

# **1. Introduction**

## 1.1. Communications sécurisées

- Confidentialité des données transmises : importance
  - Contexte personnel 
  - **Protection de la vie privée** : les données personnelles (médicales, bancaires, communications privées) doivent être gardées confidentielles pour protéger le droit des individus à la vie privée
  - **Protection contre le vol d'identité** : la confidentialité aide à empêcher l'accès non-autorisé au données personnelles, pour réduire les risques de vol d'identité et de fraude
  - **Sécurité personnelle** : elle peut être compromise si des informations sensibles (adresse personnelle, emploi du temps) tombent entre de mauvaises mains

## 1.1. Communications sécurisées

- Confidentialité des données transmises : importance
  - Contexte professionnel 
    - **Avantage compétitif** : stratégies d'entreprises et propriétés intellectuelles sont critiques pour les compagnies. Les dévoiler pourrait causer des pertes ou permettre leur exploitation par les concurrents
    - **Confiance des clients** : les entreprises qui traitent des données clients doivent maintenir leur confidentialité. Toute fuite serait dommageable pour la réputation et pourrait avoir des répercussions légales
    - **Obligation légale** : pour certaines industries
      - [https://fr.wikipedia.org/wiki/Règlement général sur la protection des données](https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8glement_g%C3%A9n%C3%A9ral_sur_la_protection_des_donn%C3%A9es)

## 1.1. Communications sécurisées

- Confidentialité des données transmises : importance
  - Contexte gouvernemental 
  - **Sécurité nationale** : la confidentialité des opérations gouvernementales, stratégies de défense et informations classées est vitale pour la sécurité nationale
  - **Relations diplomatiques** : une communication confidentielle entre les gouvernements garantie des négociations et une diplomatie sans interférence
  - **Enquêtes policières et judiciaires** : garder certaines informations confidentielles facilite les enquêtes menées et protège l'identité des informateurs et témoins

## 1.1. Communications sécurisées

- Risques associés aux communications
  - Interception 
  - **Écoute clandestine** : des individus ou entités non-autorisés peuvent intercepter les communications (e-mails, appels téléphoniques, messages) pour récolter des informations sensibles
  - **Fuite de données** : des pirates peuvent infiltrer des systèmes ou réseaux pour voler des données, en accédant à des informations confidentielles enregistrées
- Falsification 
- **Altération de données** : des agents malveillants peuvent modifier l'information durant sa transmission, générant des information fausses ou fallacieuses
- **Intégrité des données** : elle peut être attaquée, afin d'affecter le processus de prise de décision

## 1.1. Communications sécurisées

- Risques associés aux communications
  - Imitation 
    - **Spoofing** : falsifier l'identité d'un expéditeur ou d'un destinataire, pour accéder de manière non-autorisée à des informations ou un système
    - **Hameçonnage (phishing)** : faux e-mails ou faux sites web piégeant les individus en les poussant à divulguer des informations sensibles, comme leur identifiants et mots de passes
  - Déni de service 
    - **Attaques DDoS** (attaque par déni de service distribuée) : inonder un système ou un réseau avec un trafic excessif pour rendre des services disponibles aux utilisateurs légitimes
    - **Coupure de service** : toute action interrompant la disponibilité normale d'un service, empêchant l'accès aux informations et systèmes critiques

## 1.1. Communications sécurisées

- Risques associés aux communications
  - Menaces internes 
    - Menaces de cybersécurité qui proviennent d'**utilisateurs autorisés**, c'est-à-dire d'employés, de fournisseurs ou de partenaires commerciaux, qui abusent, intentionnellement ou non, de leur accès légitime, ou dont les comptes sont détournés par des cybercriminels
  - Menaces physiques 
    - **Le vol ou la perte de matériel** (portables, clés USB) contenant des informations sensibles peut conduire à des accès non-autorisés
    - **Surveillance physique** : l'observation directe des canaux de communication physique, contournant ainsi les mesures de sécurité numérique

- **Définition**

- Discipline de la cryptologie s'attachant à protéger les communications et les données en les convertissant dans un format illisible, sauf pour ceux possédant la clef de déchiffrement
- Cela implique donc des techniques pour écrire l'information de telle manière que seules les parties autorisées peuvent y accéder et la comprendre
- Notes :
  - La **cryptologie** englobe
    - Cryptographie, l'écriture secrète
      - Elle-même se subdivise en chiffrement et encodage (voir ci-après)
    - Cryptanalyse, l'analyse de cette dernière
  - La cryptographie se distingue de la **stéganographie** qui fait passer inaperçu un message dans un autre message

(p. ex. message caché dans une image, avec OutGuess)

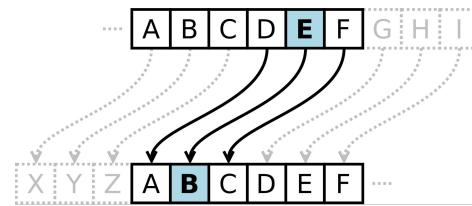
## 1.2. Bases de la cryptographie

- Rôles de la cryptographie, dont trois propriétés des données qu'elle vise à garantir
  - **Confidentialité** : encoder les données sorte que, même si elles sont interceptées, elles seront inintelligibles pour les utilisateurs non-autorisés
  - **Intégrité** : maintenir l'intégrité des données en détectant toute altération non-autorisée (voir fonctions de hachage et *checksums*)
  - **Authentification** : les signatures numériques et protocoles d'authentification utilisent des techniques cryptographiques pour garantir que les messages échangés proviennent de sources légitimes
  - **Non-réputation** : les signatures numériques permettent de s'assurer qu'un contrat ne peut être remis en cause par l'une des parties
  - **Transactions sécurisées** : e-commerce, banques en ligne
  - **Protection de la vie privée** : protéger les données et communications personnelles des accès non-autorisés

- Antiquité

- **Chiffrement par substitution monoalphabétique**

- Substituer dans un message chacune des lettres de l'alphabet par une autre
      - Chiffrement par décalage (César, ROT13), chiffre des Templiers



- **Chiffrement par transposition (ou permutation)**

- Changer l'ordre des lettres (anagrammes)
      - Scytale



## 1.3. Évolution des techniques

- Renaissance
  - **Chiffrement par substitution polyalphabétique** : pour une lettre donnée, son chiffrement ne sera pas toujours le même selon l'endroit du texte
    - **Chiffre d'Alberti** (1404 - 1472)
      - Les substitutions sont définies par le positionnement relatif de deux disques concentriques
      - Ce positionnement peut changer selon l'endroit du texte
        - « dans mon message, j'écrirai un D majuscule et, à partir de ce point, k ne signifiera plus B mais D »



- Renaissance

- **Chiffrement par substitution polyalphabétique**

- **Chiffre de Trithémius** (1462 - 1516)

- On chiffre la première lettre du message clair avec la première ligne, la deuxième lettre avec la deuxième ligne, etc.
      - Cela revient à une suite de décalages de César
        - La première lettre n'est pas décalée, la deuxième est décalée d'un cran dans l'alphabet, la troisième de deux crans, etc.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X

# 1.3. Évolution des techniques

- Renaissance

- Chiffrement par substitution polyalphabétique**

- Chiffre de Vigenère (1523 - 1596)**

- Introduit la notion de clé

Lettre en clair	
Lettre de la clé	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
A	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
B	B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A
C	C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B
D	D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C
E	E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D
F	F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E
G	G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F
H	H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G
I	I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H
J	J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I
K	K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J
L	L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K
M	M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L
N	N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M
O	O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N
P	P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O
Q	Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P
R	R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q
S	S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R
T	T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S
U	U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T
V	V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U
W	W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V
X	X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W
Y	Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X
Z	Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y

Texte en clair : j'adore écouter la radio toute la journée  
Clé répétée : M USIQU EMUSIQU EM USIQU EMUSI QU EMUSIQU  
^ ^ ^ ^

| ||Colonne 0, ligne I : on obtient la lettre W.  
| |Colonne D, ligne S : on obtient la lettre V.  
| Colonne A, ligne U : on obtient la lettre U.  
Colonne J, ligne M : on obtient la lettre V.

Texte chiffré : V'UVWHY IOIMBUL PM LSLYI XAOLM BU NAOJVUY  
Clé répétée : M USIQU EMUSIQU EM USIQU EMUSI QU EMUSIQU  
^ ^ ^ ^

| ||Ligne I, on cherche W : on trouve la colonne 0.  
| |Ligne S, on cherche V : on trouve la colonne D.  
| Ligne U, on cherche U : on trouve la colonne A.  
Ligne M, on cherche V : on trouve la colonne J.

## Arithmétique modulaire

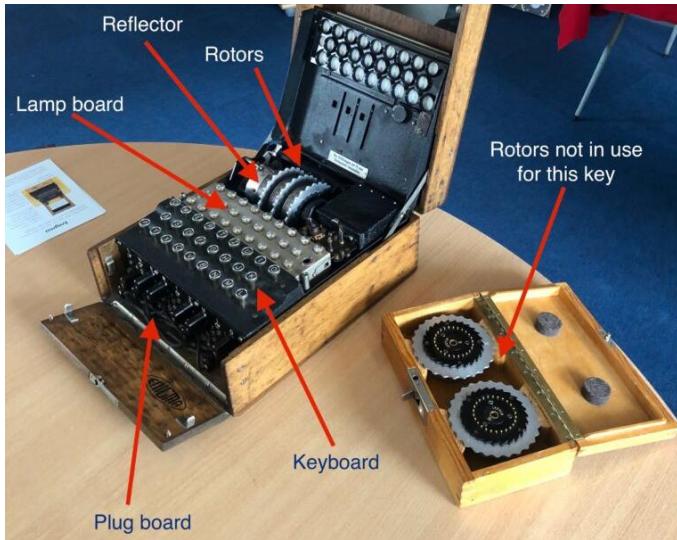
$$\text{Chiffré}[i] = (\text{Texte}[i] + \text{Clés}[i]) \bmod 26$$

$$\text{Texte}[i] = (\text{Chiffré}[i] - \text{Clés}[i]) \bmod 26$$

## 1.3. Évolution des techniques

- Seconde guerre mondiale
  - Enigma

- Famille de machines de chiffrement électromécaniques
- Version commerciale brevetée par Arthur Scherbius en 1918
- Plus tard, version militaire utilisée par l'armée allemande



Lorsqu'une touche du clavier est pressée :

- L'ampoule correspondant à la lettre chiffrée s'allume
- Le système de rotors tourne d'un cran
  - Presser la même lettre deux fois consécutives donnera deux lettres chiffrées différentes (chiffrement polyalphabétique)

### 1.3. Évolution des techniques

- Seconde guerre mondiale
  - Enigma : design et combinaisons
    - 3 rotors crantés, sur 3 emplacements (droite, milieu, gauche) à choisir parmi 5 rotors différents
      - $5 \times 4 \times 3 = 60$
    - Chaque rotors possède 26 crans
      - $26 \times 26 \times 26 = 17\,576$
    - Tableau de connexions avec 10 câbles : permet de définir des permutations pour 10 paires de lettres (version militaire seulement)
      - $$\frac{26!}{6! \times 10! \times 2^{10}} = 150\,738\,274\,937\,250$$
    - Total = 158 962 555 217 826 360 000 configurations possibles

## 1.3. Évolution des techniques

- Seconde guerre mondiale
  - Enigma : **fonction de chiffrement involutive** (*self-reciprocal cipher*)
    - Les processus de chiffrement et déchiffrement sont les mêmes
      - On déchiffre en tapant le message chiffré sur une machine Enigma avec la même configuration que celle ayant servi au chiffrement
    - Propriété garantie par l'utilisation d'un **réflecteur** à la suite du dernier rotor
    - Facilite l'utilisation
    - Mais empêche de substituer une lettre à elle-même dans le texte chiffré  
→ Vulnérabilité à une « attaque à texte clair connu »
      - Conception de la « bombe » par Alan Turing pour trouver la configuration d'Enigma utilisée, c.-à-d. trouver la clé
  - Note : les Alliés finir par capturer des exemplaires de ces machines...

