Teoria da Computação

Introdução e Máquinas de Turing

Guilherme Meira

Agenda

1. Apresentação da disciplina
2. Introdução
3. Máquinas de Turing

Apresentação da disciplina

Disciplina Teoria da Computação

Professor Guilherme Meira

Horário Sexta-feiras, das 18:50h às 22:00h

- Intervalo de 10 minutos por volta das 20:20h
- Chamada ao final da aula

Avaliação Duas provas + duas avaliações multidisciplinares

- 7 pontos de prova (P_1 e P_2)
- 3 pontos de Avaliação Multidisciplinar (T_1 e T_2)
- $M_P = \frac{P_1+T_1+P_2+T_2}{2}$
- $M_P \geq 7$: aprovado
- $M_P < 7$: prova final (P_F)
- $M_F = \frac{M_P+P_F}{2}$
- $M_F \geq 5$: aprovado
- $M_F < 5$: gostou tanto da matéria que vai fazer de novo

Apresentação da disciplina

Trabalhos Avaliação Multidisciplinar

- Individual
- Questões objetivas

Livro Introdução à Teoria da Computação (Michael Sipser - 3ªedição)

Outros

- Honestidade acadêmica
- Comportamento em sala
- Feedback!

Agenda

1. Apresentação da disciplina
2. Introdução
3. Máquinas de Turing

Introdução

Pra que serve Teoria da Computação?

Introdução

Pra que serve Teoria da Computação?

Introdução

Considere uma coleção de dominós:

$$\left\{ \left[\frac{\texttt{b}}{\texttt{ca}}\right], \left[\frac{\texttt{a}}{\texttt{ab}}\right], \left[\frac{\texttt{ca}}{\texttt{a}}\right], \left[\frac{\texttt{abc}}{\texttt{c}}\right] \right\}$$

É possível organizar os dominós (com repetição) de forma que a sequência de cima seja igual à de baixo?

Introdução

Considere uma coleção de dominós:

$$\left\{ \left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{ca}} \right], \left[\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{ab}} \right], \left[\frac{\mathtt{ca}}{\mathtt{a}} \right], \left[\frac{\mathtt{abc}}{\mathtt{c}} \right] \right\}$$

É possível organizar os dominós (com repetição) de forma que a sequência de cima seja igual à de baixo? Neste caso, sim:

$$\left[\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{ab}} \right], \left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{ca}} \right], \left[\frac{\mathtt{ca}}{\mathtt{a}} \right], \left[\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{ab}} \right], \left[\frac{\mathtt{abc}}{\mathtt{c}} \right]$$

Introdução

Considere uma coleção de dominós:

$$\left\{ \left[\frac{\texttt{b}}{\texttt{ca}}\right], \left[\frac{\texttt{a}}{\texttt{ab}}\right], \left[\frac{\texttt{ca}}{\texttt{a}}\right], \left[\frac{\texttt{abc}}{\texttt{c}}\right] \right\}$$

É possível organizar os dominós (com repetição) de forma que a sequência de cima seja igual à de baixo? Neste caso, sim:

$$\left[\frac{\texttt{a}}{\texttt{ab}}\right], \left[\frac{\texttt{b}}{\texttt{ca}}\right], \left[\frac{\texttt{ca}}{\texttt{a}}\right], \left[\frac{\texttt{a}}{\texttt{ab}}\right], \left[\frac{\texttt{abc}}{\texttt{c}}\right]$$

Escreva um programa que determine se é possível para qualquer conjunto de dominós.

Introdução

Considere uma coleção de dominós:

$$\left\{ \left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{ca}}\right], \left[\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{ab}}\right], \left[\frac{\mathtt{ca}}{\mathtt{a}}\right], \left[\frac{\mathtt{abc}}{\mathtt{c}}\right] \right\}$$

É possível organizar os dominós (com repetição) de forma que a sequência de cima seja igual à de baixo? Neste caso, sim:

$$\left[\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{ab}}\right], \left[\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{ca}}\right], \left[\frac{\mathtt{ca}}{\mathtt{a}}\right], \left[\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{ab}}\right], \left[\frac{\mathtt{abc}}{\mathtt{c}}\right]$$

Escreva um programa que determine se é possível para qualquer conjunto de dominós. (Dica: é impossível)

Introdução

Introdução

Qual dos algoritmos é melhor para ordenar uma sequência de números?

```
void sort1(int arr[], int n) {
    int i, j;
    for (i = 0; i < n-1; i++)
        for (j = 0; j < n-i-1; j++)
            if (arr[j] > arr[j+1])
                swap(&arr[j], &arr[j+1]);
}
```

Introdução

Qual dos algoritmos é melhor para ordenar uma sequência de números?

```
void merge(int arr[], int l, int m, int r) {
    int i, j, k, n1 = m - l + 1, n2 =  r - m;
    int L[n1], R[n2];
    for (i = 0; i < n1; i++) L[i] = arr[l + i];
    for (j = 0; j < n2; j++) R[j] = arr[m + 1+ j];
    i = 0; j = 0; k = l;
    while (i < n1 && j < n2) {
        if (L[i] <= R[j]) {
            arr[k] = L[i]; i++;
        } else {
            arr[k] = R[j]; j++;
        }
        k++;
    }
    while (i < n1) {
        arr[k] = L[i];
        i++; k++;
    }
    while (j < n2) {
        arr[k] = R[j];
        j++; k++;
    }
}
```

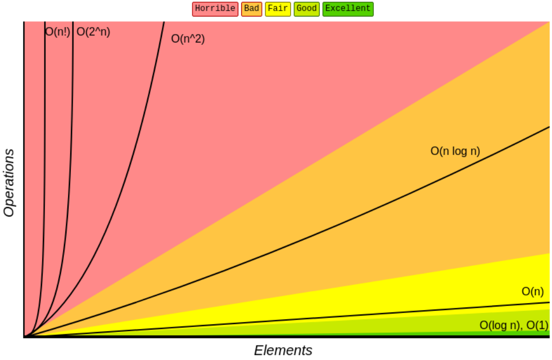
```
void sort2(int arr[], int l, int r) {
    if (l < r) {
        int m = l+(r-l)/2;

        sort2(arr, l, m);
        sort2(arr, m+1, r);

        merge(arr, l, m, r);
    }
}
```

Introdução

- Algoritmo 1 é o **Bubble Sort**
- Algoritmo 2 é o **Merge Sort**

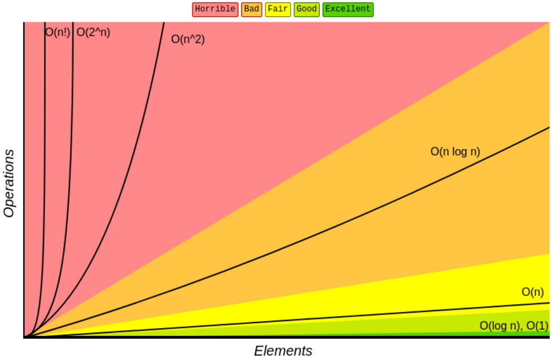
Introdução

- Algoritmo 1 é o **Bubble Sort**
- Algoritmo 2 é o **Merge Sort**
- A complexidade do Algoritmo 1 é $O(n^2)$
- A complexidade do Algoritmo 2 é $O(n \log n)$



Introdução

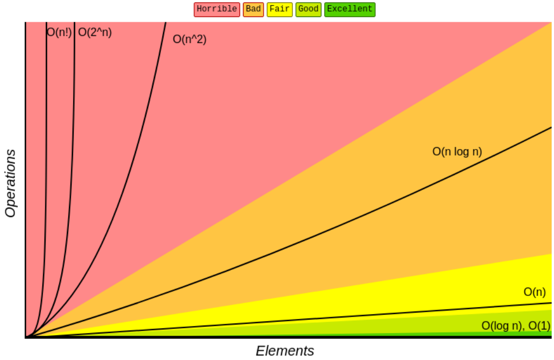
E se você tem restrição de memória?



Introdução

E se você tem restrição de memória?

- A complexidade de espaço do Algoritmo 1 é $O(1)$
- A complexidade de espaço do Algoritmo 2 é $O(n)$



Introdução

- Estudaremos duas grandes áreas da Teoria da Computação:
  - **Computabilidade:** O que computadores podem e não podem fazer
  - **Complexidade:** O quão eficiente um computador pode ser em um problema
- Conhecimento básico de Teoria da Computação pode ser uma ferramenta valiosa!
- Nossa primeira pergunta: **o que é um computador?**

Agenda

1. Apresentação da disciplina
2. Introdução
3. Máquinas de Turing

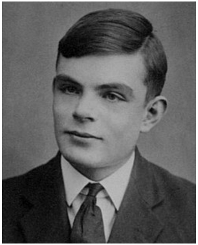
Máquinas de Turing

- Propostas por Alan Turing em 1936
- É um modelo matemático de um computador
- Tudo que um computador real pode fazer, uma Maquina de Turing pode fazer

Máquinas de Turing

Alan Turing (1912-1954)

- Considerado o pai da Ciência da Computação e da Inteligência Artificial
- Durante a Segunda Guerra, teve papel fundamental na quebra da criptografia utilizada pelos alemães, incluindo a máquina Enigma



Máquinas de Turing

Alan Turing (1912-1954)

- Após a guerra, trabalhou no desenvolvimento de um dos primeiros computadores com programa armazenado
- Se interessou, também, por biologia matemática, prevendo reações químicas que só seriam observadas anos depois
- Propôs o Teste de Turing, para determinar se uma máquina é inteligente

Máquinas de Turing

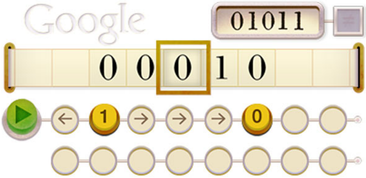
Alan Turing (1912-1954)

- Foi condenado por “indecência”, devido a sua homossexualidade
- Para não ser preso, aceitou se submeter a um “tratamento” que o deixou impotente e lhe causou o crescimento de seios
- Cometeu suicídio se envenenando com cianeto

Máquinas de Turing

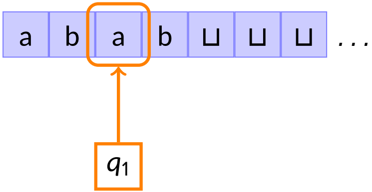
Alan Turing (1912-1954)

- Em 2009, o governo britânico se desculpou pelo tratamento dado a Turing
- Hoje, o Prêmio Turing, dado pela ACM, é considerado o prêmio Nobel da computação
- Em 2012, o Google homenageou seu 100° aniversário com um doodle



Máquinas de Turing

- A memória da máquina consiste de uma fita infinita
- Uma cabeça de leitura e escrita percorre a fita
- A máquina armazena seu estado atual



