Projet: étude théorique et numérique d'un système d'équations différentielles

Dans toute la suite, on s'intéresse au système d'équations différentielles non linéaires de la forme suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,(1-y(t))\,,\ t \in \mathbb{R} \\ y'(t) = -2y(t)\,(1-x(t))\,,\ t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Partie I : Quelques éléments théoriques

1. Écrire le système (1) sous la forme

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(x(t), y(t)),\ t \in \mathbb{R}, \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

   où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs à déterminer.

2. Est-on dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz dans sa version locale ? globale ?

On rappelle la définition suivante.

Definition 1. *Un point d'équilibre du système* (1) *est un couple* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $F(x, y) = (0, 0)$.

3. Déterminer les points d'équilibre du système (1). Dans le cas où la condition initiale est un point d'équilibre, quelle est la trajectoire associée ?

4. Soit (x, y) une solution locale de (1), définie (au moins) sur $[0, T[$, avec $T > 0$.
   (a) Donner l'ensemble des solutions partant de $(0, y_0)$, avec $y_0 \in \mathbb{R}$.
   (b) On suppose qu'il existe $t_0 \geqslant 0$ tel que $x(t_0) = 0$. Montrer que $x(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T[$.
   (c) Enoncer un résultat similaire si on échange x et y.

On suppose **dans toute la suite du sujet** (sauf dans la question 0 de la partie II) que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

5. Soit (x, y) une solution locale de (1), définie (au moins) sur $[0, T[$. Montrer que pour tout $t \in [0, T[$, on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.

6. Soit (x, y) une solution locale de (1), définie au moins sur $[0, T[$. Trouver une fonction $C : (\mathbb{R}^{+*})^2 \to \mathbb{R}$ telle que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors l'application $t \in [0, T[\mapsto C(x(t), y(t))$ est une fonction constante égale à $C(x_0, y_0)$.

   Indication: on calculera d'abord formellement le quotient $\frac{x'(t)}{y'(t)}$*, puis on regroupera à gauche les termes en* x *et à droite les termes en* y *et on intégrera. On justifiera la validité des calculs à posteriori.*

7. (a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x > \alpha$ et $y > \beta$, on ait

$$2\ln(x) < x \text{ et } \ln(y) < \frac{y}{2}.$$

(b) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on ait

$$2x - 2\ln(x) \geqslant \gamma \text{ et } y - \ln(y) \geqslant \delta.$$

(c) Soit (x, y) une solution locale de (1), définie au moins sur $[0, T[$. Déduire des deux points précédents que (x, y) est bornée sur l'intervalle de temps $[0, T[$.

Indication: utiliser l'expression de C, et raisonner suivant les valeurs de x et y.

(d) Montrer que toute solution maximale est définie en temps positif sur $[0, +\infty[$.

Partie II : Périodicité des solutions

Le but de cette partie est de montrer que, pour tout $x_0 > 0$ et tout $y_0 > 0$, la solution (x, y) de (1) sur $\mathbb{R}^+$ est périodique.

0. Est-ce forcément le cas si $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$?

Pour ce faire, nous allons introduire la notion suivante.

Definition 2. *On appelle portrait de phase associé à la condition initiale (x_0, y_0) la courbe du plan donnée par $t \geqslant 0 \mapsto (x(t), y(t))$.*

1. Géométriquement, quel est le portrait de phase d'un équilibre ?
2. Deux portraits de phase issus de deux conditions initiales distinctes peuvent-ils s'intersecter ?
3. Montrer que la trajectoire issue de (x_0, y_0) est périodique si et seulement si son portrait de phase est une courbe fermée.

   Indication: le sens direct est facile. Pour le sens réciproque, on pourra se servir intelligemment du théorème de Cauchy-Lipschitz, en remarquant qu'il suffit de se servir d'un $\tilde{t} > 0$ tel que $x(\tilde{t}) = x(0)$ et $y(\tilde{t}) = y(0)$.

On considère les parties du plan définies de la manière suivante:

- partie (Q1): les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x' > 0, y' < 0$.
- partie (Q2): les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x' > 0, y' > 0$.
- partie (Q3): les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x' < 0, y' > 0$.
- partie (Q4): les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x' < 0, y' < 0$.

4. On suppose que (x_0, y_0) se trouve dans la zone $(Q1)$.

   (a) Montrer que la trajectoire $(x(t), y(t))$ finit forcément par rentrer dans la zone $(Q2)$ en un temps $t_1 > t_0$, puis dans la zone $(Q3)$ à partir d'un temps $t_2 > t_1$, puis dans la zone $(Q4)$ à partir d'un temps $t_3 > t_2$, puis dans la zone (Q_1) à partir d'un temps $t_4 > t_3$ et enfin de nouveau dans la zone $(Q2)$ à partir d'un temps $t_5 > t_4$.

   (b) Faire un dessin dans le plan illustrant la situation.

   (c) Que vaut $x(t_1)$ et $x(t_5)$? Montrer que $y(t_1) = y(t_5)$.

   Indication: se servir de la fonction C.

   (d) En déduire que la trajectoire est bien périodique, de période $T = t_5 - t_1$.

   Indication: s'inspirer de la réponse à la question 3.

   (e) Que se passe-t-il si (x_0, y_0) se trouve dans $(Q2)$, $(Q3)$, $(Q4)$?

Partie III: étude numérique de quelques schémas classiques.

0. Générer aléatoirement et **une fois pour toutes** (donc indépendamment des questions suivantes) 10 conditions initiales. Pour ce faire, utiliser la fonction `uniform`, que l'on lancera 20 fois, en se limitant à des réels entre 0.25 et 4 (évidemment, enlever les doublons et les points d'équilibre si par malchance ils apparaissent.)

Il est en outre conseillé de tester systématiquement les codes sur le point d'équilibre strictement positif trouvé (pour déceler les erreurs les plus grossières), sans l'annexer au rapport.

1. Pour chacune des conditions initiale, calculer et stocker une approximation numérique de la solution à (1) à l'aide de la fonction `scipy.integrate.ode` (avec la méthode par défaut), sur l'intervalle de temps $[0, 10]$, avec un pas de temps $h = \frac{1}{2^{12}}$.

   On prendra dans toute la suite cette solution approchée comme solution de référence (jouant le rôle de "la solution exacte") pour tester les ordres de convergence.

2. (a) Tracer sur une même figure les portraits de phase associés aux différentes conditions initiales.
   Trouver un moyen de bien identifier le point duquel on part sur la figure avec un marqueur.

   (b) Tracer sur cette même figure le champ de vecteur $F(x, y)$ sous forme de flèches normalisées, avec une grille de discrétisation de taille raisonnable (disons (0.05)).
   On s'intéressera à la commande `matplotlib.axes.Axes.quiver` pour représenter les champs de vecteurs.

3. Tracer sur des figures distinctes l'évolution de quelques solutions de votre choix en fonction du temps.
   x et y seront affichées sur une même figure, pour chaque condition initiale choisie.

4. Pour chacune des méthodes suivantes :

   - Méthode d'Euler explicite: $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + hF(x_n, y_n)$,
   - Méthode d'Euler implicite: $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + hF(x_{n+1}, y_{n+1})$,
   - La méthode RK4 classique dont le tableau de Butcher est :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array},$$

   écrire une fonction qui prend en entrée un temps $T > 0$, un pas de discrétisation $h > 0$, et une condition initiale dans $\mathbb{R}^2$, et renvoie le vecteur colonne des instants $t_0, \ldots, t_n$ et le tableau à deux colonnes des valeurs $x_1, \ldots x_n$ et $y_1, \ldots y_n$.

   Pour toutes les questions qui restent, on choisira une fois pour toutes deux conditions initiales (hors équilibre) parmi celles précédemment créées.

5. Pour les deux conditions initiales choisies, pour $T = 10$ et $h = 0.25$, tracer sur un même graphique la solution de référence (sous forme d'une courbe) et la solution approchée pour chacun des schémas (sous forme de marqueurs de points).

6. (a) Pour les deux conditions initiales choisies et pour chacun des schémas, sur l'intervalle de temps $[0, 2]$, calculer l'erreur globale E_N successivement pour $h = \frac{1}{2^k}$ avec $k = 1, 2, \ldots, 10$.
   On rappelle que l'erreur globale est définie comme $\max_{n \in [|0,N|]} ||x_n - x(t_n)||$, *où x_n est la solution approchée au temps t_n et $x(t_n)$ et la solution exacte (de référence ici).*

   (b) Pour les deux conditions initiales choisies et pour chacun des schémas, tracer avec une échelle logarithmique l'erreur globale en fonction de k, expliquer comment calculer la valeur de l'ordre de convergence et le donner. Est-ce cohérent avec la théorie ?

7. (a) Pour les deux conditions initiales choisies, $T = 100$ et $h = 0.25$, tracer sur un même graphique l'évolution de la valeur de $C(x, y)$ en temps pour chacun des trois schémas. Commenter.

   (b) Pour chacun des schémas, $T = 100$ et $h = 0.25$, tracer les portraits de phase associés aux deux conditions initiales (les deux conditions sur un même dessin, mais un dessin différent pour chaque schéma). Commenter.

Partie IV : un schéma plus exotique.

On s'intéresse pour finir au schéma suivant, adapté au cas du système (1):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hx_n - hx_{n+1}y_n, \\ y_{n+1} = y_n - 2hy_n + 2hx_{n+1}y_n. \end{cases}$$

1. En se servant de la forme spécifique de F, écrire explicitement x_{n+1} en fonction de x_n et y_n, puis y_{n+1} en fonction de x_{n+1} et de y_n (éventuellement sous certaines conditions que l'on précisera). Ce schéma est-il implicite ou explicite ?
2. En effectuant des développements limités, calculer l'ordre exact de convergence de ce schéma, en raisonnant sur le cas particulier du système (1).
3. Pour les deux conditions initiales choisies, $T = 10$ et $h = 0.25$, tracer sur un même graphique la solution de référence (sous forme d'une courbe) et les solutions approchées (sous forme de marqueurs de points).
4. (a) Pour les deux conditions initiales choisies, pour $T = 2$, calculer l'erreur globale E_N successivement pour $h = \frac{1}{2^k}$ avec $k = 1, 2, \ldots, 10$.
   (b) Pour chacune des deux conditions initiales, tracer avec une échelle logarithmique l'erreur globale en fonction de k et donner la valeur de l'ordre de convergence. Est-ce cohérent avec la théorie ?
5. (a) Pour les deux conditions initiales choisies, pour $T = 100$ et $h = 0.25$, tracer sur un même graphique l'évolution de la valeur de $C(x, y)$ en temps pour ce schéma. Commenter.
   (b) Pour ce schéma, en prenant $T = 100$ et $h = 0.25$, tracer sur une même figure les portraits de phase associés aux deux conditions initiales. Commenter.

