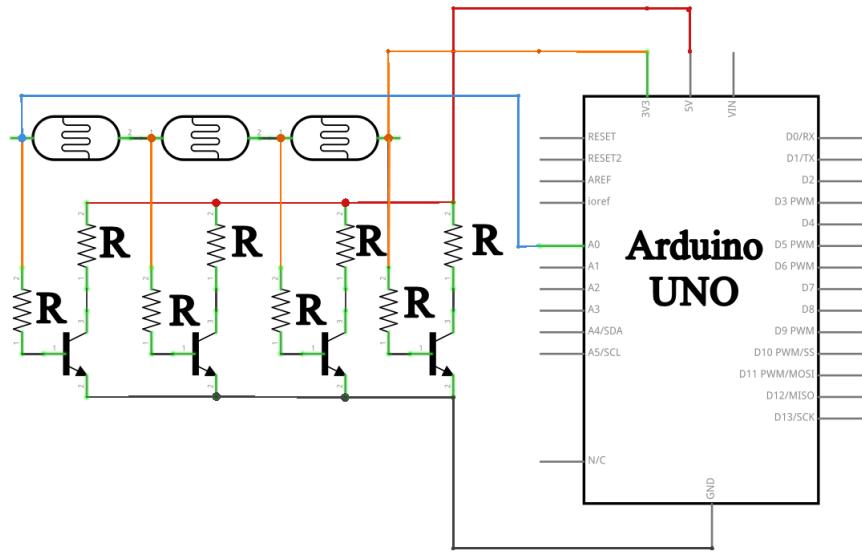
Fonte: Autoria própria, 2018

Um sensor LDR comporta-se como um resistor elétrico que varia sua resistência conforme a incidência da luz. Para uma luminosidade alta tem-se uma baixa resistência enquanto que uma baixa luminosidade leva a uma resistência alta. A composição desse componente eletrônico é o sulfeto de cádmio.

Associado ao efeito fotoelétrico, esse semicondutor tem ruptura das ligações dos elétrons entre os átomos com incidência de luminosidade (radiação eletromagnética). Após a absorção da energia carregada pelos fótons, os elétrons que antes participavam das ligações atômicas, tornam-se elétrons livres e proporcionam uma condução cada vez maior no material.

No circuito da Figura 23 esses dispositivos foram inseridos no terminal da base de transistores BC548 com o terminal da base e o terminal do coletor com resistores de $R = 2,2 \text{ k}\Omega$. Esses transistores, entretanto, possuem o terminal do coletor conectado aos 5 V do arduino e o emissor ao GND conforme o circuito da Figura 23.

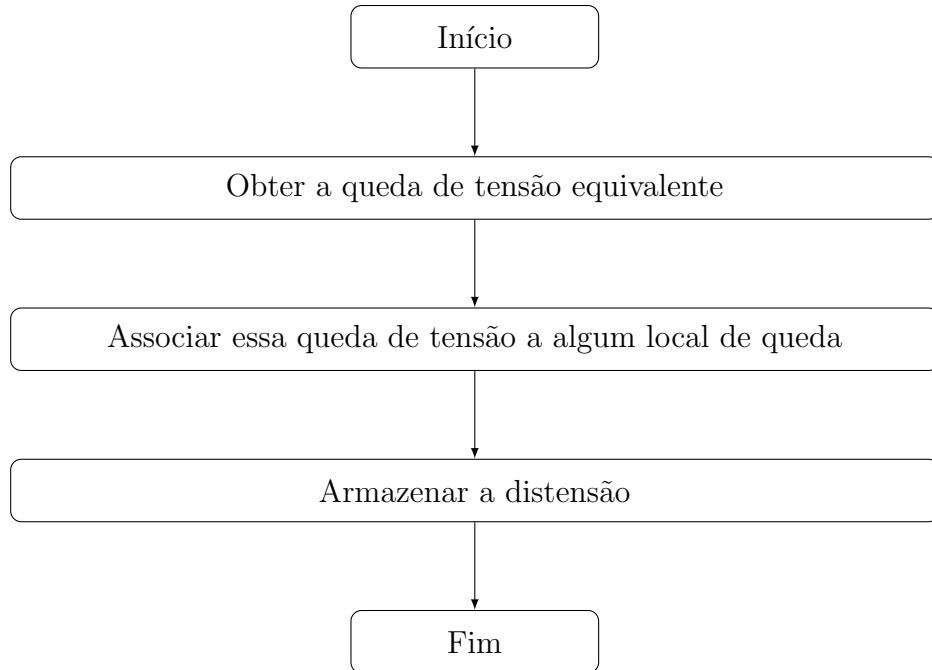
Figura 23: Circuito para queda de tensão com LDR



Fonte: Autoria própria, 2018

A interpretação dos dados conforme a interação com o sistema é feita diante do fluxograma da Figura 24.

Figura 24: Fluxograma da análise de queda de tensão para determinar o local da queda



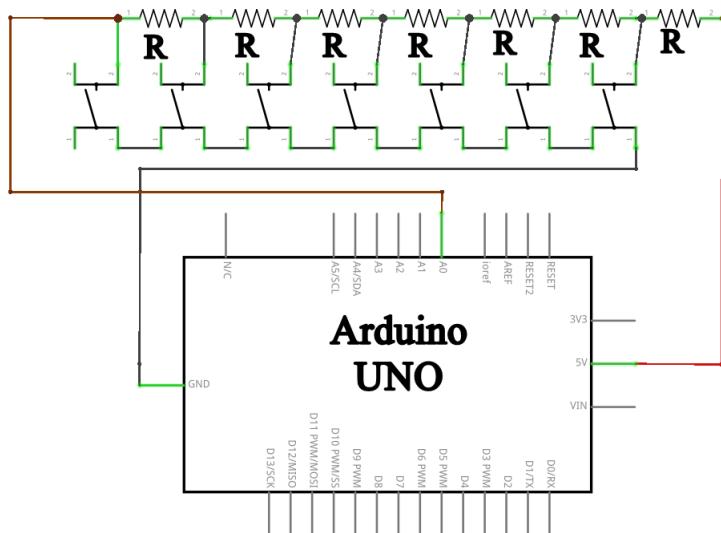
Fonte: Autoria própria, 2018

5.5 Circuito chaveado com queda de tensão

Utilizando resistores de $R = 10 \text{ k}\Omega$ e a fonte de tensão de 5 V do arduino monta-se o circuito da Figura 25. A representação de chave nos circuitos é referente a utilização de botões do tipo *pushbutton* que atuam como chaves, fechada quando pressionado e aberta quando livre, ou ao próprio circuito sendo aberto e fechado por uma superfície de contato.

Quando a primeira chave haverá uma queda de tensão proporcional a R , porém, se apenas a segunda fechar haverá uma queda de tensão proporcional a $2R$ e assim sucessivamente. Os pinos analógicos no arduino apresentam leitura em uma escala que vai de 0 à 1023, desse modo, ao associar essa leitura ao valor das tensões obtidas no circuito tem-se uma escala de 1023 (Unidades do Arduino) : 5 (Volts).

Figura 25: Circuito chaveado com queda de tensão

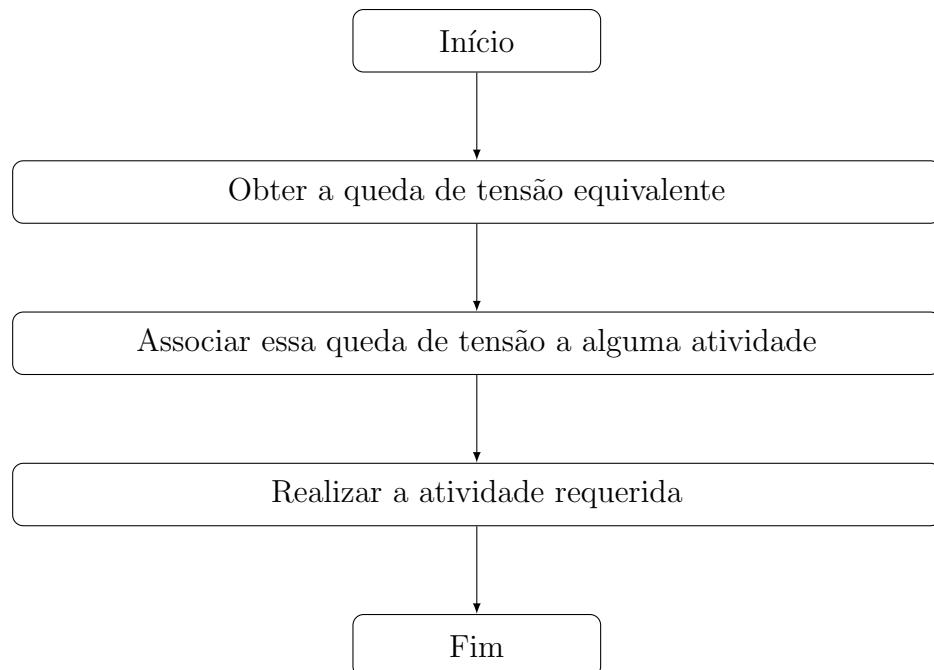


Fonte: Autoria própria, 2018

A análise da queda de tensão resultante e associação desta a algum comando, sendo eles: (1) Passar a etapa no LCD, (2) Restaurar o sistema, (3) Incrementar valores de 1,2 cm ou 9° na distensão e no ângulo, respectivamente, (4) Incrementar valores de 6 cm ou 9° na distensão e no ângulo, respectivamente, (5) Permitir o lançamento, (6) Verificar se o ângulo da base está em 9° antes de orientar o usuário a ajustar a base para o ângulo de lançamento e (7) Detectar o instante em que o foguete deixa a base.

Para subtrair um valor na distensão ou ângulo utilizou-se um outro botão, mas este conectado diretamente à um pino digital do arduino. Quando pressionado, juntamente com o botão para o valor da distensão ou ângulo, realizará a subtração.