Máquinas de Turing

- Funcionamento:
  - A entrada da máquina é colocada na fita e a máquina é iniciada
  - A cabeça de leitura lê a fita
  - Baseado no estado atual, a máquina escreve na posição atual da fita e move a cabeça para a esquerda ou para a direita e muda de estado
  - Se o próximo estado é um estado aceita ou rejeita, a execução termina
  - Caso contrário, o processo se repete

Máquinas de Turing

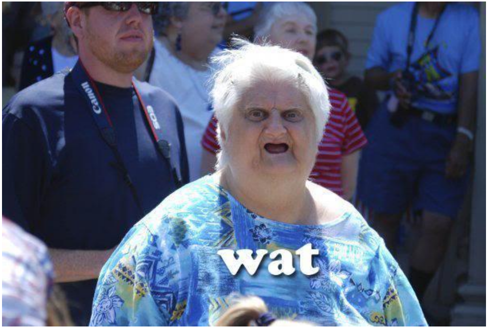
Descreva uma Máquina de Turing que verifica se uma palavra pertence à linguagem:

$$B = \{ w\#w \mid w \in \{0, 1\}^* \}$$

Máquinas de Turing

Descreva uma Máquina de Turing que verifica se uma palavra pertence à linguagem:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$



Máquinas de Turing

Descreva uma Máquina de Turing que verifica se uma palavra pertence à linguagem:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

- Uma **linguagem** é um conjunto de palavras
- Exemplo: *cidades = {vitória*, *vila velha*, *serra}*
- Aqui, geralmente vamos descrever linguagens matematicamente

Máquinas de Turing

Descreva uma Máquina de Turing que verifica se uma palavra pertence à linguagem:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

- Notação de conjuntos. Vamos descrever todas as palavras da nossa linguagem dentro das chaves

Máquinas de Turing

Descreva uma Máquina de Turing que verifica se uma palavra pertence à linguagem:

$$B = \{ w\#w \mid w \in \{0, 1\}^* \}$$

- As palavras da nossa linguagem tem esse formato: queremos duas palavras iguais (w) separadas por um caractere #
- O formato de w será mostrado a seguir
- Exemplo: se w é *dia*, $w\#w$ é *dia#dia*

Máquinas de Turing

Descreva uma Máquina de Turing que verifica se uma palavra pertence à linguagem:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

- Lê-se “tal que”

Máquinas de Turing

Descreva uma Máquina de Turing que verifica se uma palavra pertence à linguagem:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

- Lê-se “pertence”

Máquinas de Turing

Descreva uma Máquina de Turing que verifica se uma palavra pertence à linguagem:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^* \}$$

- $\{0,1\}$ representa um número que pode ser 0 ou 1
- O asterisco diz que podemos ter zero ou mais ocorrências do que vem antes dele
- Então, w é qualquer sequência de zeros e uns

Máquinas de Turing

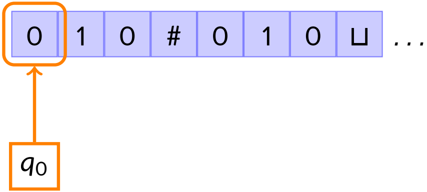
Descreva uma Máquina de Turing que verifica se uma palavra pertence à linguagem:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

- Nossa linguagem é composta de todas as palavras compostas por duas sequências **iguais** de zeros e uns separadas por um #
- Exemplos:
  - **001#001** pertence à linguagem
  - **#** pertence à linguagem
  - **010101#010101** pertence à linguagem
  - **001#100** não pertence à linguagem

Máquinas de Turing

- Queremos uma Máquina de Turing que diga se uma palavra pertence a essa linguagem
- A palavra inicialmente é colocada na fita
- Lembre-se o que nossa máquina pode fazer:
  - Mover a cabeça para a direita ou esquerda
  - Escrever na fita
  - Alterar o próprio estado

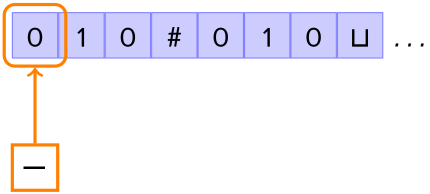


Máquinas de Turing

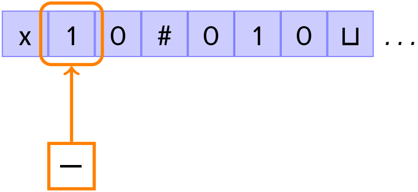
$M_1 =$"Para uma string de entrada w:

1. Faça um zig-zag pela fita indo de um lado para o outro do símbolo # e verifique se eles são iguais. Se eles não forem iguais ou se não existir um #, **rejeite**. Marque os símbolos que forem verificados ao longo do processo.
2. Quando todos os símbolos à esquerda do # tiverem sido marcados, verifique se sobraram símbolos à direita do #. Se sobraram, **rejeite**, caso contrário, **aceite**."

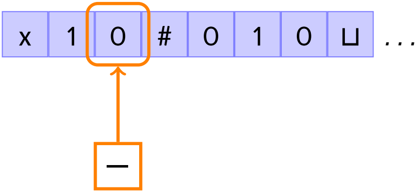
Máquinas de Turing



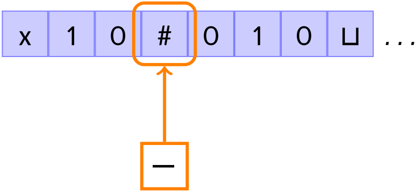
Máquinas de Turing



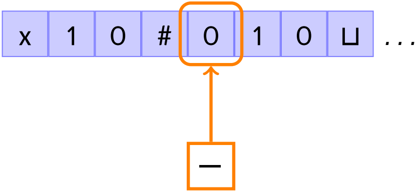
Máquinas de Turing



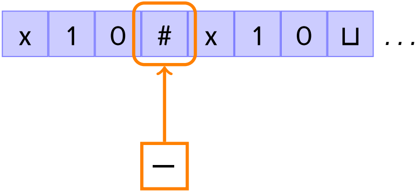
Máquinas de Turing



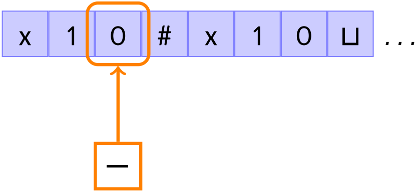
Máquinas de Turing



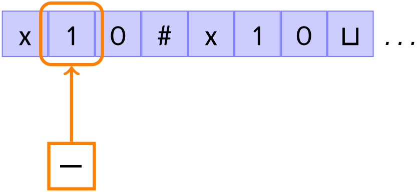
Máquinas de Turing



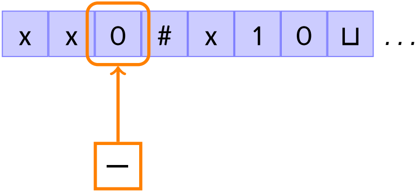
Máquinas de Turing



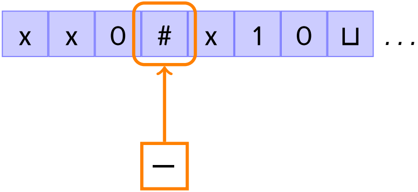
Máquinas de Turing



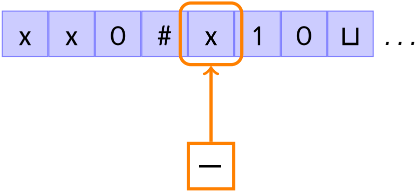
Máquinas de Turing



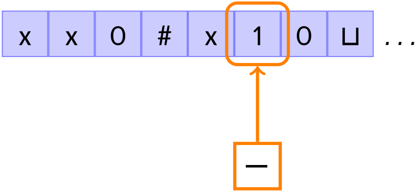
Máquinas de Turing



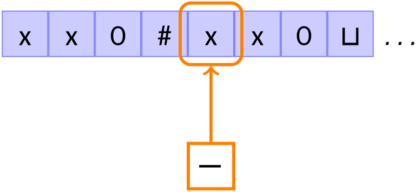
Máquinas de Turing



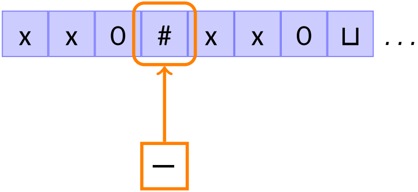
Máquinas de Turing



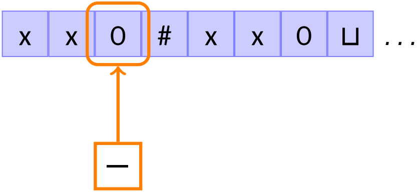
Máquinas de Turing



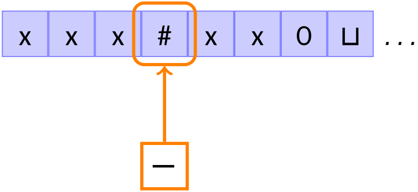
Máquinas de Turing



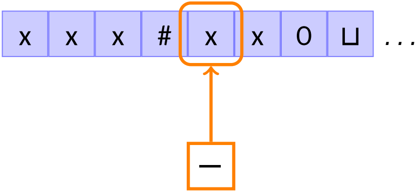
Máquinas de Turing



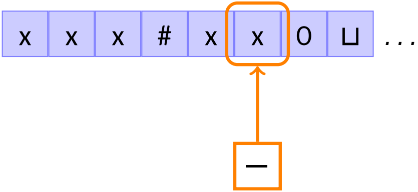
Máquinas de Turing



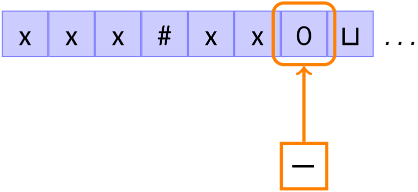
Máquinas de Turing



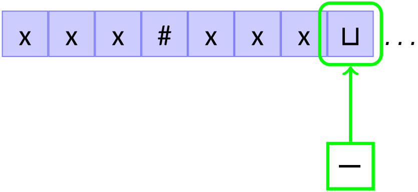
Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

Neste curso, descreveremos Máquinas de Turing de três maneiras:

- **Descrição do algoritmo:** descrevemos os passos que um algoritmo realiza para resolver o problema, sem nos preocuparmos com a implementação em uma Máquina de Turing
- **Descrição em alto nível da Máquina de Turing:** descrevemos com palavras os passos realizados pela Máquina de Turing para resolver o problema. Acabamos de ver uma descrição assim
- **Descrição formal da Máquina de Turing:** descrevemos matematicamente a Máquina de Turing

Raramente utilizamos a descrição formal por ser muito trabalhosa, mas vamos ver como ela funciona.

