COMPLEMENTS DE CALCUL DIFFERENTIEL

DIVERGENCE, GRADIENT, ROTATIONNEL

Plan

I : Préambule

Toutes les fonctions sont supposées C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Toutes les formules qui suivent sont bâties sur le même schéma qu'on peut symboliser sous la forme :

$$\int_{\delta D} \omega = \int_{D} d\omega$$

où D est une domaine de dimension n, δD son bord de dimension n–1. Ainsi :

pour $n = 3$, D est un volume et δD la surface limitant ce volume.

Pour $n = 2$, D est une surface et δD la courbe limitant cette surface, éventuellement vide si la surface se referme.

Pour $n = 1$, D est une courbe et δD les deux extrémités de cette courbe, identiques si la courbe est fermée. La dimension d'une domaine est le nombre de paramètres nécessaires pour la décrire.

ω est une forme différentielle de degré n–1 et dω la forme différentielle de degré n, différentielle de ω. Le degré d'une forme différentielle est le nombre d'éléments différentiels intervenant dans sa définition (Ce vocabulaire sera éclairé, nous l'espérons, par les exemple qui suivent).

Pour $n = 1$, D est par exemple un segment $[a, b]$ (de dimension 1) et $\delta D = \{a, b\}$ (de dimension nulle), $\omega = f(x)$ (forme différentielle de degré 0) et $d\omega = f'(x)\, dx$ (forme différentielle de degré 1). La formule citée ci-dessus exprime simplement que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx$$

Plus généralement, et toujours pour $n = 1$, mais dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$,

D est un chemin Γ reliant les points A à B (variété de dimension 1)

$\delta D = \{A, B\}$ (de dimension nulle)

$\omega = f(M)$ fonction de plusieurs variables (forme différentielle de degré 0) et

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = \boldsymbol{grad}f.d\boldsymbol{M} \quad \text{(forme différentielle de degré 1)}$$

La formule énoncée s'exprime ici sous la forme :

$$\boxed{f(B) - f(A) = \int_\Gamma \boldsymbol{grad}f.d\boldsymbol{M}}$$

En effet, $\int_\Gamma \boldsymbol{grad}f.d\boldsymbol{M} = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$ et si un paramétrage de Γ est donné par $(x(t), y(t), z(t))$, pour t variant de a à b, alors l'intégrale ci-dessus se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}f(x(t),y(t),z(t))\,dt \\ &= f(x(b),y(b),z(b)) - f(x(a),y(a),z(a)) = f(B) - f(A)\end{aligned}$$

En particulier, si Γ est fermé, l'intégrale est nulle.

II : Formule de Green–Riemann (n = 2 dans le plan)

On a ici :

D est un domaine Σ du plan (convexe pour simplifier), variété de dimension 2.

$\delta D = \Gamma$ est un arc fermé de classe C^1 par morceaux, sans point double, entourant le domaine $\Sigma = D$, orienté dans le sens trigonométrique, variété de dimension 1.

$\omega = P\,dx + Q\,dy$ est une forme différentielle de classe C^1 de degré 1

$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$, forme différentielle de degré 2.

Alors :

$$\boxed{\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

Comme expliqué en I, la première intégrale se calcule en prenant un paramétrage de Γ. On retrouve le fait que, si ω est exacte, alors son intégrale sur un chemin fermé est nulle. (ω est exacte s'il existe f telle que $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$). L'intégrale de gauche n'est autre que $\int_\Gamma \boldsymbol{grad}f.d\boldsymbol{M}$, nulle si Γ est fermé. Une condition nécessaire pour que ω soit exacte est que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ pour f de classe C^2 et la deuxième intégrale est également nulle.

EXEMPLE : Soit A (1,0) et $B(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. Soit Γ formé du segment [OA], de l'arc de cercle AB de centre O, et du segment [BO]. On paramétrise [OA] par $(x,0)$, $0 \le x \le 1$, AB par $(\cos\theta, \sin\theta)$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ et [BO] par (t,t), t variant de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 0

$$\int_\Gamma y^2dx + x^2dy = \int_0^{\pi/4} -\sin^3\theta + \cos^3\theta\,d\theta - \int_0^{1/\sqrt{2}} 2t^2\,dt = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$$

Par ailleurs :

$$\iint_\Sigma 2x - 2y \; dxdy = \iint_D 2(\cos\theta - \sin\theta)\, r^2 dr d\theta = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$$

où $D = \{(r,\theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 \leq r \leq 1\}$.

On peut donner la justification suivante de la formule. Supposons pour simplifier que Σ puisse d'écrire :

$$\Sigma = \{(x,y) \mid f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}.$$

On a :

$$\iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial y} \, dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} \, dy \; dx = \int_a^b P(x,g(x)) - P(x,f(x)) \, dx$$

On reconnaît $\int_\Gamma - P(x,y) \, dx$

On montre de même que $\iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x} \, dxdy = \int_\Gamma Q(x,y) \, dy$

On en déduit par exemple que l'aire de Σ vaut :

$$\iint_\Sigma dxdy = \int_\Gamma x \, dy = -\int_\Gamma y \, dx = \frac{1}{2} \int_\Gamma x dy - y dx$$

La dernière formule peut s'interpréter géométriquement comme la somme d'aires de triangles infinitésimaux de côtés (x,y) et (dx,dy). Ainsi, en thermodynamique, le cycle d'une machine thermique est représenté avec les coordonnées (V,P) au lieu de (x,y). Le travail reçu est égal à l'intégrale de $-$PdV. Il s'agit de l'aire englobée par le cycle si le parcourt se fait dans le sens trigonométrique. Pour fournir du travail, le chemin devra être parcourue dans le sens inverse au sens trigonométrique.