Figura 26: Fluxograma da análise de queda de tensão o arduino

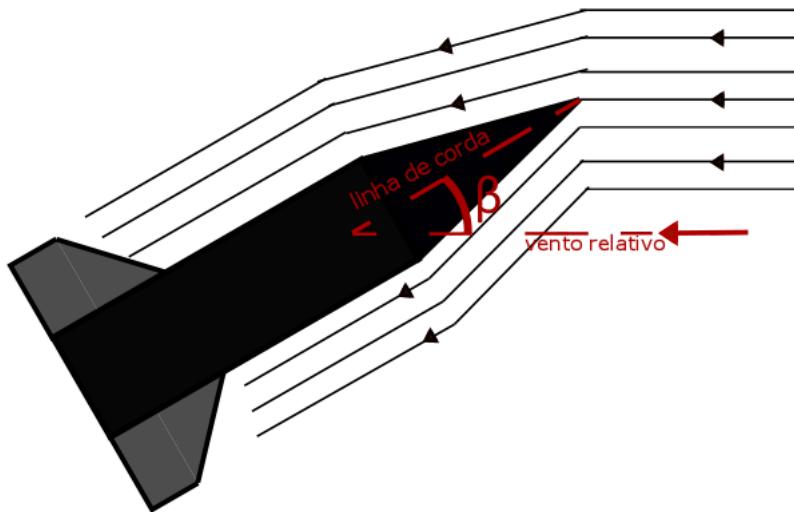


Fonte: Autoria própria, 2018

6 MOVIMENTO DO FOGUETE

Quando lançado, o foguete passa a sofrer arrasto, ou seja, o ar passa a interagir com o corpo de modo a reduzir sua velocidade. Para a Figura 27 o ângulo β de ataque é definido como a medida angular entre a linha de corda e a velocidade relativa do vento. Na medida em que o ângulo de ataque aumenta também aumentam-se, até um certo ponto, as forças de arrasto e de sustentação (MAHLER, 2014).

Figura 27: Arrasto no foguete



Fonte: Autoria própria, 2018

O uso de uma coifa permite que o foguete siga a trajetória com o arrasto reduzido. Já as empennas são asas de pequena espessura distribuídas na extremidade oposta à coifa com o mesmo espaçamento entre si. Elas auxiliam na estabilidade do voo com o direcionamento do ar (NOGUEIRA; FILHO; DE SOUZA, 2009).

Neste capítulo são apresentados dois casos para o estudo do movimento do projétil, porém, ela apenas é possível por considerar que o foguete pode ser considerado como uma partícula, conforme as discussões da sessão 4.1. Na análise da sessão 6.1 não há força resistiva no ar. Por outro lado, a força resistiva, quando existir, obterá a forma

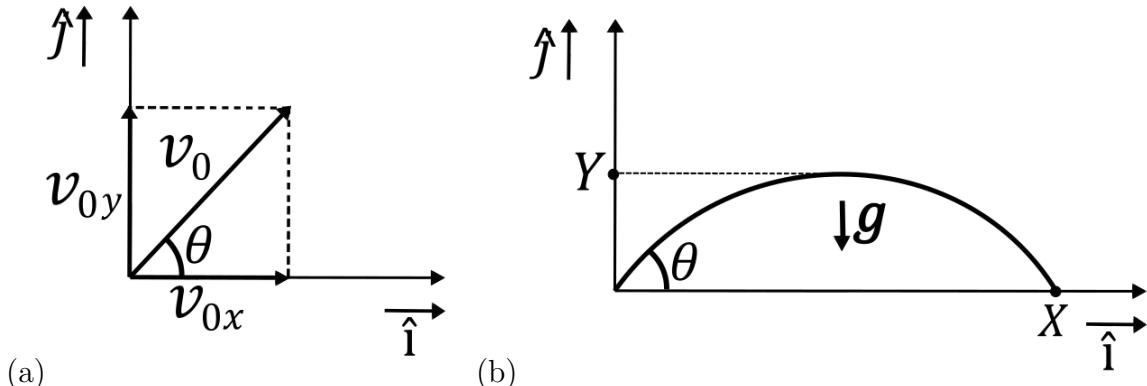
$f = \beta v^n$ e n assumirá os valores de 1 ou 2 para baixas velocidades conforme será visto nas sessões 6.2 e 6.3, respectivamente.

6.1 Movimento sem resistência do ar

Neste caso considera-se o lançamento de uma partícula com massa, m , constante durante todo o trajeto e sendo a força gravitacional a única atuante na partícula, pois a força resistiva do ar é nula.

No momento inicial, $t = 0$, a velocidade linear é v_0 e possui um ângulo θ com a horizontal (Figura 28 (a)). Conforme a Figura 28 (b) apenas a força da gravidade atuará devido à \mathbf{g} e as componentes Y e X são referentes aos valores de máximos assumidos no eixo vertical e no eixo horizontal, respectivamente.

Figura 28: Movimento curvilíneo: (a) Vetor velocidade; (b) Movimento curvilíneo sem resistência do ar



Fonte: Autoria própria, 2018

Desse modo, pela 2^a lei de Newton,

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_p = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\mathbf{g} \quad (6.1)$$

Pode-se definir \mathbf{v} por,

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (6.2)$$

Enquanto que \mathbf{a} é definida por

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (6.3)$$

Desse modo,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m}(m\mathbf{g}) = -g\hat{\mathbf{j}}$$

Nas coordenadas cartesianas,

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} = 0\hat{\mathbf{i}} \\ \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} = \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} = -g\hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (6.4)$$

Para as condições de contorno tem-se,

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (6.5)$$

Integrando as equações 6.4 no tempo nas condições de contorno obtém-se para

$\hat{\mathbf{i}}$,

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} dv = \int_{t_0}^t a_x dt \implies v_x - v_{0x} = 0, \text{ pois } a_x = 0$$

$$\mathbf{v}_x = v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{i}} \quad (6.6)$$

Já para $\hat{\mathbf{j}}$,

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv = \int_{t_0}^t a_y dt \implies v_y - v_{0y} = -gt, \text{ pois } a_y = -g$$

$$\mathbf{v}_y = (v_0 \sin \theta - gt)\hat{\mathbf{j}} \quad (6.7)$$

Integrando as equações 6.6 e 6.7 no tempo nas condições de contorno é possível obter uma equação de posição no tempo, logo, para $\hat{\mathbf{i}}$,

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v_0 \cos \theta dt$$

$$\mathbf{x}(t) = (v_0 \cos \theta)t\hat{\mathbf{i}} \quad (6.8)$$

Para $\hat{\mathbf{j}}$,

$$\int_0^{y(t)} dy = \int_{t_0}^t (v_0 \sin \theta - gt) dt$$

$$\mathbf{y}(t) = \left(y_0 + (v_0 \sin \theta)t - \frac{gt^2}{2} \right) \hat{\mathbf{j}} \quad (6.9)$$

Isolando t na equação 6.8 e sabendo pela Figura 28 (a) que $v_{0y}/v_{0x} = \tan \theta$, a equação 6.9 torna-se,

$$y(x) = (\tan \theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta)^2}x^2 \quad (6.10)$$

A equação 6.10 é uma função polinomial do segundo grau, com concavidade para baixo. Derivando esta no tempo e igualando o resultado a 0 é possível descobrir a coordenada no eixo $\hat{\mathbf{i}}$, x_Y , em que o valor máximo da vertical é atingido, Y . Derivando obtém-se,

$$\frac{d(y(x))}{x} = (\tan \theta) - \frac{g}{(v_0 \cos \theta)^2}x_Y = 0$$

onde $x_Y = (v_0^2 \cos \theta \sin \theta)/g = (v_0^2 \sin(2\theta))/2g$. O valor de Y é encontrado substituindo esse resultado na equação 6.10.

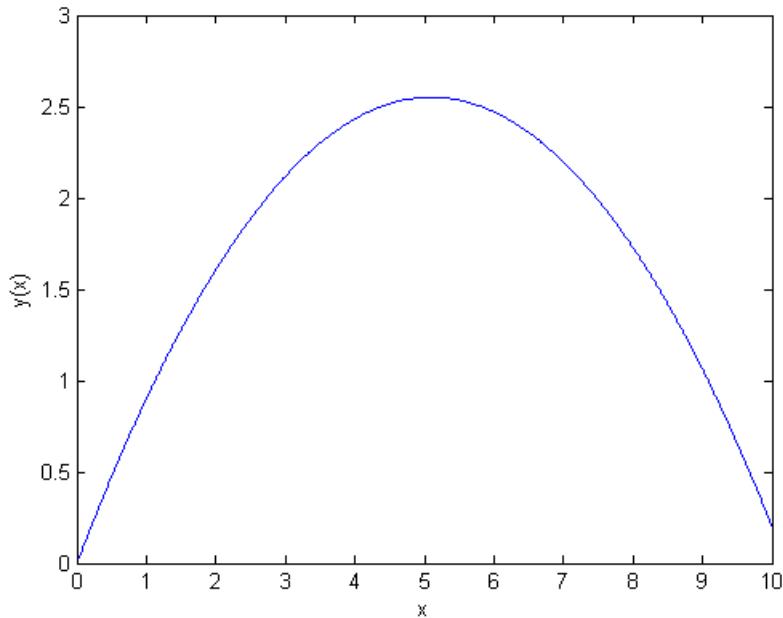
Para descobrir o alcance horizontal basta igualar a equação 6.10 a 0. Ambos os valores de X e Y são apresentados abaixo,

$$\begin{cases} X\hat{\mathbf{i}} = \frac{(v_0^2 \sin(2\theta))}{g} \hat{\mathbf{i}} \\ Y\hat{\mathbf{j}} = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (6.11)$$

Observa-se que o valor de X é duas vezes o valor de x_Y . Isto ocorre em decorrência da ausência da força resistiva. Entretanto, as equações em 6.11 ainda dependem do ângulo de lançamento θ . Derivando ambas as equações 6.11 em relação a θ e igualando a 0 percebe-se que o maior alcance horizontal e vertical são dados, respectivamente, para ângulos de 45° e 90° . Por fim, substituindo a equação 6.11 para a distância na equação 6.8 vê-se que o tempo do trajeto é $T = (2v_0 \sin \theta)/g$.

Através do *software MATLAB* gerou-se o gráfico da Figura 29 referente a equação 6.10 com ângulo de lançamento (θ) de 45° , velocidade inicial (v_0) de 10 m/s e aceleração da gravidade (\mathbf{g}) de $9,8 \text{ m/s}^2$.