## 1.3. Évolution des techniques

- Cryptologie moderne
  - **1940s - Avènement de l'informatique** : (classique → moderne) les ordinateurs révolutionnent la cryptographie, permettant des calculs plus rapides et des algorithmes plus complexes
  - **1970s - Développements mathématiques** : concepts comme la théorie des nombres, les structures algébriques et la théorie de la complexité
  - **1976 - Cryptographie asymétrique** : introduction généralement attribuée à Whitfield Diffie et à Martin Hellman
  - **1977 - Algorithme RSA** : développement par Rivest, Shamir et Adleman, aujourd'hui fondamental pour le chiffrement et les signatures numériques
  - **1980s - Fonctions de hachage cryptographiques** : leur émergence offre des moyens de vérifier l'authenticité et l'intégrité des données
  - **1990s - Cryptanalyse différentielle et linéaire** : développement de techniques capables de casser des algorithmes de chiffrement symétriques
  - **2001 - Advanced Encryption Standard (AES)** : adoption, en remplacement de Data Encryption Standard (DES), du fait de sa robustesse et de son efficience

- Informatique quantique et cryptographie post-quantique 

  - **Défis posés** : le développement des ordinateurs quantiques constitue une menace pour les méthodes de chiffrement actuelles, car ils pourraient résoudre, de manière efficiente, les problèmes mathématiques sur lesquels ces algorithmes reposent
    - RSA : décomposition en facteurs premiers
    - (EC)DH : problème du logarithme discret
  - **Solutions explorées** : développement d'algorithmes à résistance quantique basés sur des problèmes d'optimisation sur les réseaux euclidiens
    - Problème des vecteurs courts (SVP)
    - Problème de l'apprentissage avec erreur (LWE)

- Blockchain et crypto-monnaies 
  - **Défis posés** : résoudre les problèmes d'extensibilité (*scalability*), d'anonymat et de sécurité, sans compromettre la décentralisation
  - **Solutions explorées** : nouveaux mécanismes de consensus et techniques comme la ***zero-knowledge proof***
- Chiffrement homomorphe 
  - Algorithme permettant d'effectuer certaines opérations mathématiques sur des données chiffrées sans avoir à les déchiffrer d'abord
    - Permet de confier des calculs à un agent externe, sans que les données ni les résultats soient accessibles à cet agent
  - **Défis posés** : améliorer l'efficience
  - **Solutions explorées** : concernent principalement le *cloud computing*

- **Chiffrement** (*encryption*) : processus de conversion d'un message en clair,  $m$  (données intelligibles) en un message chiffré  $c$  (données inintelligibles), en utilisant un algorithme  $E$  et une clé  $k$ 
  - $E(k_e, m) = c$
  - Déterministe ou probabiliste
- **Déchiffrement** (*decryption*) : processus réciproque du chiffrement, transformant  $c$  en  $m$  en utilisant une clé appropriée
  - $D(k_d, c) = m$
  - ! Toujours déterministe
- **( $E, D$ )** : cryptosystème
- **Primitive cryptographique** : opération fondamentale cryptographique, de bas niveau et bien établi (*building blocks*), sur la base de laquelle est bâti tout système de sécurité informatique, algorithme ou protocole
  - Exemples : Chiffrement de flux, par bloc, fonction de hachage, MAC, PRNG, RSA, DH

- **Cryptanalyse** : ensemble des techniques d'analyse des systèmes cryptographiques, ayant pour but de trouver des vulnérabilités et d'être capable de déchiffrer sans connaître la clé. Le processus par lequel on tente de comprendre un message en particulier est appelé une **attaque**.
- **Adversaire** : entité cherchant à casser la sécurité d'un système cryptographique
  - Cryptanalyste : adversaire théorique (individu ou algorithme)
  - Attaquant : quelqu'un essayant activement d'exploiter des failles du système cryptographique
- **Alice et Bob** : pour les « personne A » et « personne B » qui cherchent à communiquer
  - D'autres noms sont utilisés, comme Eve (*eavesdropper*), Mallory (*malicious attacker*), Oscar (*opponent*) ou Trudy (*intruder*)

- **Chiffre (cipher) vs code** : le chiffrement d'un message s'opère au niveau des caractères de celui-ci, caractères individuels ou bien petits groupes de caractères.  
Un code, lui, encrypte un message par remplacement des mots ou des phrases. Il opère donc au niveau de la signification du message.
  - Un message peut être encodé avant chiffrement pour compliquer la cryptanalyse
  - **Nécessité d'un livre-code** ou d'une table de correspondance
  - Exemples :  
« Les sanglots longs des violons de l'automne... » = « Sabotez les voies ferroviaires ! »

6706	reichlich
13850	finanziell
12224	unterstützung
6929	und
14991	einverständnis

Extrait du décodage du télégramme diplomatique Zimmermann (1917)

- **Cryptographie symétrique** (ou à clé secrète) : la même clé est utilisée pour le chiffrement et le déchiffrement
  - Problématique de la distribution des clés, qui doit être sécurisée
    - Chiffrement par flot (ou de flux, ou continu) : opère sur un flux continu de données (*i.e.* pas de découpage). Exemples : A5/1, RC4
    - Chiffrement par bloc : opère sur des données découpées en blocs de taille généralement fixe. Exemples : DES, AES
    - Code d'authentification de message (MAC) : code accompagnant des données dans le but d'assurer l'intégrité de ces dernières

- **Cryptographie asymétrique** (ou à clé publique) : système cryptographique utilisant des paires de clés, une publique pour le chiffrement, une privée pour le déchiffrement
  - Chiffrement asymétrique (RSA, DH, ...)
  - Schéma de signature numérique : mécanisme permettant d'authentifier l'auteur d'un document électronique et d'en garantir la non-répudiation
- **Cryptographie hybride** : combine
  - un chiffrement asymétrique (plus sécurisé) pour l'échange d'une clé symétrique,
  - et un chiffrement symétrique (plus rapide) pour les données transmises.
  - souvent couplées avec un mécanisme d'authentification  
(p. ex. TLS, *Transport Layer Security*)



## **2. Chiffrements symétriques**

- **Chiffre de Vernam** (1917) : XOR entre une clé secrète  $k$  et le message clair  $m$  pour produire le chiffré  $c$

$$m \oplus k = c$$

Chiffrement

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ m \\ \oplus \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ k \\ \hline =\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ c \end{array}$$

Déchiffrement

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ c \\ \oplus \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ k \\ \hline =\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ m \end{array}$$

On peut également retrouver  $k$  à partir de  $m$  et  $c$  :  $m \oplus c = k$

## 2.1. Masque jetable

- **Vulnérabilité** : utiliser deux fois la même clé  $k$  pour deux messages clairs  $m_1$  et  $m_2$  permet, à quelqu'un qui aurait intercepté  $m_2$ ,  $c_1$  et  $c_2$ , de déchiffrer  $m_1$  sans la clé  $k$

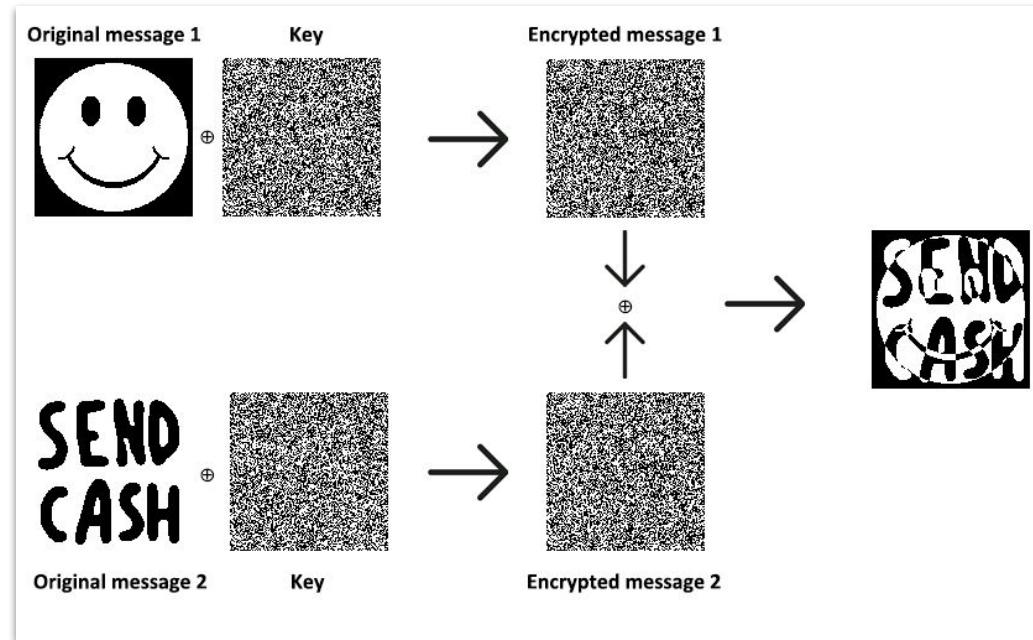
$$m_1 \oplus k = c_1$$

$$m_2 \oplus k = c_2$$

$$m_1 \oplus c_1 = m_2 \oplus c_2$$

$$m_1 = (m_2 \oplus c_2) \oplus c_1$$

Ci-contre : par commutativité, on a aussi  $m_1 \oplus m_2 = c_1 \oplus c_2$   
Cela crée une vulnérabilité en interceptant uniquement  $c_1$  et  $c_2$  (analyse fréquentielle, analyse par *crib*)



- La sécurité du chiffrement repose donc sur une **utilisation unique de la clé** (ou masque) → Masque jetable ou ***one-time pad (OTP)***
- La fonction **XOR** nécessite que la clé soit de la **même longueur que le message**  
Très peu pratique (→ chiffréments de flux), surtout si la clé doit être gardée secrète

- Si la clé secrète  $k$  (à usage unique et de même longueur que  $m$ ) **est parfaitement aléatoire**, alors OTP permet un « secret parfait » (*perfect secrecy*), concept introduit par Claude Shannon (1949)  
**OTP est le seul algorithme offrant une sécurité parfaite**

**Aucune information\*** sur le message clair  $m$  ou la clé  $k$  ne peut être extraite\*\* du chiffré  $c$ , même en disposant d'une puissance de calcul illimitée  
→ OTP résiste aux attaques par force brute avec un ordinateur quantique

- Clé parfaitement aléatoire : à chaque position de la séquence, les valeurs 0 et 1 sont équiprobables  
→ Distribution uniforme (discrète) :  $k \sim U(0^l, 1^l)$ , où  $l$  est la longueur de la clé

\*Information telle que définie par Claude Shannon

\*\*La longueur de  $m$  est cependant connue et égale à celle de  $c$

- Exemple pour  $k \in K = \{0, 1\}^3$

$$\begin{array}{rclcl} \oplus & 111 & c & \oplus & 111 & c \\ & \frac{000}{111} & k_1 & = & \frac{001}{110} & k_2 \\ = & 111 & m_1 & = & 110 & m_2 \\ & \oplus & 111 & c & \oplus & 111 & c \\ & \frac{011}{100} & k_3 & = & \frac{101}{000} & k_4 \\ = & 111 & m_3 & = & 000 & m_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \oplus & 111 & c & \oplus & 111 & c \\ & \frac{110}{001} & k_5 & = & \frac{100}{011} & k_6 \\ = & 111 & m_5 & = & 011 & m_6 \\ & \oplus & 111 & c & \oplus & 111 & c \\ & \frac{101}{010} & k_7 & = & \frac{010}{101} & k_8 \\ = & 111 & m_7 & = & 101 & m_8 \end{array}$$

Avec une clé  $k$  **inconnue de l'adversaire** et générée de manière parfaitement aléatoire, le message chiffré  $c$  « 111 » pourrait résulter du chiffrement de tous les messages clairs possibles ( $m_1$  à  $m_8$ ) de façon équiprobable (1 chance sur 8).