*

* *

Projet: Etude théorique et numérique d'un système d'équation différentielle

FAURE Thomas, PETIT Guillaume, RICHON Georges-Edouard

PSL Université Paris-Dauphine

8 Janvier 2019

Table des matières

Première partie
Quelques éléments théoriques

1 Question 1

Posons

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x(1-y), -2y(1-x)) \end{aligned}$$

Alors le système (1) s'écrit $\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(x(t), y(t)) \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

2 Question 2

On est dans la version locale du théorème de Cauchy-Lipschitz puisque F est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.

Supposons par l'absurde que F est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. Alors, en particulier :

$\exists k > 0$ tq $\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ on a $||F(x_1, y) - F(x_2, y)||_\infty \leq k * ||(x_1 - x_2, 0)||_\infty = k * |x_1 - x_2|$

Or par exemple, $||F(1, y) - F(0, y)||_\infty = ||(1-y, -2y)||_\infty \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Contradiction. Donc F n'est pas globalement lipschitzienne. On n'est pas dans la version globale du théorème de Cauchy-Lipschitz.

3 Question 3

$$F(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x(1-y) = 0 \\ -2y(1-x) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 0 y = 1 \\ y = 0 x = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

Les points d'équilibre du système sont les points $(1,1)$ et $(0,0)$.

Dans le cas où la condition initiale est le point d'équilibre $(1,1)$, le système devient :

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(x(t), y(t)) \\ (x(0), y(0)) = (1,1) \end{cases}$$

alors comme F est C^0 et localement lipschitzienne, il existe une unique solution maximale de ce problème de Cauchy.

On remarque que $(x(t), y(t)) = (1,1)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ est cette unique solution car $(1,1)$ est un point d'équilibre de F.

De même, si la condition initiale est le point $(0,0)$ alors $(x(t), y(t)) = (0,0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ est l'unique solution maximale au problème de Cauchy.

Donc dans le cas où la condition initiale est un point d'équilibre, la trajectoire associée est un point dans le plan (x,y).

4 Question 4

4.1 (a)

Si (x,y) est solution de (1) définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui contient 0, alors en particulier x est solution du système :

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = \tilde{x}(t) * (1 - y(t)), t \in \mathbb{R} \\ \tilde{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution maximale. On remarque que cette solution est la fonction nulle. Donc comme toute solution est une restriction de la solution maximal, on a en particulier : $x(t) = 0 \ \forall t \in I$.

On obtient donc que, $\forall t \in I$:

$$\begin{cases} y'(t) = -2 * y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Donc

$$\forall t \in I, y(t) = y_0 e^{-2t}$$

Donc l'ensemble des solution est

$$\{(\mathrm{I}, (0, y_0 e^{-2t})), \text{ I intervalle contenant 0 inclus dans } \mathbb{R}\}$$

Autrement dit, comme il existe une unique solution maximale à (1), cette solution est $(x(t), y(t)) = (0, y_0 e^{-2t}), \forall t \in \mathbb{R}$

4.2 (b)

Soit (x, y) la solution de (1) définie sur $[0, T[$. Supposons qu'il existe $t_0 \geq 0$ tq $x(t_0) = 0$. Alors en particulier x est solution de :

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = g(t, \tilde{x}(t)) \\ \tilde{x}(t_0) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$g \colon \begin{array}{ll} [0, T[* \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto x * (1 - y(t)) \end{array}$$

g est C^1 donc g est continue et localement lipschitzienne sur son ensemble de définition. Donc il existe une unique solution maximale à ce problème de Cauchy. On remarque que cette solution est la fonction nulle. Donc en particulier, comme tout solution est une restriction de la solution maximale :

$$x(t) = 0, \forall t \in [0, T[$$

4.3 (c)

En raisonnant de la même manière, on peut montrer que si $y_0 = 0$, alors on a $y(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. On obtient donc que, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$x'(t) = x(t), x(0) = x_0 \iff x(t) = x_0 e^t$$

Donc l'ensemble des solution est

$$\{(\mathrm{I}, (x_0 e^t, 0)), \text{ I intervalle contenant 0 inclus dans } \mathbb{R}\}$$

Donc que l'unique solution maximale est $(x(t), y(t)) = (x_0 e^t, 0), \forall t \in \mathbb{R}$

De même, supposons $\exists t_1 \in [0, T[$ tel que $y(t_1) = 0$ alors avec un raisonnement similaire, on montre que $y(t) = 0, \forall t \in [0, T[$.

5 Question 5

Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_1 \in [0, T[$ tel que $x(t_1) = 0$ et $y(t_1) = \overline{y_0} \in \mathbb{R}$. On considère le nouveau problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (x'(t), y'(t)) = F(x(t), y(t)) \\ (x(t_1), y(t_1)) = (0, \overline{y_0}) \end{cases}$$

Il existe une unique solution maximale à ce problème. On remarque que $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (0, \overline{y_0} e^{-2(t-t_1)}), \forall t \in \mathbb{R}$ est cette unique solution.

Comme toute solution à ce problème de Cauchy est une restriction de la solution maximale et que (x, y) en est une solution, on a en particulier :
$(x(t), y(t)) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \forall t \in [0, T[$ et donc $x_0 = \tilde{x}(0) = 0$.

Contradiction car $x_0 > 0$ par hypothèse. Donc x ne s'annule pas. Et comme $x_0 > 0$ alors $x > 0$ sur $[0, T[$.

Par un raisonnement similaire, on a que $y(t) > 0, \forall t \in [0, T[$. Donc si x_0 et y_0 sont strictement supérieurs à 0, alors x et y sont strictement positifs sur [0,T[

6 Question 6

On calcule d'abord formellement le quotient des dérivées (équation 1) :

$$\frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{x(t)}{1 - x(t)} \times -\frac{1}{2} \frac{1 - y(t)}{y(t)}$$

Donc on obtient en réarrangeant (équation 2) :

$$\frac{x'(t)(1-x(t))}{x(t)} = -\frac{1}{2}\frac{y'(t)(1-y(t))}{y(t)}$$

Intégrons le membre de gauche :

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)(1-x(s))}{x(s)}\,\mathrm{d}s &= \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} - x'(s)\,\mathrm{du} \\ &= ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) - x(t) + x_0\end{aligned}$$

Donc en intégrant des 2 côtés, on obtient :

$$ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) - x(t) + x_0 = -\frac{1}{2}\cdot\left(ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) - y(t) + y_0\right)$$

donc

$$2ln(x(t)) + ln(y(t)) - 2x(t) - y(t) = 2ln(x_0) - 2x_0 + ln(y_0) - y_0$$

Posons

$$\begin{aligned} C\colon {\mathbb{R}_+^*}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto 2ln(x) - 2x + ln(y) - y\end{aligned}$$

Alors avec le calcul précédent, on obtient $C(x(t), y(t)) = C(x_0, y_0)$

Justifions maintenant la validité des calculs. L'équation 1 nous suggère de considérer l'équation 2. Cependant, l'équation 2 est vraie pour tout $t \in [0, T[$ car $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ donc $\forall t \in [0, T[$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$. Donc l'intégration qu'on fait est vraie pour tout $t \in [0, T[$ donc on obtient bien que :

$$\forall t \in [0, T[, C(x(t), y(t)) = C(x_0, y_0)$$

7 Question 7

7.1 (a)

Posons $f(x) = x - 2ln(x), \forall x > 0$.

f est une fonction dérivable de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{2}{x}, \forall x > 0$. On obtient le tableau de signe suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On observe donc que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) > 0$ donc $2ln(x) < x$.

De plus comme pour tout $y > 0$ on a $2ln(y) < y$ alors en divisant par 2, pour tout $y > 0$, $ln(y) < \frac{y}{2}$

En particulier, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que pour tout $x > \alpha$, on a $2ln(x) < x$ et pour tout $y > \beta$, on a $ln(y) < \frac{y}{2}$

7.2 (b)

Posons $f(x) = 2x - 2ln(x), \forall x > 0$.

f est C^1 de dérivée $f'(x) = 2 - \frac{2}{x}, \forall x > 0$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

On a bien pour tout $x > 0$, $f(x) = 2x - 2ln(x) \geqslant 2$.

Et donc en particulier, pour tout $y > 0$, $y - ln(y) \geqslant 1$

Il suffit de prendre $\gamma = 2$ et $\delta = 1$.