Figura 29: Gráfico para o lançamento curvilíneo sem a resistência do ar

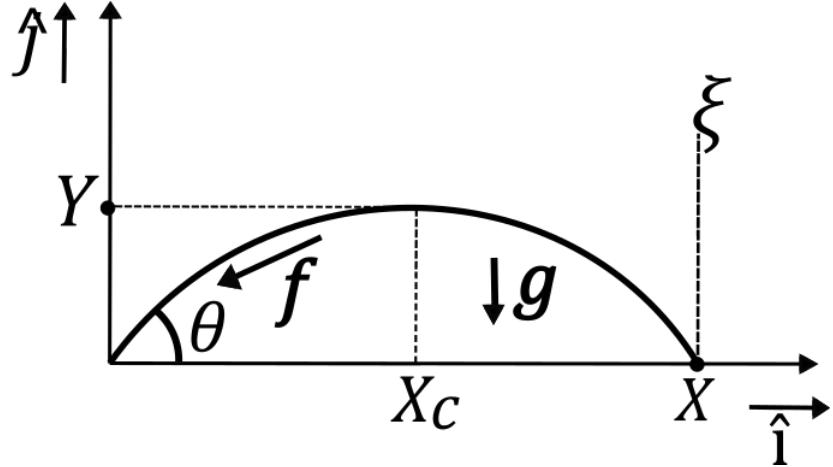


Fonte: Autoria própria, 2018

6.2 Movimento com força resistiva para baixas velocidades

Sabe-se que a força de arrasto descrita por $\mathbf{f} = \beta \mathbf{v}^n$ é mais fiel para velocidades mais baixas usando-se $n = 1$. Nesta sessão será analisada a trajetória de um corpo ao ser lançado submetido à uma força de arrasto $\mathbf{f} = \beta \mathbf{v}^1$ (DE FIGUEIREDO; NEVES, 2015). Considerando o caso em que o arrasto interfere no lançamento do projétil e é proporcional ao módulo da velocidade (Figura 30). Esta força age no sentido contrário à velocidade instantânea, logo, possui resultante em ambas as coordenadas cartesianas.

Figura 30: Movimento curvilíneo com força resistiva



Fonte: Autoria própria, 2018

Pela 2^a lei de Newton, a força resultante será,

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_p + \mathbf{f} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\mathbf{g} - \beta\mathbf{v}, \beta = cte \quad (6.12)$$

Pode-se definir \mathbf{v} por,

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (6.13)$$

Enquanto que para \mathbf{a} ,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (6.14)$$

Desse modo,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m}(m\mathbf{g} + \beta\mathbf{v}) = -\left(g\hat{\mathbf{j}} + \frac{\beta v_x \hat{\mathbf{i}}}{m} + \frac{\beta v_y \hat{\mathbf{j}}}{m}\right)$$

Nas coordenadas cartesianas,

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{\mathbf{i}} = -\frac{\beta v_x}{m} \hat{\mathbf{i}} \\ \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} = \frac{d^2y}{dt^2} \hat{\mathbf{j}} = -\left(g + \frac{\beta v_y}{m}\right) \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (6.15)$$

Para as condições de contorno tem-se,

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (6.16)$$

Integrando as equações 6.15 nas condições de contorno obtém-se para $\hat{\mathbf{i}}$,

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\beta}{m} \int_0^t dt \implies [\ln(v_x)]_{v_{0x}}^{v_x} = -\frac{\beta t}{m}$$

$$\ln\left(\frac{v_x}{v_{0x}}\right) = -\frac{\beta t}{m} \implies \mathbf{v}_x = (v_0 \cos \theta) e^{-\beta t/m} \hat{\mathbf{i}} \quad (6.17)$$

Já para $\hat{\mathbf{j}}$,

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv_y}{g + \frac{\beta v_y}{m}} = - \int_0^t dt$$

Mudando de variável tem-se $u = g + \beta v_y / m \implies du = \beta dv_y / m$, logo,

$$\begin{aligned} \int_{v_y(0)}^{v_y} \frac{dv_y}{g + \frac{\beta v_y}{m}} &= - \int_0^t dt \\ \frac{m}{\beta} \left[\ln\left(g + \frac{\beta v_y}{m}\right) - \ln\left(g + \frac{\beta v_0 \sin \theta}{m}\right) \right] &= -t \\ \left(g + \frac{\beta v_y}{m}\right) &= \left(g + \frac{\beta v_0 \sin \theta}{m}\right) e^{-\beta t/m} \\ \mathbf{v}_y &= \left[\left(v_0 \sin \theta + g \frac{m}{\beta}\right) e^{-\beta t/m} - g \frac{m}{\beta} \right] \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Reescrevendo 6.17 e 6.18 de modo que $\gamma = \beta/m$,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_x = (v_0 \cos \theta) e^{-\gamma t} \hat{\mathbf{i}} \\ \mathbf{v}_y = \left[\left(v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma}\right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \right] \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \quad (6.19)$$

Na ausência de atrito do ar tem-se $\gamma \rightarrow 0$. Aplicando o limite na equação 6.19 para $\hat{\mathbf{i}}$,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} v_x = (v_0 \cos \theta) \lim_{\gamma \rightarrow 0} e^{-\gamma t} = v_0 \cos \theta \quad (6.20)$$

Já para $\hat{\mathbf{j}}$ na equação 6.19,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} v_y = (v_0 \sen \theta) \lim_{\gamma \rightarrow 0} e^{-\gamma t} + g \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\gamma t} - 1}{\gamma} \right) = v_0 \sen \theta + g \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\gamma t} - 1}{\gamma} \right)$$

Aplicando a regra de l'Hopital tem-se,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} v_y = v_0 \sen \theta + g \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{d(e^{-\gamma t})}{dt} - \frac{d(1)}{dt}}{\frac{d\gamma}{dt}} \right) = v_0 \sen \theta + g \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{-te^{-\gamma t}}{1} \right), \text{ logo,}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} v_y = v_0 \sen \theta - gt \quad (6.21)$$

Retornando para as equações 6.19, obtém-se, por meio da integral destas para

$\hat{\mathbf{i}}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{x(t)} dx &= \int_0^t v_0 \cos \theta e^{-\gamma t} dt \implies x(t) = v_0 \cos \theta \left[\frac{e^{-\gamma t}}{-\gamma} \right]_0^t \\ \mathbf{x}(t) &= v_0 \cos \theta \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Já para $\hat{\mathbf{j}}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{y(t)} dy &= \int_0^t \left(v_0 \sen \theta + \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} dt - \int_0^t \frac{g}{\gamma} dt \\ y(t) &= \left(v_0 \sen \theta + \frac{g}{\gamma} \right) \left[\frac{e^{-\gamma t}}{-\gamma} \right]_0^t - \frac{gt}{\gamma} \\ \mathbf{y}(t) &= \left[\left(v_0 \sen \theta + \frac{g}{\gamma} \right) \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) - \frac{gt}{\gamma} \right] \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Aplicando o limite em que $\gamma \rightarrow 0$ e por l'Hopital em 6.22,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} x(t) = v_0 \cos \theta \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{d(1)}{dt} - \frac{d(e^{-\gamma t})}{dt}}{\frac{d\gamma}{dt}} \right), \text{ donde,}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} x(t) = v_0 \cos \theta \lim_{\gamma \rightarrow 0} (-te^{-\gamma t}) = v_0 \cos \theta \quad (6.24)$$

Analogamente para 6.23 tem-se,

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} y(t) &= v_0 \sen \theta \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) + g \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma^2} \right) - gt \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} y(t) &= v_0 \sen \theta \lim_{\gamma \rightarrow 0} (-te^{-\gamma t}) + g \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\gamma t} - t\gamma}{\gamma^2} \right) \end{aligned}$$

Aplicando l'Hopital consecutivas vezes,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} y(t) = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + g \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{te^{-\gamma t} - t}{2\gamma} \right) = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + g \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{-t^2 e^{-\gamma t}}{2} \right), \text{ logo,}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} y(t) = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \frac{gt^2}{2} \quad (6.25)$$

As equações 6.24 e 6.25 representam as equações desta análise atuando no caso em que γ é muito pequeno, ou seja, não há força resistiva do ar. Desse modo, as equações obtidas aplicando o limite são idênticas às equações 6.8 e 6.9 para o eixo horizontal e vertical, respectivamente, apresentadas no sessão 6.1. Das equações 6.22 e 6.23 obtém-se a equação da trajetória da partícula,

$$y(x) = \left(\tan \theta + \frac{g}{\gamma v_0 \cos \theta} \right) x + \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma x}{v_0 \cos \theta} \right) \quad (6.26)$$

Aplicando o limite em 6.22 onde $t \rightarrow \infty$ vê-se que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[(v_0 \cos \theta) \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) \right] = (v_0 \cos \theta) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{v_0 \cos \theta}{\gamma} = \xi \quad (6.27)$$

O valor pelo limite da equação 6.27 representa o alcance horizontal do lançamento. O γ no denominador desta equação é proporcional à intensidade da força de arrasto. À medida que esta aumenta, o alcance horizontal diminui. Pela equação 6.19 para $\hat{\mathbf{i}}$ percebe-se que \mathbf{v}_x assume apenas valores positivos, logo, $\mathbf{v}_x dt = \mathbf{x}(t)$ é crescente e de acordo com 6.27 cresce em $[0, \xi]$.

Pela equação 6.26 faz-se,

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= \left(\tan \theta - \frac{g}{\gamma v_0 \cos \theta} \right) + \frac{g}{\gamma} \frac{1}{v_0 \cos \theta} \left(\frac{v_0 \cos \theta}{v_0 \cos \theta - \gamma x} \right) \\ \frac{dy(x)}{dx} &= y' = \left(\tan \theta + \frac{g}{\gamma v_0 \cos \theta} \right) - \frac{g}{\gamma} \left(\frac{1}{v_0 \cos \theta - \gamma x} \right) \end{aligned}$$

Para $y' > 0$ tem-se,

$$\tan \theta + \frac{g}{\gamma v_0 \cos \theta} > \frac{g}{\gamma} \left(\frac{1}{v_0 \cos \theta - \gamma x} \right)$$

$$\frac{\gamma v_0 \sin \theta + g}{v_0 \cos \theta} > \frac{g}{v_0 \cos \theta - \gamma x}$$

Pela equação 6.22,

$$x\gamma = v_0 \cos \theta - v_0 \cos \theta e^{-\gamma t} \Rightarrow v_0 \cos \theta - x\gamma = v_0 \cos \theta e^{-\gamma t}, \text{ logo,}$$

como o segundo termo da igualdade é sempre positivo,

$$(\gamma v_0 \sin \theta + g)(v_0 \cos \theta - \gamma x) > g v_0 \cos \theta$$

$$\gamma v_0^2 \sin \theta \cos \theta + g v_0 \cos \theta - \gamma x (\gamma v_0 \sin \theta + g) > g v_0 \cos \theta$$

$$\gamma v_0^2 \sin \theta \cos \theta > \gamma x (\gamma v_0 \sin \theta + g), \text{ de modo que,}$$

$$x < \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{\gamma v_0 \sin \theta + g} \quad (6.28)$$