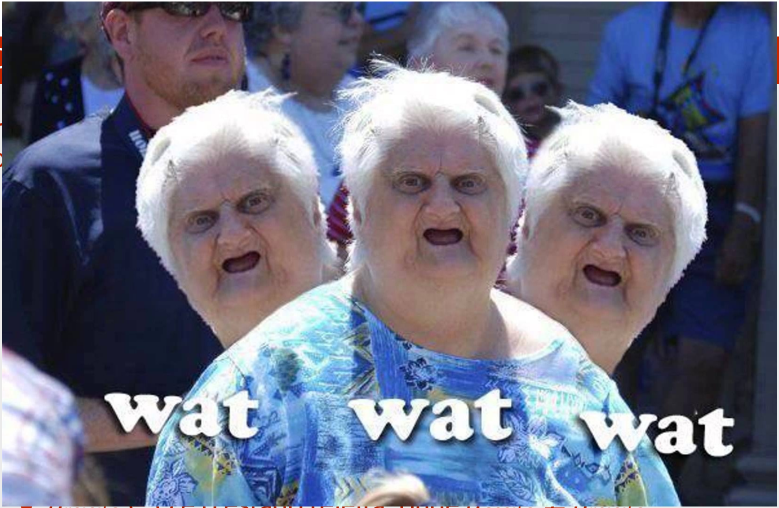
Máquinas de Turing

Definição

Uma Máquina de Turing é uma 7-tupla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$ onde Q, Σ e Γ são conjuntos finitos e:

- Q é o conjunto de estados
- Σ é o alfabeto de entrada, não incluindo o símbolo vazio $\sqcup$
- Γ é o alfabeto da fita, onde $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ é a função de transição
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $q_{aceita} \in Q$ é o estado aceita
- $q_{rejeita} \in Q$ é o estado rejeita, onde $q_{aceita} \neq q_{rejeita}$

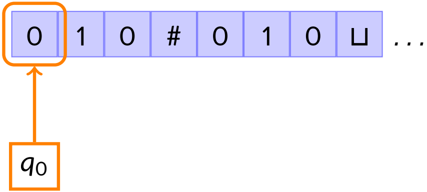
Máquinas de Turing



- $q_{rejeita} \in Q$ é o estado rejeita, onde $q_{aceita} \neq q_{rejeita}$

Máquinas de Turing

Q é o conjunto dos estados que a Máquina de Turing pode estar.

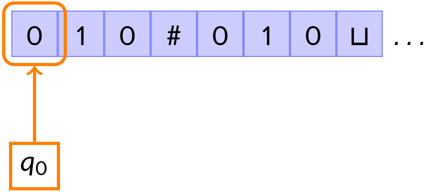


Se a Máquina pode estar nos estados q_0, $q1$ e q_2, então:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

Máquinas de Turing

Σ (sigma) é o conjunto de caracteres de entrada. Contém todos os caracteres que podem estar na fita quando a máquina é iniciada.



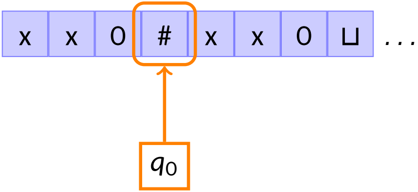
No nosso exemplo anterior:

$$\Sigma = \{0, 1, \#\}$$

Não incluímos aqui o caractere vazio ($\sqcup$).

Máquinas de Turing

Γ (gama) é o alfabeto da fita. Inclui todos os caracteres que podem ser escritos na fita em algum ponto do algorito.



No nosso exemplo anterior, além dos caracteres da entrada, usamos o caractere x para marcar as posições já visitadas.

$$\Gamma = \{0, 1, \#, x, \sqcup\}$$

Aqui, incluímos o caractere vazio ($\sqcup$).

Máquinas de Turing

q_0, q_{aceita} e $q_{rejeita}$ são estados pertencentes a Q que possuem significado especial.

- q_0 é o estado inicial. Quando a máquina é iniciada, ela está nesse estado
- q_{aceita} é o estado aceita. Se a máquina chega nesse estado, ela para de executar e informa que aceitou aquele valor de entrada
- $q_{rejeita}$ é o estado final. Quando a máquina chega nesse estado, ela para de executar e informa que rejeitou aquele valor de entrada

Máquinas de Turing

δ (delta) é a função de transição da Máquina de Turing. Ela que define qual será o comportamento da máquina.

A função δ recebe os parâmetros (q, a):

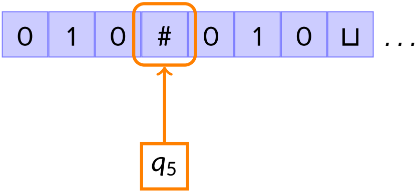
- q o estado atual da máquina
- a o caractere na fita na posição atual da cabeça da máquina

A função δ retorna como saída os valores (r, b, E):

- r o novo estado da máquina
- b o valor a ser escrito na fita
- E a direção para movimentar a cabeça de leitura (direita ou esquerda)
  - Se já estamos no início da fita e a função retorna E, permanecemos no início da fita

Máquinas de Turing

Podemos representar uma "foto" de uma Máquina de Turing em determinado ponto da execução. Essa "foto" é chamada de configuração. Usamos uma notação especial para representar configurações:



Representamos essa configuração como:

$$010\ q_5\ \#010$$

Máquinas de Turing

Dizemos que uma configuração C_1 produz uma configuração C_2 se é possível ir da configuração C_1 para a configuração C_2 em um único passo. Exemplo:

A configuração

$$ua\, q_i\, bv$$

produz

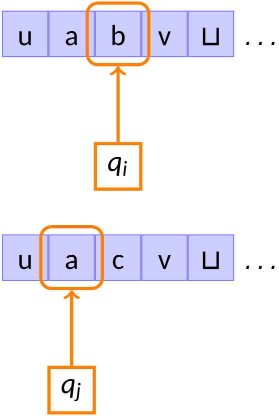
$$u\, q_j\, acv$$

se a função de transição

$$\delta(q_i, b) = (q_j, c, E)$$

Máquinas de Turing

$$\delta(q_i, b) = (q_j, c, E)$$



Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $q_j\ uabv$?

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $q_j\ uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\,q_i\,bv$ produzir $q_j\,uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível $ua\,q_i\,bv$ produzir $ua\,q_j\,bv$?

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $q_j\, uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $ua\, q_j\, bv$?
  - Não. Pois a cabeça não se moveu

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $q_j\, uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $ua\, q_j\, bv$?
  - Não. Pois a cabeça não se moveu
- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $tab\, q_j\, v$?

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível *ua* q_i *bv* produzir q_j *uabv* ?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível *ua* q_i *bv* produzir *ua* q_j *bv* ?
  - Não. Pois a cabeça não se moveu
- É possível *ua* q_i *bv* produzir *tab* q_j *v* ?
  - Não, pois só pode haver mudança na fita na posição da cabeça

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $q_j\ uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $ua\ q_j\ bv$?
  - Não. Pois a cabeça não se moveu
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $tab\ q_j\ v$?
  - Não, pois só pode haver mudança na fita na posição da cabeça
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $uab\ q_i\ v$?

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $q_j\ uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $ua\ q_j\ bv$?
  - Não. Pois a cabeça não se moveu
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $tab\ q_j\ v$?
  - Não, pois só pode haver mudança na fita na posição da cabeça
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $uab\ q_i\ v$?
  - Sim. O estado da máquina não precisa necessariamente mudar a cada transição.

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $q_j\ uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $ua\ q_j\ bv$?
  - Não. Pois a cabeça não se moveu
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $tab\ q_j\ v$?
  - Não, pois só pode haver mudança na fita na posição da cabeça
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $uab\ q_i\ v$?
  - Sim. O estado da máquina não precisa necessariamente mudar a cada transição. $\delta(q_i, b) = (q_i, b, D)$

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $q_j\ uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $ua\ q_j\ bv$?
  - Não. Pois a cabeça não se moveu
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $tab\ q_j\ v$?
  - Não, pois só pode haver mudança na fita na posição da cabeça
- É possível $ua\ q_i\ bv$ produzir $uab\ q_i\ v$?
  - Sim. O estado da máquina não precisa necessariamente mudar a cada transição. $\delta(q_i, b) = (q_i, b, D)$
- É possível $q_i\ uabv$ produzir $q_j\ uabv$?

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $q_j\, uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $ua\, q_j\, bv$?
  - Não. Pois a cabeça não se moveu
- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $tab\, q_j\, v$?
  - Não, pois só pode haver mudança na fita na posição da cabeça
- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $uab\, q_i\, v$?
  - Sim. O estado da máquina não precisa necessariamente mudar a cada transição. $\delta(q_i, b) = (q_i, b, D)$
- É possível $q_i\, uabv$ produzir $q_j\, uabv$?
  - Sim. A cabeça da máquina está no início da fita.

Máquinas de Turing

Exercícios

- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $q_j\, uabv$?
  - Não. Pois a cabeça moveu duas posições de uma configuração para a outra
- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $ua\, q_j\, bv$?
  - Não. Pois a cabeça não se moveu
- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $tab\, q_j\, v$?
  - Não, pois só pode haver mudança na fita na posição da cabeça
- É possível $ua\, q_i\, bv$ produzir $uab\, q_i\, v$?
  - Sim. O estado da máquina não precisa necessariamente mudar a cada transição. $\delta(q_i, b) = (q_i, b, D)$
- É possível $q_i\, uabv$ produzir $q_j\, uabv$?
  - Sim. A cabeça da máquina está no início da fita. $\delta(q_i, u) = (q_j, u, E)$

Máquinas de Turing

Uma Máquina de Turing M aceita uma entrada w se existe uma sequência de configurações $C_1, C_2, \cdots, C_k$ tal que:

- C_1 é a configuração inicial de M para uma entrada w
- Cada C_i *produz* C_{i+1}
- C_k é uma configuração de aceitação

Máquinas de Turing

O conjunto de palavras que M aceita é a linguagem de M ou a linguagem reconhecida por M, denotada como $L(M)$.

Máquinas de Turing

O conjunto de palavras que M aceita é a linguagem de M ou a linguagem reconhecida por M, denotada como $L(M)$.

Definição

Uma linguagem é Turing-reconhecível se existe uma Máquina de Turing que a reconheça.

Máquinas de Turing

Ao iniciar uma Máquina de Turing, três coisas podem acontecer:

- A máquina **aceita** a entrada
- A máquina **rejeita** a entrada
- A máquina **entra em loop**

Uma máquina que sempre dá uma resposta (nunca entra em loop) é chamada de decisor.

Máquinas de Turing

Ao iniciar uma Máquina de Turing, três coisas podem acontecer:

- A máquina **aceita** a entrada
- A máquina **rejeita** a entrada
- A máquina **entra em loop**

Uma máquina que sempre dá uma resposta (nunca entra em loop) é chamada de decisor.

Definição

Uma linguagem é Turing-decidível se existe uma Máquina de Turing que a decida.