Propriété : un **XOR** entre n'importe quelle séquence et une séquence aléatoire produit une séquence également aléatoire.

## 2.1. Masque jetable

$$\Pr[E(k, m_0) = c] = \Pr[k \oplus m_0 = c] \quad (1)$$

$$= \frac{|k \in \{0, 1\}^m : k \oplus m_0 = c|}{\{0, 1\}^m} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2^m} \quad (3)$$

$$\Pr[E(k, m_1) = c] = \Pr[k \oplus m_1 = c] \quad (4)$$

$$= \frac{|k \in \{0, 1\}^m : k \oplus m_1 = c|}{\{0, 1\}^m} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2^m} \quad (6)$$

donc

$$\boxed{\Pr[E(k, m_0) = c] = \Pr[E(k, m_1) = c] \quad \forall m_0, m_1 \in M, \text{ avec } |m_0| = |m_1| \\ \forall c \in C}$$

avec  $M = K = \{0, 1\}^m$

- **Convention d'écriture**
  - $M$  : espace des messages en clair
    - $M = \{0, 1\}^l$
    - $|M| = 2^l$
  - $C$  : espace des messages chiffrés
  - $K$  : espace des clés
- La sécurité parfaite d'OTP requiert que  $|K| \geq |M|$

- **Contenu en information** (ou auto-information)

- Défini par Claude Shannon, 1948

Soit une variable discrète  $X$  qui prend une valeur  $x$

(p. ex. la valeur donnée à une position sur une séquence numérique)

Le contenu en information  $I_X(x)$  de cet évènement est :

$$I_X(x) := -\log [p_X(x)] = \log \left( \frac{1}{p_X(x)} \right)$$

avec  $p_X(x) \neq 0$  et  $I_X(x) \in [0, +\infty]$

En utilisant un logarithme de base 2, l'unité de  $I_X(x)$  est le shannon (Sh) ou bit ;  
le hartley (Hart) pour la base 10 ; le *natural unit of information* (nat) pour la base  $e$

- **Entropie de Shannon**

- Elle correspond au contenu en information moyen   sur toutes les positions de la séquence. Elle s'écrit  $H(X)$ .

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_x -p_X(x) \log p_X(x) \\ &= \sum_x p_X(x) I_X(x) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} E[I_X(X)], \end{aligned}$$

avec  $H(X) \in [0, +\infty]$

- Pour une séquence de longueur donnée, **l'entropie de Shannon est maximum** si les différentes valeurs possibles à chaque position sont equiprobables, c.-  -d. si la séquence est parfaitement aléatoire (loi uniforme ; **maximum d'incertitude**)  
Note : maximum mais pas  $\infty$ , car séquence de longueur finie

- **Entropie de Shannon**

- Exemple : entropie de la séquence de valeurs décimales « 31100427 »

$$p(0) = 2/8 = 0,25$$

$$p(1) = 2/8 = 0,25$$

$$p(2) = 1/8 = 0,125$$

$$p(3) = 1/8 = 0,125$$

$$p(4) = 1/8 = 0,125$$

$$p(5) = 0/8 = 0$$

$$p(6) = 0/8 = 0$$

$$p(7) = 1/8 = 0,125$$

$$p(8) = 0/8 = 0$$

$$p(9) = 0/8 = 0$$

$$\begin{aligned} H(X) &= \\ -0,25 \log_2(0,25) &+ \\ -0,25 \log_2(0,25) &+ \\ -0,125 \log_2(0,125) &+ \\ -0,125 \log_2(0,125) &+ \\ -0,125 \log_2(0,125) &+ \\ -0,125 \log_2(0,125) &+ \\ = 2,125 \text{ bits} \end{aligned}$$

## • Entropie conditionnelle

- Pour deux séquences  $X$  et  $Y$  :

$$H(Y|X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

- $H(Y|X) \leq H(Y)$

$H(Y|X) = H(Y) \Leftrightarrow Y$  et  $X$  indépendantes

- Pour un message  $M$  et son chiffré  $C$ , on définit ainsi :

- Sécurité parfaite :  $H(M|C) = H(M)$

- Connaître  $C$  n'apporte aucune information sur  $M$  (sauf sa longueur)
- La probabilité qu'un adversaire\* casse le chiffrement est nulle

- Sécurité inconditionnelle :  $H(M|C) \leq H(M)$

- La probabilité qu'un adversaire\* casse le chiffrement est négligeable

\* disposant d'une puissance de calcul illimitée

- OTP requiert une clé parfaitement aléatoire
  - Peut être obtenue grâce à un générateur de nombres aléatoires physique  
**True random number generator (TRNG)**  
Basé sur la variation aléatoire de propriétés physiques : p. ex. *timestamp*



Le mur de lampes à lave de Cloudflare

Sur les microprocesseurs de la famille x86 : instruction **RDSEED**

- **Limitation** : produisent un nombre limité de bits aléatoires par seconde

## • Générateur de nombres pseudo-aléatoires

*Pseudorandom number generator, PRNG*

Algorithme qui génère une séquence de nombres qui apparaît aléatoire, mais qui est déterminée par une valeur initiale appelée « graine » (seed)

⚠ Sortie **déterministe** → **même graine = même sortie**

- Exemple : **générateur congruentiel linéaire**

$$X_{n+1} = (a \cdot X_n + c) \bmod m,$$

où  $X_n$  est le nombre pseudo-aléatoire courant,  
et  $a$ ,  $c$  et  $m$  sont des constantes,  $m > 0$

(voir le théorème de Hull-Dobell pour les valeurs qui maximisent la période)

Sans nécessairement être aléatoire, la graine doit être choisie de sorte à ne pas être prédite

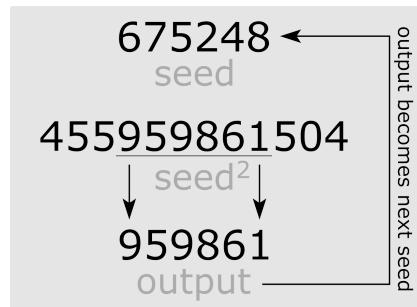
La valeur de  $X_0$  est celle de la graine, à partir de laquelle la formule se répète de façon récurrente, pour générer une séquence de nombres.

P. ex., pour le **générateur d'UNIX**,  $a = 1103515245$ ,  $c = 12345$  et  $m = 2^{31}$

**Limitation** : un mauvais choix des constantes peut générer une suite périodique

- **Générateur de nombres pseudo-aléatoires**

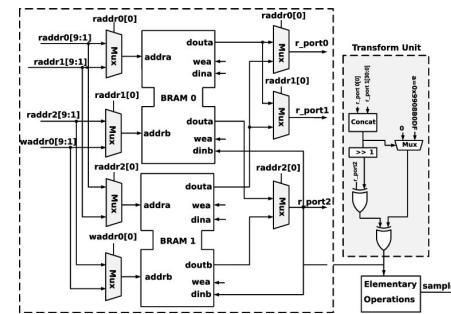
- 💀 Une périodicité dans la clé pseudo-aléatoire compromet la sécurité, de la même manière qu'une réutilisation de la même clef
- Autres exemples :



### Méthode du carré médian

Pour une graine de  $2n$  chiffres, la période maximum est de  $10^n$  (un peu plus, si nombre impair de chiffres)

John von Neumann, 1949



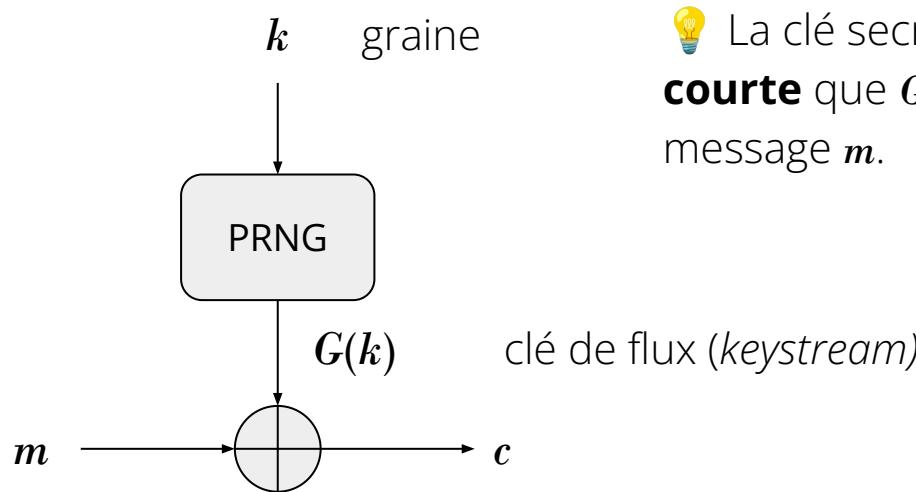
### Mersenne Twister (MT19937)

Sa période maximum est de  $2^{19937} - 1$ . Mais insuffisant pour la cryptographie, car il existe des algorithmes qui permettent d'en prédire le comportement.



`import random`

- Architecture générale



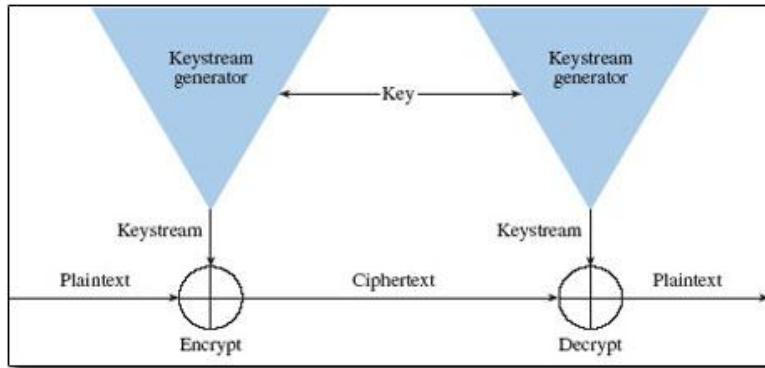
$$E(k, m) = m \oplus G(k)$$

$$D(k, c) = c \oplus G(k)$$

**💡** La clé secrète échangée est  $k$ . Elle est **beaucoup plus courte** que  $G(k)$  qui est de la même longueur que le message  $m$ .

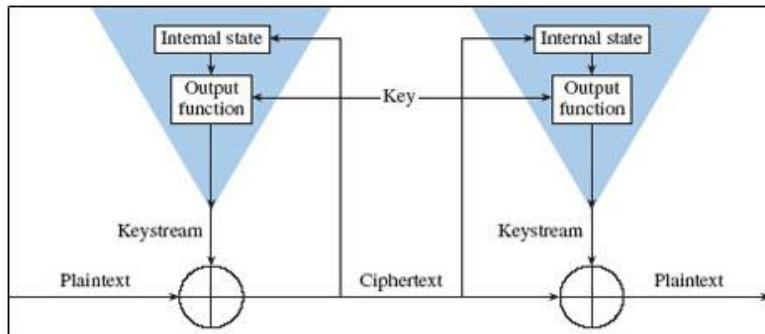
On peut donc considérer un chiffrement continu comme un **XOR** combiné à un PRNG. Ce dernier doit impérativement être **sécurisé pour la cryptographie**.

- Deux catégories



### Synchrone

Calcule le flux de clé en fonction de la clé secrète  $k$ , mais indépendamment du texte clair  $m$  et du chiffré  $c$ .