De modo análogo, para $y' < 0$ obtém-se,

$$x > \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{\gamma v_0 \sin \theta + g} \quad (6.29)$$

Assim, a equação 6.26 é crescente em,

$$\left] 0, \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{\gamma v_0 \sin \theta + g} \right[\quad (6.30)$$

E decrescente em,

$$\left] \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{\gamma v_0 \sin \theta + g}, \xi \right[\quad (6.31)$$

Observa-se que em $x = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{\gamma v_0 \sin \theta + g}$ a derivada de y é $y' = 0$, ou seja, x é um ponto crítico e corresponde a um ponto de máximo da trajetória da partícula, denominado x_c . Para determinar a trajetória completamente, faz-se necessário obter a concavidade. Desta forma, é definido y'' ,

$$y'' = -\frac{g}{(v_0 \cos \theta - \gamma x)^2} \quad (6.32)$$

Com 6.32 obtém-se que para $\forall x, y'' < 0$ que representa a concavidade para baixo. Pela Figura 30 nota-se que apenas existe um ponto $X \in (x_c, \xi)$ denominado alcance horizontal, tal que $y = 0$. Pelo fato de $y(x)$ ser contínua em $(0, \xi)$, então, do Teorema do valor intermediário, existe um $X \in (x_c, \xi)$ tal que $y(X) = 0$. A unicidade deste X vem

do fato de que toda função estritamente decrescente num intervalo aberto é injetiva neste intervalo. Assim a partícula atinge o solo em $y = 0$ no ponto X que pode ser identificada pela equação

$$\left(\tan \theta + \frac{g}{\gamma v_0 \cos \theta} \right) X + \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma X}{v_0 \cos \theta} \right) = 0 \quad (6.33)$$

De 6.33 conclui-se que quanto maior o valor de γ menor será o alcance X , ou seja, a função implícita $X = X(\gamma)$ é decrescente quando $\frac{X}{\gamma} < 0$. Assim,

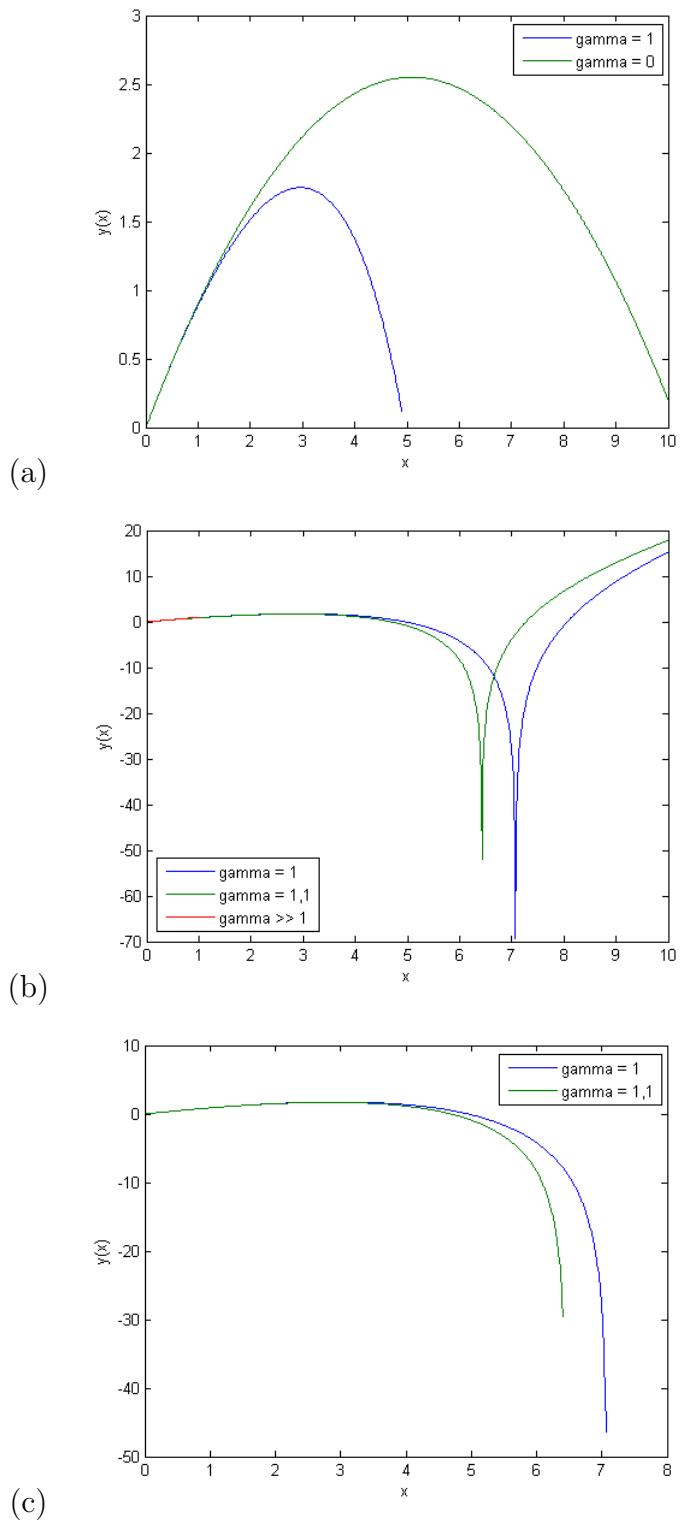
$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{g}{\gamma v_0 \cos \theta} - \frac{g}{\gamma(v_0 \cos \theta - \gamma X)} \frac{dX}{d\gamma} = \\ \frac{Xg}{\gamma^2} \left[\frac{1}{v_0 \cos \theta} + \frac{1}{v_0 \cos \theta - \gamma X} \right] + \frac{2g}{\gamma^3} \ln \left(1 - \frac{\gamma X}{v_0 \cos \theta} \right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Com ângulo de lançamento (θ) de 45° , velocidade inicial (v_0) de 10 m/s e aceleração da gravidade (\mathbf{g}) de $9,8 \text{ m/s}^2$, ou seja, as mesmas condições iniciais do gráfico apresentado na Figura 29 onde a resistência do ar é nula, foram obtidos os gráficos da Figura 31 também no *software MATLAB*. Para a Figura 31 (a) apresenta-se o caso em que não há força resistiva e o caso em que ela influencia. Nota-se que a existência da força resistiva irá adiantar a queda do projétil, pois atua em sentido oposto ao movimento deste.

De acordo com os parâmetros iniciais e pela equação 6.27 vê-se que o ξ assumirá um valor de aproximadamente $7,1 \text{ cm}$ para o $\gamma = 1$ adotado na Figura 31 (a), entretanto, pela Figura 31 (b) percebe-se que esse ξ atinge esse valor em um valor negativo para y e o gráfico da trajetória continua com aumento nos valores para y . Em, $\gamma = 1$, $\xi = 7,1$ enquanto que em $\gamma = 1,1$, $\xi = 6,5$. Assim, quanto maior foi o valor de γ menor será o alcance. Na Figura 31 (c) as trajetórias realizadas pela partículas foram restritas até o local em que é possível realizar uma análise física.

Além disso, se a força resistiva aumentar muito percebe-se pela equação 6.27 que o valor de ξ tende a 0, ou seja, o projétil não sai do lugar. Para que ele seja lançado é preciso que a velocidade aumente também. Desse modo, essa é a razão para este modelo ser voltado para velocidades mais baixas.

Figura 31: Gráfico para o lançamento com a resistência do ar: (a) Lançamento com $\gamma = 1$ e $\gamma = 0$; (b) Análise gráfica para $\gamma = 1$, $\gamma = 1,1$ e $\gamma \gg 1$; (c) Lançamento com $\gamma = 1$, $\gamma = 1,1$ e $\gamma \gg 1$



Fonte: Autoria própria, 2018

6.3 Movimento curvilíneo com força resistiva para velocidade de segunda ordem

Sabe-se que a força de arrasto descrita por $\mathbf{f} = \beta \mathbf{v}^n$ é mais fiel para velocidades mais altas usando-se $n = 2$. Nesta sessão será analisada a trajetória de um corpo ao ser lançado submetido à uma força de arrasto $\mathbf{f} = \beta \mathbf{v}^2$ (DE FIGUEIREDO; NEVES, 2015). Neste caso, $\mathbf{f} = -(\beta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{u}}$, $\beta = cte$ onde $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}$, logo,

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{u}} = (v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}) \cdot (v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}) \hat{\mathbf{u}} = (v_x^2 + v_y^2) \hat{\mathbf{u}}$$

e

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v}}{(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}}$$

Assim,

$$\mathbf{f} = -\beta(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \mathbf{v} = -\beta(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} (v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}})$$

Pela 2^a lei de Newton,

$$\mathbf{F}_r = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_p + \mathbf{f} = m \left(\frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} \right) \quad (6.35)$$

Em coordenadas cartesianas, as seguintes EDP's,

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{f_x}{m} = -\frac{\beta}{m}(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} v_x \text{ onde } g(v_x, v_y) = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} v_x \quad (6.36)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{F_p}{m} - \frac{f_y}{m} = -g - \frac{\beta}{m}(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} v_y \text{ onde } h(v_x, v_y) = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} v_y \quad (6.37)$$

