Homework 2

Exercice 1

1) Soient $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et $\mu \in \mathbb{R}^d$ tq $\mu \geq 0$. Alors

i) $L(x, \lambda, \mu) = c^T x + \lambda^T (Ax - b) - \mu^T x$

$$= (c + A^T \lambda - \mu)^T x - \lambda^T b$$

ii) $g(\lambda, \mu) = \inf_x \{ (c + A^T \lambda - \mu)^T x - \lambda^T b \}$

$$= \begin{cases} -\lambda^T b & \text{si } c + A^T \lambda - \mu = 0. \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

iii) On obtient $\begin{cases} \max_{\lambda, \mu} & -\lambda^T b \\ \text{sc} & A^T \lambda + c = \mu \\ & \mu \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \max_{\lambda} & -\lambda^T b \\ \text{sc} & A^T \lambda + c \geq 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \max_{\lambda} & \lambda^T b \\ \text{sc} & A^T \lambda \leq c \end{cases}$$

2) Soit $\mu \in \mathbb{R}^d$ tq $\mu \geq 0$. Alors

*On a transformé notre problème en une minimisation

i) $L(y, \mu) = -b^T y + \mu^T (A^T y - c)$*

ii) $g(\mu) = \inf_y \{ (A\mu - b)^T y - \mu^T c \}$

$$= \begin{cases} -c^T \mu & \text{si } b - A\mu = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

iii) On obtient $\begin{cases} \underset{\mu}{\text{Min}} & c^T\mu \\ \text{sc} & A\mu \leq b \;, \mu \geq 0 \end{cases}$

3) Soient $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^d$ tq $\mu \geq 0$ et $\upsilon \in \mathbb{R}^d$ tq $\upsilon \geq 0$

i) $L(x, y, \lambda, \mu, \upsilon) = c^Tx - b^Ty + \lambda^T(Ax - b) - \mu^Tx + \upsilon^T(A^Ty - c)$

$$= (c + A^T\lambda - \mu)^Tx + (A\upsilon - b)^Ty - \lambda^Tb - \upsilon^Tc$$

ii) $g(\lambda, \mu, \upsilon) = \underset{x,y}{\text{Inf}} \{ L(x, y, \lambda, \mu, \upsilon) \}$.

- l'inf par rapport à x : $\begin{cases} 0 & \text{si } c + A^T\lambda - \mu = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$
- l'inf par rapport à y : $\begin{cases} 0 & \text{si } A\upsilon = b \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

On a alors $g(\lambda, \mu, \upsilon) = \begin{cases} -\lambda^Tb - \upsilon^Tc & \text{si } A\upsilon = b \text{ et } c + A^T\lambda = \mu \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

iii) On obtient $\begin{cases} \underset{\lambda,\mu,\upsilon}{\text{Max}} & -\lambda^Tb - \upsilon^Tc \\ \text{sc} & A^T\upsilon = b \\ & A^T\lambda + c = \mu \\ & \mu, \upsilon \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \underset{\lambda,\upsilon}{\text{Max}} & -b^T\lambda - c^T\upsilon \\ & A^T\upsilon = b \\ & A^T\lambda + c \geq 0 \\ & \upsilon \geq 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \underset{\lambda,\upsilon}{\text{Max}} & b^T\lambda - c^T\upsilon \\ \text{sc} & A^T\upsilon = b \\ & A^T\lambda \leq c \\ & \upsilon \geq 0 \end{cases}$$

Donc au signe près on obtient le même problème.

($\max(f(x)) = -\min(-f(x))$).

4]. On a toujours $\operatorname{Inf}_{x,y} f(x,y) = \operatorname{Inf}_x \left\{ \operatorname{Inf}_y (f(x,y)) \right\}$

Notons $f(x,y) = c^T x - b^T y$; $h_1(x) = Ax - b$, $h_2(y) = A^T y - c$; $f_1(x) = x$

donc résoudre le self dual revient à :

i) $\begin{cases} \operatorname{Min}_x & f(x) \\ \text{s.c.} & h_1(x) = 0 \\ & f_1(x) \leq 0 \end{cases}$ ← y muet. (P)

ii) On pose $\tilde{f}(y) = \operatorname{Inf} \left\{ f(z,y) \mid h_1(z) = 0 ; f_1(z) \leq 0 \right\}$

iii) $\begin{cases} \operatorname{Min} & \tilde{f}(y) \\ \text{sc} & h_2(y) = 0 \end{cases}$ (D)

Le problème i) trouve le x optimal et iii) le y optimal
Si jamais en i) on trouve un $\tilde{x} \neq x^*$, on aurait à la fin

$$c^T\tilde{x} - b^T y^* < c^T x^* - b^T y^* \quad \Rightarrow \text{Absurde}$$

Même raisonnement pour y.

• Grâce à notre raisonnement, on sait qu'en (P) on trouve $c^T x^*$ et en (D) $-b^T y^*$.
Or, grâce à la dualité forte de programmes linéaires, on a $d^* = p^*$,
et on sait que (P) a pour dual (D), i.e. $c^T x^* = b^T y^*$

$$\Leftrightarrow c^T x^* - b^T y^* = 0.$$

Exo 2

1) $f^*(y) = \underset{x \in \mathrm{Dom} f}{\mathrm{Sup}} \left(y^T x - \|x\|_1 \right)$

On a $y^T x \leqslant \|y\|_* \|x\|$.