7.3 (c)

Montrons que (x, y) est borné sur [0,T[. Montrons alors que :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \max(||x||_\infty, ||y||_\infty) \leqslant C$$

où

$$||x||_\infty = \sup_{t\in[0,T[} |x(t)| \text{ et } ||y||_\infty = \sup_{t\in[0,T[} |y(t)|.$$

Montrons donc que :

$$||x||_\infty < +\infty \text{ et } ||y||_\infty < +\infty$$

Par l'absurde, supposons que $||x||_\infty = +\infty$. Alors $\exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans [0,T[tel que $x(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2ln(x(t_n)) - 2x(t_n) + ln(y(t_n)) - y(t_n) = cste$$

Ce qui est équivalent à :

$$ln(y(t_n)) - y(t_n) = cste - 2ln(x(t_n)) + 2x(t_n)$$

Or si $x(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $2ln(x(t_n)) - 2x(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. On aurait donc $ln(y(t_n)) - y(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui absurde car $\forall y > 0$, $ln(y) - y \leqslant -1$. Donc $||x||_\infty < +\infty$ Par un raisonnement analogue, on montre que $||y||_\infty < +\infty$

7.4 (d)

$$(1)\begin{cases}(x'(t),y'(t))=F(x(t),y(t))\\(x(0),y(0))=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

F est C^1, donc C^0 et localement lipschitzienne donc il existe une unique solution maximale définie sur $J_{max}=]a,b[$ tel que $0\in J_{max}$, donc $a<0$ et $b>0$. Soit $(J_{max},(x,y))$ cette solution.
Montrons que $b=+\infty$: Supposons par l'absurde que $b<+\infty$. (x,y) serait une solution sur [0,T[avec $T=b>0$ et donc serait bornée sur [0,b[. Or si $(x(t),y(t))$ est une solution sur [0,b[, on aurait $||(x(t),y(t))||\underset{t\to b}{\longrightarrow}+\infty$
Nécessairement : $b<+\infty$

Deuxième partie

Périodicité des solutions

8 Question 0

si $x_0=0$ (et $y_0\neq 0$) :
On sait qu'il existe une unique solution maximale. Toutes solutions de (1) est une restriction de la solution maximale qui est $(\mathbb{R},0,y_0exp(-2t))$ avec la question 4.
Donc, soit (x,y) la solution definie sur R^+, supposons qu'il existe $T>0$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{cases}x(t)=x(t+T)\\y(t)=y(t+T)\end{cases}$$

alors $y_0e^{-2t}=y_0e^{-2(t+T)}$, donc T=0 : absurde !
Finalement, (x,y) n'est pas periodique
si $y_0=0$ (et $x_0\neq 0$) :
L'unique solution maximale est $(\mathbb{R},x_0e^t,0)$. De même, la solution définie sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas périodique.
si $y_0=0$ et $x_0=0$:
La solution maximale est $(\mathbb{R},0,0)$ et donc la solution définie sur $\mathbb{R}^+$ est périodique.

9 Question 1

Soit $(x(t), y(t))$ la solution définie sur $\mathbb{R}^+$. Soit (x_0, y_0) un point d'équilibre. L'unique solution maximale est $(\mathbb{R}, (x_0, y_0))$. C'est donc un point.

10 Question 2

Nous sommes dans le cas d'une équation différentielle autonome avec F qui est C^1.

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux solutions du problème liées aux conditions initiales (x_1^0, y_1^0) et (x_2^0, y_2^0).

Soit $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que les deux solutions se croisent en ce point : il existe t_1 et $t_2 \in \mathbb{R}_+$ tq $(x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2)) = (x^0, y^0)$.

Sans perte de généralités, on peut supposer $t_2 > t_1$. Alors il existe $\Delta > 0$ tel que $t_2 = t_1 + \Delta$

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} (\tilde{x}(t)), \tilde{y}(t)) = F(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \\ (\tilde{x}(t_2), \tilde{y}(t_2)) = (x^0, y^0) \end{cases}$$

(x_2, y_2) et $(x_1(t - \Delta), y_1(t - \Delta))$ pour tout $t \geq \Delta$ sont solutions de ce problème. Donc par unicité de la solution maximale, et que toute solution à cette équation différentielle est une restriction de cette solution, on a que :

$$\forall t \geq \Delta, (x_1(t - \Delta), y_1(t - \Delta)) = (x_2(t), y_2(t))$$

On conclut que si les solutions se croisent, alors les portraits de phase se superposent. Sinon les trajectoires sont disjointes.

11 Question 3

Une courbe fermée est un ensemble de couples $(f(t), g(t))$ avec f, g continues définies sur $I = [a, b]$ avec $(f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$. Répondons maintenant à la question.

$\Rightarrow$: Supposons qu'il existe T>0 tel que

$$(x(t), y(t)) = (x(t+T), y(t+T)), \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Montrons que :

$$\{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}^+\} = \{(x(t), y(t)), t \in [0, T]\}$$

$\subseteq$:

Soit t$\in \mathbb{R}^+$,

$$x(t) = x(t - T * \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor + T * \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor) = x(t - T * \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor)$$

Par périodicité. Et on vérifie facilement que $t - T * \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \in [0, T]$

$\supseteq$:

Evident

Donc l'implication est montrée car x, y continues et $(x(0), y(0)) = (x(T), y(T))$ par périodicité.

$\Leftarrow$: Supposons que le portrait de phase est une courbe fermée, c'est à dire :

$$\{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}^+\} = \{(x(t), y(t)), t \in [0, T]\}$$

avec $\{(x(0), y(0)\} = \{x(T), y(T)\}$, $T > 0$

On sait que (x,y) solution de (1) sur $\mathbb{R}^+$ et donc si on pose : $\forall t \geq 0$:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = x(t+T) \\ \tilde{y}(t) = y(t+T) \end{cases}$$

$(\tilde{x}, \tilde{y})$ est aussi solution de (1) sur $\mathbb{R}_+$

On sait qu'il existe une unique solution maximale au système (1) et que toute solution de (1) est une restriction de cette dernière. En particulier, comme (x, y) est une solution de (1) définie sur $\mathbb{R}_+$, alors elle est égale à la restriction de la solution maximale sur $\mathbb{R}_+$. De même pour $(\tilde{x}, \tilde{y})$ qui est une solution de (1) définie sur $\mathbb{R}_+$.

En particulier : $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = x(t+T) = x(t) \\ \tilde{y}(t) = y(t+T) = y(t) \end{cases}$$

Donc on a périodicité.

12 Question 4

12.1 4.a

Supposons que (x_0, y_0) se trouve dans (Q1) donc $x' > 0$ et $y' < 0$.

Montrons que la trajectoire ne reste pas dans (Q1).

Par l'absurde, on aurait que $y' < 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc y décroit strictement et est minorée par 0 donc converge. De même, $x' > 0$ donc x croit strictement sur $\mathbb{R}_+$ et est majorée par 1 car par hypothèse, $y' < 0$ donc $x < 1$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc x converge.

On note (x_l, y_l) la limite de (x, y). Comme on est dans le cas d'une équation autonome, (x_l, y_l) est nécessairement un point d'équilibre de F. C'est impossible car :

$y(t) \leq y(0) < 1, \forall t \in \mathbb{R}_+$ donc (x_l, y_l) ne peut pas être $(1, 1)$
$x(t) \geq y(0) > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$ donc (x_l, y_l) ne peut pas être $(0, 0)$

Donc la trajectoire finit par quitter (Q1). Par continuité de x' et y', quitter (Q1) signifie que x' ou y' (ou les deux) s'annule.

Cependant, x' ne s'annulera que si y est égal à 1. Or dans (Q1) : $x' > 0$ et $y' < 0$ donc $x < 1$ et $y < 1$ et x croit strictement et y décroit strictement.

Donc y' s'annulera avant x'.

Nécessairement, il existe $t_1 > 0$ tq $x(t_1) = 1$, $y'(t_1) = 0$ et $y(t_1) \leq y_0 < 1$. Par continuité, il existe $\epsilon > 0$ tq $\forall t \in]t_1, t_1 + \epsilon]$, on a $y(t) < 1$ donc $x'(t) > 0$. Donc x croit strictement sur cet intervalle donc $x > x(t_1) > 1$ donc $y' > 0$ sur cet intervalle.

Donc la trajectoire finit forcément par rentrer dans la zone (Q2) en un temps $t_1 > 0$.

Montrons par l'absurde que la trajectoire quitte forcément (Q2) :

on aurait $\forall t > t_1$: $x'(t) > 0$ donc $y(t) < 1$ et $y'(t) > 0$ donc y croit et est majorée donc converge. De plus, x strictement croissante donc soit x converge soit x diverge vers $+\infty$. Comme précédent, si x converge, alors (x, y) converge vers un point d'équilibre nécessairement et on retombe sur une contradiction. Donc x diverge vers $+\infty$.

Cependant, dans ce cas, on aurait $\forall t > t_1$:

$$y'(t) = -2 * y(t) * (1 - x(t)) \geq -2 * y(t_1) * (1 - x(t)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc y' tend vers $+\infty$. Donc il existe $T > t_1$ tq $\forall t > T$, $y'(t) > 1$ donc en intégrant, $y(t) \geq t + y(t_1) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui est impossible car y converge.

Donc la trajectoire finit par quitter (Q2).

On raisonne de la même manière que précédemment. y' ne s'annulera que si x est égal à 1. Or dans (Q2) : $x' > 0$ et $y' > 0$ donc $x < 1$ et $y > 1$ et x croit strictement et y croit strictement. Donc x' s'annulera avant y'.

Nécessairement, il existe $t_2 > t_1$ tq $y(t_2) = 1$, $x'(t_2) = 0$ et $x(t_2) \geq x(t_1) > 1$. Par un argument de continuité similaire qu'utilisé précédemment, on a donc la trajectoire finit forcément par rentrer dans la zone (Q3) en un temps $t_2 > t_1$.

On peut montrer que la trajectoire ne reste pas dans (Q3). Par l'absurde, si on reste dans (Q3) alors $x' < 0$ et $y' > 0$ donc $x > 1$ et $y > 1$ donc x converge. y croit strictement pour $t > t_2$. Donc soit y converge soit y diverge vers $+\infty$.

y ne peut pas converger car sinon, on retombe sur une contradiction avec les points d'équilibre. Donc y diverge vers $+\infty$. On aurait :

$\forall t > t_2$

$$x'(t) = x(t) * (1 - y(t)) \leq x(t_2) * (1 - y(t)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

donc x ne converge pas avec un argument similaire que celui qu'on a utilisé avant. Contradiction.