Para linearizar as funções g e h em torno do ponto \mathbf{v}_0 em que $\mathbf{v}_0 = (v_{0x} \hat{\mathbf{i}} + v_{0y} \hat{\mathbf{j}}) = (v_0 \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + v_0 \sin \theta \hat{\mathbf{j}})$ faz-se para g ,

$$\begin{aligned} g(v_x, v_y) &= (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} v_x \\ g'_x(v_x, v_y) &= v_x^2 (v_x^2 + v_y^2)^{-1/2} + (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \\ g'_y(v_x, v_y) &= v_x v_y (v_x^2 + v_y^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$L_1 = g(v_{0x}, v_{0y}) + g'_x(v_{0x}, v_{0y})(v_x - v_{0x}) + g'_y(v_{0x}, v_{0y})(v_y - v_{0y})$$

$$L_1 = v_0^2 \cos \theta + v_0 v_x \cos^2 \theta - v_0^2 \cos^3 \theta + v_0 v_x - v_0^2 \cos \theta + v_0 v_y \sin \theta \cos \theta - v_0^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} L_1 &= v_0 [v_x(\cos^2 \theta + 1) + v_y(\sin \theta \cos \theta) + (-v_0 \cos \theta)] \text{ onde} \\ A &= (-v_0 \cos \theta); B = (\sin \theta \cos \theta); C = (\cos^2 \theta + 1) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Por analogia para h tem-se,

$$h(v_x, v_y) = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} v_y$$

$$h'_x(v_x, v_y) = v_x v_y (v_x^2 + v_y^2)^{-1/2}$$

$$h'_y(v_x, v_y) = v_y^2 (v_x^2 + v_y^2)^{-1/2} + (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$$

$$L_2 = h(v_{0x}, v_{0y}) + h'_x(v_{0x}, v_{0y})(v_x - v_{0x}) + h'_y(v_{0x}, v_{0y})(v_y - v_{0y})$$

$$L_2 = v_0^2 \sin \theta + v_0 v_x \sin \theta \cos \theta - v_0^2 \cos^2 \theta \sin \theta + v_0 v_y \sin^2 \theta - v_0^2 \sin^3 \theta + v_0 v_y - v_0^2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} L_2 &= v_0 [v_y(\sin^2 \theta + 1) + v_x(\sin \theta \cos \theta) + (-v_0 \sin \theta)] \text{ onde} \\ A' &= (-v_0 \sin \theta); B' = (\sin \theta \cos \theta); C' = (\sin^2 \theta + 1) \end{aligned} \quad (6.39)$$

Reescrevendo as EDP's com base nas equações 6.38 e 6.39,

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\beta v_0}{m}(A + Bv_x + Cv_y) \quad (6.40)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\beta v_0}{m}(A' + B'v_x + C'v_y) \quad (6.41)$$

Derivando a equação 6.41 em t,

$$\ddot{v}_y = -\frac{\beta v_0}{m}(B'\dot{v}_x + C'\dot{v}_y)$$

Substituindo a equação 6.40 nesta,

$$\ddot{v}_y = -\frac{\beta v_0}{m} \left(B' \left(-\frac{\beta v_0}{m} (A + Bv_x + Cv_y) \right) + C' \dot{v}_y \right) \quad (6.42)$$

Resolvendo o sistema da equação 6.42 com 6.37 onde $\gamma = \beta/m$,

$$\frac{\ddot{v}_y}{\gamma v_0} + (B + C') \dot{v}_y - \gamma v_0 (B'C - BC') v_y + [gB - \gamma v_0 (B'A - BA')] = 0$$

Com base nas relações A, B, C, A', B' e C' das equações 6.38 e 6.39 obtém-se a seguinte EDO,

$$\ddot{v}_y + (3\gamma v_0) \dot{v}_y + (2\gamma^2 v_0^2) v_y + [g\gamma v_0 (\cos^2 \theta + 1) - \gamma^2 v_0^3 \sin \theta] = 0 \quad (6.43)$$

Para a solução homogênea, $(v_y)_H$, o seguinte polinômio característico é obtido,

$$\lambda^2 + (3\gamma v_0) \lambda + (2\gamma^2 v_0^2) = 0$$

onde por Báskara sabe-se que $\lambda_1 = -\gamma v_0$; $\lambda_2 = -2\gamma v_0$

Logo, a solução homogênea assume a seguinte expressão,

$$(v_y)_H = c_1 e^{-\gamma v_0} + c_2 e^{-2\gamma v_0} \quad (6.44)$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Para a solução não-homogênea, $(v_y)_P$, supondo que $v_y = cte = (v_y)_P \Rightarrow \dot{v}_y = \ddot{v}_y = 0$ obtém-se,

$$\begin{aligned} & (2\gamma^2 v_0^2)(v_y)_P + [g\gamma v_0 (\cos^2 \theta + 1) - \gamma^2 v_0^3 \sin \theta] = 0 \\ & (v_y)_P = \frac{-[g\gamma v_0 (\cos^2 \theta + 1) - \gamma^2 v_0^3 \sin \theta]}{(2\gamma^2 v_0^2)} \\ & (v_y)_P = \frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0} \end{aligned} \quad (6.45)$$

A solução para a EDO 6.43 é, portanto, dada por $v_y = (v_y)_H + (v_y)_P$. Entretanto, ainda é preciso descobrir os valores das constantes c_1 e c_2 . Tendo,

$$\begin{cases} v_y = c_1 e^{-\gamma v_0} + c_2 e^{-2\gamma v_0} + \frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0} \\ \dot{v}_y = -g = \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

Nas condições iniciais, $t = 0 \Rightarrow v_y = v_{0y} = v_0 \sin \theta$, o sistema muda de modo que,

$$\begin{cases} v_0 \sin \theta = c_1 + c_2 + \frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0} \\ -g = -c_1(\gamma v_0) - c_2(2\gamma v_0) \end{cases}$$

Resolvendo este encontram-se os seguintes valores para c_1 e c_2 ,

$$c_1 = v_0 \sin \theta + \frac{g(\cos^2 \theta)}{\gamma v_0}$$

$$c_2 = -\frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0}$$

Desse modo,

$$\mathbf{v}_y = \left(v_0 \sin \theta + \frac{g(\cos^2 \theta)}{\gamma v_0} \right) e^{-\gamma v_0} + \left(-\frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0} \right) e^{-2\gamma v_0} + \frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0} \hat{\mathbf{j}} \quad (6.46)$$

Com 6.46 em 6.40 é possível obter, após simplificações de rotina,

$$\mathbf{v}_x = \frac{v_0 \cos \theta}{2} + \frac{g(\cos \theta \sin \theta)}{\gamma v_0} - \left[\left(v_0 \sin \theta + \frac{g(\cos^2 \theta)}{\gamma v_0} \right) e^{-\gamma v_0} + \left(-\frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0} \right) (\sin^2 \theta - 1) e^{-2\gamma v_0} \right] (\sin \theta \cos \theta)^{-1} \hat{\mathbf{i}} \quad (6.47)$$

Integrando as equações 6.46 e 6.47 no tempo é possível obter as expressões que definem a posição da trajetória no tempo. Logo, para $\hat{\mathbf{j}}$,

$$\mathbf{y}(t) = (-\gamma v_0)^{-1} \left(v_0 \sin \theta + \frac{g(\cos^2 \theta)}{\gamma v_0} \right) e^{-\gamma v_0} + (-2\gamma v_0)^{-1} \left(-\frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0} \right) e^{-2\gamma v_0} + \left[\frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0} \right] t \hat{\mathbf{j}} \quad (6.48)$$

Para $\hat{\mathbf{i}}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \left[\frac{v_0 \cos \theta}{2} + \frac{g(\cos \theta \sin \theta)}{\gamma v_0} \right] t + \\ & \left[(\gamma v_0)^{-1} \left(v_0 \sin \theta + \frac{g(\cos^2 \theta)}{\gamma v_0} \right) e^{-\gamma v_0 t} + (2\gamma v_0)^{-1} \left(-\frac{v_0 \sin \theta}{2} - \frac{g(\cos^2 \theta + 1)}{2\gamma v_0} \right) (\sin^2 \theta - 1) e^{-2\gamma v_0 t} \right] \\ & (\sin \theta \cos \theta)^{-1} \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (6.49)$$

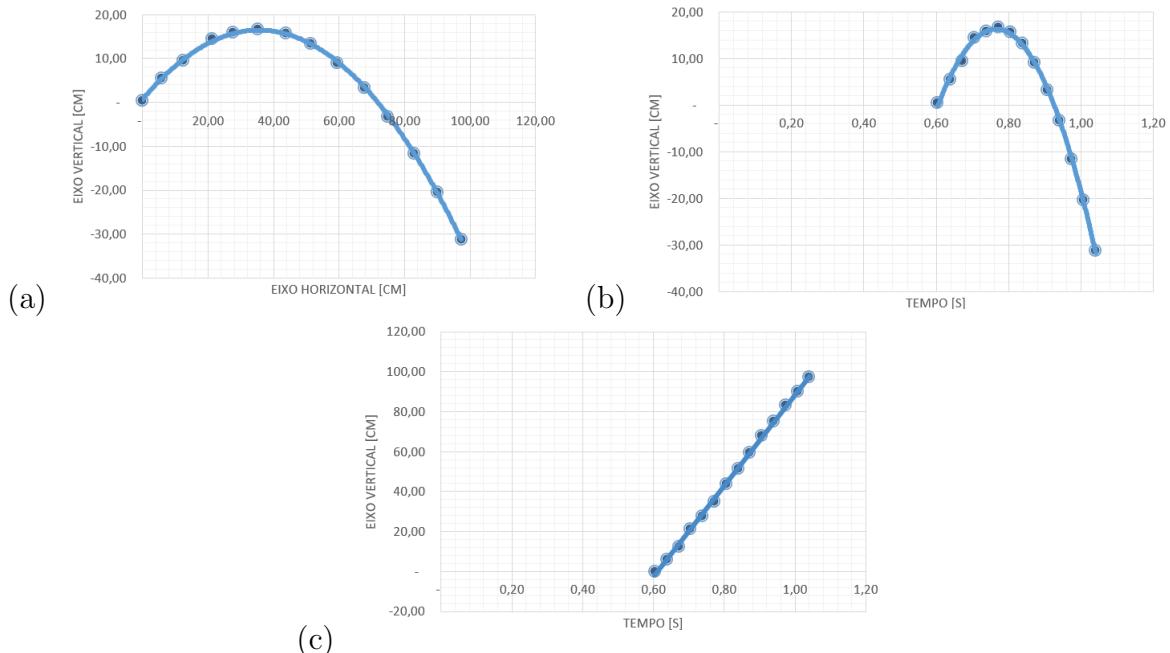
A equação do movimento para esta sessão consiste em uma equação paramétrica das equações 6.48 e 6.49. Desse modo, são atribuídos os parâmetros e variando o valor de t é possível obter as coordenadas da trajetória.

7 ANÁLISE COM O *SOFTWARE TRACKER*

Para um lançamento com distensão de 15 cm, ângulo de 45° com a horizontal e utilizando duas ligas, cuja constante elástica é 82,94 N/m, conforme a Tabela 1, obtiveram-se dados de deslocamento vertical, deslocamento horizontal e variações temporais com o *software Tracker* conforme o ANEXO E.

Com base nesses dados realizou-se os gráficos da trajetória de eixo vertical em função do eixo horizontal (Figura 32 (a)), do eixo vertical em função do tempo (Figura 32 (b)) e do eixo horizontal em função do tempo (Figura 32 (c)). Os pontos representam o centro de massa no software enquanto que a linha sólida representa a linha de tendência obtida através do Excel.