### Asynchrone (ou *self-synchronizing*)

Calcule chaque bit du flux de clé comme une fonction de  $k$  et des  $n$  précédents bits de  $c$ . Avantage : le récepteur se synchronise avec le générateur après réception de  $n$  bits de  $c$ , ce qui facilite la correction d'erreurs. Désavantage : 1 bit d'erreur à la transmission entraînera  $n$  bits d'erreurs pour le récepteur (propagation d'erreur).

- **Générateur de nombres pseudo-aléatoires sécurisé**

*Cryptographically secure PRNG (CSPRNG)*

- **RC4 (Rivest Cipher 4)**, 1987

- Utilisé depuis les premières versions des protocoles SSL/TLS, WEP, WPA
    - Génération d'un **flux d'octets** pseudo-aléatoires par modifications itératives (permutations) de l'état interne (vecteur de 256 octets), dépendantes de la clé secrète
    - ! Beaucoup de vulnérabilités, dont corrélations entre graine et flux

- **Salsa20** et **ChaCha**, 2008

- Protocoles TLS, IPsec, SSH et OpenVPN

- **Trivium**, A5/2 (2G), E0 (Bluetooth)

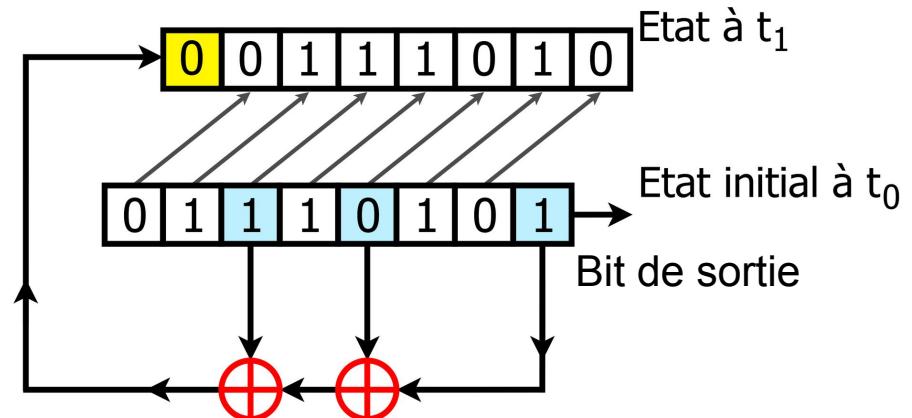
- Basés sur des **registres à décalage à rétroaction linéaire (LFSR)**...

- **Registre à décalage à rétroaction linéaire**

*Linear feedback shift register (LFSR)*

- Registre à décalage de type SIPO (*Serial In - Parallel Out*) dans lequel un ou plusieurs « étages » du registre subissent une transformation pour être réinjectés en entrée de celui-ci

- Il est dit de longueur  $r$  lorsqu'il est composé de  $r$  éléments, appelés « étages » ou « cellules », le contenu de l'ensemble de ces éléments à un instant  $t$  est **l'état du LFSR** à ce moment.



- À chaque top d'horloge, le contenu d'un étage est transféré au suivant et le premier est rempli (**bit de rétroaction**) par le résultat d'une **fonction linéaire** qui prend en compte **l'état d'un ou de plusieurs étages**.

- **Registre à décalage à rétroaction linéaire**

*Linear feedback shift register* (LFSR)

- Seulement utilisé comme **élément** de chiffrement de flux, car rétro-ingénierie à partir de la sortie
  - Combinaisons non-linéaires de LFSRs (p. ex. dans le chiffrement **Grain**)
- Convient peu à une implémentation logicielle (beaucoup de boucles)  
→ Très efficace en **implémentation matérielle**
- *maximum length sequence* (MLS) : suite périodique qui explore toutes les valeurs pouvant être produites par un LFSR.  
S'il comporte  $r$  bascules (*flip-flops*),  $2^r - 1$  valeurs sont parcourues, l'état « tout à zéro » étant exclu, car il ne génère jamais de changement

- **Preuve de sécurité**

Démonstration qu'un schéma cryptographique respecte des propriétés de sécurités spécifiques, comme la confidentialité, l'intégrité et l'authenticité.

Il existe différents types de preuves cryptographiques, dont :

- Théorie de l'information
- Argument hybride 
- Preuve par jeu
- Réduction polynomiale
- *Zero knowledge proof*

## • Indistinguabilité calculatoire

- Deux distributions de probabilités sont calculatoirement indistinguables, s'il n'existe pas d'algorithme **efficace** qui puisse les discerner de manière **significative**.
  - $A$  : algorithme probabiliste terminant en temps polynomial (proportionnel à la longueur de la séquence en entrée  $x$ )
    - Aussi appelé distinguiseur (*distinguisher*) ou test statistique
    - $A(x) = 1$  : la sortie (booléen) de  $A$  vaut 1 (ou **Vrai**), s'il détecte que l'entrée  $x$  a été échantillonnée à partir d'**une distribution plutôt que l'autre**
  - Deux distributions  $D_n$  et  $E_n$  sont calculatoirement indistinguables si l'**avantage**  $\delta(n)$  de l'adversaire est négligeable en fonction du « paramètre de sécurité »  $n$  :

$$\delta(n) = \left| \Pr_{x \leftarrow D_n} [A(x) = 1] - \Pr_{x \leftarrow E_n} [A(x) = 1] \right|$$

- Si la distribution est générée par un PRNG,  $n$  sera la longueur de la graine ; Dans RSA,  $n$  sera la valeur du module

## • Indistinguabilité calculatoire

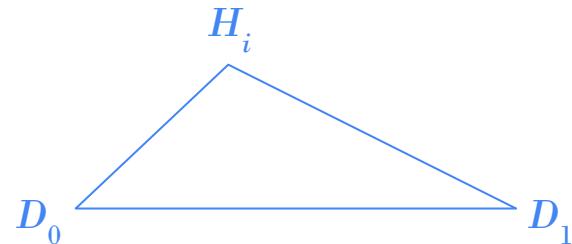
-  La question posée par le calcul de l'avantage est : est-ce que  $A$  se comporte différemment selon qu'on lui donne une entrée échantillonnée à partir de  $D_n$  ou bien de  $E_n$ ? Si oui, cette différence est-elle négligeable (notation :  $D_n \approx E_n$ ), c.-à-d. est que  $\delta(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  ?
- **Fonction négligeable** : une fonction  $f(n)$  est considérée comme négligeable si,  $\forall$  polynôme positif  $\text{poly}(n)$ ,  $\exists$  une valeur suffisamment grande de  $n$  tq  $f(n) < \frac{1}{\text{poly}(n)}$  c.-à-d. si  $f(n) \rightarrow 0$  plus vite que l'inverse de n'importe quel polynôme
- Indistinguabilité calculatoire est donc une relaxation de l'indistinguabilité statistique prenant en compte le fait que la puissance de calcul des algorithmes est limitée (notions de complexité)

- **Argument hybride**

Pour montrer l'indistinguabilité calculatoire de deux distributions  $D_0$  et  $D_1$ , on définit une séquence de distributions hybrides tq  $D_0 := H_0, H_1, \dots, H_n =: D_1$  qui permet de transformer graduellement la distribution  $D_0$  en la distribution  $D_1$ . L'adversaire  $\mathcal{A}$  ne pourra lire que les  $n$  premières hybrides (entier au plus polynomial).

Si  $H_i \approx H_{i+1}, \forall 0 \leq i < n$ , alors  $D_0 \approx D_1$

[Note](#) : conséquence de l'inégalité triangulaire



Dans un preuve de sécurité d'un chiffrement par flot,  $D_0$  serait la sortie du PRNG et  $D_1$  une séquence binaire parfaitement aléatoire.

- **Argument hybride**

La manière de définir les hybrides dépendra du PRNG dont on souhaite prouver la sécurité cryptographique.

À titre d'exemple, pour un générateur et sa graine  $G(k)$  :

- $H_0 : G(k)$
- $H_1 : G(k) \parallel G(G(k))$
- $H_2 : G(k) \parallel G(G(k)) \parallel G(G(G(k)))$
- ...
- $H_n : G(k) \parallel G(G(k)) \parallel \dots \parallel G^{(n)}(k)$
- $H_{n+1} : U \parallel U \parallel \dots \parallel U$

avec  $U$  représentant une séquence parfaitement aléatoire (uniforme)

- **Exemple** : soit  $G : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^l$  un PRNG sécurisé (avec  $l = f(n)$ , fonction polynomiale) ; soit un hybride  $G'(k) = G(k) \| G(k)$  et soit la distribution uniforme  $U(0^{2l}, 1^{2l})$   
Question : la sortie de  $G'(k)$  est-elle calculatoirement indistinguabile de  $U$  ?

Réponse : On peut définir un distingueur  $A$ , qui détecte que la séquence  $x \leftarrow G'(k)$  (et renvoie donc Vrai), en deux étapes :

1. Coupe  $x$  en 2 segments de même longueur tq  $x_1 \| x_2 = x$
2.  $A(x) = \text{Vrai}$  si  $x_1 = x_2$

Calcul de l'avantage de  $A$  :

$$\delta(n) = |P_{x \leftarrow G'(k)}[A(x) = \text{Vrai}] - P_{x \leftarrow U}[A(x) = \text{Vrai}]|$$

Par la définition même de  $A$ , on a :  $P_{x \leftarrow G'(k)}[A(x) = \text{Vrai}] = 1$

$$P_{x \leftarrow U}[A(x) = \text{Vrai}] = ?$$

- **Intuition** avec les plus petites valeurs possibles : 2 bits

Un générateur aléatoire peut générer  $x \in \{00, 01, 10, 11\}$

Mais  $G'(k)$  ne peut générer que  $x \in \{00, 11\}$

$$\mathbf{P}_{x \leftarrow U} [ A(x) = \text{Vrai} ] = 2/4 = \frac{1}{2}$$

$$\delta(n) = | \mathbf{P}_{x \leftarrow G'(k)} [ A(x) = \text{Vrai} ] - \mathbf{P}_{x \leftarrow U} [ A(x) = \text{Vrai} ] | = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

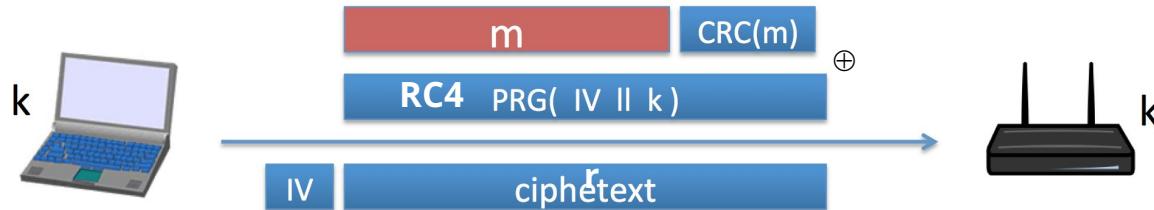
- Pour toute longueur  $l$  de  $x$

$$\mathbf{P}_{x \leftarrow U} [ A(x) = \text{Vrai} ] = 2^l / 2^{2l} = 2^{-l}$$

$$\delta(n) = | 1 - 2^{-l} | = | 1 - 2^{-f(n)} | > \frac{1}{\text{poly}(n)} \quad \text{non-négligeable ; } G'(k) \text{ n'est pas sécurisé}$$

- **Limitations**

- **802.11b WEP:**



La même clé  $k$  était réutilisée ; seul le IV changeait à chaque message, mais était trop court (24 bits) → Utiliser WPA2 ou WPA3 pour sécurisé les réseaux WiFi

- **Chiffrement de disque :**

- Des erreurs dans le chiffré peuvent empêcher le déchiffrement
    - Beaucoup de données : la périodicité de la clé de flux ou sa réutilisation cause l'apparition de motifs répétés dans le chiffré, détectables en cryptanalyse
      - ↳ Utiliser un **chiffrement par bloc**