On prendra garde au fait que la forme différentielle doit être définie non seulement sur Γ mais sur Σ tout entier. Considérer par exemple l'exemple suivant :

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2}$$

avec Γ le cercle unité. Alors :

$$Q = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ω est localement exacte, mais pas globalement. On n'a pas :

$$\int_\Gamma P \, dx + Q \, dy = \iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \; dxdy = 0$$

car ω n'est pas définie en (0,0). En fait, l'intégrale curviligne vaut 2π. Cependant la formule serait valable si Γ était un arc limitant un domaine Σ ne contenant pas (0,0). Dans ce cas, l'intégrale est nulle.

La formule de Green-Riemann possède deux extensions possibles en dimension 3, la formule de Green-Ostrogradski, et la formule de Stokes.

III : Formule de Green–Ostrogradski (n = 3 dans l'espace)

On a ici :

D est un volume V de $\mathbb{R}^3$, variété de dimension 3

δD est la surface Σ limitant ce volume, variété de dimension 2

$\omega = \boldsymbol{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, produit scalaire d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{F}$ de composantes (f_x, f_y, f_z) par l'élément de surface d$\boldsymbol{S}$. Si Σ est paramétré par $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, alors d$\boldsymbol{S}$ est le produit vectoriel de $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}du$ par $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}dv$ (ou son opposé, de façon que d$\boldsymbol{S}$ soit dirigé vers l'extérieur de S). ω est donc une forme différentielle de degré 2.

$\mathrm{d}\omega = \mathrm{div}(\boldsymbol{F}) = \dfrac{\partial f_x}{\partial x} + \dfrac{\partial f_y}{\partial y} + \dfrac{\partial f_z}{\partial z}$ (divergence de $\boldsymbol{F}$), forme différentielle de degré 3 (on a omis d'écrire l'élément différentiel dxdydz, mais il apparaît dans la formule ci-dessous).

Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface fermée Σ est égale à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume limité par la surface.

$$\boxed{\iint_\Sigma \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

On écrit encore $\displaystyle\iint_\Sigma \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_\Sigma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,\mathrm{dS}$ où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface, dirigé vers l'extérieur. L'équivalent de cette formule dans le plan serait $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint_\Sigma \mathrm{div}(\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

où s est l'abscisse curviligne (dans le sens trigonométrique) d'une courbe Γ fermée entourant une surface Σ. Si on prend pour $\boldsymbol{F}$ le champ de vecteur $\begin{pmatrix} \mathrm{Q} \\ -\mathrm{P} \end{pmatrix}$, on retrouve la formule de Green-Riemann. En effet, le vecteur tangent $\boldsymbol{t}$ à la courbe Γ paramétrée par $(x(s),y(s))$ est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et le vecteur normal $\boldsymbol{n}$ extérieur à Σ est $\begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$. (Il est tel que $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$ est indirect). On obtient alors :

$$\int_\Gamma \mathrm{P}\,\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\,\mathrm{d}y = \iint_\Sigma \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Revenons à la formule en dimension 3. Un cas important est celui où $\boldsymbol{F}$ est égal à un rotationnel de $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \end{pmatrix}$ car il est facile de vérifier que div($\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{U})$) = 0. Le premier membre est alors nul. Le flux de $\boldsymbol{F}$ à travers une surface fermée est ainsi nul. On dit que le champ est à flux conservatif. La divergence mesure la dispersion du champ de vecteur $\boldsymbol{F}$.

Voici une justification de cette formule. Supposons pour simplifier que le volume V puisse être défini par $\{(x,y,z) \mid g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$. Considérons l'intégrale triple :

$$\iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial f_z}{\partial z}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial f_z}{\partial z}\, \mathrm{d}z\ \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint f_z(x,y,h(x,y)) - f_z(x,y,g(x,y))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{\Sigma} f_z(x,y,z)\, \boldsymbol{k}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

puisque $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \mathrm{d}y = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour la partie supérieure de V et $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boldsymbol{k}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

et $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \mathrm{d}y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour la partie inférieure avec $-\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \boldsymbol{k}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

On montre de même que :

$$\iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial f_x}{\partial x}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} f_x(x,y,z)\, \boldsymbol{i}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$\iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial f_y}{\partial y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} f_x(x,y,z)\, \boldsymbol{j}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ce qui conduit à la relation cherchée.

