

LA MACHINE DE TURING

Modèle abstrait inventé

en 1936

par Alan Turing

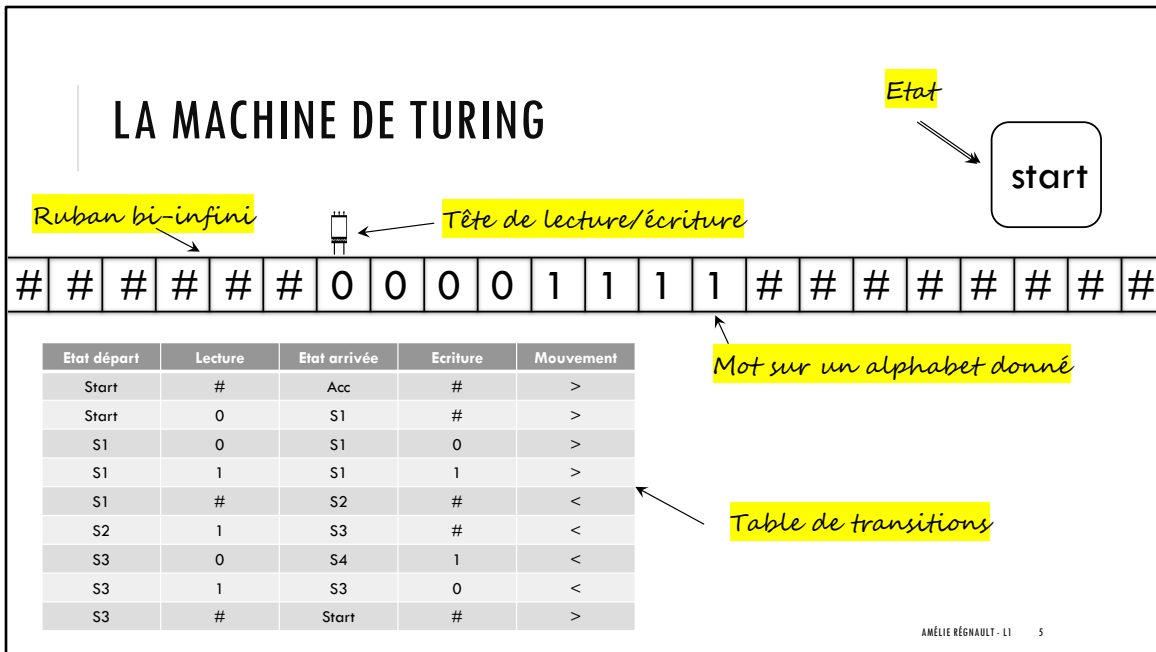


AMÉLIE RÉGNAULT - LI 3

La machine de Turing est un modèle de calcul abstrait inventé en 1936 par le célèbre Mathématicien Alan Turing. Ce modèle permet de décrire toutes sortes de calculs grâce à des règles très simples. En fait, bien que très simple, cette machine peut, en théorie, décrire bien plus que toutes sortes de calculs, elle permet de calculer tout problème qui est calculable. Alan Turing s'en est servi pour prouver qu'il existait des problèmes incalculables avec le problème de la halte, comme nous le verrons en cours.

Il est à noter, que cette machine est plus puissante que nos ordinateurs en terme de calculs. Si ce n'est pas calculable par une machine de Turing, aucun moyen d'obtenir un programme informatique, ce n'est même pas la peine d'essayer.

Voyons donc à quoi ressemble ce modèle, et comment on peut l'utiliser.



Voici comment on peut représenter une machine de Turing. On peut y voir tous les éléments constitutifs de cette machine.

A savoir, un ruban bi-infini, c'est-à-dire un ruban qui est infini à droite et à gauche, sur lequel on va pouvoir inscrire un mot. Ce mot contient les lettres d'un alphabet donné, comme pour les automates. Les dièses ont été choisies dans ce cours pour représenter une case vide du ruban.

Une machine de Turing a également une tête de lecture / écriture, qui va pouvoir se déplacer à droite ou à gauche sur le ruban. A chaque pas, elle peut lire la lettre située sous-elle, mais également écrire une autre lettre. Les mouvements et les écritures à effectuer par la tête de lecture/écriture sont donnés par la table de transitions, qui contient un ensemble de règles de transitions. Je reviendrais plus en détail sur cette table par la suite.

Le dernier élément est l'état de la machine. A tout moment, la machine se trouve dans un état qui peut indiquer une étape, l'action en train d'être accomplie. L'état de la machine dépend aussi de la table de transition.