Máquinas de Turing

Descreva uma Máquina de Turing M_2 que decida a linguagem:

$$A = \{0^{2^n} | n \geq 0\}$$

Máquinas de Turing

Descreva uma Máquina de Turing M_2 que decida a linguagem:

$$A = \{0^{2^n} | n \geq 0\}$$

Esta linguagem consiste de todas as palavras formadas por zeros cujo tamanho seja uma potência de 2.
Vamos começar com uma descrição em alto nível da máquina.
Idéias?

Máquinas de Turing

$M_2 =$ "Para uma string de entrada w:

1. Varra a fita da esquerda para a direita, marcando um zero sim e outro não
2. Se no estágio 1 a fita continha apenas um zero, **aceite**
3. Se no estágio 1 a fita continha mais de um zero e o número de zeros foi ímpar, **rejeite**
4. Volte a cabeça para o início da fita
5. Vá para o estágio 1"

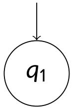
Máquinas de Turing

$M_2 =$"Para uma string de entrada w:

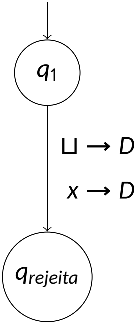
1. Varra a fita da esquerda para a direita, marcando um zero sim e outro não
2. Se no estágio 1 a fita continha apenas um zero, **aceite**
3. Se no estágio 1 a fita continha mais de um zero e o número de zeros foi ímpar, **rejeite**
4. Volte a cabeça para o início da fita
5. Vá para o estágio 1"

Vamos começar definindo δ. As outras partes da descrição ficam fáceis depois.

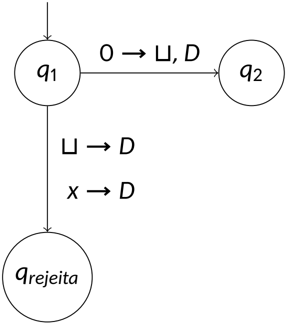
Máquinas de Turing



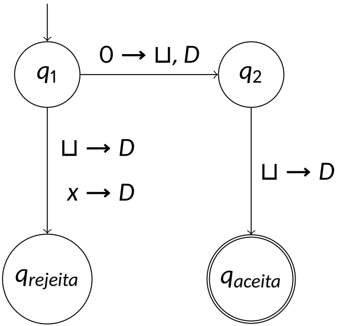
Máquinas de Turing



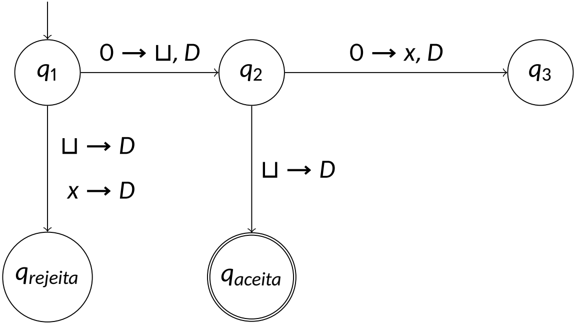
Máquinas de Turing



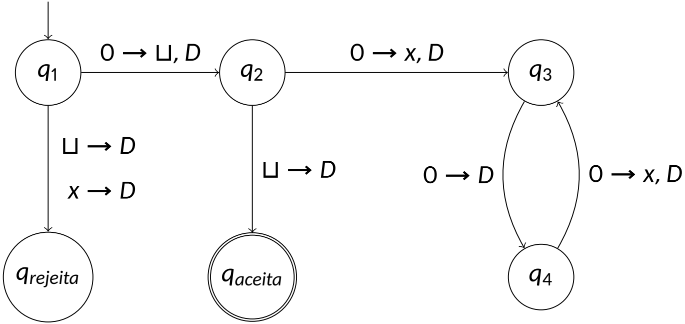
Máquinas de Turing



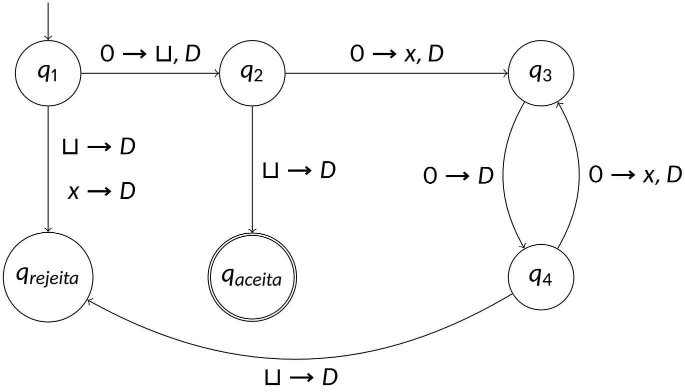
Máquinas de Turing



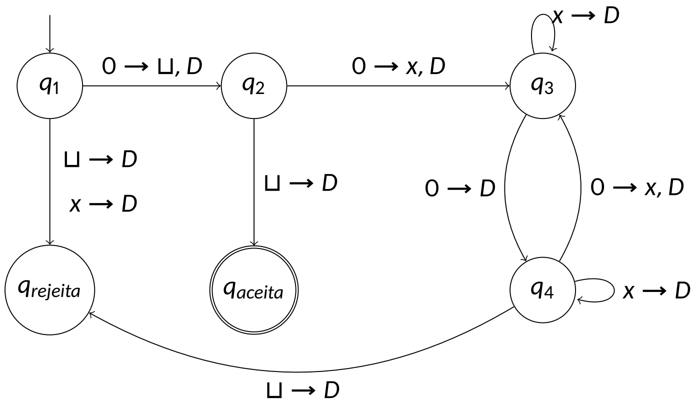
Máquinas de Turing



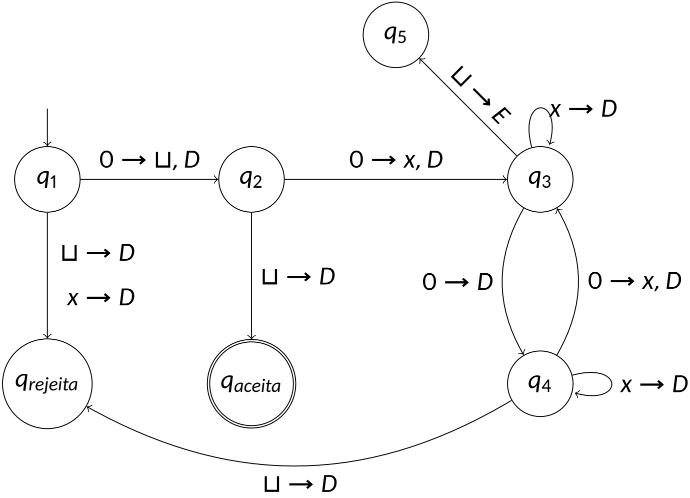
Máquinas de Turing



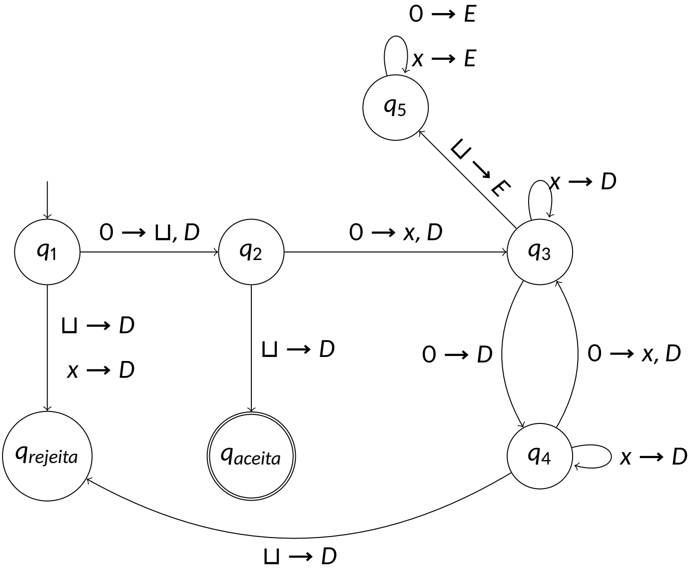
Máquinas de Turing



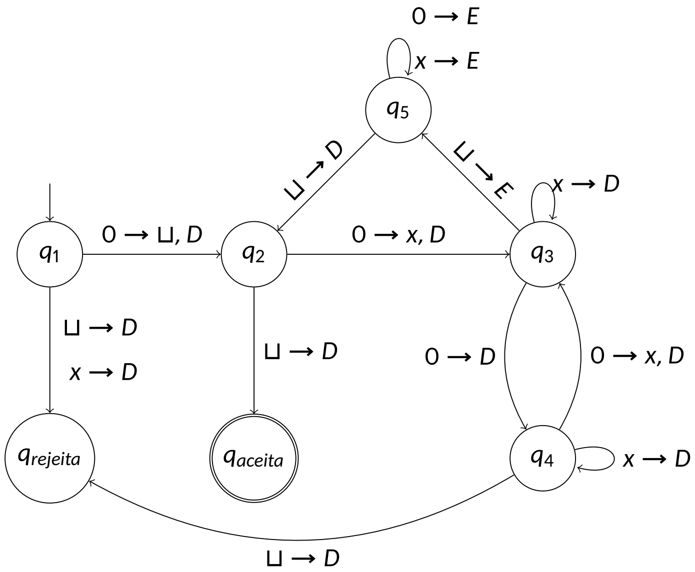
Máquinas de Turing



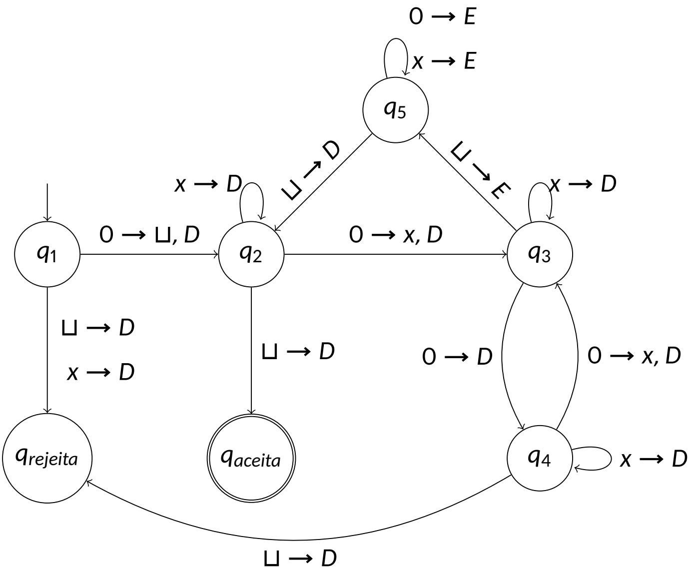
Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

Lembre-se: em cada estado deve haver uma transição para cada uma das possibilidades do alfabeto da fita Γ.

Máquinas de Turing

Lembre-se: em cada estado deve haver uma transição para cada uma das possibilidades do alfabeto da fita Γ.

Ainda faltam as 6 outras partes da definição da Máquina!

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$

Máquinas de Turing

Lembre-se: em cada estado deve haver uma transição para cada uma das possibilidades do alfabeto da fita Γ.