EXEMPLE 1 : Si $\boldsymbol{F}$ n'est autre que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors div($\boldsymbol{F}$) = 3 et la formule d'Ostrogradski donne :

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 3\iiint_{\mathrm{V}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\mathrm{V}$$

Dans le cas particulier d'une sphère de centre O de rayon R, $\boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ = RdS de sorte que :

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{R}\iint_{\Sigma} \mathrm{dS} = \mathrm{RS}$$

Ainsi, pour une sphère, RS = 3V (ce qui est bien le cas : $S = 4\pi R^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$)

EXEMPLE 2 : Un fluide incompressible possède un champ de vecteurs vitesses ***V*** dont la divergence est nulle. Cela signifie que la quantité de manière entrant dans tout volume est égal à la quantité de matière sortant de ce volume. Le flux du vecteur vitesse multiplié par ρ, densité volumique (kg/m^3), à travers une surface est en effet égal à la quantité de matière traversant cette surface par unité de temps (en kg/s). Si le fluide est compressible, la divergence est négative si le fluide est en phase de compression, et la divergence est positive si le fluide est en phase de décompression. La quantité de matière traversant la surface ou pénétrant dans le volume délimité par unité de temps est égale à l'intégrale de $-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ sur le volume en question. On a donc :

$$\iiint_V -\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}v = \iint_\Sigma \rho\,\boldsymbol{V}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

où *dv* est l'élément de volume. Mais, d'après la formule de Green-Ostrogradski :

$$\iint_\Sigma \rho\,\boldsymbol{V}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\rho\,\boldsymbol{V})\,\mathrm{d}v$$

Ces relations étant vérifiées pour des volumes V quelconque, on en tire :

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \mathrm{div}(\rho.\boldsymbol{V})$$

équation connue sous le nom d'équation de continuité. Dans le cas d'un fluide incompressible (ρ est constant), elle se réduit à div(***V***) = 0.

Si l'on observe un cours d'eau au voisinage des arches d'un pont, on observe une accélération du courant, puis, à la sortie du pont, une décélération. Ce phénomène est dû à l'incompressibilité de l'eau. La divergence est nulle. Le flux du champ des vitesses est constant à travers une surface sectionnant le cours d'eau, et cette surface est plus faible entre les arches du pont. La vitesse doit donc être supérieure.

EXEMPLE 3 : Voici toute une liste d'autres situations, analogues entre elles. L'exemple précédent n'y figure pas car le champ des vitesses ne dérive pas en général d'un potentiel, et peut être doté d'un rotationnel non nul.

DENSITE DE COURANT ET CONCENTRATION D'UNE SUBSTANCE			
substance quelconque	diffusion d'un corps	courant électrique	propagation de la chaleur
(X)	(nbre de moles)	(Coulomb C)	(Joule J)
densité de courant de la substance ***J*** (quantité de substance traversant une surface par unité de surface et de temps) (en X.m^{-2}.s^{-1})	densité de courant de diffusion ***J*** (en nbmol.m^{-2}s^{-1})	densité de courant ***J*** (en A.m^{-2} ou C.m^{-2}.s^{-1})	densité de flux thermique ***J*** (en J.m^{-2}.s^{-1})
quantité de substance par unité de volume *x* (X.m^{-3})	concentration *c* (en nbremole.m^{-3})	densité de charges électriques ρ (en C.m^{-3})	quantité de chaleur par unité de volume *q* (le plus souvent : $q = \rho CT$ où C est la chaleur massique ou bien chaleur spécifique ou capacité thermique massique et ρ la masse volumique : ρ en kg.m^{-3}, C en J.kg^{-1}.K^{-1}) (en J.m^{-3})
LOI DE CONTINUITE OU DE CONSERVATION DE LA SUBSTANCE			
$\iint_D \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V -\frac{\partial x}{\partial t}dv$	$\iint_D \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V -\frac{\partial c}{\partial t}dv$	$\iint_D \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V -\frac{\partial \rho}{\partial t}dv$	$\iint_D \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V -\frac{\partial q}{\partial t}dv$
$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = -\frac{\partial x}{\partial t}$	$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = -\frac{\partial c}{\partial t}$	$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\rho C\frac{\partial T}{\partial t}$
$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = 0$ en régime permanent			

LOI DE DIFFUSION OU DE PROPAGATION DE LA SUBSTANCE			
potentiel P	concentration *c*	potentiel électrique V	température T
loi de propagation	loi de Fick	loi d'Ohm	loi de Fourier
$\boldsymbol{J} = -\,C.\boldsymbol{grad}(P)$ C coeff constant	$\boldsymbol{J} = -\,D.\boldsymbol{grad}(c)$ D coeff de diffusion ou diffusivité (m^2.s^{-1})	$\boldsymbol{J} = -\,\sigma.\boldsymbol{grad}(V)$ σ conductivité électrique (1/σ est la résistivité) (Ω^{-1}.m^{-1})	$\boldsymbol{J} = -\,\lambda.\boldsymbol{grad}(T)$ λ conductivité thermique (W.m^{-1}.K^{-1})
$C.\Delta P = \frac{\partial x}{\partial t}$	$D.\Delta c = \frac{\partial c}{\partial t}$	$\sigma.\Delta V = \frac{\partial \rho}{\partial t}$	$D.\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$ D diffusivité thermique, $D = \lambda/C\rho$ (m^2.s^{-1})
en régime permanent			
$\Delta P = 0$	$\Delta c = 0$	$\Delta V = 0$	$\Delta T = 0$

où Δ est le laplacien, divergence du gradient.

