

# CONSTRUCTION D'UNE MACHINE DE TURING

Déterminer si un mot est un palindrome

AMÉLIE RÉGNAULT - L1

19

C'est clairement ce qu'il y a de plus compliqué, et ce n'est pas vraiment au programme de cette année. Cette partie fait partie du cours de calculabilité qui est dispensé en L3.

Toutefois, vous pourrez être amené à modifier une machine de Turing et il est donc intéressant d'avoir une explication sur comment construire une machine de Turing. Bien sûr, il n'y a pas de méthodes magiques pour réussir à coup sûr, en suivant des étapes bien définies. En fait, créer une machine de Turing requière les mêmes compétences que pour construire un programme informatique, et c'est tout un métier !

Ce que j'aimerais vous faire comprendre à travers la construction d'une machine de Turing que indique si un mot est un palindrome ou non, c'est que bien que les états soient nommés  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , par souci de concision, ils ont une vraie signification et représentent de vrais états de la machine.

Voyons tout cela en détail.

# PALINDROME

Un palindrome est mot que l'on peut de la même manière dans le deux sens.

Exemple : LAVAL ; KAYAK ; Engage le jeu, que je le gagne.

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 20

Pour rappel, un palindrome est un mot (mais ça peut aussi être une phrase) qui se lit dans les deux sens exactement de la même manière. On peut donner comme exemple, parmi tant d'autres, la ville de LAVAL en Mayenne, ou bien le Kayak. Vous en connaissez peut-être d'autres vous-même...

## COMMENT RECONNAITRE UN PALINDROME

1<sup>ère</sup> comparaison

L A V A L ?

2<sup>e</sup> comparaison

A V A ?

3<sup>e</sup> comparaison

V ?

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 21

On va lire la première lettre à gauche et on va regarder si la dernière lettre à droite est la même.

Si ce n'est pas la même, ce n'est pas un palindrome, on peut s'arrêter

Si c'est la même, c'est peut-être un palindrome et on doit continuer.

On supprime alors la dernière lettre du mot, puis la première.

On obtient un nouveau mot, et pour que le mot de départ soit un palindrome, il faut que ce nouveau le soit aussi. Donc, on fait la même comparaison que ci-dessous.

Si on peut continuer les comparaisons jusqu'à arriver à un mot vide alors le mot de départ est bien un palindrome.

## COMMENT RECONNAITRE UN PALINDROME

1<sup>ère</sup> comparaison

L A V A L ?

2<sup>e</sup> comparaison

A V A ?

3<sup>e</sup> comparaison

V ?

Mémoriser la  
première lettre

Aller à la fin  
ou au début  
du mot

Comparer la  
dernière lettre

Déterminer si  
le ruban est  
vide

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 22

On s'aperçoit alors, que concrètement à chaque étape, on doit mémoriser la première lettre et la supprimer, puis aller à la fin du mot, décider si la dernière lettre est la même ou non et la supprimer, revenir au début mot.

## RECHERCHE DES ÉTATS NÉCESSAIRES

États	Signification
S0	La tête de lecture est sur la première lettre du mot prête à l'analyser
S1	La première lettre du mot est 0
S2	La première lettre du mot est 1

Mémoriser la première lettre

Aller à la fin ou au début du mot

Comparer la dernière lettre

Déterminer si le ruban est vide

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 23

Avant de mémoriser la première lettre, il faut déjà être sur la première lettre du mot, ce sera donc notre premier état. Il sera également l'état de la machine dans sa configuration initiale. Dans cet état, la machine est sur les starting-blocks pour analyser un mot.

A part le ruban, il n'y a pas de mécanisme de mémoire dans une machine de Turing. Pour garder en mémoire le fait qu'on a lu la lettre « L », par exemple, la seule solution est de faire passer la machine dans un état de type « Je retiens la lettre L ». Cela signifie qu'il faut un état par lettre de l'alphabet considéré, ce qui peut faire vraiment beaucoup. Pour garder une machine simple, on va travailler sur l'alphabet  $\{0,1\}$ .

Il nous faut donc deux états, un pour dire, qu'on a lu la lettre 0 et un pour dire qu'on a lu la lettre 1, qui seront respectivement les états S1 et S2.

## RECHERCHE DES ÉTATS NÉCESSAIRES

Etats	Signification
S0	La tête de lecture est sur la première lettre du mot prête à l'analyser
S1	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 0 et direction la fin du mot.
S2	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 1 et direction la fin du mot.
S3	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 0 et je suis à la fin du mot
S4	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 1 et je suis à la fin du mot

Mémoriser la première lettre

Aller à la fin ou au début du mot

Comparer la dernière lettre

Déterminer si le ruban est vide

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 24

Maintenant, qu'on a mémorisé la première lettre, on peut parcourir le ruban vers la droite jusqu'à la fin du mot. Pour refléter cela, modifions un peu la signification des états S1 et S2, en ajoutant que la machine part à la fin du mot.