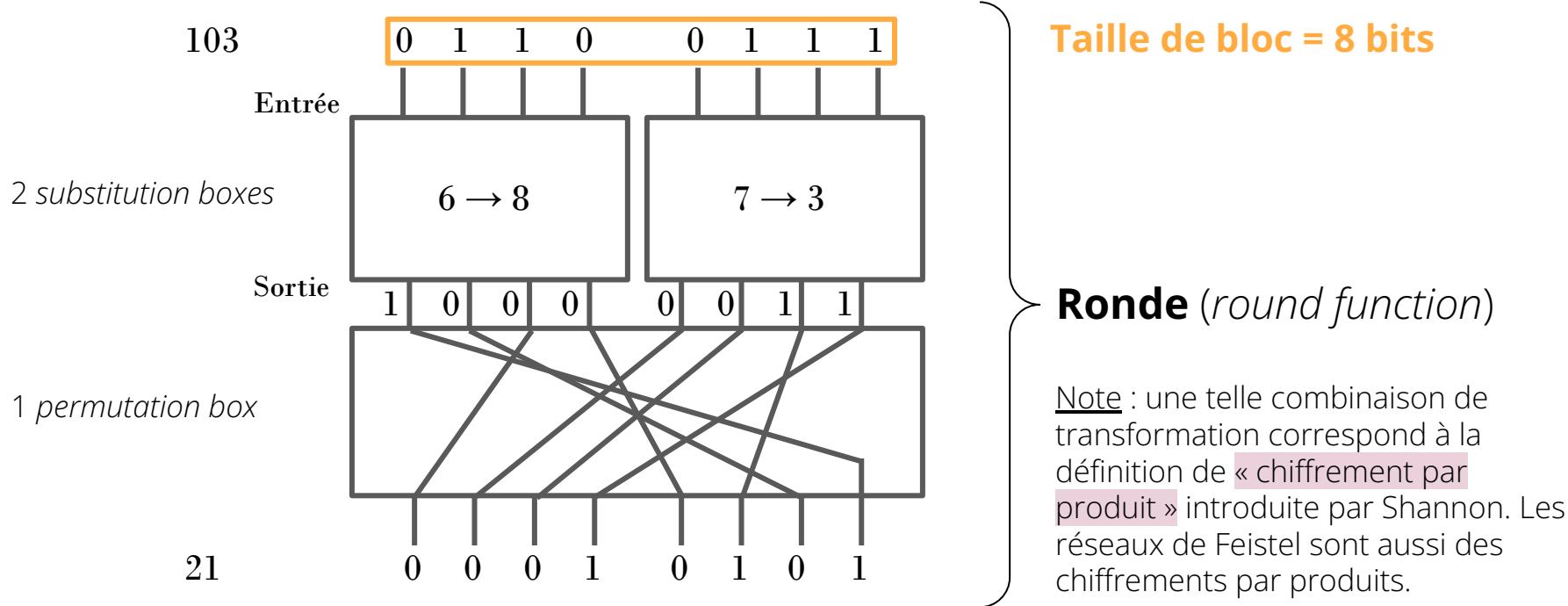
- **Chiffrement par bloc**

Un chiffrement par bloc découpe le message clair  $m$  en blocs d'une certaine taille (p. ex. 128 bits) et produit en sortie le message chiffré  $c$ , constitué d'autant de blocs chiffrés, chacun de cette même taille.

 Dans un chiffrement continu, le caractère  $c[i]$  résulte du chiffrement du caractère  $m[i]$ . Cela équivaut à une **taille de bloc de 1**.

- **Réseau de substitution-permutation (SP)**

- Structure pour construire des chiffrements par bloc (Shannon, 1949)



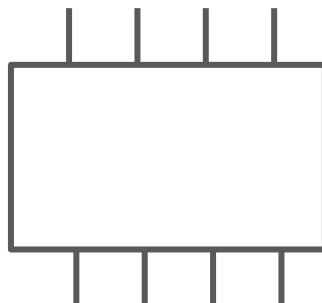
- Réseau de substitution-permutation (SP)

- **S-Box (substitution box)**

Comme leur nom l'indique, elles sont utilisées pour effectuer des opérations de substitutions au sein de chaque bloc durant le processus de chiffrement.

Elles sont implémentées comme des **tables de correspondances** (*Lookup Table*, LUT) dans lesquelles sont définies les règles de substitutions.

Ces tables peuvent être fixes ou bien générées dynamiquement à partir de la clé.



**Illustration d'une S-Box** : 4 bits en entrée et sortie.

La table de substitution comporte donc  $2^4 = 16$  règles, pour des valeurs décimales de 0 à 15 :  $0 \rightarrow 6 ; 1 \rightarrow 13 ; 2 \rightarrow 1 ; \dots$

La taille des S-Boxes AES est de 8 bits.

Dans DES, elle est de **6 bits en entrée, 4 bits en sortie**.

Note : les substitutions réciproques doivent être évitées.

- Réseau de substitution-permutation (SP)

- **S-Box (*substitution box*)**

Exemple d'une S-Box  $3 \times 3$  **non-linéaire** :

Entrée	000	001	010	011	100	101	110	111
Sortie	011	101	111	100	000	010	001	110

Table de correspondance souvent simplifiée sur 2 dimensions :

	00	01	10	11
0	011	101	111	100
1	000	010	001	110

- Réseau de substitution-permutation (SP)

- S-Box (*substitution box*)

Exemple d'une S-Box  $3 \times 3$  linéaire :

	00	01	10	11
0	000	011	111	100
1	110	101	001	010

Équations linéaires :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= x_1 \oplus x_2 & = 1 \cdot x_1 \oplus 1 \cdot x_2 \oplus 0 \cdot x_3 \\
 c_2 &= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 & = 1 \cdot x_1 \oplus 1 \cdot x_2 \oplus 1 \cdot x_3 \\
 c_3 &= x_2 \oplus x_3 & = 0 \cdot x_1 \oplus 1 \cdot x_2 \oplus 1 \cdot x_3
 \end{aligned}$$

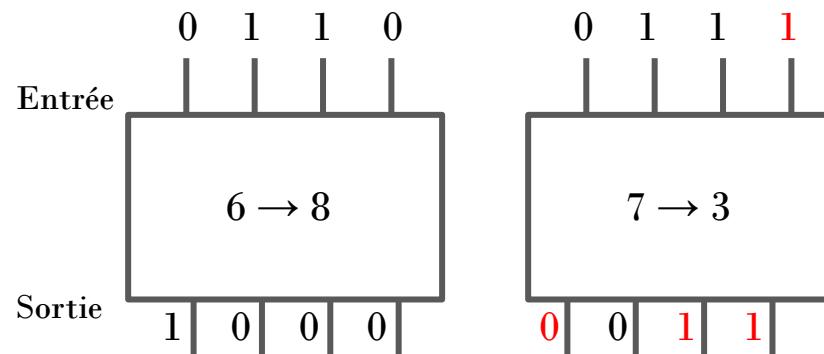
- Réseau de substitution-permutation (SP)

- **S-Box (substitution box)**

En pratique, les S-boxes sont des fonctions booléennes vectorielles **non-linéaires**.

Cette **non-linéarité** des S-boxes introduit ce que Shannon définit comme de la « **confusion** » dans la relation entre le chiffré et la clé secrète : pour un attaquant essayant de trouver la clé, le calcul réciproque à partir du chiffré est rendu difficile.

Une S-box est également source de « **diffusion** » : si l'on change un seul bit du texte clair (entrée), alors une grande partie du texte chiffré (sortie) change.



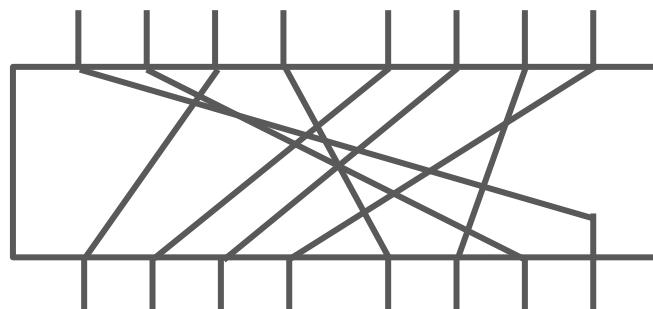
- **Réseau de substitution-permutation (SP)**

 Pour une bonne diffusion, il faudrait une grande S-box (p. ex. 128 bits). Mais cela serait beaucoup trop coûteux à implémenter. Ainsi, les S-box utilisées sont courtes et n'apportent quasiment pas de diffusion, que de la confusion.

- **P-Box (permutation box)**

Utilisées pour permuter (réarranger) les bits des données d'entrée, de manière systématique, selon un motif prédéfini. Mathématiquement, les opérations des P-boxes sont **linéaires**.

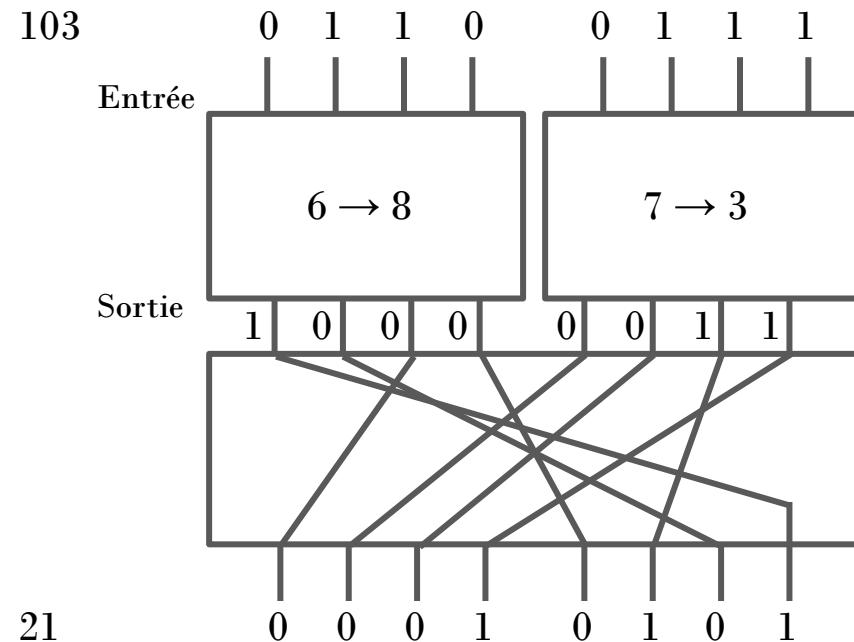
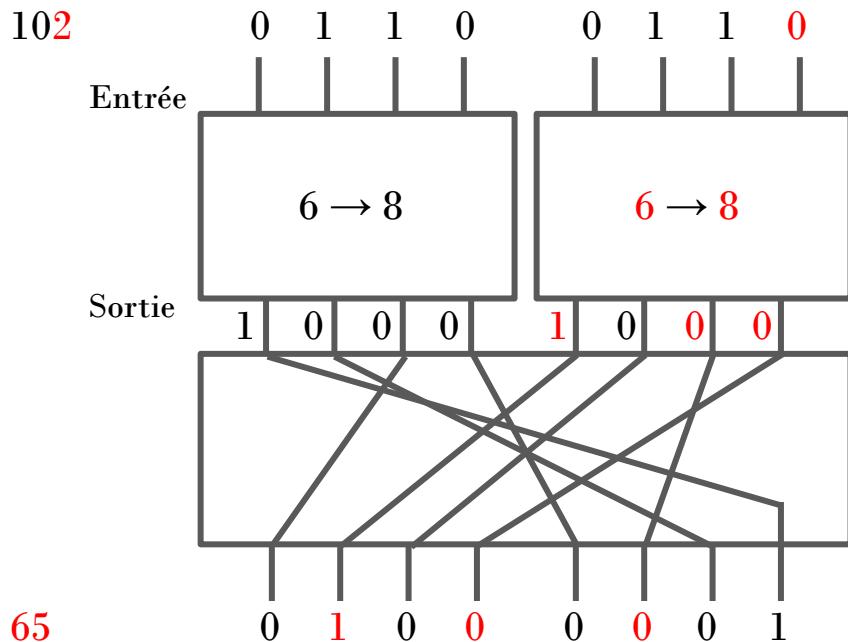
C'est la combinaison d'une P-Box **avec plusieurs S-Boxes courtes** qui introduit de la diffusion. Cette diffusion aide à ce que la structure statistique du texte clair (les *patterns*) ne soit pas préservée dans le chiffré.