La formule de Green–Ostrogradski permet également de transformer des intégrales du type :

$$\iint_{\Sigma} f \, d\boldsymbol{S}$$

où f est une fonction scalaire. En effet, faisons le produit scalaire par un vecteur quelconque fixe $\boldsymbol{u}$. On obtient :

$$\iint_{\Sigma} f\boldsymbol{u}.d\boldsymbol{S} = \iiint_{V} \mathrm{div}(f\boldsymbol{u}) \, dxdydz$$

Or $\mathrm{div}(f\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{grad}(f).\boldsymbol{u}$

$$\Rightarrow \qquad \iint_{\Sigma} f\boldsymbol{u}.d\boldsymbol{S} = \iiint_{V} \boldsymbol{grad}(f) \, dxdydz \,.\, \boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{u}$ étant quelconque, on a donc :

$$\boxed{\iint_{\Sigma} f \, d\boldsymbol{S} = \iiint_{V} \boldsymbol{grad}(f) \, dxdydz} \quad \text{(formule du gradient)}$$

EXEMPLE 4 : Le théorème d'Archimède. Considérons un corps plongé dans un liquide dans lequel règne un gradient de pression. Il est soumis à une force définie par :

$$\boldsymbol{F} = \iint_{\Sigma} -\, P \, d\boldsymbol{S}$$

(Le signe – provient du fait que d$\boldsymbol{S}$ est orienté vers l'extérieur du volume, alors que la force doit être orientée vers l'intérieur). Appliquons la formule précédente avec f = – P. On obtient :

$$\boldsymbol{F} = \iiint_{V} -\, \boldsymbol{grad}(P) \, dv$$

En particulier, si $P = \rho g z$ (pression dans un liquide de masse volumique ρ, dans un champ gravitationnel g, à la profondeur z), alors $\boldsymbol{grad}(P) = \rho g \, \boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}$ étant dirigé vers le bas)

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{F} = \iiint_{V} -\, \rho g \, dv \, \boldsymbol{k} = -\, Mg \, \boldsymbol{k}$$

force dirigée de bas en haut égale au poids du volume de liquide déplacé.

De même que la formule du gradient, on montre la formule du rotationnel :

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \wedge d\boldsymbol{S} = -\iiint_{V} \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{F}) \, dxdydz}$$

En effet, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, on a :

$$\boldsymbol{u}.\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \wedge d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}) \quad \text{où (, ,) désigne le produit mixte}$$

$$= \iint_{\Sigma} (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{F}).d\boldsymbol{S}$$

$$= \iiint_{V} \mathrm{div}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{F}) \, dv \qquad \text{or } \mathrm{div}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{F}) = -\, \boldsymbol{u}.\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{F})$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}.\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iiint_{V} \boldsymbol{u}.\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{F})\ \mathrm{d}v$$

$$= -\,\boldsymbol{u}.\iiint_{V} \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{F})\ \mathrm{d}v \text{ d'où le résultat.}$$

Il y a localement équivalence pour un champ de vecteur entre :

– être égal à un rotationnel (i.e. ou dériver d'un potentiel vecteur)

– être de divergence nulle

– être à flux conservatif (le flux à travers une surface fermée est nul – le flux à travers une surface ouverte ne dépend que du bord de cette surface). C'est le cas du champ magnétique.

On définit le laplacien $\Delta f = \mathrm{div}(\boldsymbol{grad}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Le laplacien intervient

– en électricité : $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, où ρ est la densité volumique de charge électrique, et ε_0 la permittivité du vide.

– en diffusion de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = D\ \Delta T$ où D est la diffusivité thermique du milieu et dans d'autres phénomènes de diffusion (cf tableau).

Le laplacien mesure la dispersion d'un champ dérivant d'un potentiel. Prenons l'exemple suivant. On considère une barre conductrice de chaleur, dont une extrémité est en contact avec une source chaude et l'autre extrémité avec une source froide. Il existe un gradient de température au sein de la barre. ***grad***(T) indique dans quel direction la température croît le plus vite. La chaleur va circuler dans la barre dans une direction opposée au gradient, de la température la plus forte vers la température la plus faible. En un point où le laplacien est nul, le flux de gradient entrant dans un élément de volume est égal au flux sortant. Il y a autant de chaleur qui entre que de chaleur qui sort. Si le laplacien est positif, alors le flux de gradient sortant est supérieur au flux de gradient entrant, et puisque la chaleur circule en sens opposé du gradient, la quantité de chaleur entrante est supérieure à la quantité de chaleur sortante. La température s'élève. Par une considération analogue, un laplacien négatif signifie que la température décroît. Cela permet de comprendre l'équation de la chaleur de Fourier : $\frac{\partial T}{\partial t} = D\ \Delta T$.

Si l'on reprend la formule de Green-Ostrogradski $\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{V} \mathrm{div}(\boldsymbol{F})\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ appliqué à $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{grad}\ f$, on obtient : $\iint_{\Sigma} \boldsymbol{grad}(f).\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{V} \Delta(f)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Supposons par exemple que $\Delta(f)$ soit une constante K et appliquons la formule précédente à une sphère de rayon r. On obtient $\iint_{\Sigma} \boldsymbol{grad}(f).\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{4\pi r^3 K}{3}$. Dans cette expression, $\boldsymbol{grad}(f).\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ est le taux radial de variation de f multiplié par un élément de surface dS, autrement dit $\frac{\partial f}{\partial r}\ \mathrm{d}S$. Ainsi : $\iint_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial r}\ \mathrm{d}S = \frac{4\pi r^3 K}{3}$ ou encore en passant en coordonnées sphériques :