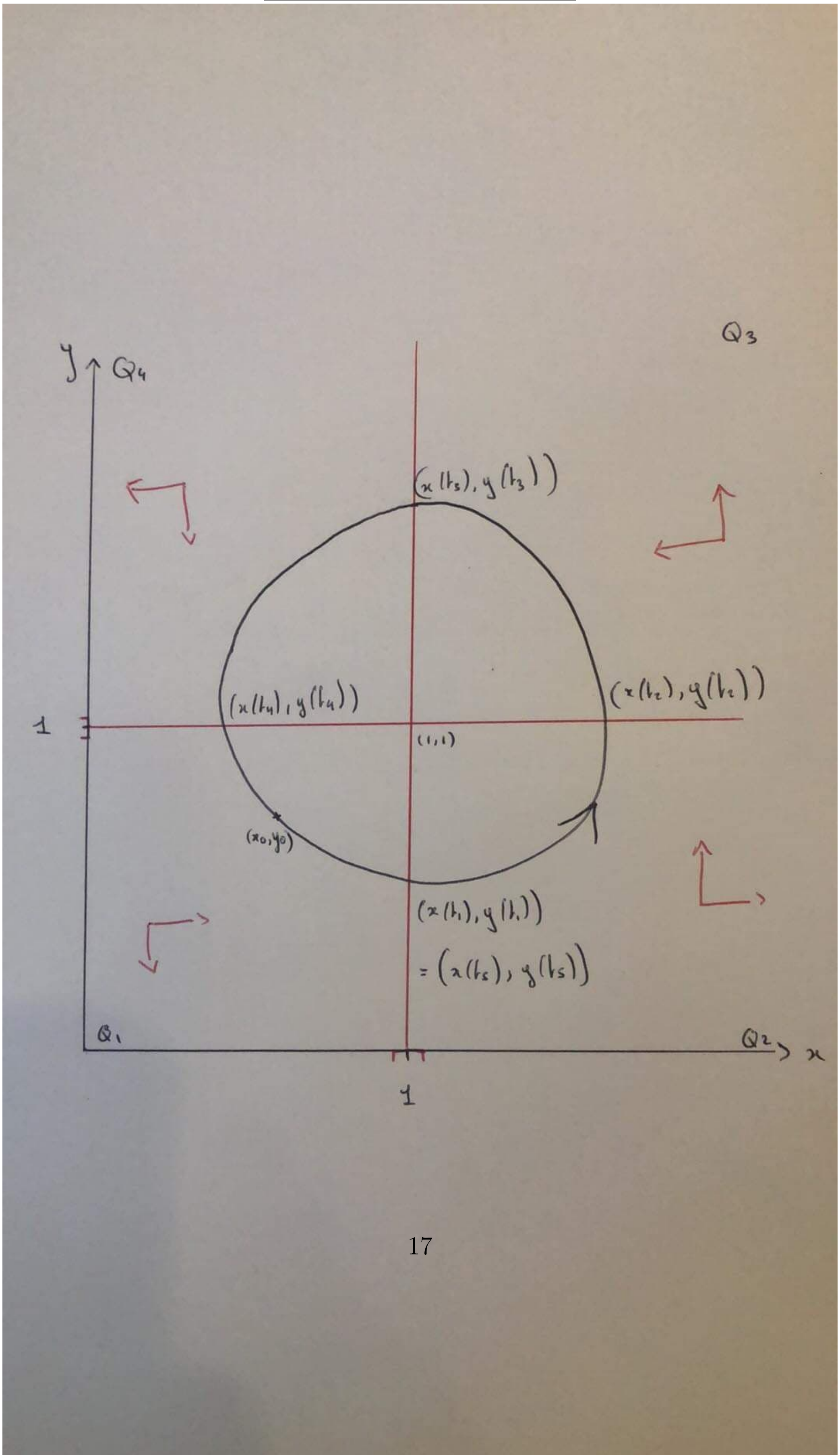
Donc la trajectoire finit par quitter (Q3).

On raisonne encore pareil pour le passage de (Q1) à (Q2) et de (Q2) à (Q3), et donc la trajectoire finit par quitter (Q3) en un temps $t_3 > t_2$. On est donc dans (Q4). Pour montrer qu'on quitte forcément (Q4), on raisonne de la même manière que celle utilisée pour montrer qu'on quitte forcément (Q1).

Puis on conclut que x' s'annulera avant y'. Donc il existe $t_4 > t_3$ tq la trajectoire quitte (Q4) pour rentrer dans (Q1). Et comme montré précédemment, nécessairement, il existe $t_5 > t_4$ tq la trajectoire quitte (Q1) pour rentrer dans (Q2).

12.2 4.b

Dessin illustrant la situation



On aurait pu tracer une spirale convergente vers le point d'équilibre (1,1) mais le reste du sujet nous indique que la solution à est périodique. Ainsi, on a directement tracé ce dessin.

12.3 4.c

On a $y'(t_5) = y'(t_1) = 0$, qui implique $x(t_1) = x(t_5) = 1$

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $C(x(t), y(t))$ = constante.

Donc,

$$2ln(x(t_1)) - 2x(t_1) + ln(y(t_1)) - y(t_1) = 2ln(x(t_5)) - 2x(t_5) + ln(y(t_5)) - y(t_5)$$

donc
$$ln(y(t_1)) - y(t_1) = ln(y(t_5)) - y(t_5)$$

$$\begin{cases} x'(t_1) > 0 \\ x'(t_5) > 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} y(t_1) < 1 \\ y(t_5) < 1 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto ln(x) - x$ est bijective sur (0 ;1) car continue et sa dérivée est strictement positive.

Donc on déduit que
$$y(t_1) = y(t_5)$$

12.4 4.d

On pose

$$\begin{cases} (\tilde{x}(t)), \tilde{y}(t)) = F(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t) \\ \tilde{x}(t_1 + t_5) = 1 \\ \tilde{y}(t_1 + t_5) = y(t_1) \end{cases}$$

Il existe une unique solution maximale.

(x^1, y^1) est solution où $\forall t \geq t_1$

$$\begin{cases} x^1(t) = x(t - t_1) \\ y^1(t) = y(t - t_1) \end{cases}$$

(x^5, y^5) est solution où $\forall t \geq t_5$

$$\begin{cases} x^5(t) = x(t - t_5) \\ y^5(t) = y(t - t_5) \end{cases}$$

Comme toute solution est une restriction de la solution maximale, on obtient que :

$\forall t \geq t_5$

$$\begin{cases} x^1(t) = x^5(t) \\ y^1(t) = y^5(t) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x(t - t_1) = x(t - t_5) \\ y(t - t_1) = y(t - t_5) \end{cases}$$

Donc $\forall t \geq t_5$ on pose $t' = t - t_5 \geq 0$

On a

$$\begin{cases} x(t') = x(t - t_5) = x(t - t_1) = x(t' + t_5 - t_1) \\ y(t') = y(t - t_5) = y(t - t_1) = y(t' + t_5 - t_1) \end{cases}$$

Donc (x, y) est périodique de période $T = t_5 - t_1 > 0$.

12.5 4.e

Si la trajectoire est initialement dans (Q2) :

En raisonnant comme dans la question 4.a), on peut montrer que si (x_0, y_0) se trouve dans (Q2) alors la trajectoire finit forcément par rentrer dans la zone (Q3) en un temps $t_1 > 0$, puis dans (Q4) en un temps $t_2 > t_1$ puis à nouveau dans (Q1) en un temps $t_3 > t_2$ puis à nouveau dans (Q2) en un temps $t_4 > t_3$ puis à nouveau dans (Q3) en un temps $t_5 > t_4$.

On a donc $x'(t_1) = x'(t_5) = 0$ donc $y(t_1) = y(t_5) = 1$. Donc

$$ln(x(t_1)) - x(t_1) = ln(x(t_5)) - x(t_5)$$

Or :

$$\begin{cases} y'(t_1) > 0 \\ y'(t_5) > 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x(t_1) > 1 \\ x(t_5) > 1 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto ln(x) - x$ est bijective sur $(1\,;+\infty)$ car continue et sa dérivée est strictement négative.

Donc on déduit que

$$x(t_1) = x(t_5)$$

On pose :

$$\begin{cases} (\tilde{x}(t)), \tilde{y}(t)) = F(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t) \\ \tilde{x}(t_1 + t_5) = x(t_1) \\ \tilde{y}(t_1 + t_5) = 1 \end{cases}$$

Il existe une unique solution maximale.

En reprenant les notations précédentes, on a que (x^1, y^1) est solution comme (x^5, y^5). Donc on conclut de la même manière qu'à la question précédente et on en déduit que (x, y) est périodique de période $T = t_5 - t_1 > 0$.

Si la trajectoire est initialement dans (Q3) :

En raisonnant pareil, on peut montrer que si (x_0, y_0) se trouve dans (Q3) alors la trajectoire finit forcément par rentrer dans la zone (Q4) en un temps $t_1 > 0$, puis dans (Q1) en un temps $t_2 > t_1$ puis dans (Q2) en un temps $t_3 > t_2$ puis à nouveau dans (Q3) en un temps $t_4 > t_3$ puis à nouveau dans (Q4) en un temps $t_5 > t_4$.

On a donc $y'(t_1) = y'(t_5) = 0$ donc $x(t_1) = x(t_5) = 1$. Donc

$$ln(y(t_1)) - y(t_1) = ln(y(t_5)) - y(t_5)$$

Or :

$$\begin{cases} x'(t_1) < 0 \\ x'(t_5) < 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} y(t_1) > 1 \\ y(t_5) > 1 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto ln(x) - x$ est bijective sur $(1\,;+\infty)$ car continue et sa dérivée est strictement négative.

Donc on déduit que

$$y(t_1) = y(t_5)$$

On pose :

$$\begin{cases} (\tilde{x}(t)), \tilde{y}(t)) = F(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t) \\ \tilde{x}(t_1 + t_5) = 1 \\ \tilde{y}(t_1 + t_5) = y(t_1) \end{cases}$$

Il existe une unique solution maximale.

En reprenant les notations précédentes, on a que (x^1, y^1) est solution comme (x^5, y^5). Donc on conclut de la même manière qu'à la question précédente et on en déduit que (x, y) est périodique de période $T = t_5 - t_1 > 0$.

Si la trajectoire est initialement dans (Q4) :

Il suffit d'avoir un raisonnement similaire. On peut montrer que si (x_0, y_0) se trouve dans (Q4) alors la trajectoire finit forcément par rentrer dans la zone (Q1) en un temps $t_1 > 0$, puis dans (Q2) en un temps $t_2 > t_1$ puis dans (Q3) en un temps $t_3 > t_2$ puis à nouveau dans (Q4) en un temps $t_4 > t_3$ puis à nouveau dans (Q1) en un temps $t_5 > t_4$.