Figura 32: Análise com o Tracker: (a) Eixo vertical em função do eixo horizontal; (b) Eixo vertical em função do tempo; (c) Eixo horizontal em função do tempo



Fonte: Autoria própria, 2018

Aproximando o gráfico da Figura 32 (a) para uma função polinomial de grau 2 conclui-se a seguinte equação cujo coeficiente é $R^2 = 0,9996$,

$$y(x) = -0,0125x^2 + 0,8891x + 0,6766 \quad (7.1)$$

A origem do sistema foi inserida no local onde o foguete sai do trilho na base de lançamento. Desse modo, a componente negativa do gráfico da Figura 32 (a) é decorrente da altura que o esse ponto possui do solo para poder realizar a inclinação necessária. Para o ângulo de 45° realizou-se uma elevação de aproximadamente 32 cm.

Pela mesma aproximação para o gráfico da Figura 32 (b) com $R^2 = 0,9987$ tem-se

$$\mathbf{y}(t) = -633,9t^2 + 970,34t - 355,04\hat{\mathbf{j}} \quad (7.2)$$

Para o gráfico da Figura 32 (c) realiza-se aproximação linear com $R^2 = 0,9993$ que resulta na equação a seguir,

$$\mathbf{x}(t) = 228,38t - 139,94\hat{\mathbf{i}} \quad (7.3)$$

Derivando a equação 7.2 em relação ao tempo encontra-se a velocidade no eixo vertical em relação ao tempo, ou seja,

$$\mathbf{v}_y(t) = -1267,8t + 970,34\hat{\mathbf{j}} \quad (7.4)$$

Graficamente observa-se pela Figura 33 que velocidade vertical consiste em uma reta linear e é decrescente. Ela decresce em valores positivos até o instante de $t = 0,77$ que consiste no ponto em que atinge valor de altura máxima. Ao assumir valores negativos ela aumenta gradativamente em módulo até o instante $t = 1,04$ onde atinge o solo.

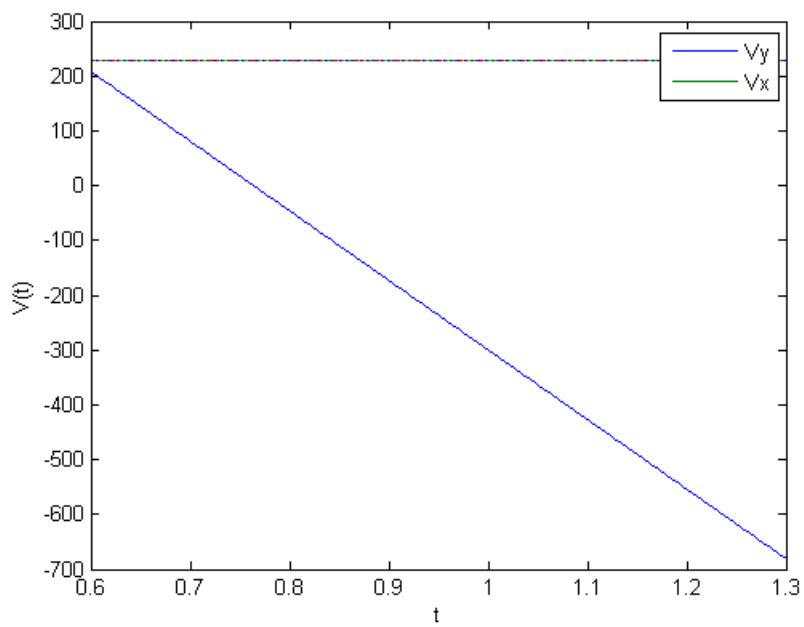
Para a velocidade horizontal deriva-se a equação 7.5 de modo que,

$$\mathbf{v}_x(t) = 228,38\hat{\mathbf{i}} \quad (7.5)$$

Pelo gráfico da Figura 33 nota-se que a velocidade no eixo horizontal é constante durante toda a trajetória, pois a aceleração da gravidade possui componente apenas no

eixo vertical. Entretanto, a velocidade no eixo vertical possui um decaimento linear no tempo. Analisando o módulo desta observa-se que tanto ela como a velocidade horizontal no instante em que o lançamento começa, $t = 0,6$, são iguais. Este valor corresponde ao módulo do valor na velocidade inicial do sistema, como $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}}$, o módulo desta variável é $v_0 = 228,38 \text{ cm/s}$. No Sistema Internacional, $v_0 = 2,3 \text{ m/s}$, por tratar-se de uma velocidade baixa e considerando a força resistiva do ar, o modelo que melhor se adequa a ela é aquele apresentado na sessão 6.2.

Figura 33: Gráfico das velocidades



Fonte: Autoria própria, 2018

Dados os parâmetros iniciais do sistema e com base na equação 6.17 é possível obter um valor médio para a constante de resistividade do ar de acordo com cada coordenada de posição horizontal em um determinado tempo de acordo com os dados pelo *Tracker*. Desse modo, $\gamma = 0,78 \text{ s}^{-1}$.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fica nítida, portanto, a viabilidade do desenvolvimento da estrutura. Além de englobar vários conceitos de Mecânica Clássica com análises quantitativas e qualitativas o presente estudo também oferece exposição de conceitos sobre projetos elétricos e diversos métodos utilizados para automatizar um sistema. Apesar de atender manualmente boa parte das necessidades, o emprego da automação garantiu maior segurança e confiabilidade nos dados coletados e na calibração do sistema.

Pela análise do movimento do projétil juntamente com a análise realizada pelo *Tracker* definiu-se o coeficiente para a força de arrasto para baixas velocidades. Desse modo, é possível adaptar o experimento para modelos que consideram mais variáveis e são possuem uma melhor precisão dos dados.

Os variados métodos utilizados para construção mostraram-se altamente eficazes por atenderem características particulares de resistência, precisão e eficiência. Desse modo, foi necessário apenas definir qual método melhor se adaptaria para determinada tarefa.

O projeto mostra-se precursor para trabalhos futuros implementarem técnicas de automação, além das montagens utilizadas no sistema. Por outro lado, a análise física e matemática fortalecem o incentivo de sempre serem realizadas em conjunto.

Referências Bibliográficas

- [1] BAGNATO, V. S. **Os fundamentos da luz laser.** Física na Escola, volume 2, n°, 4 2001.
- [2] BUENO, R. S. M.; KOVALICZN, R. A. **O ensino de ciências e as dificuldades das atividades experimentais.** 2008.
- [3] DANTAS, R. S.; MARTINS, A. F. P. **Ensino de Ciências nos anos iniciais: problemas enfrentados por estudantes de Pedagogia da UFRN.** 2008.
- [4] DE FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas.** 3^a edição. IMPA, 2015.
- [5] Freire et al. **Lançamento oblíquo com resistência do ar: Uma análise qualitativa.** Revista Brasileira de Ensino de Física, volume 38, n° 1, 1306 (2016)
- [6] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo.** Volume 3. 5^a edição Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- [7] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: mecânica.** Volume 1. 8^a edição. Editora LTC, 2009.
- [8] MAHLER, W. F. C. **Projeto de foguete para lançamento de nano satélites.** INPE, 2014.
- [9] NEGREIROS, S. G.; DE OLIVEIRA, G. F. B. **Proposta para o lançamento de foguetes de garrafa PET utilizando uma base automatizada.** Física na Escola, volume 15, n°2, 63 2017.
- [10] NOGUEIRA, S.; FILHO, J. B. P.; DE SOUZA, P. N. Volume 12. **Astronáutica: ensino fundamental e médio.** Brasília: MEC, SEB ; MCT ; AEB, 2009.
- [11] SANTANA, Lenardo. **Avaliação de uma impressora 3d baseada em projeto de código aberto na fabricação de peças em PLA.** Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

- [12] THOMAS, G. B. **Cálculo**. Volume 2. 11^a edição. São Paulo: Addison Wesley, 2008.
- [13] YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I: Mecânica**. Volume 1. 12^a edição. São Paulo: Addison Wesley, 2008.
- [14] YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física IV: Ótica e Física Moderna**. Volume 4. 12^a edição. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

ANEXO A - Cálculo do centro de massa com integrais triplas do foguete

Para as empennas (Figura 34 (a)) nota-se que ambas são simétricas, logo, possuem o mesmo centro de massa no eixo z . Assim, esse termo será multiplicado por dois na equação para cargas pontuais. Calculando a integral para o empêna no eixo positivo de y obtém-se,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{xy_1} = \int_0^3 \int_0^{17} \int_0^{11+16y/17} zdzdydx = \frac{3}{2} \int_0^{17} \left(\frac{16}{17}y + 11 \right)^2 dy \\ m_1 = \int_0^3 \int_0^{17} \int_0^{11+16y/17} dzdydx = 3 \int_0^{17} \left(\frac{16}{17}y + 11 \right)^2 dy \end{array} \right.$$

$$, \text{ fazendo } u = \frac{16}{17}y + 11 \implies du = \frac{16}{17}dy$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{xy_1} = \left[\frac{17}{16.2} \left(\frac{16}{17}y + 11 \right)^3 \right]_0^{17} = 9749,5 \\ m_1 = \left[\frac{17}{16} \left(\frac{16}{17}y + 11 \right)^2 \right]_0^{17} = 646 \\ \implies z_1 = \frac{M_{xy_1}}{m_1} = 15,1mm \end{array} \right.$$

Para a coifa (Figura 34 (b)) faz-se,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{xy_2} = \int_{-12}^{12} \int_{17}^{41} \int_{65}^{106-(x^2+y^2)^{1/2}} zdzdydx \\ m_2 = \int_{-12}^{12} \int_{17}^{41} \int_{65}^{106-(x^2+y^2)^{1/2}} dzdydx \end{array} \right.$$

, mas integrando na variável z e simplificando com transformação para coordenadas po-

lares sabe-se que, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta \Rightarrow dydx = \rho d\rho d\theta$, logo

$$\begin{cases} M_{xy_2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{12} ((106 - \rho)^2 - 65^2) \rho d\rho d\theta = \left[\pi \left(\frac{(106^2 - 65^2)\rho^2}{2} - \frac{212\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4} \right) \right]_0^{12} \\ m_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{12} ((106 - \rho) - 65) \rho d\rho d\theta = \left[2\pi \left(\frac{(106 - 65)\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \right) \right]_0^{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{xy_2} = 387864\pi \\ m_2 = 4752\pi \end{cases} \Rightarrow z_2 = \frac{M_{xy_2}}{m_2} = 81,6\text{mm}$$