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial r} r^2 \cos\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi r^3 K}{3}, \text{ où } D = \{(\theta,\varphi) \mid 0 \le \theta \le 2\pi ; -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}.$$

$$\Rightarrow \qquad \iint_D \frac{\partial f}{\partial r} \cos\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi r K}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial r} \iint_D f(r,\theta,\varphi) \cos\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{4\pi r K}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \iint_D f(r,\theta,\varphi) \cos\varphi \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi r^2 K}{3} + \iint_D f(0,\theta,\varphi) \cos\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

$\Rightarrow \qquad 4\pi \overline{f} = \dfrac{2\pi r^2 K}{3} + 4\pi\, f(0)$ où $\overline{f}$ est la valeur moyenne de f sur la sphère de rayon r

$$\Rightarrow \qquad \overline{f} - f(0) = \frac{r^2 K}{6}.$$

Cette formule est comparable à ce qu'on obtient pour une fonction d'une seule variable x, pour laquelle on a :

$$f(r) = f(0) + r f'(0) + \frac{r^2}{2} f''(0) + o(r^2)$$

$$f(-r) = f(0) - r f'(0) + \frac{r^2}{2} f''(0) + o(r^2)$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{f} - f(0) = \frac{r^2}{2} f''(0) + o(r^2)$$

On notera que, si $\Delta f = 0$, alors $\overline{f} = f(0)$, autrement dit, la valeur en un point est égale à la valeur moyenne sur une sphère centrée en ce point. On a dans ce cas une fonction dite harmonique.

IV : Théorème de Stokes (n=2 dans l'espace)

On a ici :

D est une surface Σ de $\mathbb{R}^3$, non fermée et limitée par

δD, son bord, qui est une courbe Γ

$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{M}$ où $\boldsymbol{F}$ est le champ de vecteur $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$

$d\omega = \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{F}).d\boldsymbol{S}$

La circulation d'un champ de vecteur $\boldsymbol{F}$ le long d'un contour fermé Γ est égal au flux de son rotationnel à travers toute surface Σ limitée par le contour Γ.

$$\boxed{\int_\Gamma \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{M} = \iint_\Sigma \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{F}).d\boldsymbol{S}}$$

Cette formule est une généralisation à $\mathbb{R}^3$ de la formule de Green-Riemann dans le plan. On la retrouve dans le cas d'une surface plane Σ contenue dans le plan (Oxy) en considérant le champ de vecteur $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$ et $d\boldsymbol{S} = dx\,dy\,\boldsymbol{k}$.

Revenons au cas général. Si $\boldsymbol{F}$ dérive d'un potentiel scalaire f, l'égalité ci–dessus se réduit à 0 = 0. On a, rappelons–le, $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{grad}(f)) = 0$

Le rotationnel peut s'interpréter physiquement dans le cas d'un champ de vitesse comme le vecteur rotation d'un élément infiniment petit placé dans ce champ. On prendra par exemple le champ de vitesse $\boldsymbol{V} = y.\boldsymbol{i}$ dont le rotationnel vaut $-\boldsymbol{k}$, pour se convaincre qu'une particule sera effectivement soumise à une rotation d'axe $-\boldsymbol{k}$.

Il y a localement équivalence pour un champ de vecteurs entre :

– dériver d'un potentiel scalaire (i.e. être égal à un gradient)

– être de rotationnel nul

– être à circulation conservative (la circulation sur un circuit fermé est nulle – la circulation sur un circuit ouvert ne dépend que des extrémités)

EXEMPLE 1 : Considérons une boucle de courant parcourue par un courant I, plongé dans un champ magnétique uniforme. Chaque élément d$\boldsymbol{M}$ de la boucle est soumise à la force de Laplace I d$\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{B}$. La boucle tout entière est soumise à une force que l'on calcule en prenant l'intégrale de l'expression précédente. Si $\boldsymbol{B}$ est constant, cette intégrale est nulle puisqu'on intègre alors d$\boldsymbol{M}$ sur un circuit fermé. Par contre, le moment de cette force par rapport à un point O est :

$$\boldsymbol{C} = \int_\Gamma \boldsymbol{OM} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int_\Gamma \boldsymbol{OM} \wedge (\mathrm{Id}\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{B})$$

$$= \int_\Gamma <\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}> \mathrm{I\,d}\boldsymbol{M} - \int_\Gamma <\boldsymbol{OM}, \mathrm{I\,d}\boldsymbol{M}> \boldsymbol{B}$$

en utilisant la formule du double produit vectoriel.

$$= \mathrm{I}\int_\Gamma <\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}> \mathrm{d}\boldsymbol{M} - \mathrm{I}\underbrace{\int_\Gamma <\boldsymbol{OM}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}> \boldsymbol{B}}_{= 0 \text{ car } <\boldsymbol{OM},\, \mathrm{d}\boldsymbol{M}> \text{ est la différentielle exacte de } \frac{1}{2}\boldsymbol{OM}^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{C} = \mathrm{I}\int_\Gamma <\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}> \mathrm{d}\boldsymbol{M}$$

Si l'on cherche sa composante de $\boldsymbol{C}$ selon un vecteur normé $\boldsymbol{u}$, on cherche :

$$\mathrm{I}\int <\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}> <\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\boldsymbol{OM}> = \mathrm{I}\iint_\Sigma \boldsymbol{Rot}(<\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}> \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \text{ en vertu du théorème de Stokes.}$$