LA TABLE DE TRANSITION

identification		instructions		
Etat départ	Lecture	Etat arrivée	Ecriture	Mouvement
Start	#	Acc	#	>
Start	0	S1	#	>
S1	0	S1	0	>
S1	1	S1	1	>
S1	#	S2	#	<
S2	1	S3	#	<
S3	0	S4	1	<
S3	1	S3	0	<
S3	#	Start	#	>

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 6

Chaque règle de transition est composée de 5 données.

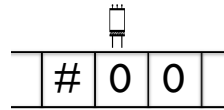
Les deux premières servent pour la sélection de la règle de transition par la machine.

On pourrait dire que c'est une sorte d'identifiant. Il ne peut donc pas y avoir deux lignes ayant ces deux mêmes données.

Les trois dernières données correspondent aux instructions à effectuer par la machine une fois la règle sélectionnée.

Voyons voir ces deux étapes en détail.

SÉLECTION D'UNE RÈGLE



S3

Etat départ	Lecture	Etat arrivée	Ecriture	Mouvement
Start	#	Acc	#	>
Start	0	S1	#	>
S1	0	S1	0	>
S1	1	S1	1	>
S1	#	S2	#	<
S2	1	S3	#	<
S3	0	S4	1	<
S3	1	S3	0	<
S3	#	Start	#	>

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 7

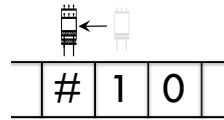
Pour sélectionner une règle, la machine de Turing va récupérer deux informations :

- l'état dans lequel elle se trouve (ici S3), et qui correspond dans notre table à la donnée « Etat de départ »,
- Puis de la lettre sous sa tête de lecture (ici, 0), et qui correspond à la donnée lecture.

Avec ces deux informations, on en déduit que la machine va sélectionner la septième règle, surlignée en orange dans notre exemple.

Voyons maintenant comment la machine va appliquer les instructions de cette règle.

APPLICATION D'UNE RÈGLE



S4

Etat départ	Lecture	Etat arrivée	Ecriture	Mouvement
Start	#	Acc	#	>
Start	0	S1	#	>
S1	0	S1	0	>
S1	1	S1	1	>
S1	#	S2	#	<
S2	1	S3	#	<
S3	0	S4	1	<
S3	1	S3	0	<
S3	#	Start	#	>

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 8

La machine va se servir des trois dernières données pour les appliquer à son état, à sa tête de lecture/écriture.

La première donnée d'instruction (et donc la troisième donnée de la règle) va indiquer le nouvel état de la machine de Turing (ici, S4). Comme pour les automates, l'état de la machine peut rester inchangé.

La deuxième donnée d'instruction va indiquer la lettre à inscrire sur le ruban, sous la tête de lecture/écriture. Ici, la machine va écrire un 1.

La troisième donnée correspond au déplacement de la tête de lecture/écriture. Ici, la tête de lecture/écriture va se déplacer vers la gauche. Les déplacements se font toujours d'une seule case.

Attention, à bien respecter l'ordre d'écriture et de déplacement. La machine écrit toujours sur le ruban avant de se déplacer. En faisant le contraire, on n'obtient pas du tout le même résultat.

EXÉCUTION DE LA MACHINE DE TURING

start



0 0 0 0 1 1 1 1 # # # # # #

Etat départ	Lecture	Etat arrivée	Ecriture	Mouvement
Start	#	Acc	#	>
Start	0	S1	#	>
S1	0	S1	0	>
S1	1	S1	1	>
S1	#	S2	#	<
S2	1	S3	#	<
S3	0	S4	1	<
S3	1	S3	0	<
S3	#	Start	#	>

A partir de la configuration initiale, on répète

- Sélection d'une règle
- Application de la règle

Jusqu'à l'état Halt, Acc ou Rej

AMÉLIE RÉGNAULT - LI 9

Pour s'exécuter, une machine de Turing va partir d'une configuration initiale, comme celle donnée en exemple, avec un ruban initial, un état initial et une table de transition.

Puis, à chaque pas d'exécution, elle va sélectionner une règle à partir de sa configuration actuelle, et appliquer la règle sélectionnée.

Elle s'arrêtera lorsqu'elle passera dans un état d'arrêt (Halt), d'acceptation (Acc) ou de rejet (Rej), ou si elle ne trouve aucune règle à appliquer. Dans ce dernier cas, on considère que la machine se termine dans un cas de rejet.

Le ruban final correspond au résultat de l'exécution de la machine de Turing.