Para o cilindro (Figura 34 (c) e (d)) segue-se com,

$$\begin{cases} M_{xy_3} = \int_{-12}^{12} \int_{-(12^2-x^2)^{1/2}}^{(12^2-x^2)^{1/2}} \int_0^{65} zdz dy dx = \int_{-12}^{12} 2(12^2 - x^2)^{1/2} \frac{65^2}{2} dx \\ m_3 = \int_{-12}^{12} \int_{17}^{41} \int_{(x^2+y^2)}^{65} dz dy dx = \int_{-12}^{12} 2(12^2 - x^2)^{1/2} 65 dx \end{cases}$$

Calculando apenas $\int (12^2 - x^2)^{1/2} dx$ e fazendo $x = 12 \sin \theta \Rightarrow dx = 12 \cos \theta d\theta$, obtém-se,

$\int (12 \cos \theta)^2 d\theta = \int 12^2 \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = 12^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right)$, e retornando para a variável anterior,

$$\left[\frac{12^2}{2} \left(\arcsen \left(\frac{x}{12} \right) \right) + \frac{x \cos(\arcsen(x/2))}{24} \right]_{-12}^{12} = \frac{12^2 \pi}{2}. \text{ Desse modo,}$$

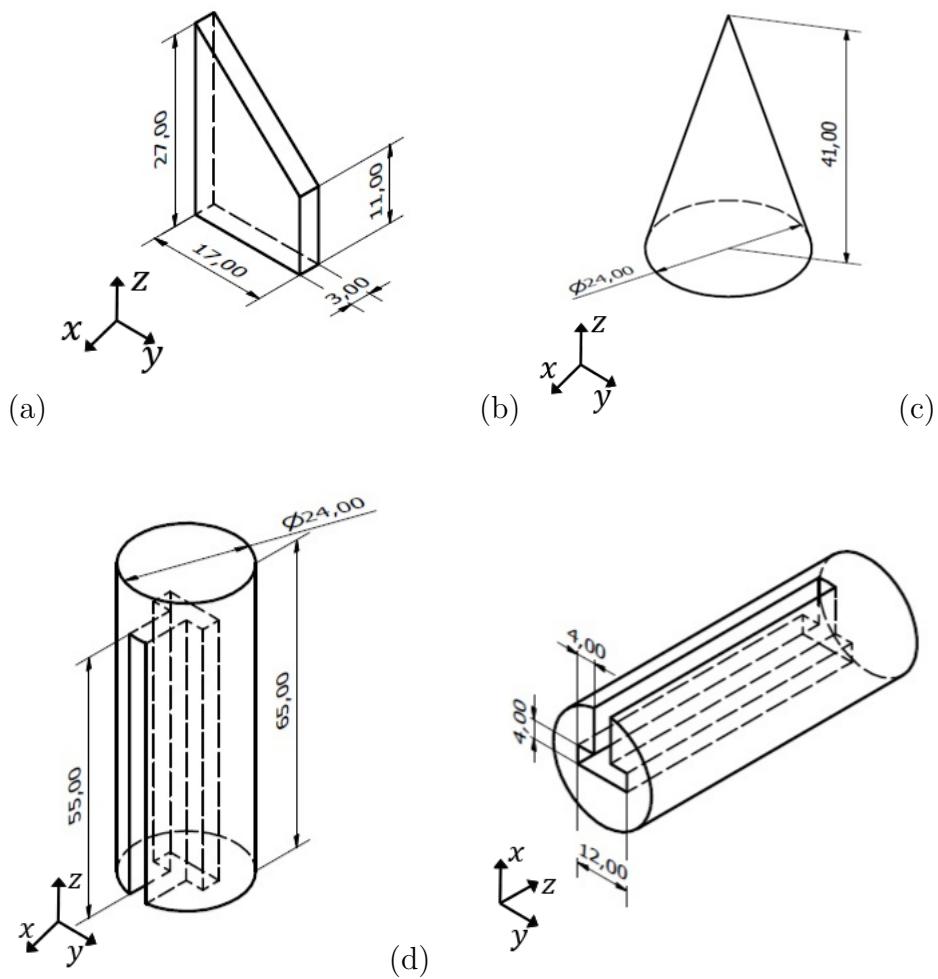
$$\begin{cases} M_{xy_3} = 304200\pi \\ m_3 = 9600\pi \end{cases} \Rightarrow z_3 = \frac{M_{xy_3}}{m_3} = 32,5\text{mm}$$

Por fim, como a modificação em forma de T no cilindro trata-se de uma subtração no cilindro calculado anteriormente os valores do momento de inércia e da massa

serão negativos, assim,

$$\begin{cases} M_{xy_4} = \int_0^{12} \int_{-2}^{12} \int_0^{55} zdzdydx = -133100 \\ m_4 = \int_0^{12} \int_{-2}^{12} \int_0^{55} dzdydx = -4840 \end{cases} \Rightarrow z_4 = \frac{M_{xy_4}}{m_4} = 27,5\text{mm}$$

Figura 34: Divisão do foguete: (a) Vista militar da empêna; (b) Vista militar da coifa; (c) Vista militar I do cilindro; (d) Vista militar II do cilindro

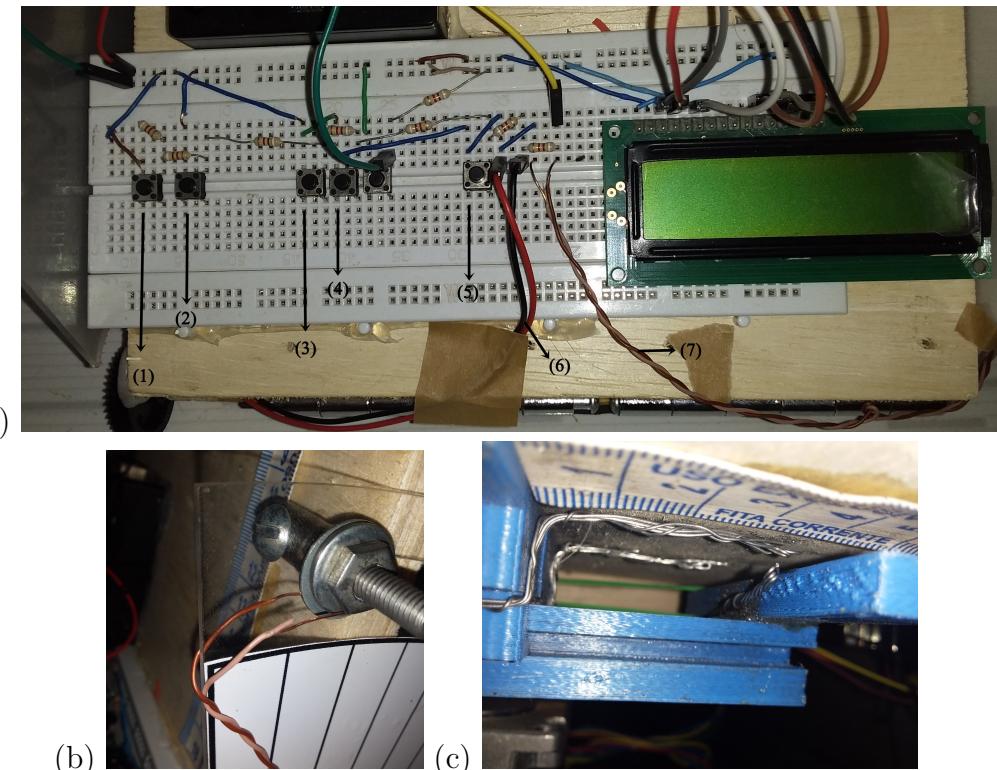


Fonte: Autoria própria, 2018

ANEXO B: Montagem final do sistema

A Figura 39 (a) apresenta os botões e extensão de fio que indicarão a atividade ou ação no sistema, enquanto que as Figuras 39 (b) e (c) representam a detecção do ângulo de lançamento de 90° e do momento em que o foguete deixa a base, respectivamente.

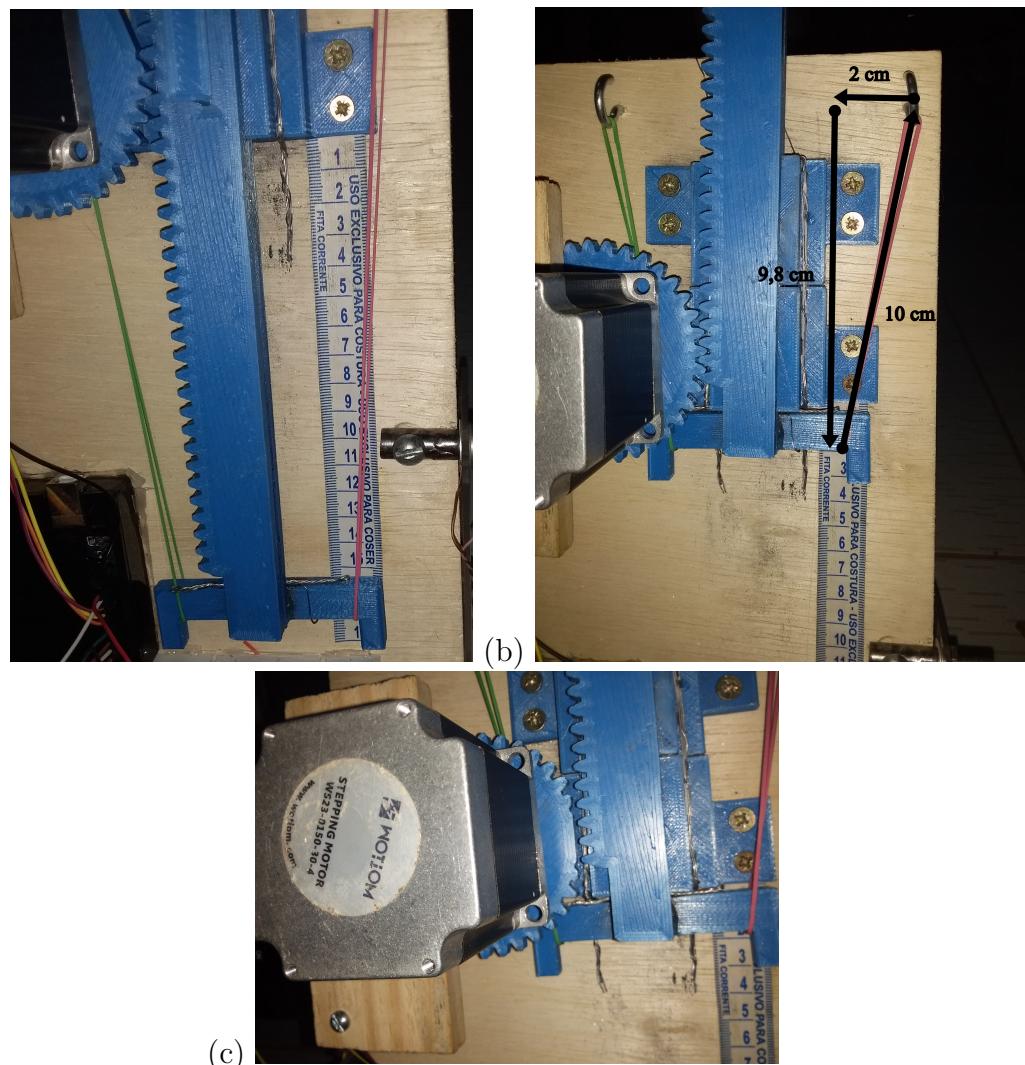
Figura 35: Montagem do circuito para queda de tensão: (a) Montagem na *protoboard*; (b) Extensão de fio para detectar a base no ângulo de 90°; (c) Extensão de fio para detectar o instante que o foguete deixa a base