Or on vérifiera que $\boldsymbol{Rot}(<\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}> \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{grad}(<\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}>) \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{u}$

$$\Rightarrow \qquad <\boldsymbol{C}, \boldsymbol{u}> = \mathrm{I}\iint_\Sigma <\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{u}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> = \mathrm{I}\iint_\Sigma <\mathrm{d}\boldsymbol{S} \wedge \boldsymbol{B}, \boldsymbol{u}>$$

Cette relation étant vraie pour tout $\boldsymbol{u}$, on a :

$$\boldsymbol{C} = \iint_\Sigma \mathrm{I\,d}\boldsymbol{S} \wedge \boldsymbol{B} = \mu \wedge \boldsymbol{B}.$$

La quantité $\mu = \iint_\Sigma \mathrm{I\,d}\boldsymbol{S}$ est le moment magnétique de la boucle. Le moment étant indépendant de O, il s'agit d'un couple qui s'exerce sur la boucle. La formule est analogue au couple appliqué sur un dipôle électrique de moment électrique $\boldsymbol{p}$ dans un champ électrique $\boldsymbol{E}$. Pour cette raison, on parle parfois de dipôle magnétique.

Dans la démonstration précédente, nous aurions pu utiliser la la formule de Kelvin :

$$\boxed{\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{M} = -\iint_\Sigma \boldsymbol{grad}(f) \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

avec $f = <\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}>$. Cette relation se montre comme ci-dessus. Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, on a :

$$\boldsymbol{u}.\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \int_\Gamma f\boldsymbol{u}.\mathrm{d}\boldsymbol{M}$$

$$= \iint_\Sigma \boldsymbol{Rot}(f\boldsymbol{u}).\mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \text{or } \boldsymbol{Rot}(f\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{grad}(f) \wedge \boldsymbol{u}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u}.\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \iint_\Sigma (\boldsymbol{grad}(f) \wedge \boldsymbol{u}).\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= -\,\boldsymbol{u}.\iint_\Sigma \boldsymbol{grad}(f) \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \text{d'où le résultat.}$$

On dispose également d'une formule concernant $\int_\Gamma \boldsymbol{F} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{M}$. En effet, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, on a :

$$\int_\Gamma <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{M}> = \int_\Gamma <\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}>$$

$$= \iint_\Sigma <\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{F})\,,\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$$

On vérifiera que, $\boldsymbol{u}$ étant fixe, $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{F}) = \mathrm{div}(\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{u} - <\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{grad}>\boldsymbol{F}$ où $<\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{grad}>$ désigne l'opérateur différentiel suivant : si une base orthonormée est choisie et si $\boldsymbol{u}$ a pour composante α, β et γ, alors $<\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{grad}> = \alpha\dfrac{\partial}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial}{\partial z}$, que l'on applique successivement aux trois composantes de $\boldsymbol{F}$.

$$\Rightarrow \quad \int_\Gamma <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{M}> = \iint_\Sigma <\mathrm{div}(\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{u} - <\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{grad}>\boldsymbol{F}\,,\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$$

On peut écrire $<<\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{grad}>\boldsymbol{F}\,,\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}>$ sous la forme $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}(<\boldsymbol{F},\mathrm{d}\boldsymbol{S}>)$ à condition de comprendre que la différentiation ne porte que sur $\boldsymbol{F}$.

$$\Rightarrow \quad \int_\Gamma <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{F} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{M}> = \iint_\Sigma \mathrm{div}(\boldsymbol{F}) <\boldsymbol{u}\,,\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> - \iint_\Sigma <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}(<\boldsymbol{F},\mathrm{d}\boldsymbol{S}>)$$

$\boldsymbol{u}$ étant quelconque, on a donc :

$$\boxed{\int_\Gamma \boldsymbol{F} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{M} = \iint_\Sigma \mathrm{div}(\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint_\Sigma \boldsymbol{grad}(<\boldsymbol{F},\mathrm{d}\boldsymbol{S}>)}$$

EXEMPLE 2 :

Considérons un petit circuit Γ parcouru par un courant $\boldsymbol{I}$. Quel est le champ produit par ce circuit en un point M situé à grande distance ? La loi de Biot-Savart précise que chaque portion P de circuit produit un champ $\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi r^2}\,\mathrm{I}\mathrm{d}\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{u}$ où r = PM et $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{PM}}{\mathrm{PM}}$. Le champ complet est donc :

$$\boldsymbol{B} = \int_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\,\mathrm{I}\mathrm{d}\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{u}$$

Cette intégrale entre dans le champ de l'étude précédente avec $\boldsymbol{F} = -\dfrac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi r^2}\,\boldsymbol{u}$. On vérifiera que la divergence de $\boldsymbol{F}$ est nulle. Il reste donc :

$$\boldsymbol{B} = -\iint_\Sigma \boldsymbol{grad}(<\boldsymbol{F}\,,\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}>)$$

Or $-\iint_\Sigma <\boldsymbol{F}\,,\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}> = \dfrac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\iint_\Sigma \dfrac{1}{r^2}<\boldsymbol{u}\,,\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}> \approx \dfrac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi r^2}<\boldsymbol{u}\,,\,\iint_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$ si on considéère que le circuit est suffisamment petit et PM assez grand pour que $\dfrac{1}{r^2}\,\boldsymbol{u}$ soit à peu près le même pour chaque point P du circuit. On voit apparaître le vecteur $\mu = \iint_\Sigma \mathrm{I}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, moment magnétique de la boucle de sorte que :

$$-\iint_\Sigma <\boldsymbol{F}\,,\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}> = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}<\boldsymbol{u}\,,\,\mu>$$