**Illustration d'une P-Box droite** : 8 bits I/O

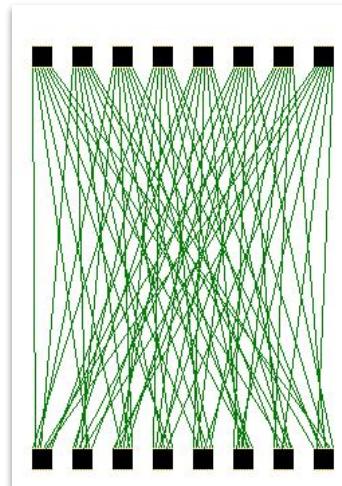
- **Diffusion**

- Exemple avec une seule ronde et sans ajout de clé



- **Remarque**

- La diffusion est également appelée « effet avalanche »
- Lorsque la diffusion est dite **complète** (propriété des fonctions booléennes)
  - On obtient un effet avalanche strict : la modification d'un seul bit en entrée affecte tous les bits en sortie avec une probabilité de 50%
  - Chaque bit en sortie est dépendant de tous les bits en entrée



- **Réseau de substitution-permutation (SP)**

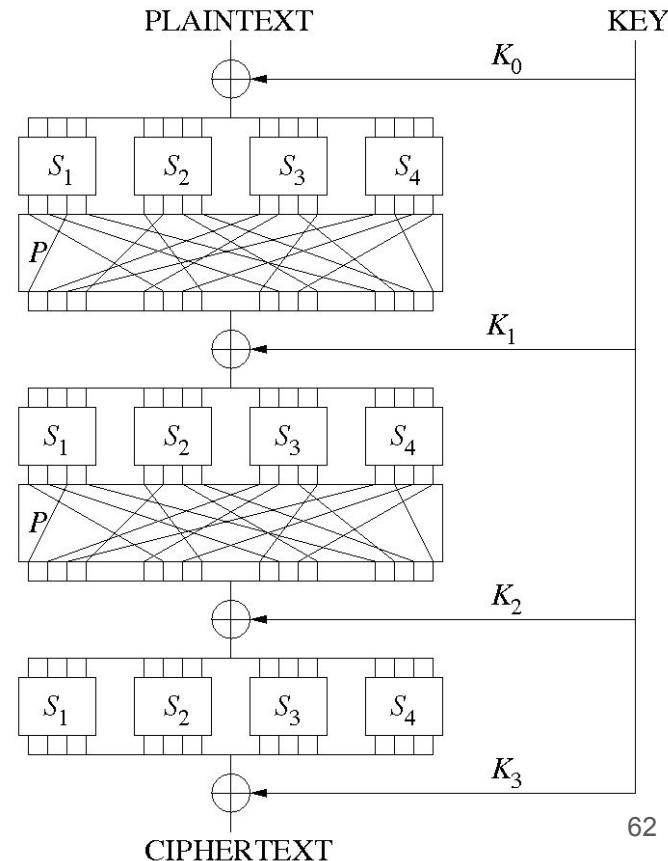
Plusieurs rondes doivent être effectués : leur nombre est un compromis en vitesse et sécurité

On introduit l'utilisation d'un clé secrète afin que, sans elle, **on ne puisse plus inverser la fonction** combinant S-Box et P-Box (« boîtes blanches »).

**Préparation des clés (key schedule)** : on crée des sous-clés à partir de la clé principale (« expansion » et division en clés de ronde).

Chaque ronde se termine donc par un **XOR** avec la sous-clé (*key mixing*). Ci-contre : 3 rondes.

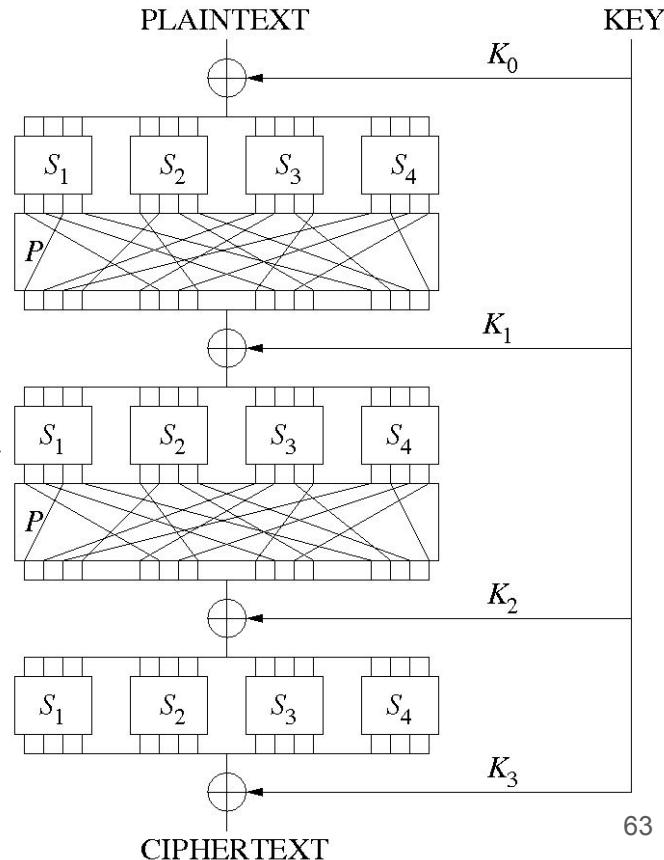
**Déchiffrement** : réciproques des S-boxes et P-boxes, avec utilisation des clés de rondes en ordre inversé.



- **Réseau de substitution-permutation (SP)**

**Remarques :**

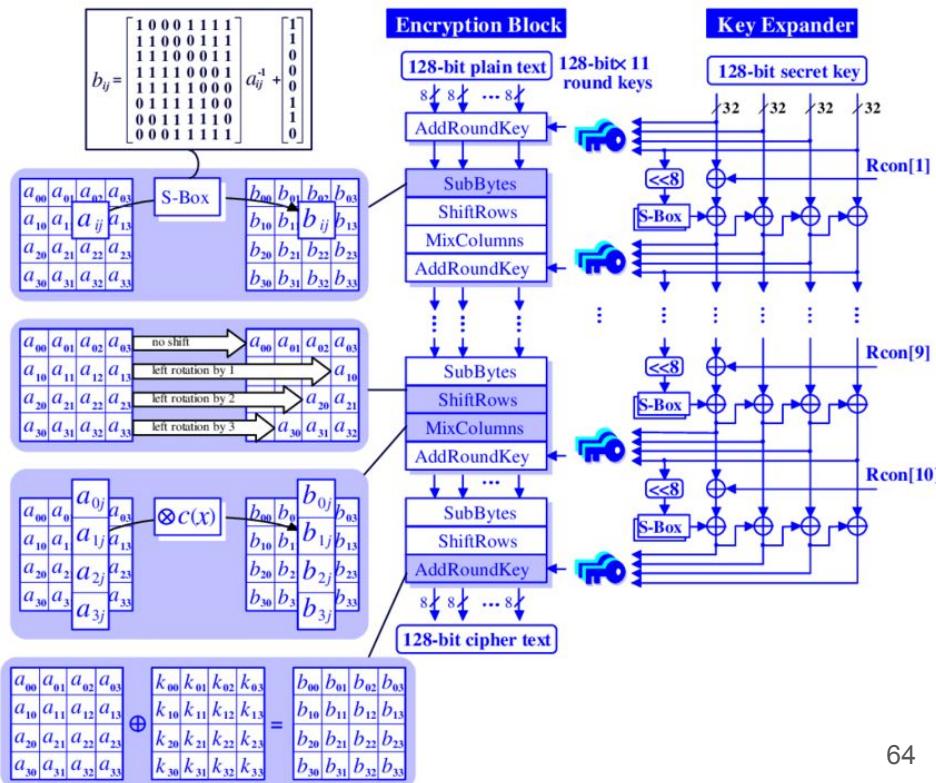
- La première ronde commence également par un **XOR** avec une sous-clé  $K_0$
- Comme la dernière ronde produit le chiffré, elle n'a pas de P-Box : si celle-ci est publiée (c.-à-d. son schéma est rendu publique), alors un attaquant peut simplement « dé-permuter » les bits du chiffré. Elle n'a donc aucune valeur cryptographique. Le retrait de cette dernière P-box permet de diminuer les coûts de calculs et d'implémentation



### Rijndael

Réseau SP de Rijmen et Daemen, 1998

- Bloc de données arrangé en grille  
P. ex.  $4 \times 4 = 16$  octets = 128 bits
- **Substitutions** (S-Box) :  
Table de correspondance → rapide
  - ⚠ Pas de point fixe
  - Pas de point fixe opposé (p. ex. 1010  $\Leftrightarrow$  0101)
- **Permutations** :
  - Décalages des rangs
  - Mélange des colonnes
    - Multiplication par une matrice  
→ Transformations linéaires
- **Addition de la clé de ronde**
- Dernière ronde : permutation inutile



- **Rijndael**

- Algorithme choisi par le NIST pour l'*Advanced Encryption Standard* (AES) pour remplacer (Triple) DES : devait être aussi sécurisé, mais beaucoup plus rapide
- L'AES fixe :
  - la longueur de bloc à 128 bits
  - la longueur des clés à 128, 192, ou 256 bits
  - et le nombre de rondes associé : 10, 12 et 14, respectivement
- Chaque étape peut être effectuée dans le **sens inverse** → **déchiffrement**
- <https://formaestudio.com/rijndaelinspector/archivos/Rijndael Animation v4 eng-html5.html>
- **Arithmétique modulaire**

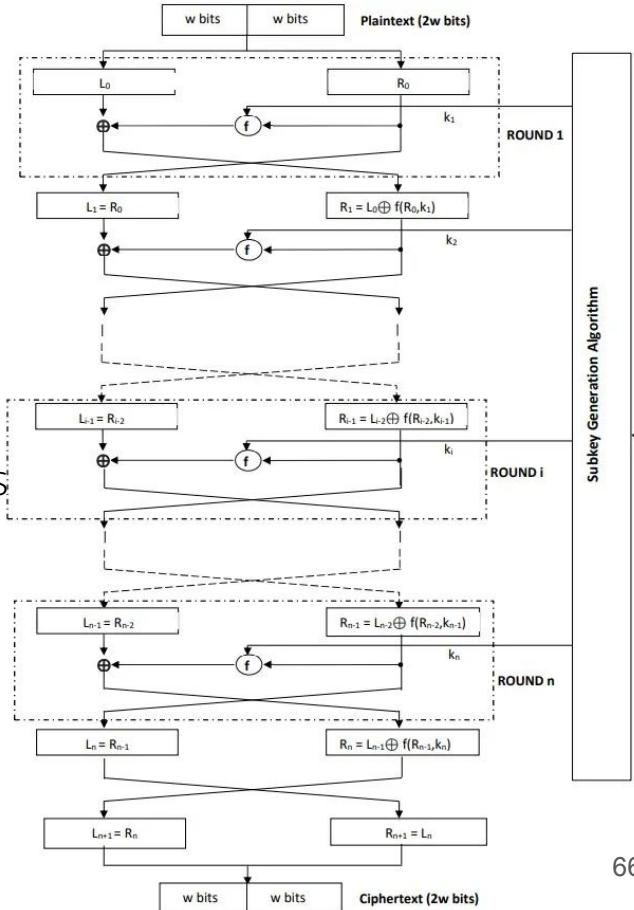
Toutes les opérations (addition, soustraction, multiplication, inversion) se font dans un « corps fini » (ou corps de Galois) de  $2^8$  éléments, soit 1 octet, les valeurs allant de 0000 0000 à 1111 1111. Les 256 éléments sont donc représentés par un polynôme irréductible de coefficients binaires  $m(x)=x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$  et les opérations se font modulo ce polynôme