De là, on en déduit que la solution est périodique de période $T = t_5 - t_1 > 0$.

Conclusion : pour tout $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ la solution (x, y) de (1) sur $\mathbb{R}_+$ est périodique.

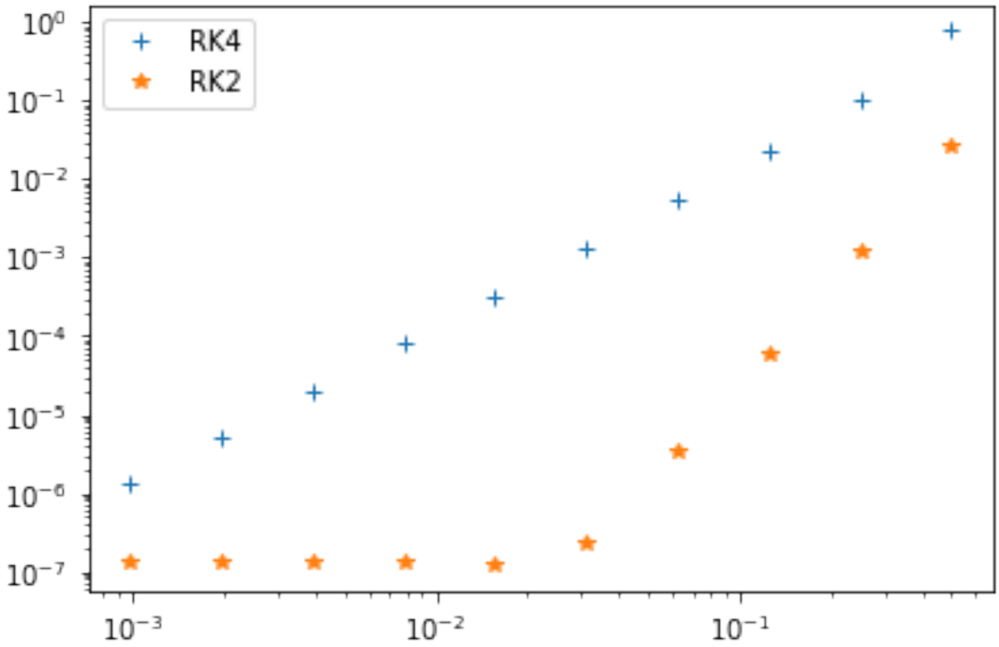
Troisième partie
Etude numérique de schémas classiques

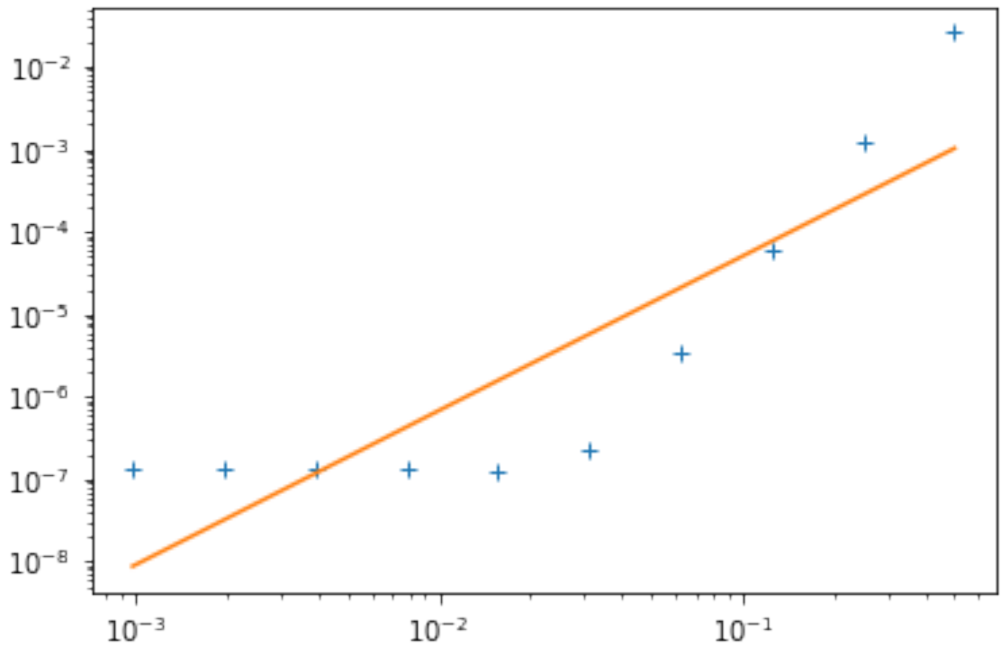
13 Euler explicite

On remarque que la méthode d'Euler explicite diverge très rapidement. Or d'après les théorèmes vus en cours nous savons que la méthode d'Euler est une méthode consistante. Nous avons donc la certitude que la somme des erreurs de consistance tend vers 0. De plus nous savons que F est localement lipschitzienne donc la méthode d'Euler est stable sur notre intervalle [0 ;T]. La méthode est donc convergente sur l'intervalle et il n'y a pas de raisons théorique pour expliquer cette divergence. Le problème vient de la constante de lipschitz qui est trop grande et donc dès que le temps dépasse une certaine valeur numérique notre majoration explose. La machine n'a pas une précision assez importante et renvoie ainsi $+\infty$ ou $-\infty$.

14 Runge Kutta ordre 4

Dans la photo ci dessous nous observons que jusqu'à un certain rang RK4 a effectivement une pente de 4 et RK2 de 2. Cependant passé un certain rang les erreurs cessent de décroître. La méthode est trop précise et la machine ne peut plus calculer une précision de ce niveau. La partie "plate" de la courbe des erreurs réduit la pente de RK4 qui se retrouve à avoir la même pente de 2 que RK2.



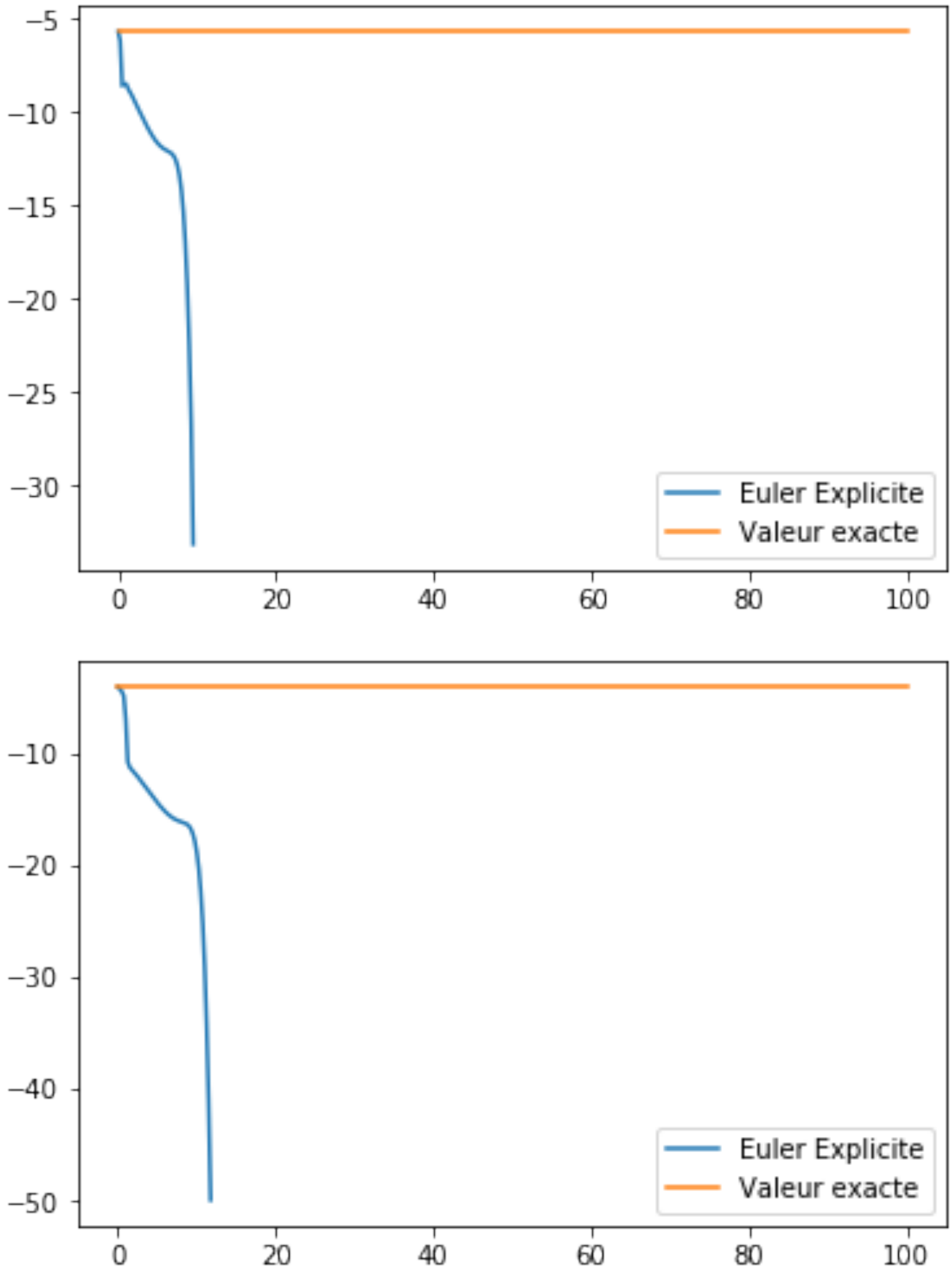


Tracé de l'erreur globale en fonction de h pour RK4.