Si on pose $\mathrm{V} = \dfrac{\mu_0}{4\pi r^2}<\boldsymbol{u}\,,\,\mu>$ (= $\dfrac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\,\Omega$ où Ω est l'angle solide sous lequel on voit le circuit Γ depuis M), on a :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{grad}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V})$$

Nous avons mis un indice P au gradient pour indiquer qu'on dérivait par rapport aux composantes de P, où se situe le circuit. Or V est une fonction des coordonnées ($x_\mathrm{P} - x_\mathrm{M}$, $y_\mathrm{P} - y_\mathrm{M}$, $z_\mathrm{P} - z_\mathrm{M}$). Il vaut mieux considérer que V est un potentiel fonction de M. On a alors $\boldsymbol{grad}_\mathrm{P}(\mathrm{V}) = -\,\boldsymbol{grad}_\mathrm{M}(\mathrm{V})$. Ainsi :

$$\mathrm{V} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}<\boldsymbol{u}\,,\,\mu> \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} = -\,\boldsymbol{grad}_\mathrm{M}(\mathrm{V})$$

Ces formules sont remarquablement semblables à celles concernant un dipôle électrique créant un champ $\boldsymbol{E}$ en un point M situé à grande distance. On a en effet dans ce cas :

$\mathrm{V} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}<\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{p}>$ où $\boldsymbol{p}$ est le moment électrique du dipôle, et $\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}_\mathrm{M}(\mathrm{V})$

V : Les équations de Maxwell :

Les lois de l'électro–magnétisme se réduisent à quatre équations, les équations de Maxwell. $\boldsymbol{E}$ est le champ électrique. $\boldsymbol{B}$ est le champ magnétique.

i) $\boxed{\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$ où ρ est la densité volumique de charges électriques. Cette équation est équivalente, en appliquant le théorème de Green–Ostrogradski, au fait que le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée est égal à $\dfrac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0}$ où Q est la charge contenue à l'intérieur de la surface (théorème de Gauss). On en déduit la loi de Coulomb en électrostatique, le flux du champ électrique traversant une sphère de rayon R au centre de laquelle se trouve la charge Q étant $4\pi R^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ d'où $E = \frac{Q}{4\pi R^2 \varepsilon 0}$.

On notera que ces égalités s'étendent à tout champ newtonien, par exemple le champ gravitationnel engendré par une densité de masse μ, pour lequel div $\boldsymbol{g} = -4\pi G\mu$ (G constante de l'attraction universelle). Le théorème de Gauss pour une masse ponctuelle M devient alors $4\pi R^2 g = -4\pi GM$, ou encore $g = -\frac{GM}{R^2}$.

ii) $\boxed{\text{div } \boldsymbol{B} = 0}$ Cette équation est équivalente, en appliquant le théorème de Green–Ostrogradski, au fait que le flux du champ magnétique traversant une surface fermée est nul. Autrement dit, le flux entrant est égal au flux sortant. Le champ magnétique est dit à flux conservatif. Cela exclut en particulier l'existence de monopôles magnétiques.
Du fait que la divergence d'un rotationnel est nulle, on est amené à rechercher ***B*** sous la forme ***Rot A***. On impose à ***A*** la condition supplémentaire div ***A*** = 0. ***A*** est le potentiel-vecteur de ***B***.

iii) $\boxed{\boldsymbol{Rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}$

Cette relation s'écrit également sous la forme $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{grad}(V) - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ où V est le potentiel électrostatique et ***A*** le potentiel vecteur du champ ***B*** (***Rot***(***A***) = ***B***). Cette équation est équivalente, en appliquant le théorème de Stokes, au fait que la circulation de ***E*** le long d'une courbe fermée C est égale à la dérivée par rapport au temps du flux de ***B*** à travers une surface s'appuyant sur C.
Considérons un circuit, placé dans un champ magnétique ***B*** variable. L'équation précédente indique qu'il se crée un champ électrique. Les électrons du circuit sont soumis à la force ***F*** = *q**E***. Le travail de cette force le long du circuit Γ vaut :

$$W = \int_\Gamma \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \int_\Gamma q\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{M} = q\iint_\Sigma \boldsymbol{Rot(E)}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -q\iint_\Sigma \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$= -q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\Sigma \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -q\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

où Φ est le flux de ***B*** à travers S. Ce travail est égal à celui appliqué sur une charge *q* soumis à une différence de potentiel de $-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$. Cela s'interprète en considérant qu'il existe une force électro–motrice induite égale à $-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ (loi de Faraday).

iv) $\boxed{\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{Rot}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}$ où $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, et où ***J*** est le vecteur densité de courant. Cette équation est équivalente, en utilisant le théorème de Stokes, au fait que la circulation de ***B*** le long d'une courbe fermée Γ est égale à la dérivée par rapport au temps du flux de ***E*** à travers une surface s'appuyant sur Γ, auquel s'ajoute le flux de courant à travers S, sur ε_0.