On se rend compte que :

. Si $\|y\|_* \leqslant 1$, $y^T x - \|x\| \leqslant 0$ et atteint 0 pour $x = 0$

. Si $\|y\|_* > 1$, il existe z tq $\|z\|_1 \leqslant 1$ et $y^T z > 1$.

Prenons $\underset{t>0}{x = tz}$, alors $ty^T z - t\|z\| = t(\underbrace{y^T z - \|z\|}_{>0}) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$

Donc $f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\|_* \leqslant 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

2) $\underset{x}{\mathrm{Min}} \|Ax - b\|_2^2 + \|x\|_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \underset{x,y}{\mathrm{Min}} & \|y\|_2^2 + \|x\|_1 \\ \mathrm{sc} & y = Ax - b \end{cases}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^m$

i) $L(x, y, \lambda) = \|y\|_2^2 + \|x\|_1 + \lambda^T (Ax - b - y)$

$= \left(\|y\|_2^2 - \lambda^T y \right) + \left(\|x\|_1 + \lambda^T A x \right) - \lambda^T b$.

ii) $g(\lambda) = \underset{x,y}{\mathrm{Inf}} \left\{ L(x, y, \lambda) \right\}$.

En minimisant par rapport à x : $\underset{x}{\mathrm{Inf}} \left(\|x\|_1 + \lambda^T A x \right) = -\underset{x}{\mathrm{Sup}} \left(-\lambda^T A x - \|x\|_1 \right)$

$= -\underset{x}{\mathrm{Sup}} \left(\lambda^T A x - \|x\|_1 \right)$

$$= -f^*(\lambda^T A)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \|\lambda^T A\|_* \leq 1. \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>En minimisant par rapport à y</u> : $\|y\|_2^2 - \lambda^T y$ continue et convexe.

Donc atteint son minimum en $2y - \lambda = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\lambda}{2}$

Alors $g(\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\|\lambda\|_2^2 - \lambda^T b & \text{si } \|\lambda^T A\|_* \leq 1. \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$

iii) On obtient $\begin{cases} \max\limits_{\lambda} -\frac{1}{2}\|\lambda\|_2^2 - \lambda^T b \\ \text{sc} \quad \|\lambda^T A\|_* \leq 1. \end{cases}$

⋮

Exercice 3

1) Posons $z_i = \max\{0, 1 - y_i(w^T x_i)\}$ et $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$.

Par définition $z \underline{\geq} 0$ et $\forall i = 1, .., m \quad z_i \geq 1 - y_i(w^T x_i)$

$$\min_w \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \max\{0, 1 - y_i(w^T x_i)\} + \frac{\Gamma}{2}\|w\|_2^2$$

$$\Leftrightarrow \Gamma \min_w \frac{1}{\Gamma m} \sum_{i=1}^m \max\{0, 1 - y_i(w^T x_i)\} + \frac{1}{2}\|w\|_2^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma \min\limits_{w,z} \frac{1}{\Gamma m} \underbrace{\sum_{i=1}^m z_i}_{\mathbb{1}^T z} + \frac{1}{2}\|w\|_2^2 \\ \text{sc} \quad z \underline{\geq} 0 \\ \quad\quad z_i \geq 1 - y_i(w^T x_i) \quad \forall i = 1, .., m \end{cases}$$

On obtient le même minimum à une constante près.

2) Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \geq 0$ et $\pi \geq 0$.

i) $L(\omega, z, \lambda, \pi) = \frac{1}{m\Gamma} \mathbb{1}^T z + \frac{1}{2} \|\omega\|_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (1 - y_i(\omega^T x_i) - z_i) - \pi^T z$.

$$= \left(\frac{1}{m\Gamma} \mathbb{1} - \lambda - \pi\right)^T z - \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right)^T \omega + \frac{1}{2} \|\omega\|_2^2 + \mathbb{1}^T \lambda$$

ii) $g(\lambda, \pi) = \operatorname{Inf}_{z,\omega} \{ L(\omega, z, \lambda, \pi) \}$

<u>Par rapport à z</u> : $\begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{m\Gamma} \mathbb{1} - \lambda - \pi = 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

<u>Par rapport à ω</u> : $\frac{1}{2} \|\omega\|_2^2 - \left(\sum_{i=1} \lambda_i x_i\right)^T \omega$ convexe et continue.

Atteint son minimum en $\omega - \sum_{i=1} \lambda_i x_i = 0 \Leftrightarrow \omega = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$

Donc $g(\lambda, \pi) = \begin{cases} \mathbb{1}^T \lambda - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right\|_2^2 & \text{si } \lambda \geq 0, \pi \geq 0 \\ & \frac{1}{m\Gamma} \mathbb{1} - \lambda = \pi \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$

iii) On obtient alors $\begin{cases} \max_{\lambda, \pi} & \mathbb{1}^T \lambda - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1} \lambda_i x_i \right\|_2^2 \\ \text{sc} & \frac{1}{m\Gamma} \mathbb{1} - \lambda = \pi \\ & \pi, \lambda \geq 0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \max_{\lambda} & \mathbb{1}^T \lambda - \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right\|_2^2 \\ \text{sc} & \frac{1}{m\Gamma} \mathbb{1} \geq \lambda \\ & \lambda \geq 0 \end{cases}$$