15 question 7

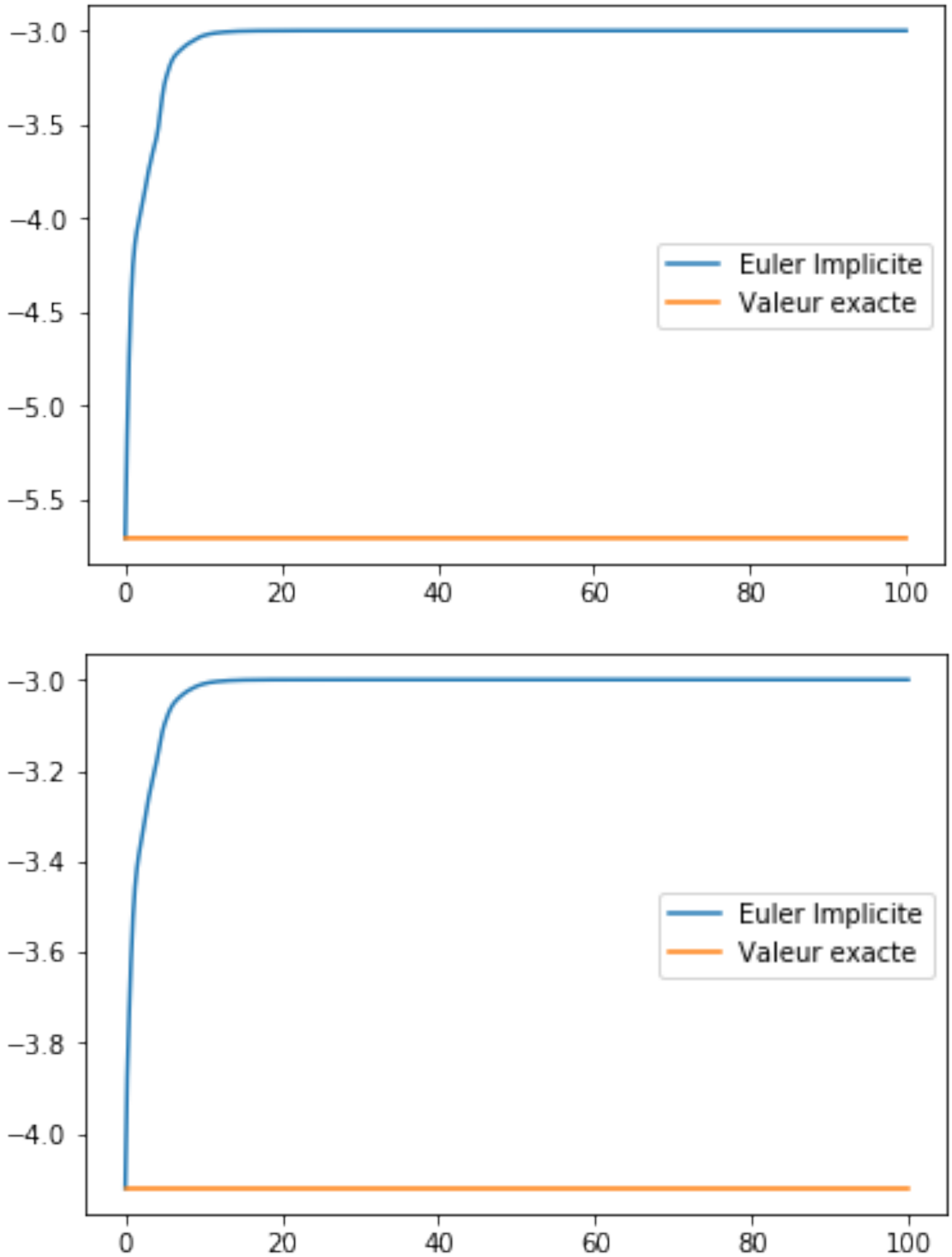
15.1 (a)

Pour $T = 100$ et $h = 0.25$ on a tracé sur trois graphiques distincts l'évolution de la valeur de C(x,y) en temps pour les trois schémas.



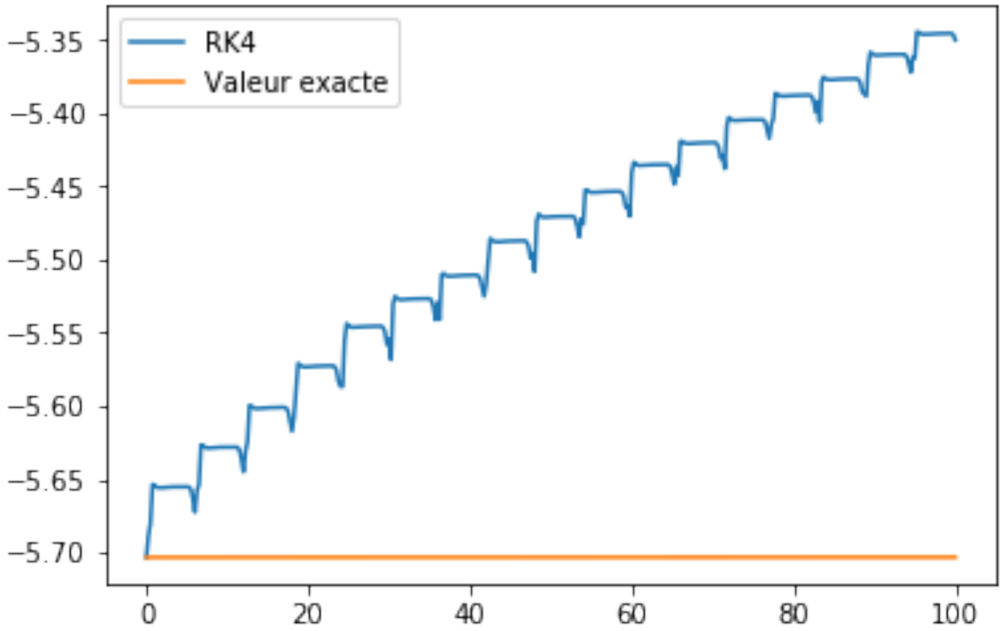
Tracés de la valeur de C(x,y) pour Euler Explicite, pour les deux CI.

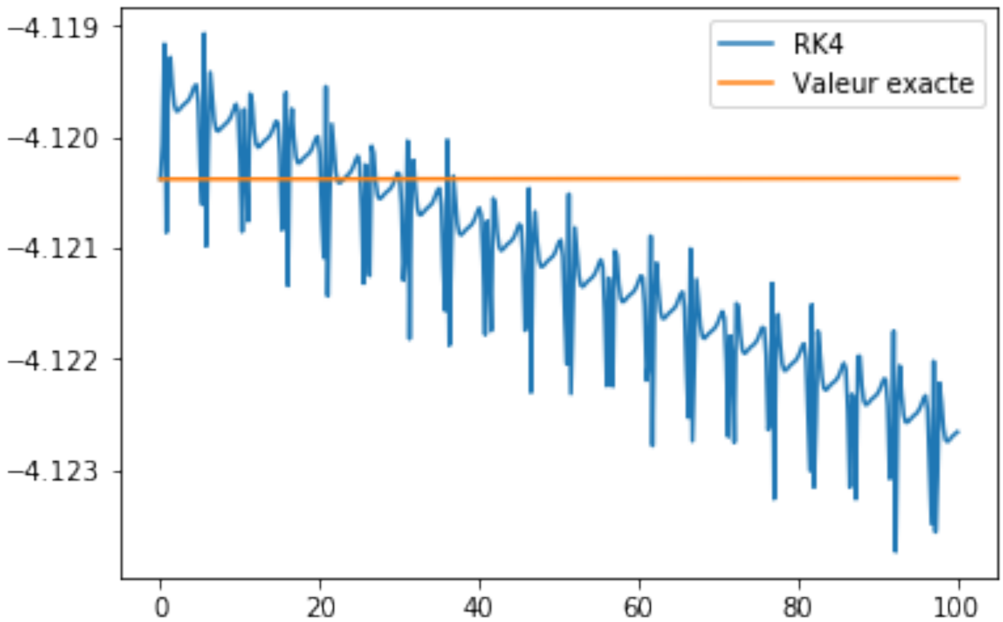
Nos solutions par Euler Explicite n'approchant pas la solution exacte, il est normal que C(x,y) ne soit pas constante. De plus, C(x,y) a cette forme car nos solutions approchées divergent vers l'infini.



Tracés de la valeur de C(x,y) pour Euler Implicite, pour les deux CI

Nos solutions approchées par Euler Implicite convergent vers le point d'équilibre (1,1). Par conséquent, notre fonction C(x,y) converge vers -3.