Ainda faltam as 6 outras partes da definição da Máquina!

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$
- $\Sigma = \{0\}$

Máquinas de Turing

Lembre-se: em cada estado deve haver uma transição para cada uma das possibilidades do alfabeto da fita Γ.

Ainda faltam as 6 outras partes da definição da Máquina!

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$
- $\Sigma = \{0\}$
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$

Máquinas de Turing

Lembre-se: em cada estado deve haver uma transição para cada uma das possibilidades do alfabeto da fita Γ.
Ainda faltam as 6 outras partes da definição da Máquina!

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$
- $\Sigma = \{0\}$
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$
- q_1 é o estado inicial

Máquinas de Turing

Lembre-se: em cada estado deve haver uma transição para cada uma das possibilidades do alfabeto da fita Γ.
Ainda faltam as 6 outras partes da definição da Máquina!

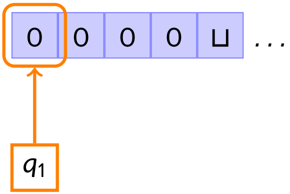
- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$
- $\Sigma = \{0\}$
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$
- q_1 é o estado inicial
- q_{aceita} é o estado aceita

Máquinas de Turing

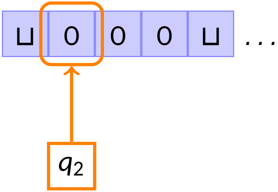
Lembre-se: em cada estado deve haver uma transição para cada uma das possibilidades do alfabeto da fita Γ.
Ainda faltam as 6 outras partes da definição da Máquina!

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$
- $\Sigma = \{0\}$
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$
- q_1 é o estado inicial
- q_{aceita} é o estado aceita
- $q_{rejeita}$ é o estado rejeita

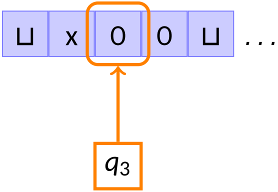
Máquinas de Turing



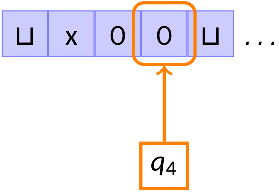
Máquinas de Turing



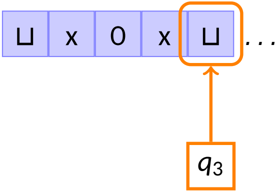
Máquinas de Turing



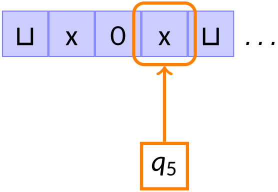
Máquinas de Turing



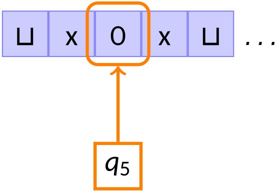
Máquinas de Turing



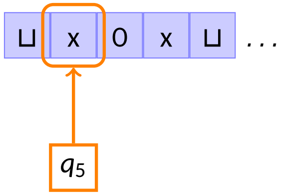
Máquinas de Turing



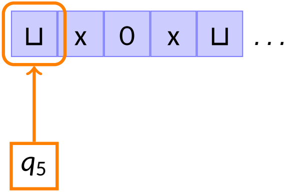
Máquinas de Turing



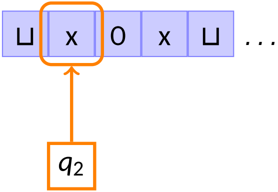
Máquinas de Turing



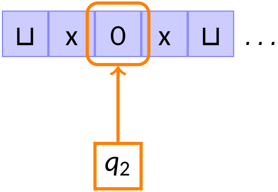
Máquinas de Turing



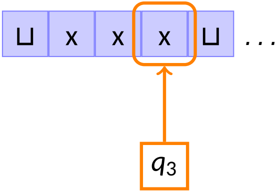
Máquinas de Turing



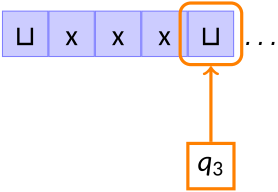
Máquinas de Turing



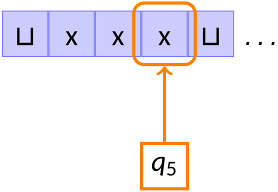
Máquinas de Turing



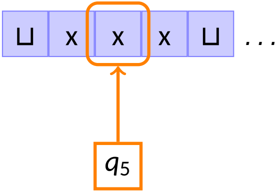
Máquinas de Turing



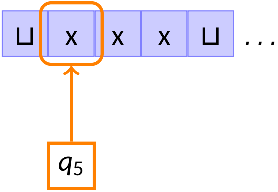
Máquinas de Turing



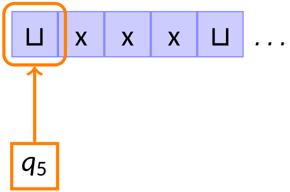
Máquinas de Turing



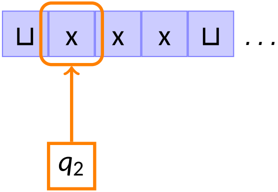
Máquinas de Turing



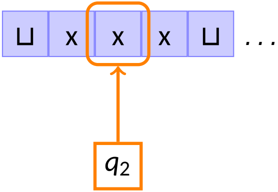
Máquinas de Turing



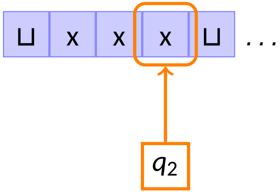
Máquinas de Turing



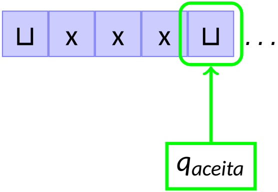
Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

Exercício

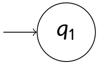
Agora, vamos fazer a descrição formal da primeira máquina que vimos no curso.

Queremos uma Máquina de Turing que decida a linguagem:

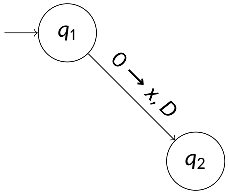
$$B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

Nossa estratégia era fazer zigue-zague pela fita marcando os elementos antes e depois do #.