Fonte: Autoria própria, 2018

Para calibrar a catraca o usuário deve realizar a distensão inserida no equipamento e encaixar os dentes da catraca aos dentes da cremalheira (Figura 36 (a)). Desse modo, retorna-se a posição inicial, Figura 36 (b). Quando o motor realizar a distensão requerida, a catraca ficará na posição da Figura 36 (c) e o foguete será lançado.

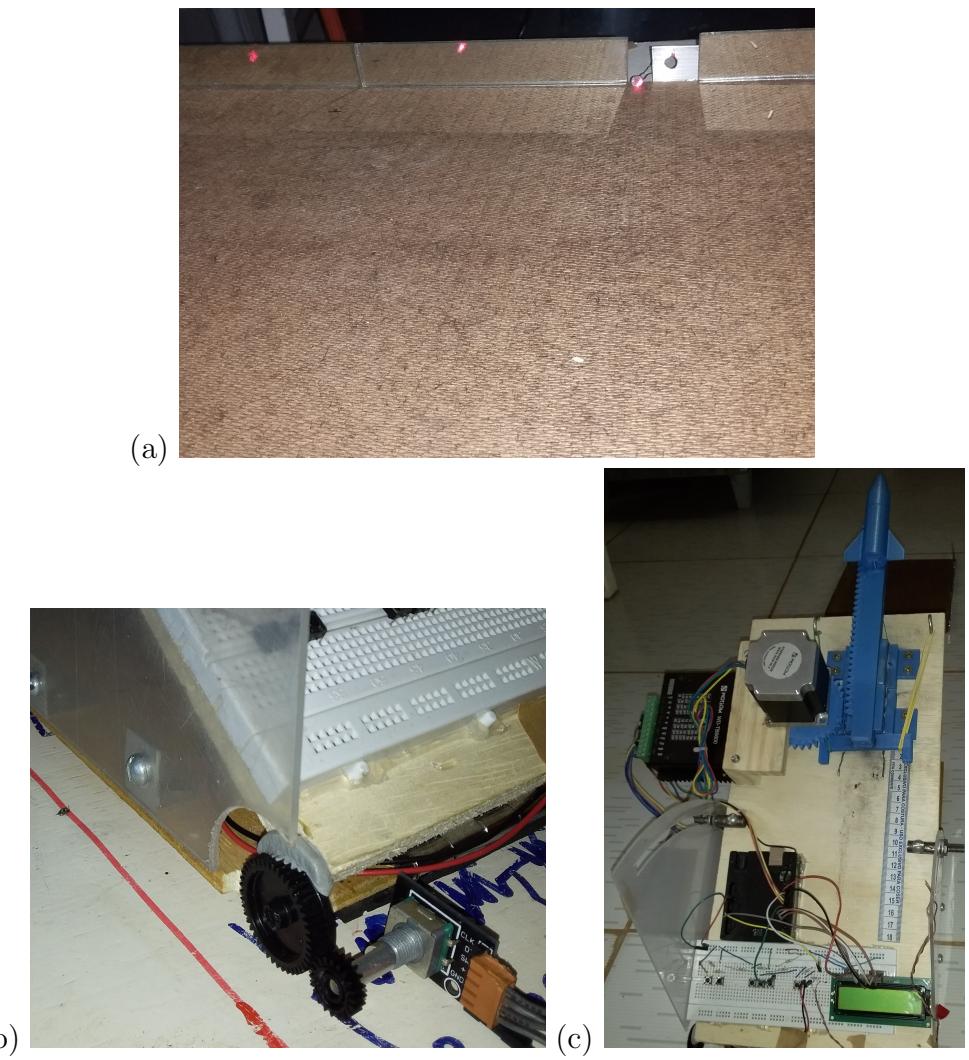
Figura 36: Análise do sistema catraca-cremalheira: (a) Encaixe dos dentes da catraca com os da cremalheira; (b) Retorno do triplo à posição inicial; (c) Catraca em posição para liberar o trilho



Fonte: Autoria própria, 2018

Por fim, na Figura 37 (a) observa-se o feixe de luz laser refletido com espelhos e sendo detectado pelo LDR. A Figura 37 (b) mostra o enconder com redução de RPM pelas catracas que permitirá a detecção do ângulo de lançamento. O sistema finalizado é mostrado na Figura 37 (c).

Figura 37: Montagens finais: (a) Detecção de interferência com o laser e LDR; (b) Detecção do ângulo de lançamento com o encoder; (c) Sistema finalizado



Fonte: Autoria própria, 2018

ANEXO C: Configurações para o LCD

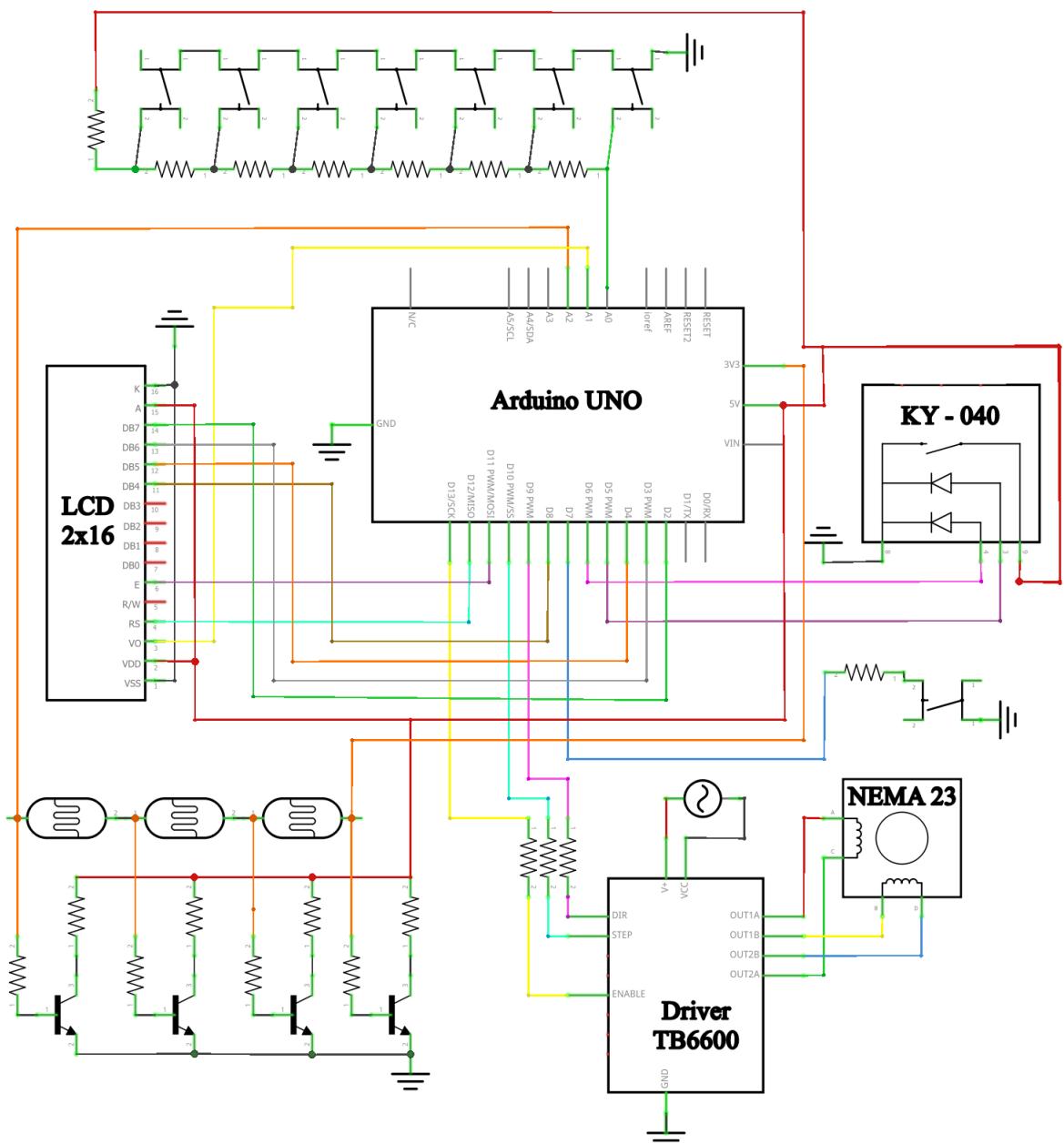
Tabela 2: Símbolos e funções dos pinos do LCD

Pino	Símbolo	Função
1	VSS	Alimentação (GND)
2	VDD	Alimentação (5V)
3	V0	Ajusta o contraste
4	RS	Habilita/Desabilita seletor de registrador
5	R/W	Leitura/Escrita
6	E	Habilita escrita no LCD
7	DB0	Dado
8	DB1	Dado
9	DB2	Dado
10	DB3	Dado
11	DB4	Dado
12	DB5	Dado
13	DB6	Dado
14	DB7	Dado
15	A	Alimentação Backlight (5V)
16	K	Alimentação Backlight (GND)

Fonte: Autoria própria

ANEXO D: Circuito completo para automação do sistema

Figura 38: Circuito completo para automação do sistema



Fonte: Autoria própria, 2018