On s'aperçoit ici, que pour arrêter d'avancer vers la droite, il faut un changement d'état, sinon pourquoi s'arrêter d'avancer. Donc, dès qu'on sait qu'on est à la fin du mot, il faut qu'on l'indique à la machine, et par conséquent qu'on change son état, par exemple, en « Fin du mot atteint ». Mais attention, si on remplace notre état actuel qui contient en mémoire la première lettre, on perd l'information et on ne pourra plus faire la comparaison avec la dernière lettre.

Donc, là encore, il nous faut deux nouveaux états, un qui indique qu'on est à la fin du mot et que la première lettre est 0, et un autre qui indique qu'on est à la fin du mot et que la première lettre est 1. Appelons ces états S3 et S4.

## RECHERCHE DES ÉTATS NÉCESSAIRES

Etat	Signification
S0	La tête de lecture est sur la première lettre du mot prête à l'analyser
S1	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 0 et direction la fin du mot.
S2	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 1 et direction la fin du mot.
S3	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 0 et je suis à la fin du mot
S4	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 1 et je suis à la fin du mot
S5	Comparaison faite, lettre similaire, retour au début
Rej	Le mot n'est pas un palindrome

Mémoriser la première lettre

Aller à la fin ou au début du mot

Comparer la dernière lettre

Déterminer si le ruban est vide

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 25

Une fois sur la dernière lettre du mot, on va pouvoir la lire et décider si c'est la même que la première lettre. Si, oui, l'automate va alors passer dans un état qui pourrait être « comparaison faite, les lettres sont pareils, je retourne au début ». Appelons-le S5

Ici, on n'a plus besoin de mémoriser la première lettre. D'ailleurs la première et la dernière lettre auront été supprimée au moment opportun.

Dans le cas, où la première et la dernière lettre ne sont pas identiques, la machine de Turing passera dans un état Rej.

## RECHERCHE DES ÉTATS NÉCESSAIRES

Etat	Signification
S0	La tête de lecture est sur la première lettre du mot prête à l'analyser
S1	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 0 et direction la fin du mot.
S2	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 1 et direction la fin du mot.
S3	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 0 et je suis à la fin du mot
S4	La 1 <sup>ère</sup> lettre du mot est 1 et je suis à la fin du mot
S5	Comparaison faite, lettre similaire, retour au début
Acc/Rej	Le mot est un palindrome/n'est pas un palindrome

Mémoriser la première lettre

Aller à la fin ou au début du mot

Comparer la dernière lettre

Déterminer si le ruban est vide

AMÉLIE RÉGNAULT - L1 26

Comme lorsqu'elle allait vers la fin du mot, il va falloir que la machine de Turing change d'état pour s'arrêter de reculer. Ici, si on réfléchit, lorsque la machine est revenue au début, elle est à nouveau sur la première lettre du mot, et on va recommencer une nouvelle analyse, ce qui correspond exactement à l'état 0, on peut donc le réutiliser.

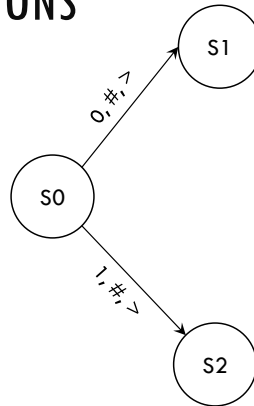
Il reste un cas de figure à traiter, on sait que le mot est un palindrome si le ruban est vide. Donc si la machine se lance dans l'analyse d'un mot vide, elle doit changer d'état et passé à l'état « Accepté » ou Acc.

Nous avons tous les états de la machines. Comme vous pouvez le voir, ils ont une signification bien particulière et cela va nous aider à déterminer les transitions d'un état à un autre.



## DÉTERMINER LES TRANSITIONS

Etat	Signification
S0	Sur la première lettre, prêt à analyser
S1	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; direction la fin du mot
S2	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; direction la fin du mot
S3	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; sur la dernière lettre
S4	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; sur la dernière lettre
S5	Comparaison OK ; retour au début
Acc/Rej	Le mot est un palindrome/n'est pas un palindrome



