Lista 3 - Introdução a Análise de Dados
Funções

Guilherme Masuko

April 2023

Curso de Cálculo: Takhe
Professor: Douglas Bokliang

Questão 1

A convexidade de uma função é dada pela segunda derivada (isso sob a condição de continuidade da função). A definição formal de convexidade de função pode ser encontrada clicando aqui (pode assustar, mas não se preocupe, utilizaremos um teorema para resolver o exercício).

Teorema[1]:

Seja I um intervalo contido no domínio de uma função f. Suponha que f, f' e f'' sejam contínuas em I.

- Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função convexa no intervalo I.
- Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é uma função côncava no intervalo I.

Isso quer dizer que para funções do segundo grau contínuas, o coeficiente a determina a convexidade da função. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f''(x) = 2a$$

[1]<https://www.professores.uff.br/hjbortol/wp-content/uploads/sites/121/2017/09/gma00108-parte-21.pdf>

Figure 1: Função Convexa

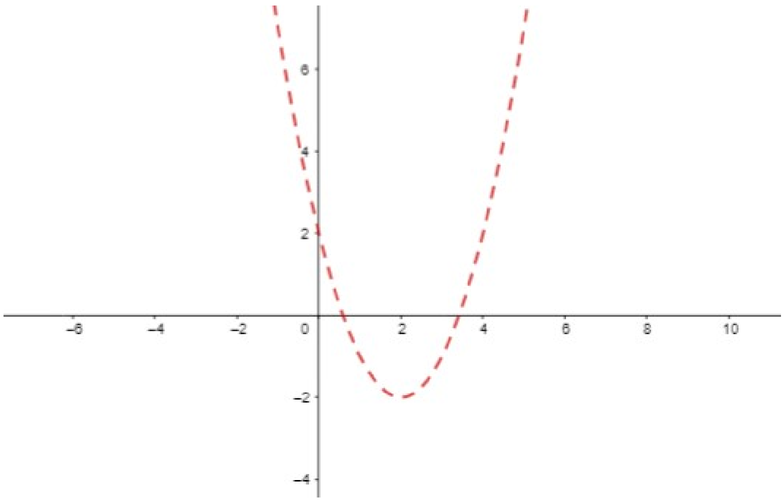
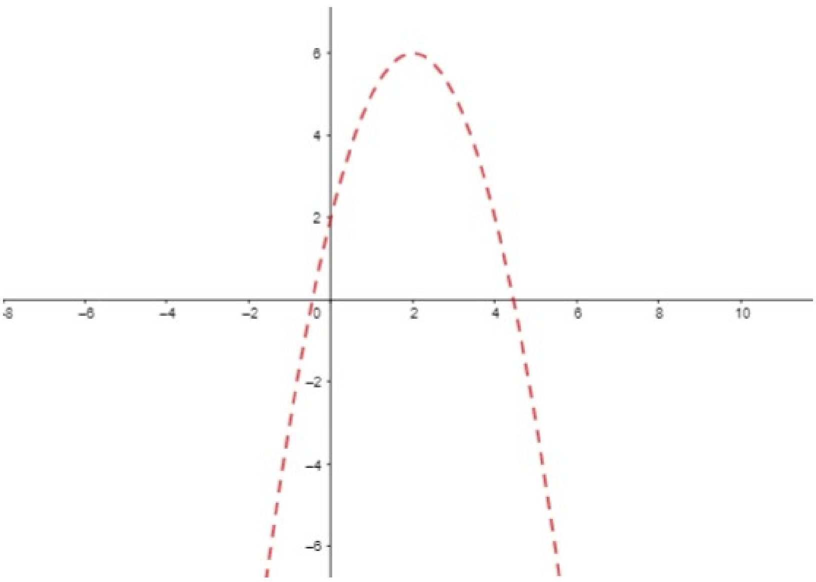


Figure 2: Função Côncava



Ou seja, se $a > 0$, então a função f é convexa e se $a < 0$, então a função é côncava.

Crie uma função que receba os três coeficientes de uma função do segundo grau como parâmetros e retorne a convexidade da função (`'convexa'` ou `'côncava'`).

Teste sua função para as seguintes equações:

- $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$
- $f(x) = x^2 - 4x + 10$

Questão 2

Um ponto crítico[2] de uma função é um ponto no domínio de uma função onde a

[2] <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponto_cr%C3%ADtico_(fun%C3%A7%C3%B5es)>

primeira derivada não existe ou é nula. Os pontos críticos serão sempre pontos de máximos ou mínimos locais ou pontos de inflexão. No caso de funções do segundo grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, o ponto crítico da função é encontrado da seguinte maneira.

$$f'(x^\star) = 2ax^\star + b = 0$$
$$x^\star = -\frac{b}{2a}$$

Crie uma função que receba os três coeficientes de uma função do segundo grau como parâmetros e retorne o ponto crítico da função $x^\star$.

Teste sua função para as seguintes equações:

- $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$
- $f(x) = x^2 - 4x + 10$

Questão 3

Utilizando as funções criadas nas questões 1 e 2, crie uma função que receba os coeficientes de uma função do segundo grau como parâmetros e retorne o ponto crítico e se ele é um ponto de máximo ou mínimo.

Dica: Se uma função é estritamente côncava em um intervalo I, um ponto crítico nesse mesmo intervalo é um ponto de máximo local. Se uma função é estritamente convexa em um intervalo I, um ponto crítico nesse mesmo intervalo é um ponto de mínimo local.

Teste sua função para as seguintes equações:

- $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$
- $f(x) = x^2 - 4x + 10$

Questão 4

É possível esboçar o gráfico de uma função quando se sabe características importantes dela, por exemplo, suas raízes, sua convexidade, seu ponto crítico e o valor da função neste ponto. Crie uma função que receba os coeficientes de uma função do segundo grau como parâmetros e retorne suas raízes (use a função feita na Lista 1), seu ponto de máximo ou mínimo e o valor da função neste ponto (use a função feita na questão anterior).

Teste sua função para as seguintes equações:

- $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$
- $f(x) = x^2 - 4x + 10$