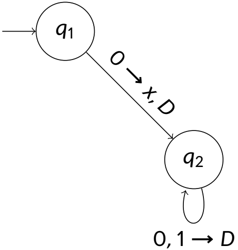
Máquinas de Turing



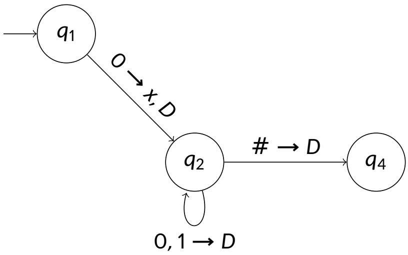
Máquinas de Turing



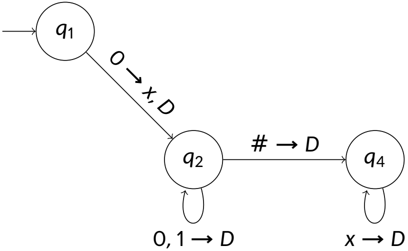
Máquinas de Turing



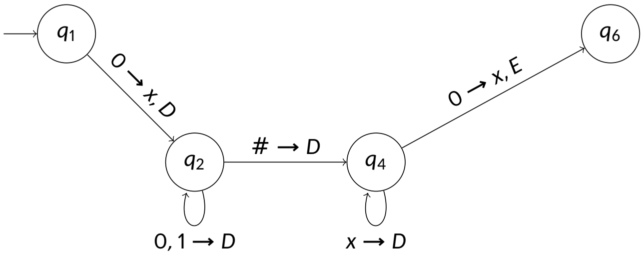
Máquinas de Turing



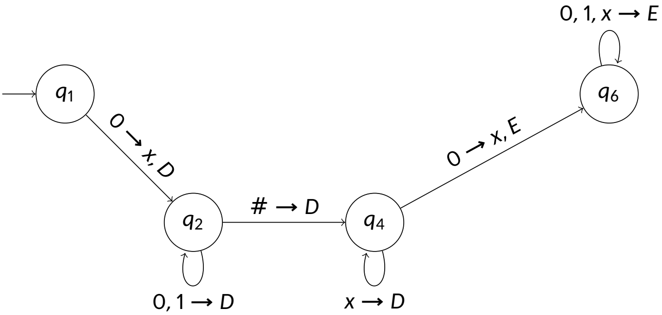
Máquinas de Turing



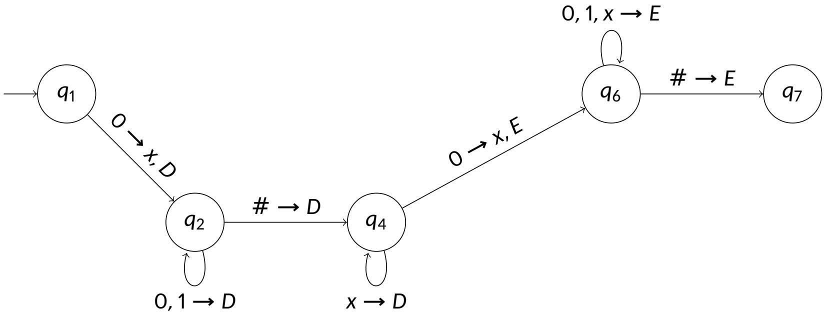
Máquinas de Turing



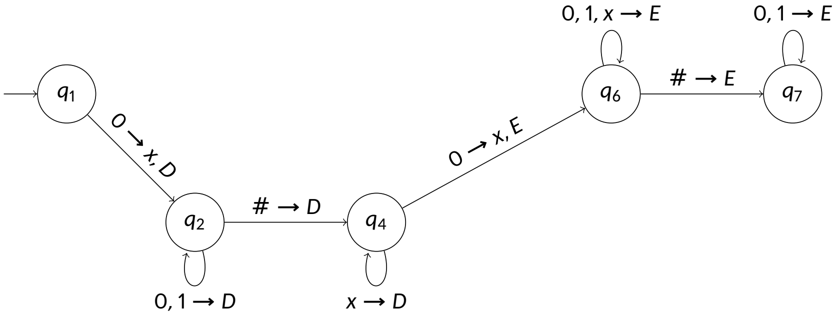
Máquinas de Turing



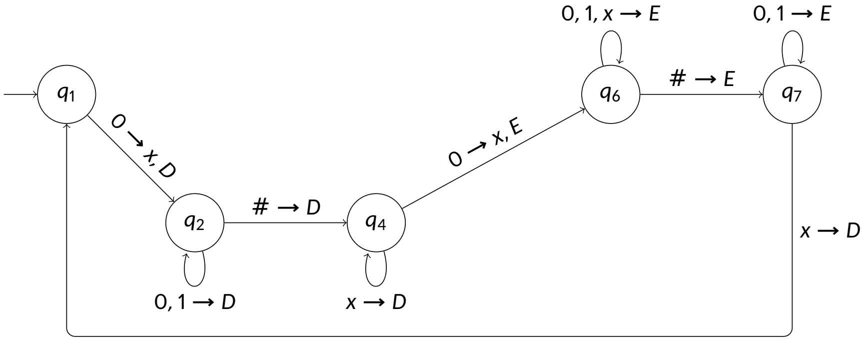
Máquinas de Turing



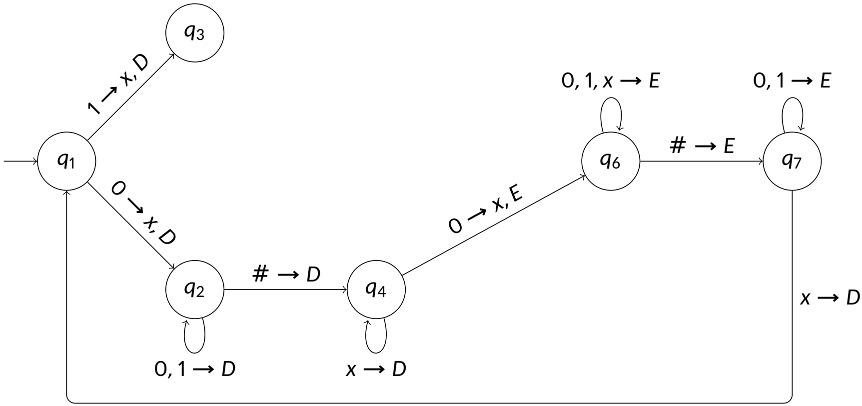
Máquinas de Turing



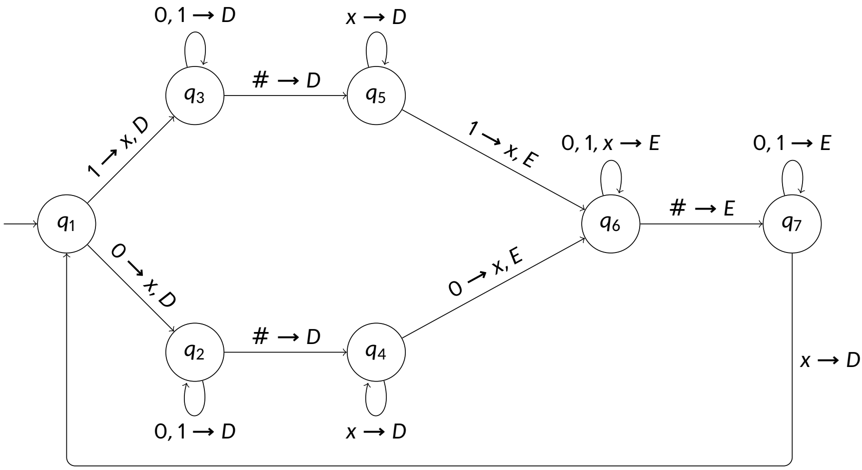
Máquinas de Turing



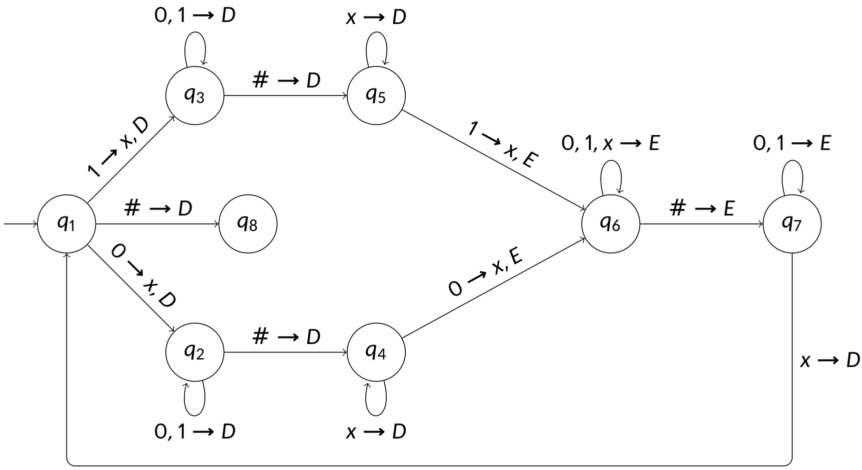
Máquinas de Turing



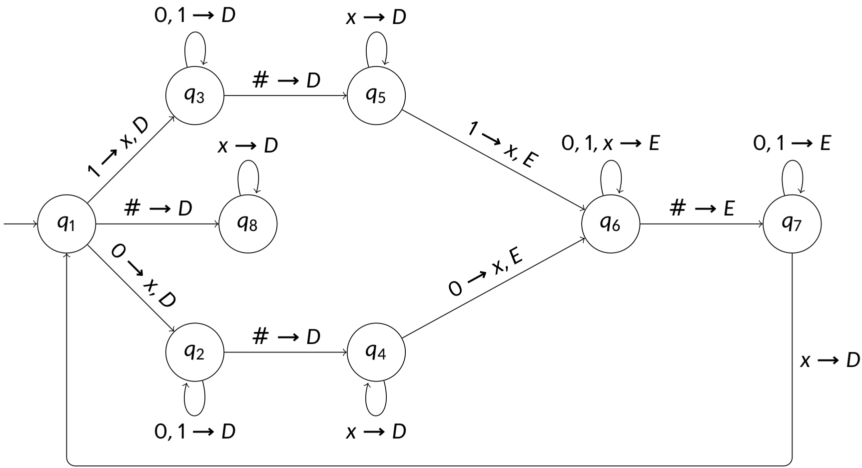
Máquinas de Turing



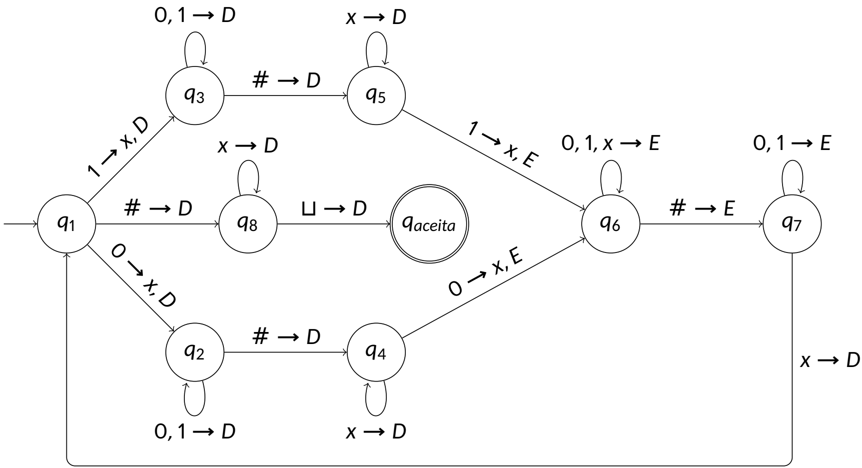
Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

No diagrama anterior, todas as transições não representadas vão levam para $q_{rejeita}$.

Com a definição do δ, o restante da definição é simples:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$
- $\Sigma = \{0, 1, \#\}$
- $\Gamma = \{0, 1, \#, x, \sqcup\}$
- q_1 é o estado inicial
- q_{aceita} é o estado aceita
- $q_{rejeita}$ é o estado rejeita

Máquinas de Turing

Exercício

Faça uma **descrição de alto nível** de uma Máquina de Turing que decida a linguagem

$$C = \{a^i b^j c^k \mid i \times j = k \text{ e } i, j, k \geq 1\}$$

Máquinas de Turing

Exercício

Faça uma **descrição de alto nível** de uma Máquina de Turing que decida a linguagem

$$C = \{a^i b^j c^k \mid i \times j = k \text{ e } i, j, k \geq 1\}$$

Exemplos de palavras dessa linguagem:

- $i = 1, j = 3, k - 3$: abbcc
- $i = 3, j = 2, k = 6$: aaabbcccccc
- $i = 4, j = 3, k = 12$: aaaabbbcccccccccccc

Máquinas de Turing

$M_3 =$"Para uma string de entrada w:

1. Varra a fita da esquerda para a direita para determinar se a entrada está no formato $a^+b^+c^+$ e **rejeite** se não estiver.

Máquinas de Turing

M_3 =“Para uma string de entrada w:

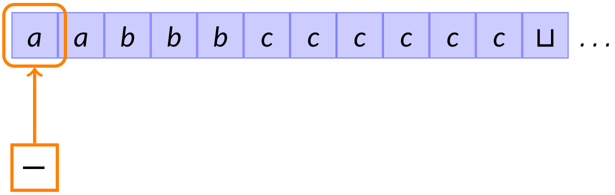
1. Varra a fita da esquerda para a direita para determinar se a entrada está no formato $a^+ b^+ c^+$ e **rejeite** se não estiver.
   - Enquanto o $*$ significa zero ou mais caracteres, o $+$ significa um ou mais caracteres.

Máquinas de Turing

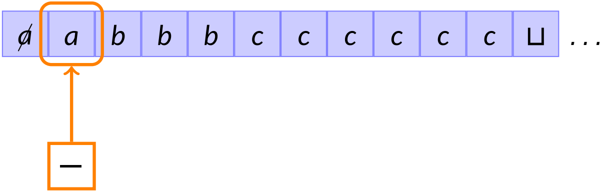
$M_3 =$"Para uma string de entrada w:

1. Varra a fita da esquerda para a direita para determinar se a entrada está no formato $a^+b^+c^+$ e **rejeite** se não estiver.
2. Volte a cabeça da máquina para o inicio da fita
3. Risque um a e mova para a direita até encontrar um b. Faça um zigue-zague entre os b's e os c's riscando um b e um c até que acabem os b's. Se todos os c's forem riscados e ainda houver b's, **rejeite**
4. Restaure todos os b's e repita o estágio 3 se ainda houver a's para serem riscados. Se todos os a's forem riscados, verifique se todos os c's também foram riscados. Se sim, **aceite**, caso contrário, **rejeite**"