Dans le cas d'un champ électrique constant, on obtient la loi :

$$\int_\Gamma \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dl} = \mu_0 \mathrm{I} \text{ (théorème d'Ampère)}$$

Le cas d'un cercle Γ de rayon R traversé en son centre par le courant I permet d'en déduire une forme de la loi de Biot–Savart :

$$\mathrm{B}.2\pi\mathrm{R} = \mu_0\mathrm{I}$$

ou encore $\mathrm{B} = \dfrac{\mu_0\mathrm{I}}{2\pi\mathrm{R}}$ champ crée par un conducteur parcouru par un courant I à une distance R de ce conducteur. Par ailleurs, en utilisant le potentiel-vecteur $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{B}$, défini par $\boldsymbol{Rot}\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ avec la condition supplémentaire div $\boldsymbol{A}$ = 0, la relation $\dfrac{1}{\mu_0}.\boldsymbol{Rot}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}$ devient $\Delta\boldsymbol{A} + \mu_0\boldsymbol{J} = 0$, relation vectorielle en tout point comparable à la relation scalaire vérifiée par le potentiel électrostatique $\Delta\mathrm{V} + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ où ρ est la densité volumique de charges. Or ce potentiel électrostatique est défini, à une constante près par $\mathrm{V} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \dfrac{\rho}{r}\,d\tau$ où dτ est l'élément de volume, et r la distance entre cet élément et le point où l'on calcule V. On est donc amené à penser que $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\iiint \dfrac{\boldsymbol{J}}{r}\,d\tau$, dont on vérifie effectivement que la divergence est nulle. Pour un fil parcouru par un courant I, l'expression devient $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mu_0\mathrm{I}}{4\pi}\int \dfrac{1}{r}\,d\boldsymbol{l}$. Le rotationnel de cette expression donne $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0\mathrm{I}}{4\pi}\int \boldsymbol{Rot}(\dfrac{1}{r}\,d\boldsymbol{l})$ expression dont on peut vérifier qu'elle est égale à $\dfrac{\mu_0\mathrm{I}}{4\pi}\int \boldsymbol{grad}(\dfrac{1}{r}) \wedge d\boldsymbol{l} = \dfrac{\mu_0\mathrm{I}}{4\pi}\int \dfrac{d\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{u}}{r^2}$ où $\boldsymbol{u}$ est le vecteur unitaire dirigé de l'élément de courant vers le point où l'on calcule $\boldsymbol{B}$. On en déduit la loi de Biot-Savart. La portion de courant $\mathrm{I}d\boldsymbol{l}$ crée en un point situé à une distance r dans la direction $\boldsymbol{u}$ un élément de champ magnétique $d\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0\,\mathrm{I}d\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{u}}{4\pi\,r^2}$

Si l'on prend la divergence dans la relation iv), on obtient :

$$0 = \mathrm{div}(\boldsymbol{J}) + \varepsilon_0.\frac{\partial \mathrm{div}(\boldsymbol{E})}{\partial t}$$

$$= \mathrm{div}(\boldsymbol{J}) + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

qui s'appelle théorème de conservation de la charge.

Dans le cas statique, ces quatre équations se réduisent à :

i) div $\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

ii) $\boldsymbol{Rot}\ \boldsymbol{E} = 0$

iii) div $\boldsymbol{B} = 0$

iv) $\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{Rot}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}$

VI : Changement de repère.

On montre que :

Le gradient et le laplacien ne dépendent pas du repère orthonormé choisi

La divergence ne dépend pas du repère, orthonormé ou non choisi.
Le rotationnel ne dépend pas du repère orthormé direct choisi.

Changement de variables :

COORDONNEES CYLINDRIQUES :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

On choisit comme nouvelle base la base ($\boldsymbol{U_r}$, $\boldsymbol{U_\theta}$, $\boldsymbol{K}$) définie par la matrice de passage $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a alors :

$$\boldsymbol{grad}(\mathrm{f}) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial r}\boldsymbol{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta}\boldsymbol{U_\theta} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial z}\boldsymbol{U_z}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{V}) = \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{V}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{U_r} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{U_\theta} + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{K}$$

$$\Delta \mathrm{f} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial z^2}$$

COORDONNEES SPHERIQUES :

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

θ est l'angle de précession, φ l'angle de nutation. Peut également intervenir, pour un solide, l'angle de rotation propre autour de $\boldsymbol{U_r}$. Ces angles sont en général plus faciles à manipuler que les angles de roulis, de tangage et de lacet autour des axes $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$.

La matrice de passage est $\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Les vecteurs colonnes sont notés usuellement $\boldsymbol{U_\varphi}$, $\boldsymbol{U_\theta}$ et $\boldsymbol{U_r}$.

On a alors :

$$\boldsymbol{grad}(\mathrm{f}) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial r}\boldsymbol{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \varphi}\boldsymbol{U_\varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta}\boldsymbol{U_\theta}.$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{V}) = 2\frac{V_r}{r} + \frac{V_\varphi}{r\tan\varphi} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

$$\Delta \mathrm{f} = \frac{2}{r}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2\tan\varphi}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{(r\sin\varphi)^2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \theta^2}$$

$$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{V}) = \left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r}\right)\boldsymbol{U_\varphi} + \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{V_\varphi}{r}\right)\boldsymbol{U_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{V_\theta}{r\tan\varphi} - \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{U_r}$$