## 2.6. Chiffrement par bloc

### • Réseau de Feistel

Horst Feistel et Don Coppersmith, 1973

- Structure (comme réseaux SP) pour construire des chiffrements par bloc (p. ex. DES, Twofish)
- **Étapes du chiffrement :**
  - Le bloc en entrée est divisé en 2 parties (de tailles égales ou inégales)
  - Le chiffrement consiste en une série de rondes
    - La moitié droite du bloc est transformée par une fonction de ronde  $f$ , qui dépend d'une sous-clé dérivée de la clé principale
    - La sortie de  $f$  est ensuite XORée avec la moitié droite du bloc
  - **Après la dernière ronde** de (dé)chiffrement,  
→ Permutation des deux moitiés



- Réseau de Feistel

- Le déchiffrement est essentiellement **identique au chiffrement**, la seule différence étant l'utilisation des sous-clés dans l'ordre inverse

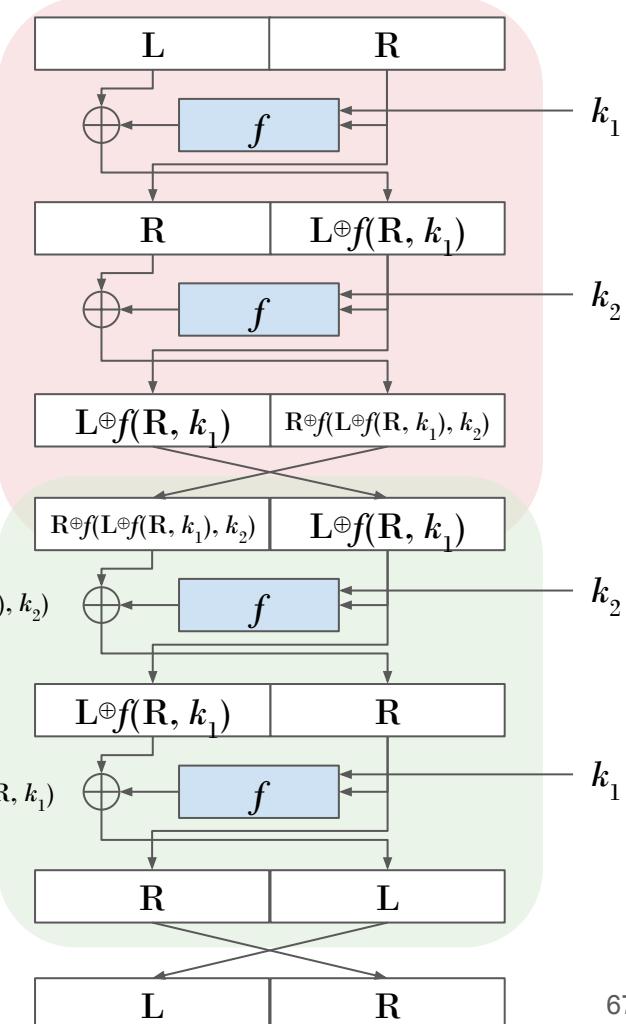
Ci-contre : exemple avec 2 rondes

- Fonctionne
  - quelque soit  $f$
  - pour tout nombre de rondes

 $R \oplus f(L \oplus f(R, k_1), k_2)$ 
 $\oplus f(L \oplus f(R, k_1), k_2)$ 
 $L \oplus f(R, k_1) \oplus f(R, k_1)$ 
 $\oplus f(R, k_1)$ 

R	L
---	---

L	R
---	---



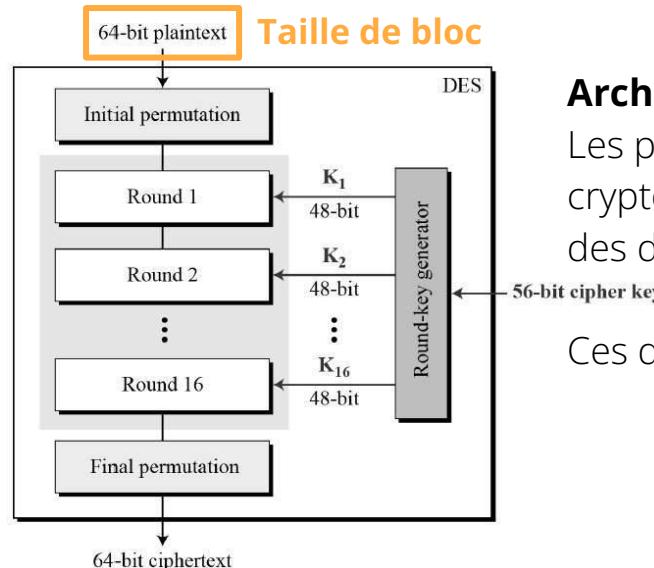
- Réseau de Feistel

- DES (*Data Encryption Standard*), 1975

Clé de 56 bits : peut être trouvée par force brute en  $2^{55}$

opérations **en moyenne** → Difficile à faire, jusque dans les années 90...

- Remplacé par Triple DES → Sécurisé, mais 3 fois plus lent !



### Architecture générale du DES

Les permutations initiales et finales n'ont aucun intérêt cryptographique : elles ne sont là que pour le (dé)chargement des données sur le matériel 8 bits des années 70.

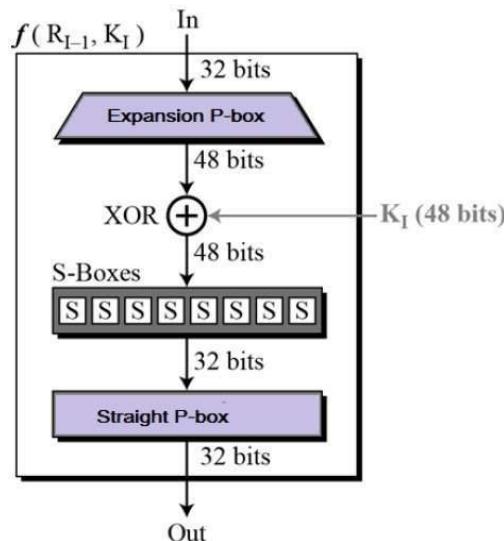
Ces deux fonctions sont mutuellement réciproques.

- Réseau de Feistel

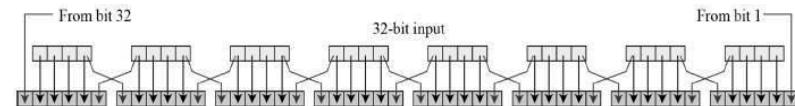
- DES (*Data Encryption Standard*), 1975

- Fonction de ronde  $f$

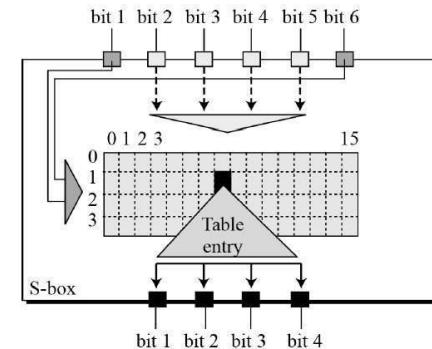
Combine une sous-clé de 48 bits avec les 32 bits de poids faibles (LSB) pour produire une sortie de 32 bits



### Expansion P-Box (E-Box)



### S-Box (6/4 bits)

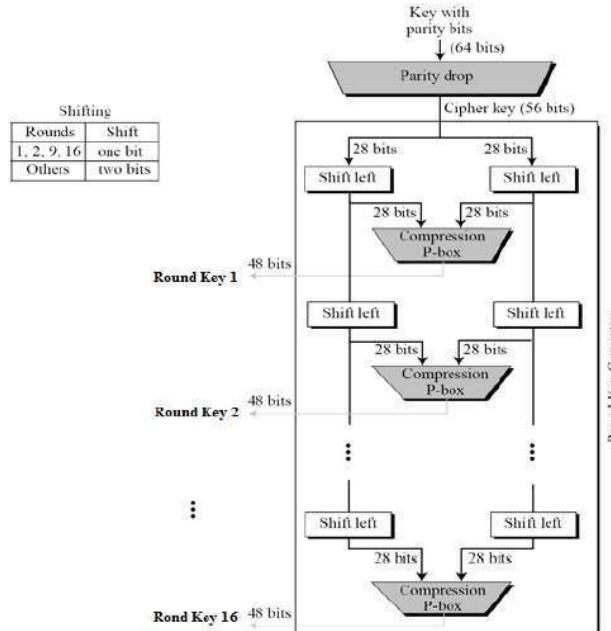


- Réseau de Feistel

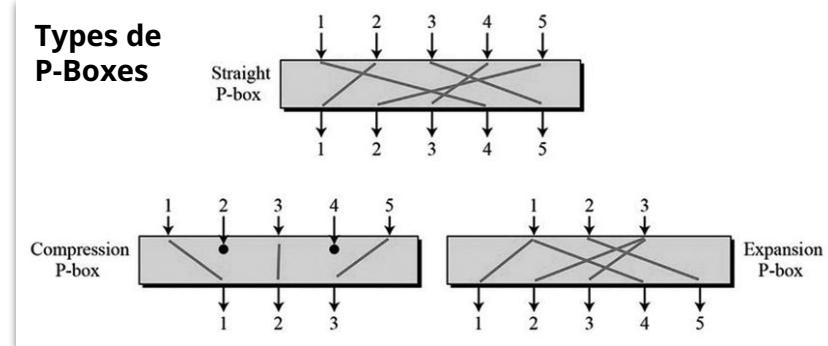
- DES (*Data Encryption Standard*), 1975

- **Key schedule** (préparation des clés de rondes)

Création de 16 clés de 48 bits, à partir de la clé principale de 56 bits



**8 bits de parité**, ajoutés aux 56 bits de données, pour assurer l'intégrité de la clé durant sa transmission (code correcteur)



- **Réseau de Feistel**

- DES-X (Rivest, 1984)

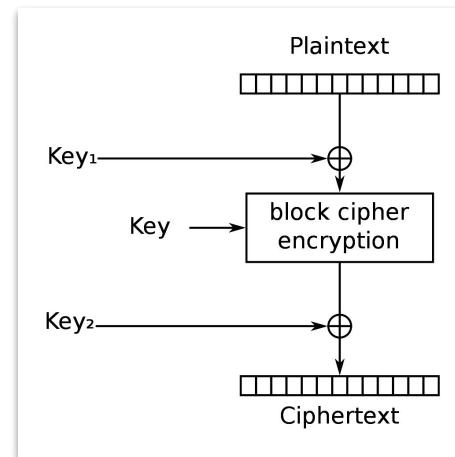
But : augmenter la complexité des attaques par force brute

 La force brute est, à ce jour, le seul type d'attaque connu contre DES

Utilisation d'une clé  $k$  de 184 bits, comprenant deux clés de 64 bits,  $k_1$  et  $k_2$  :

$$\text{DES-X}(m) = k_2 \oplus \text{DES}_k(m \oplus k_1)$$

Note :  $184 = 56 + 2 \times 64$



Processus de *key whitening*

- **Mode de fonctionnement** (*mode of operation*)