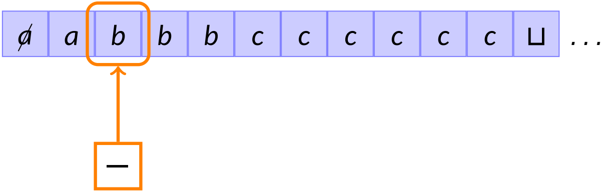
Máquinas de Turing



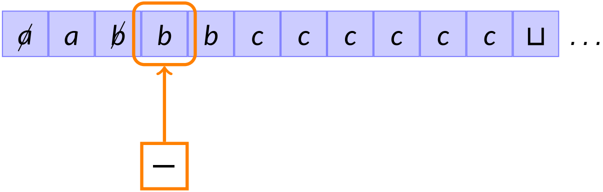
Máquinas de Turing



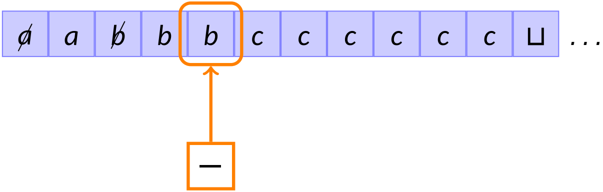
Máquinas de Turing



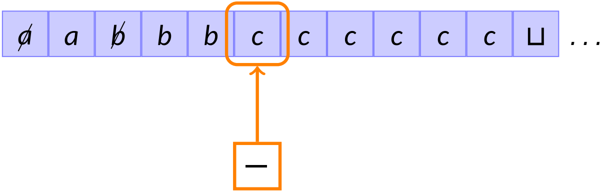
Máquinas de Turing



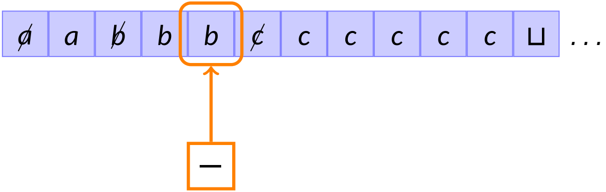
Máquinas de Turing



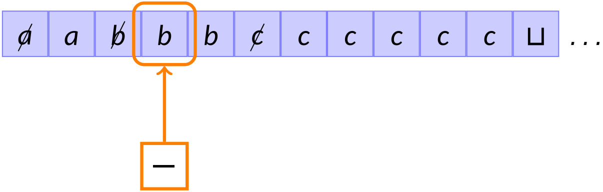
Máquinas de Turing



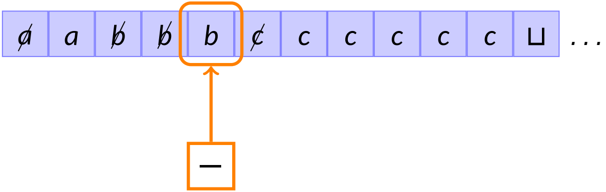
Máquinas de Turing



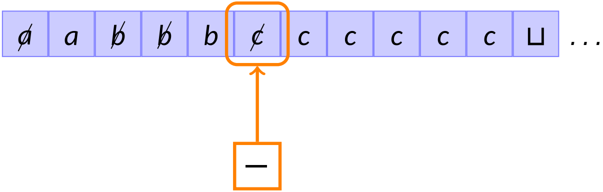
Máquinas de Turing



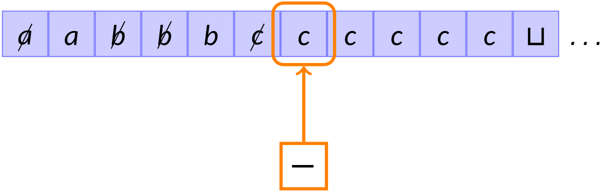
Máquinas de Turing



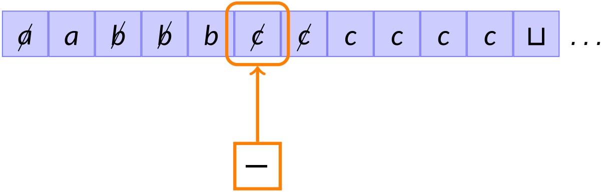
Máquinas de Turing



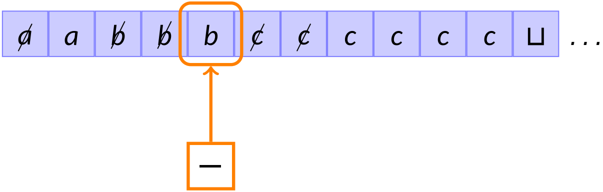
Máquinas de Turing



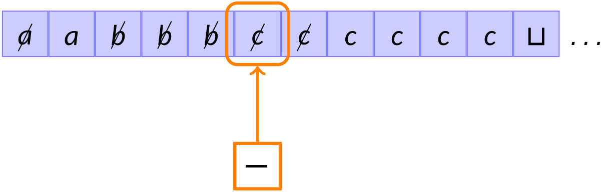
Máquinas de Turing



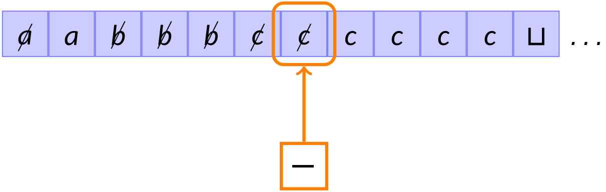
Máquinas de Turing



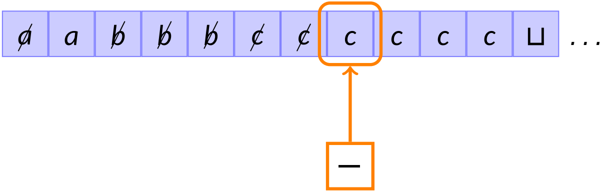
Máquinas de Turing



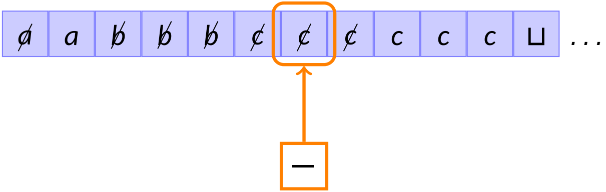
Máquinas de Turing



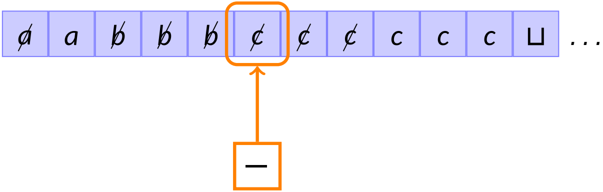
Máquinas de Turing



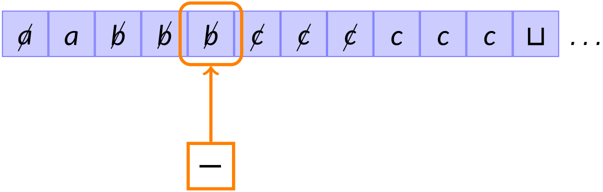
Máquinas de Turing



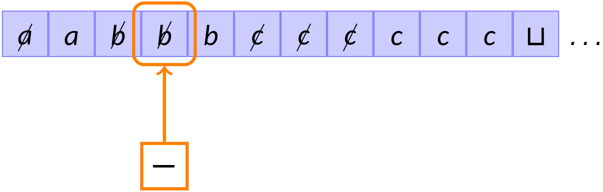
Máquinas de Turing



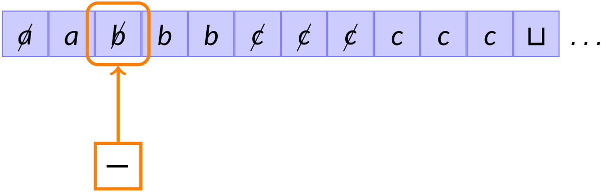
Máquinas de Turing



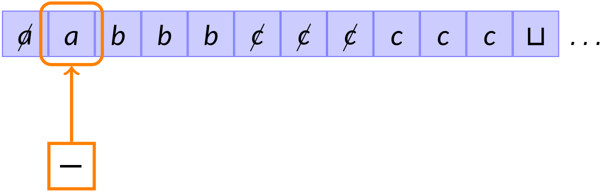
Máquinas de Turing



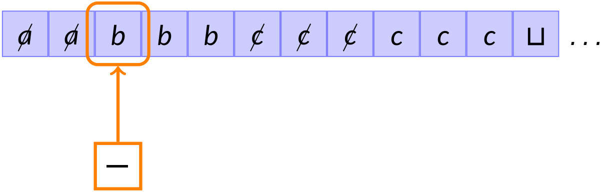
Máquinas de Turing



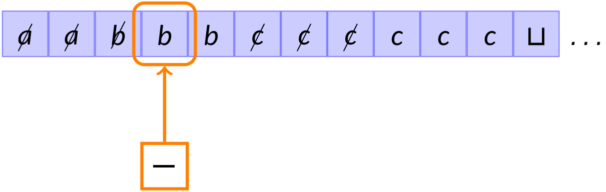
Máquinas de Turing



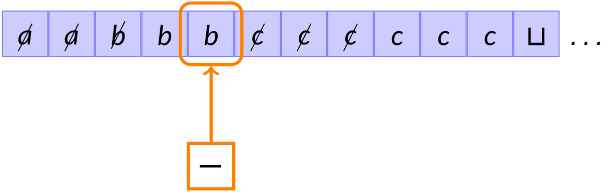
Máquinas de Turing



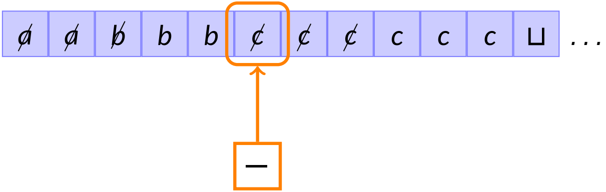
Máquinas de Turing



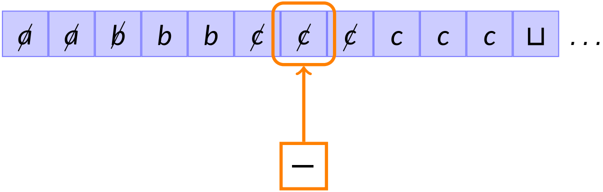
Máquinas de Turing



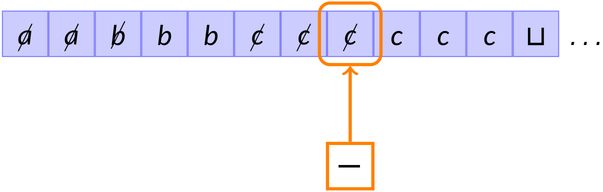
Máquinas de Turing



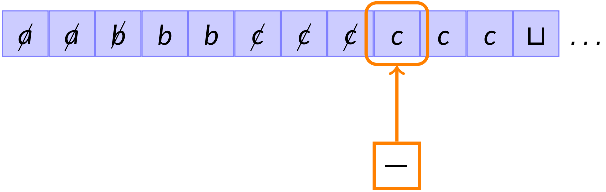
Máquinas de Turing



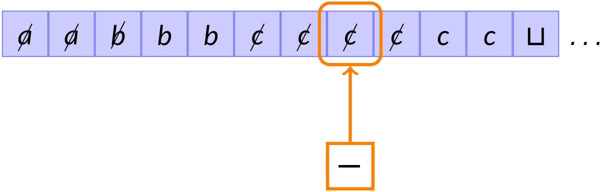
Máquinas de Turing



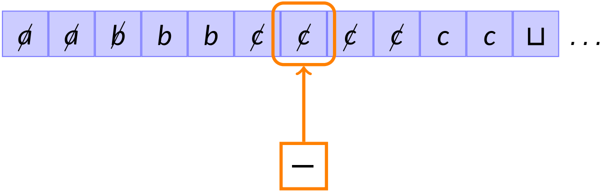
Máquinas de Turing



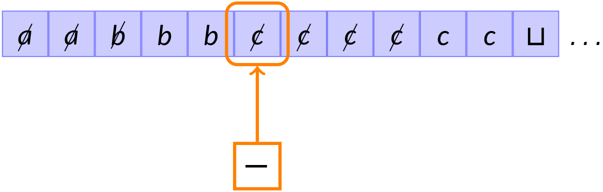
Máquinas de Turing



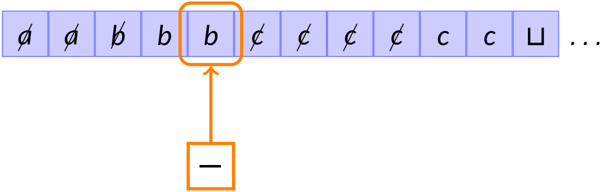
Máquinas de Turing



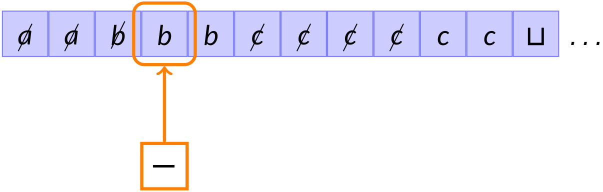
Máquinas de Turing



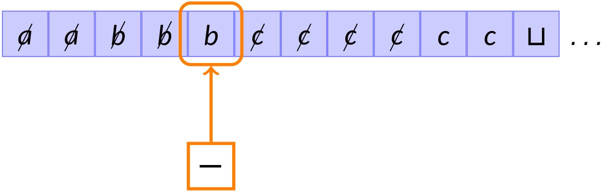
Máquinas de Turing



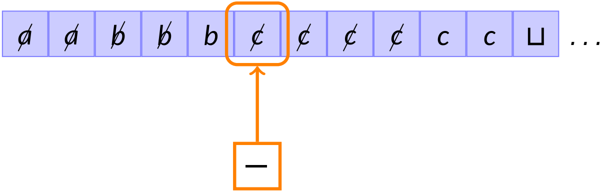
Máquinas de Turing



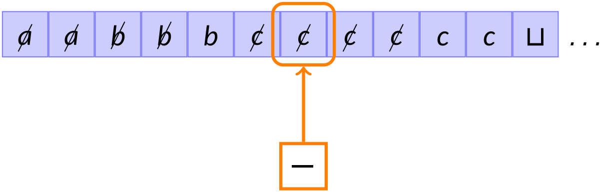
Máquinas de Turing



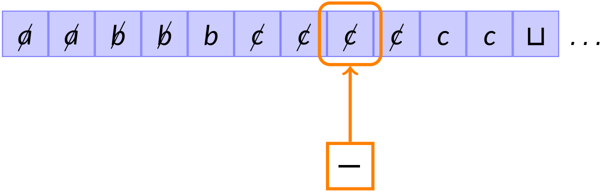
Máquinas de Turing



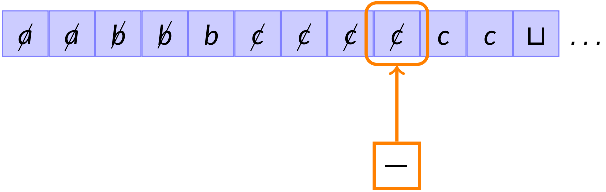
Máquinas de Turing



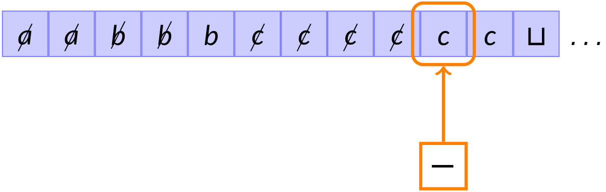
Máquinas de Turing



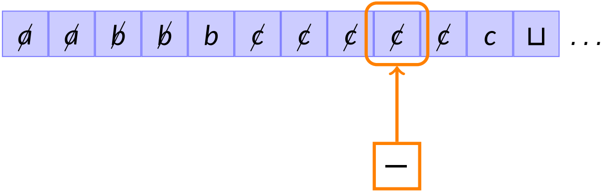