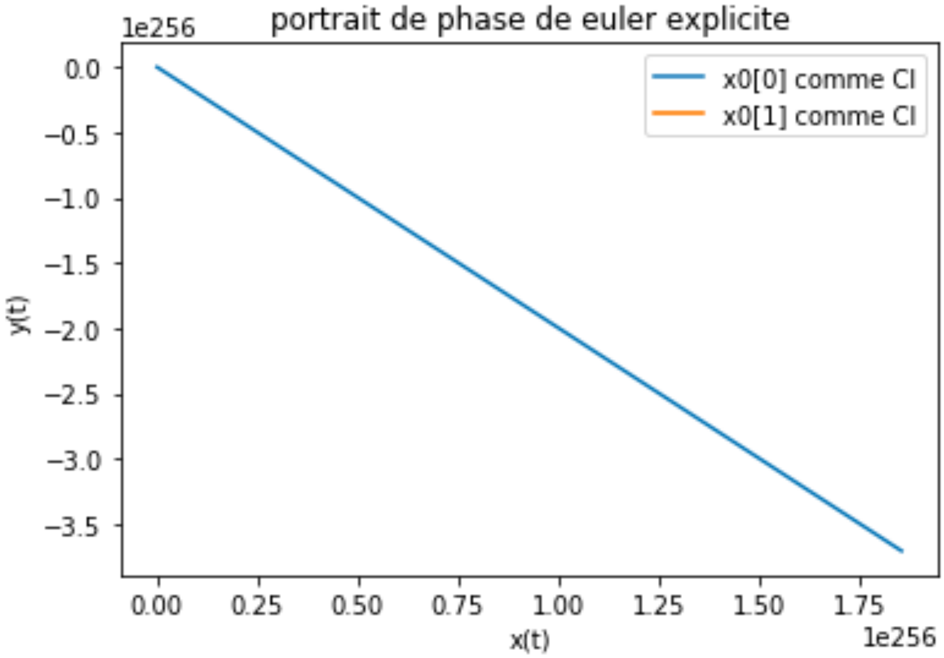




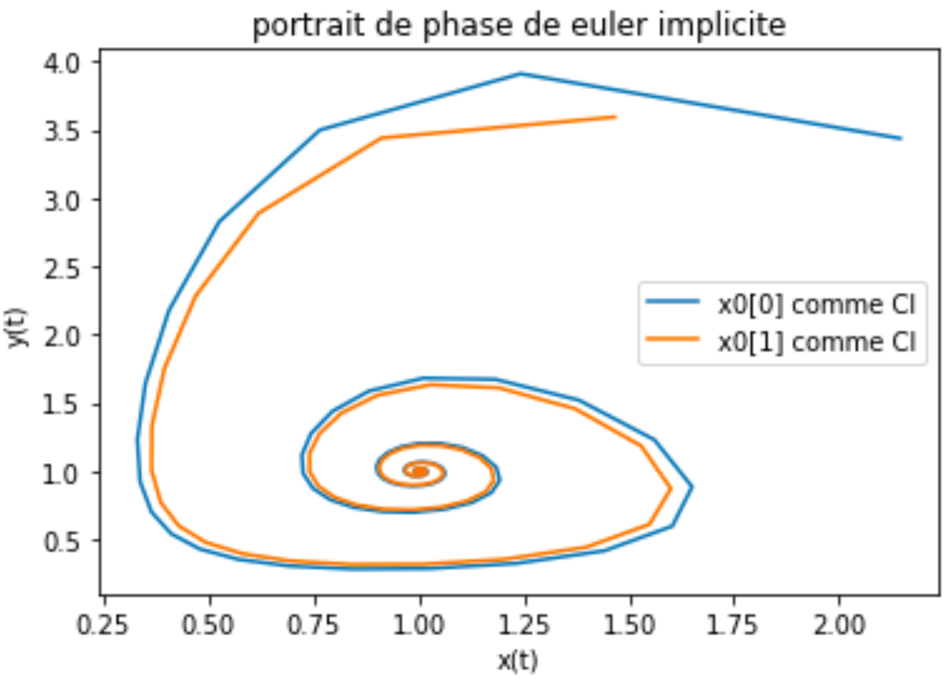
Tracés de la valeur de C(x,y) pour Runge-Kutta 4, pour les deux CI.

On remarque que C(x,y) pour les solutions approchées ne varie que très peu, ce qui est cohérent car RK4 approche très bien la solution exacte.

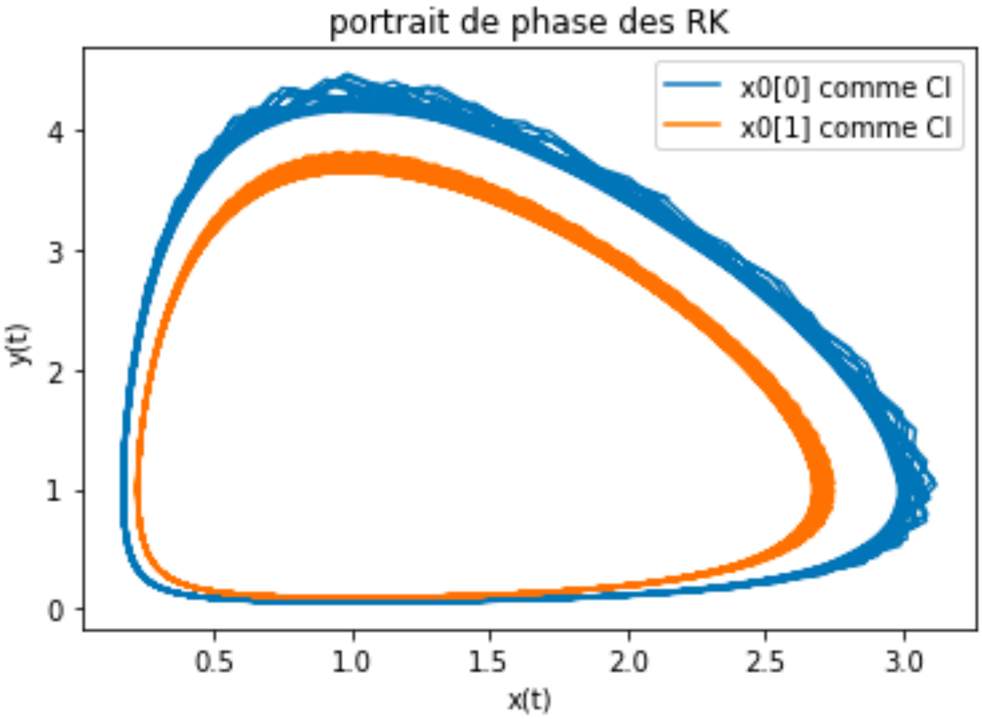
15.2 (b)



portrait de phase de euler explicite
1e256
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5
y(t)
x0[0] comme CI
x0[1] comme CI
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
1e256
x(t)



portrait de phase de euler implicite
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
y(t)
x0[0] comme CI
x0[1] comme CI
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
x(t)



1. **Euler explicite** : On remarque que les 2 courbes se superposent et n'approchent pas du tout les solutions exactes. De plus, on voit bien la divergence des solutions approchées.
2. **Euler implicite** : Ici on observe ce qu'on avait remarque plus tôt. Les solutions convergent vers le point stationnaire (1,1).
3. **Runge Kutta 4** : On obtient le meilleur portrait de phase des 3 méthodes. On note cependant des courbes assez épaisses. Cela est du à l'accumulation des erreurs qui font que les solutions s'éloignent petit à petit de la solution exacte. On a fait des test et plus les valeurs des t deviennent grandes, plus les courbes s'épaississent.

Quatrième partie

Un schéma plus exotique

16 Préliminaires

On note

$$F(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} F_1(x(t), y(t)) \\ F_2(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

avec $F_1(x(t), y(t)) = x(t)(1 - y(t))$ et $F_2(x(t), y(t)) = -2y(t)(1 - x(t))$

17 Question 1

Sous la condition que pour tout $n, y_n > 0$ On a :

$$x_{n+1} = x_n + hx_n - hx_{n+1}y_n$$

$$x_{n+1} - x_n = h(x_n - (x_{n+1} - x_n + x_n)y_n)$$

d'où

$$(x_{n+1} - x_n)(1 + hy_n) = hx_n(1 - y_n)$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \tfrac{h}{1+hy_n} F_1(x_n, y_n)}$$

et

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hF_2(x_{n+1}, y_n)}$$

En particulier,

$$x_{n+1} = \frac{x_n * (1 + h)}{1 + hy_n}$$

$$y_{n+1} = y_n - 2hy_n + 2 * \frac{x_n * (1 + h)}{1 + hy_n} * y_n$$

Donc le schéma est explicite.

18 Question 2

Regardons $|x(t_{n+1}) - x(t_n) - \frac{h}{1+hy(t_n)}F_1(x(t_n), y(t_n))|$

$$|x(t_{n+1}) - x(t_n) - \frac{h}{1+hy(t_n)}F_1(x(t_n), y(t_n))|$$

$$= |hF_1(x(t_n), y(t_n))(1 - \frac{1}{1+hy(t_n)}) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(t_n)|$$

Or par le dévellopement limité $\frac{1}{1+x}$ on obtient :

$$= |hF_1(x(t_n), y(t_n))(hy(t_n) + o(h^2)) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(t_n)|$$

$$= h^2|x(t_n)y(t_n)(1 - y(t_n)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(t_n)| + o(h^3)$$

Regardons $|y(t_{n+1}) - y(t_n) - hF_2(x(t_{n+1}), y(t_n))|$

$$|y(t_{n+1}) - y(t_n) - hF_2(x(t_{n+1}), y(t_n))|$$

$$= h|F_2(x(t_n), y(t_n)) - F_2(x(t_{n+1}), y(t_n) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t_n)|$$

$$= 2h|y(t_n)(x(t_{n+1}) - x(t_n)) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t_n)|$$

$$= 2h^2|y(t_n)F_1(x(t_n), y(t_n)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t_n)| + o(h^3)$$

$$= 2h^2|y(t_n)x(t_n)(1 - y(t_n)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t_n)| + o(h^3)$$

D'où finalement :

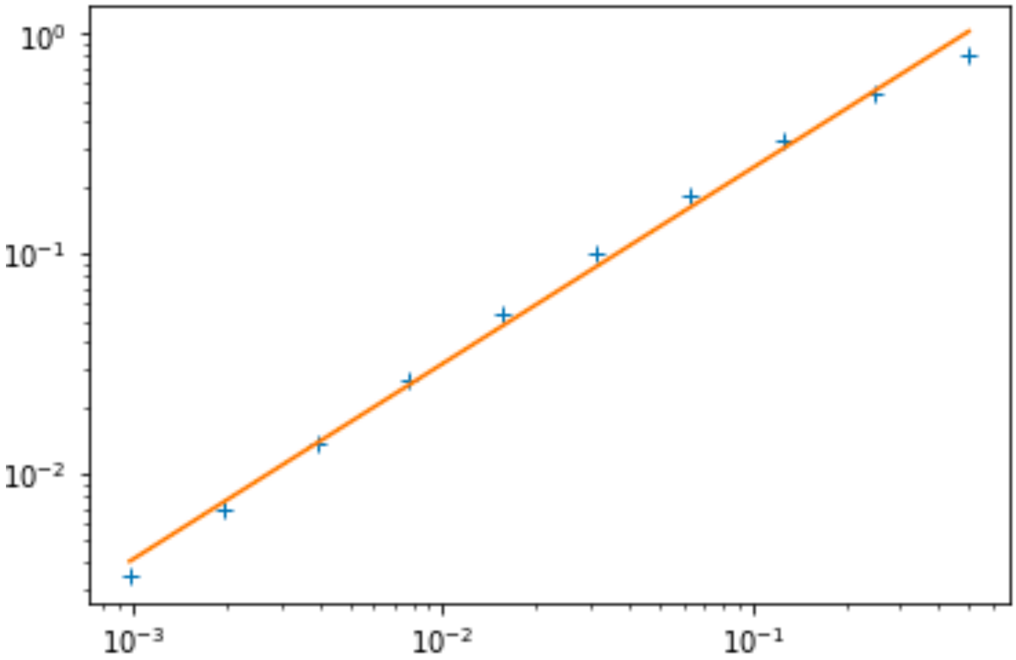
$$e_n = |x(t_{n+1}) - x(t_n) - \frac{h}{1+hy(t_n)}F_1(x(t_n), y(t_n))| + |y(t_{n+1}) - y(t_n) - hF_2(x(t_{n+1}), y(t_n))|$$