Alphabet : {0,1}, # pour case vide

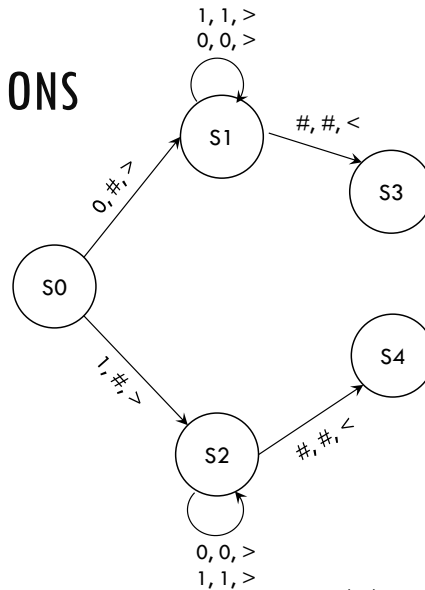
AMÉLIE RÉGNAULT - LI 27

A partir de S0, on sait qu'on va commencer l'analyse, et qu'on va mémoriser la première lettre. Donc en fonction de la lettre que nous allons lire, nous irons dans l'état S1, si c'est un 0, et dans l'état S2, si c'est un 1 (lecture). Nous savons également que nous ne voulons pas conserver cette première lettre, donc, on la remplace par un # (écriture). De plus, nous souhaitons, aller à la fin du mot, donc le déplacement de la tête de lecture se fera vers la droite. D'où, les deux transitions ajoutées au graphe.

## DÉTERMINER LES TRANSITIONS

Etat	Signification
S0	Sur la première lettre, prêt à analyser
S1	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; direction la fin du mot
S2	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; direction la fin du mot
S3	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; sur la dernière lettre
S4	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; sur la dernière lettre
S5	Comparaison OK ; retour au début
Acc/Rej	Le mot est un palindrome/n'est pas un palindrome

Alphabet : {0,1}, # pour case vide



AMÉLIE RÉGNAULT - L1 28

Nous savons aussi que nous resterons dans l'état S1 (respectivement S2), tant que nous ne serons pas à la fin du mot. Comment sait-on que l'on est à la fin du mot ? Une fois qu'on le sait, c'est assez simple. C'est quand on a dépassé le mot, et qu'on a trouvé un dièse. On sait alors que la case juste avant contient la dernière lettre du mot.

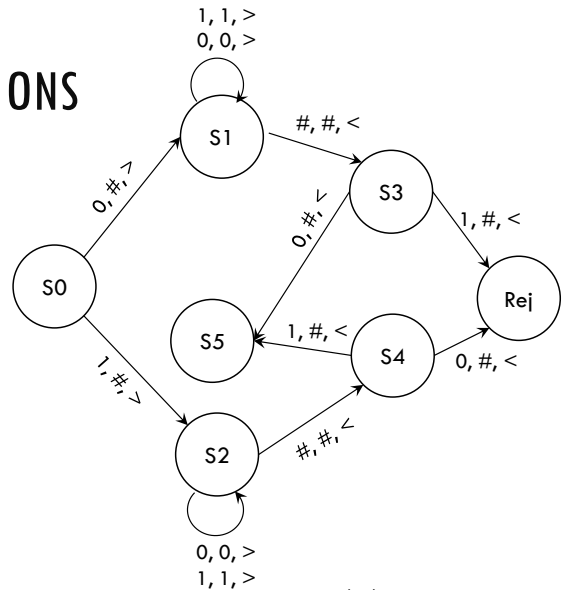
Donc, on va commencer par le cas, où on trouve ce fameux dièse (lecture). Cela signifie que la machine doit changer d'état et passer à l'état S3 (respectivement S4). La case vide doit rester une case vide (écriture), et on veut se positionner sur la dernière lettre du mot, donc on revient en arrière (déplacement vers la gauche).

Pour le parcours du mot, jusqu'à la fin, on reste bien évidemment dans l'état S1 (respectivement S2), et on lit la lettre du mot en la réécrivant telle quelle, puis on se déplace à droite.

## DÉTERMINER LES TRANSITIONS

Etat	Signification
S0	Sur la première lettre, prêt à analyser
S1	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; direction la fin du mot
S2	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; direction la fin du mot
S3	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; sur la dernière lettre
S4	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; sur la dernière lettre
S5	Comparaison OK ; retour au début
Acc/Rej	Le mot est un palindrome/n'est pas un palindrome

Alphabet : {0,1}, # pour case vide



AMÉLIE RÉGNAULT - L1 29

A partir des états S3 ou S4, on est sur la dernière lettre du mot et on doit faire la comparaison.