Máquinas de Turing



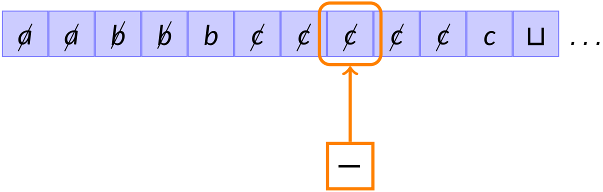
Máquinas de Turing



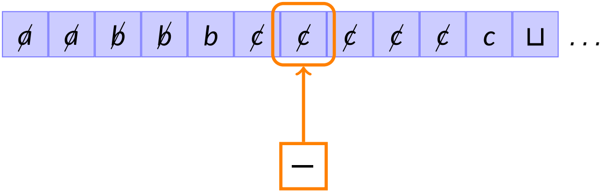
Máquinas de Turing



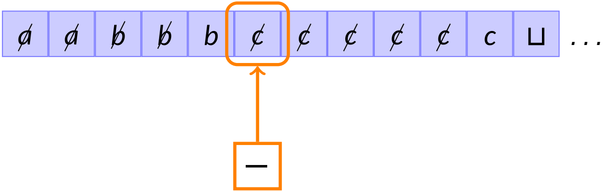
Máquinas de Turing



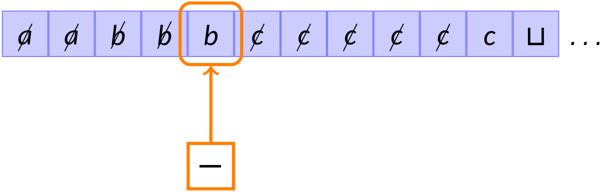
Máquinas de Turing



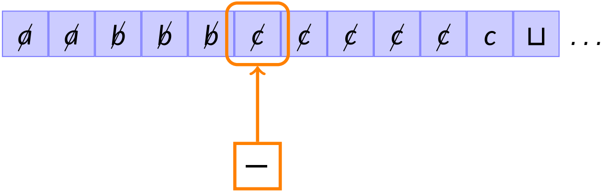
Máquinas de Turing



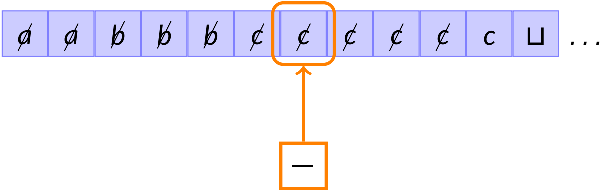
Máquinas de Turing



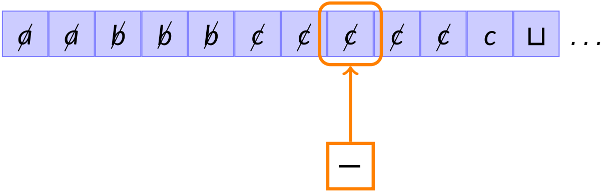
Máquinas de Turing



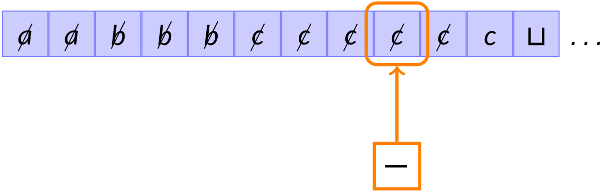
Máquinas de Turing



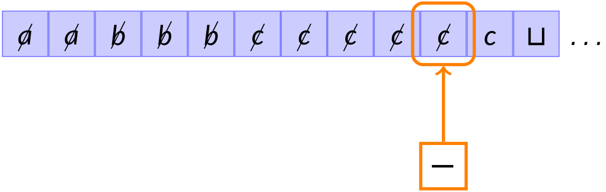
Máquinas de Turing



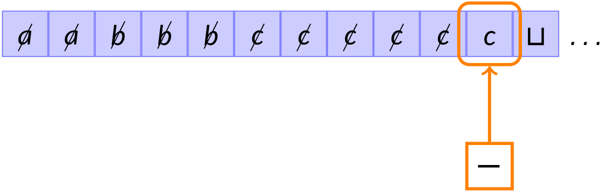
Máquinas de Turing



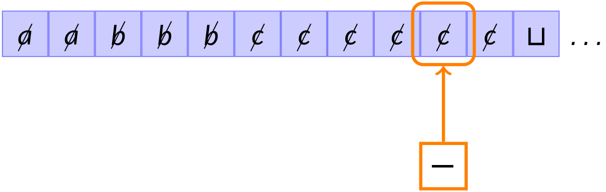
Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

Exercício

Faça uma **descrição de alto nível** de uma Máquina de Turing que decida a linguagem

$$E = \{\#x_1\#x_2\#\cdots\#x_l \,|\, \text{cada } x_i \in \{0,1\}^* \text{ e } x_i \neq x_j \text{ para cada } i \neq j\}$$

Máquinas de Turing

Exercício

Faça uma **descrição de alto nível** de uma Máquina de Turing que decida a linguagem

$$E = \{\#x_1\#x_2\# \cdots \#x_l \,|\, \text{cada } x_i \in \{0,1\}^* \text{ e } x_i \neq x_j \text{ para cada } i \neq j\}$$

Em palavras: cada x_i é uma palavra de zeros e uns e todas as palavras devem ser diferentes entre si.

Exemplos:

- #0101#100#0
- #11#0001#10101#010
- #000000#111

Máquinas de Turing

$M_4 =$"Para uma string de entrada w:

1. Coloque uma marca no símbolo mais à esquerda da fita. Se esse símbolo for vazio, **aceite**. Se esse símbolo for um #, continue para o próximo estágio, caso contrário, **rejeite**
2. Mova para a direita até o próximo # e marque-o. Se nenhum # for encontrado, apenas x_1 foi encontrado, então **aceite**
3. Faça zigue-zague na fita, comparando as duas strings à direita dos #'s marcados. Se forem iguais, **rejeite**
4. Mova a marca mais à direita para o próximo # à direita. Se nenhum # for encontrado, mova a marca mais à esquerda para o próximo # à direita e mova a marca mais à direita para o # seguinte. Dessa vez, se nenhum # for encontrado para a marca à direita, todas as strings foram comparadas, então **aceite**
5. Vá para o estágio 3

Máquinas de Turing

O objetivo aqui é comparar todas as strings entre si de duas em duas:

- #11#0001#10101#010
- #11#0001#10101#010
- #11#0001#10101#010
- #11#0001#10101#010
- #11#0001#10101#010
- #11#0001#10101#010