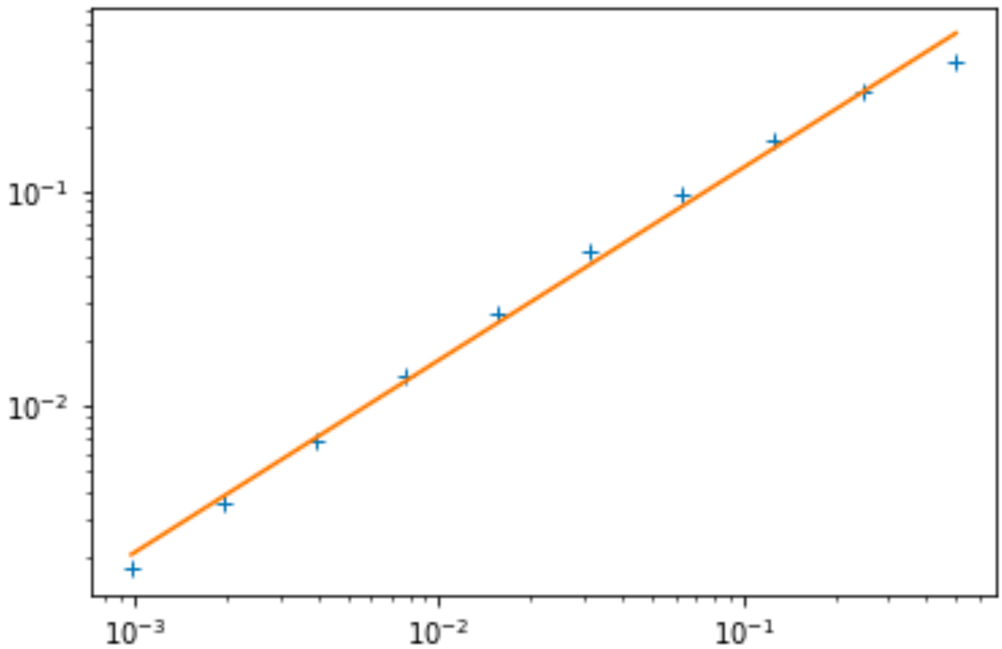
$$e_n = h^2|x(t_n)y(t_n)(1-y(t_n)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(t_n)| + 2h^2|y(t_n)x(t_n)(1-y(t_n)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t_n)| + o(h^3)$$

Le terme en h^2 n'a aucune raison de s'annuler. Finalement ce schéma est d'ordre exactement 1.

19 Question 4

19.1 4.b



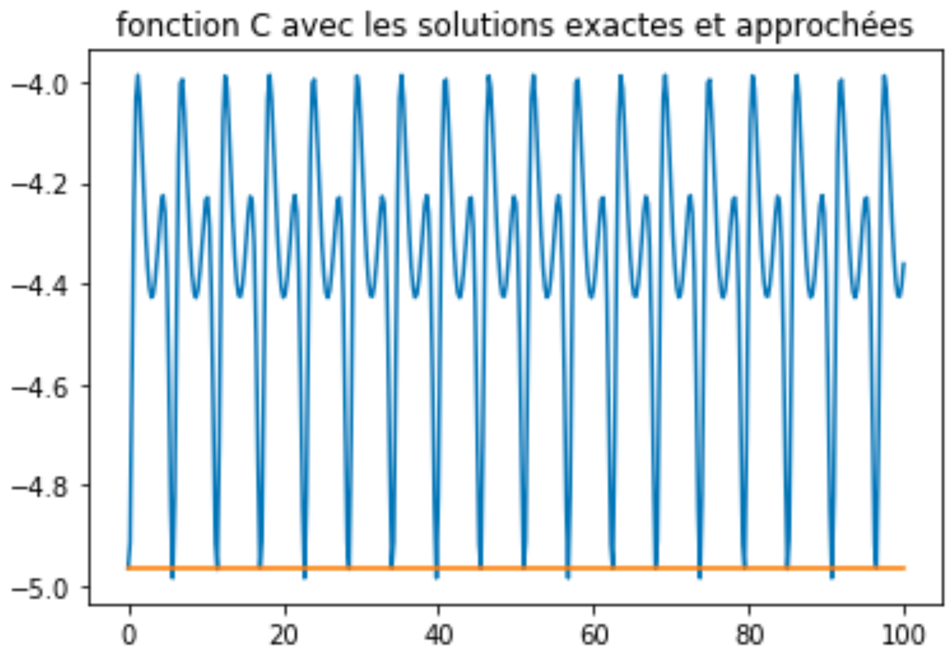


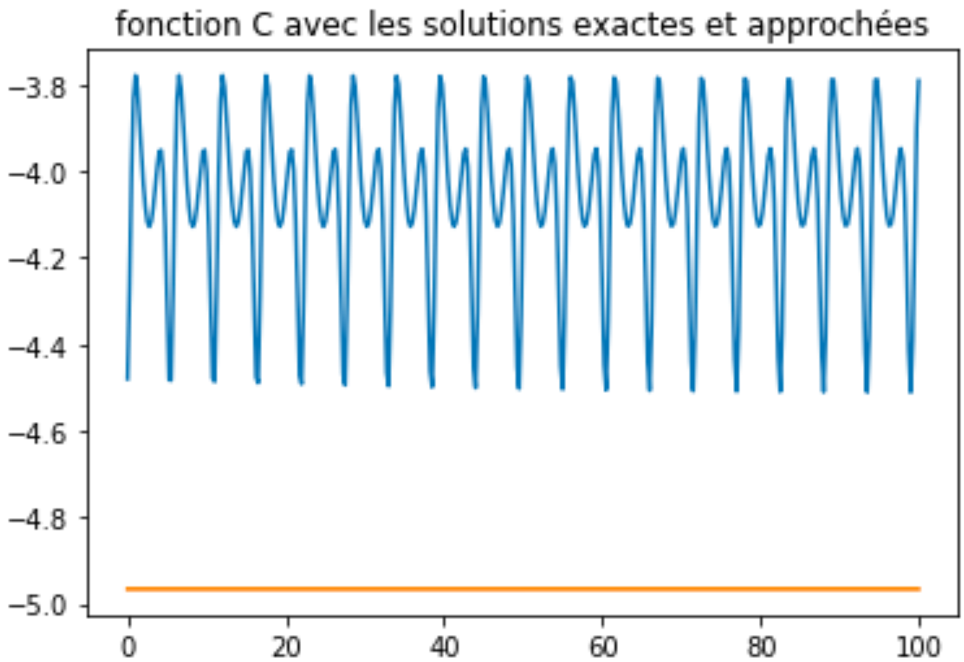
Erreur globale avec les différentes conditions initiales

D'après le code, on voit que l'ordre de convergence est à peu près de 1. Ce qui est en accord avec la théorie (cf question 2 de la partie exotique).

20 Question 5

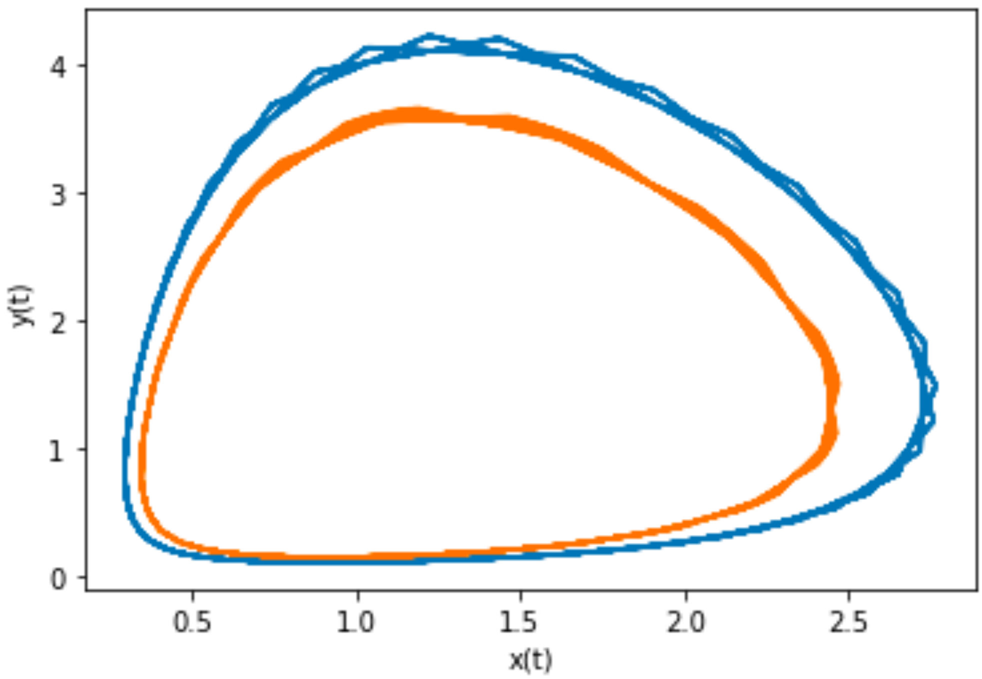
20.1 (a)





On remarque que la fonction C est périodique avec les solutions du schéma. Cependant elle n'est pas constante avec ces dernières.

20.2 (b)



Portrait de phase des solutions du schéma exotique

En comparant aux portraits de phases des autres méthodes, nous notons que celui-ci est le plus semblable au portrait de phase de la solution exacte. Pour commencer, c'est le plus précis que l'on obtient. De plus, les imprécisions n'épaississent pas les courbes. Effectivement, peu importe la valeur de T, cela n'a aucun impacte sur l'épaisseur des courbes contrairement à RK4.