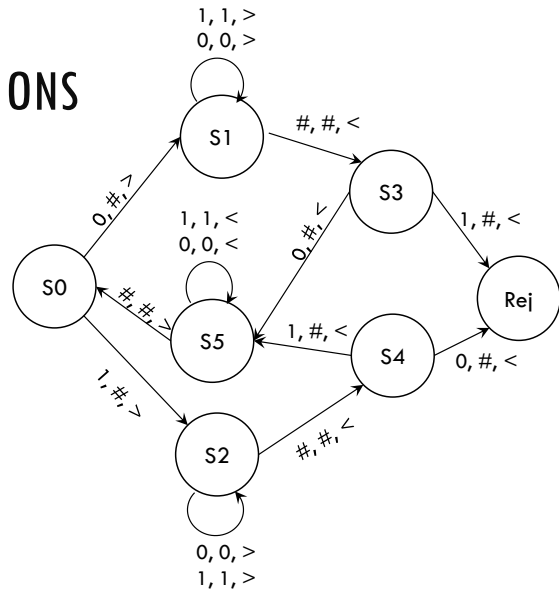
Quand, on est dans l'état S3 (resp. S4), on sait que la première lettre était un 0 (resp. 1), et donc si on lit un 0 (resp. 1), on a peut-être un palindrome et on peut continuer en S5, en supprimant la dernière lettre (écriture) et en se déplaçant vers la gauche (puisqu'on veut revenir au début du mot).

Si ce n'est pas la bonne lettre, on va dans l'état Rej, peu importe l'écriture et le déplacement, la réponse est que ce n'est pas un palindrome.

## DÉTERMINER LES TRANSITIONS

Etat	Signification
S0	Sur la première lettre, prêt à analyser
S1	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; direction la fin du mot
S2	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; direction la fin du mot
S3	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; sur la dernière lettre
S4	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; sur la dernière lettre
S5	Comparaison OK ; retour au début
Acc/Rej	Le mot est un palindrome/n'est pas un palindrome

Alphabet : {0,1}, # pour case vide



AMÉLIE RÉGNAULT - LI 30

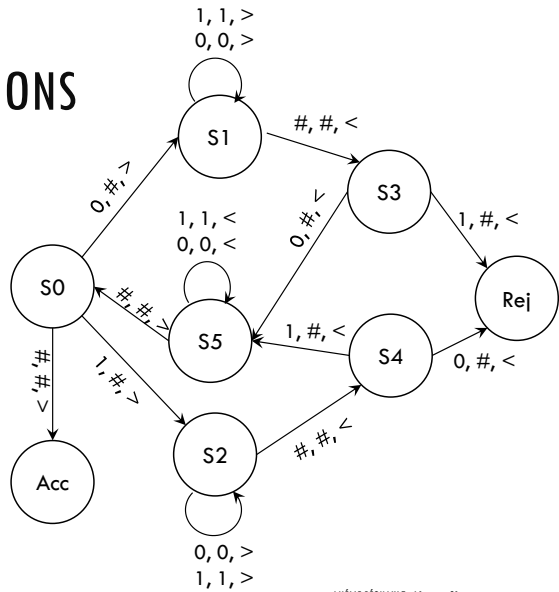
A partir de l'état S5, on a le même principe que lorsqu'on cherchait la fin du mot, sauf qu'ici, on cherche le début du mot.

Donc, on fait des déplacements vers la gauche, en gardant intact le ruban (transition cyclique sur S5), et quand on rencontre un dièse, on passe à l'état 0, et comme on veut se positionner sur la première lettre, on effectue un déplacement sur la droite.

## DÉTERMINER LES TRANSITIONS

Etat	Signification
S0	Sur la première lettre, prêt à analyser
S1	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; direction la fin du mot
S2	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; direction la fin du mot
S3	1 <sup>ère</sup> lettre = 0 ; sur la dernière lettre
S4	1 <sup>ère</sup> lettre = 1 ; sur la dernière lettre
S5	Comparaison OK ; retour au début
Acc/Rej	Le mot est un palindrome/n'est pas un palindrome

Alphabet :  $\{0,1\}$ , # pour case vide



AMÉLIE RÉGNAULT - LI 31

Reste à ajouter l'état acceptant. On sait que le mot est un palindrome quand on essaie d'analyser un mot vide. Comment savoir qu'un mot est vide sur le ruban ? Là aussi, c'est assez simple. A l'état 0, on sait qu'on n'est positionné sur la première lettre du mot. Si cette lettre n'existe pas (il y a un dièse), c'est que le mot est vide.

Donc, on peut ajouter une transition entre S0 et l'état acceptant quand on lit #. Là, aussi, comme pour l'état « Rejet », les instructions n'ont que peu d'importance, puisqu'on a le résultat et que l'automate va s'arrêter.

Voilà, la machine de Turing est complète. Encore une fois, je ne vous demande pas de savoir la refaire, mais plutôt de comprendre son principe, que la table de transition ne sort pas d'un chapeau magique, et qu'il y a une réflexion derrière. De la même manière, qu'un programme informatique ne se fait pas en un claquement de doigt, mais bien en réfléchissant comment articuler les différentes instructions.

Pour vous entraîner, vous pouvez essayer de transformer ce graphe d'états-transitions en une table de transitions.