Un mode d'opération décrit comment appliquer de manière répétée l'opération monobloc d'un chiffrement pour transformer en toute sécurité des quantités de données supérieures à un bloc

Afin d'utiliser les chiffrements par bloc dans diverses applications, **cinq** modes d'opération ont été définis par le NIST (SP 800-38A)

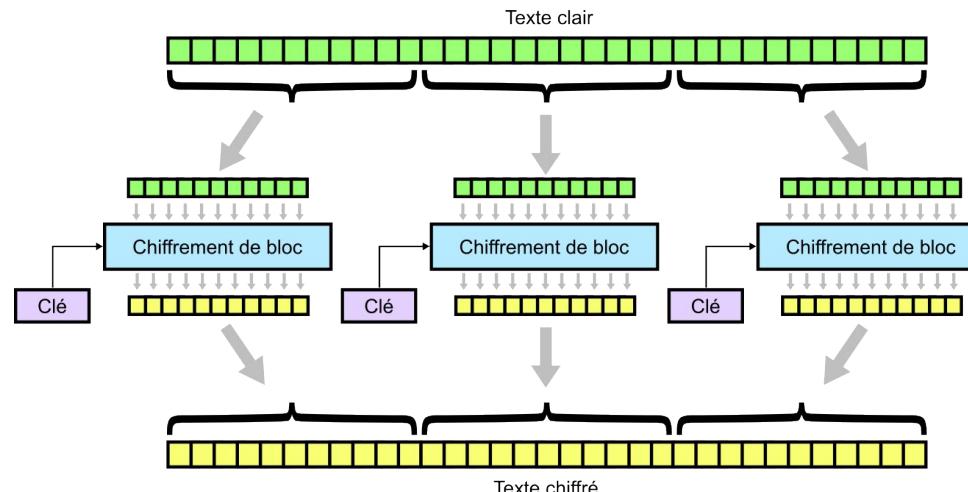
NIST SP 800-38A *Recommendation for Block Cipher Modes of Operation: Methods and Techniques* (déc. 2001)

- ECB
- CBC
- CTR
- CFB
- OFB

- **ECB** (*Electronic Codebook Block*, dictionnaire de codes)

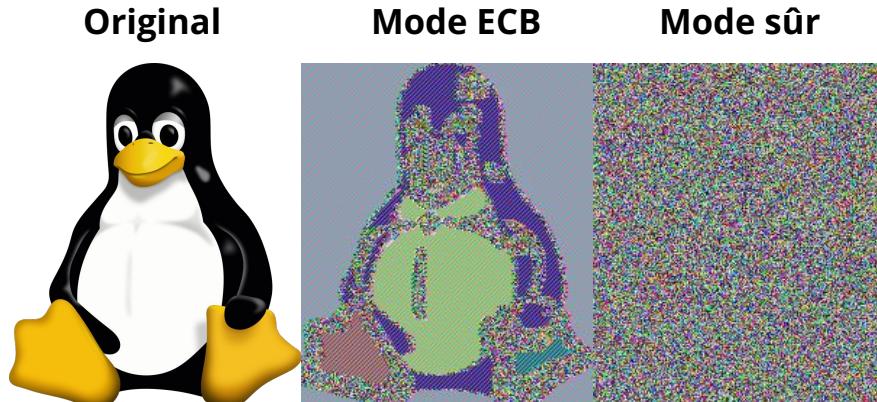
Approche la plus naïve

- Couper le message en blocs et les chiffrer un à la fois
- Si message trop court → *padding*, afin que sa longueur soit un multiple de la taille de bloc
- Déchiffrement : fonction réciproque



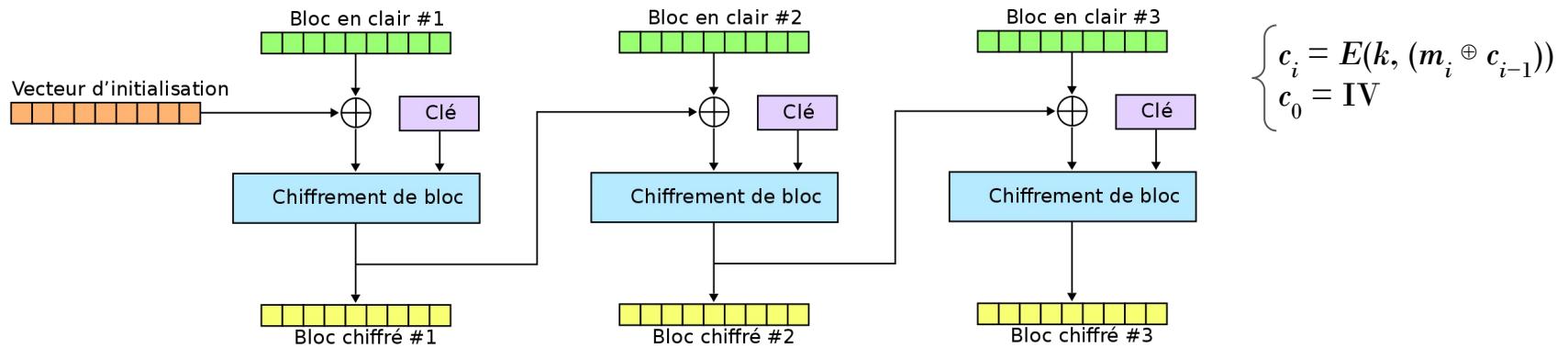
## 2.7. Modes de fonctionnement

- **ECB** (*Electronic Codebook Block*, dictionnaire de codes)
    - ✓ Facile à implémenter
    - ✓ Rapide et parallélisable
    - ✓ Permet un déchiffrement direct d'une zone quelconque du texte chiffré (*random read access*)
    - ⚠ Non-sécurisé : si deux blocs clairs sont identiques, les deux blocs chiffrés correspondants le seront aussi (même clé  $k$ )
- Exemples : requête HTTP répétée à l'identique,  [zoom](#)



Si des parties de l'image (données de pixels) sont identiques, leur chiffrements le sont aussi  
→ Motifs (*patterns*) visibles

- **CBC** (*Cipher Block Chaining*, enchaînement de blocs)



La sortie d'un bloc est reliée à l'entrée du bloc suivant : permet de masquer le  $i$ -ème bloc du texte clair par le chiffrement du bloc  $i-1$  du texte chiffré

→ **2 blocs clairs identiques donnent 2 blocs chiffrés différents**

Premier bloc : entrée du **XOR**ée avec un bloc aléatoire « imaginaire », appelé **vecteur d'initialisation (IV)**

**L'IV n'a pas besoin d'être secret**, mais doit être aléatoire (cas du CBC) et **unique** : un nouvel IV pour chaque message (stockage dans une mémoire permanente)

→ Si deux blocs #1 sont les mêmes, leurs chiffrés seront différents

## 2.7. Modes de fonctionnement

- **CBC** (*Cipher Block Chaining*, enchaînement de blocs)

Le mode CBC est désormais peu utilisé



Séquentiel

↳ Perte du parallélisme d'ECB : on ne peut plus **chiffrer** le bloc  $i+1$  avant le bloc  $i$



*Padding* nécessaire, car **XOR** requiert un bloc clair complet

↳ Vulnérabilité à *padding attack* (sauf si *ciphertext stealing*, CTS)



Enchaînement de blocs et **XOR** → propagation d'erreur

■ Altération du bloc chiffré  $i$  → Problème avec les blocs clairs  $i$  et  $i+1$

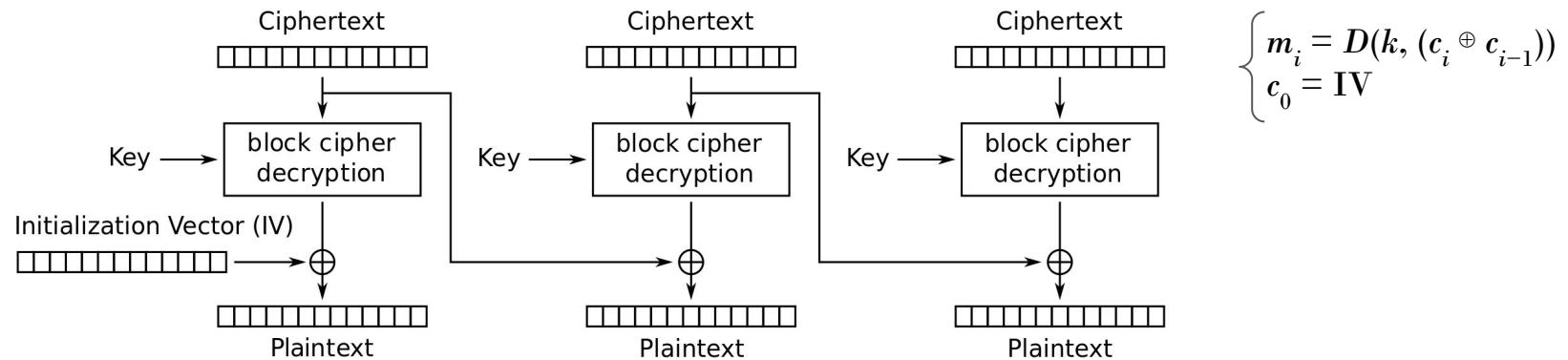
↳ Perte de 2 blocs !!

- Erreur de transmission réseau
- *bit flipping attack*

## 2.7. Modes de fonctionnement

- **CBC** (*Cipher Block Chaining*, enchaînement de blocs)

Le déchiffrement suit processus exactement inverse : le chiffré #1 est déchiffré, puis **XOR** avec **l'IV, qui est transmis avec le message**, pour obtenir le clair #1



 **Le déchiffrement peut être parallélisé** : déchiffer avec un IV incorrect entraînera une corruption du premier bloc de texte clair, mais les blocs clairs suivants seront corrects

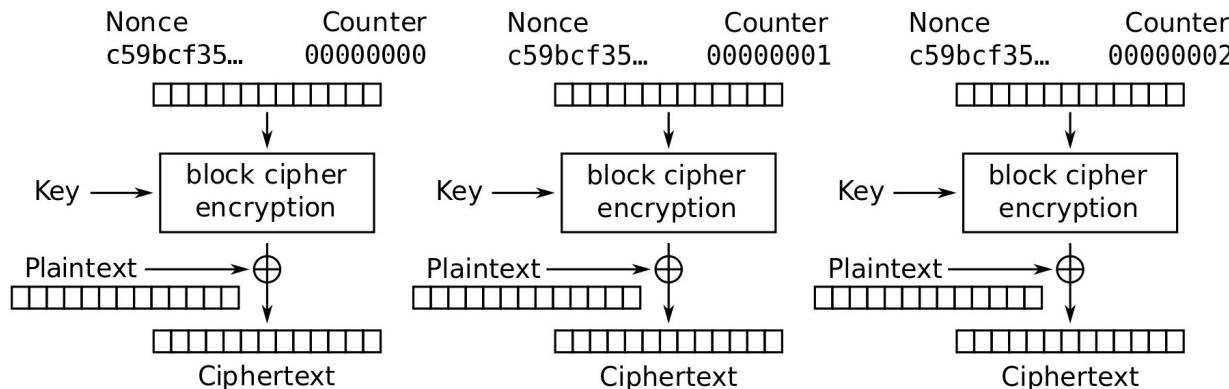
## 2.7. Modes de fonctionnement

- **CTR** (*CounTeR*), Diffie et Hellman, 1979

Nonce (*number used once*) : nombre arbitraire, **unique à chaque communication** et qui n'a pas besoin d'être secret, ni aléatoire

Il est **concaténé à un compteur** pour ensuite être chiffré par bloc à l'aide d'une clé

⚠ Terminologie : le nonce, concaténé ou non, est parfois appelé vecteur d'initialisation

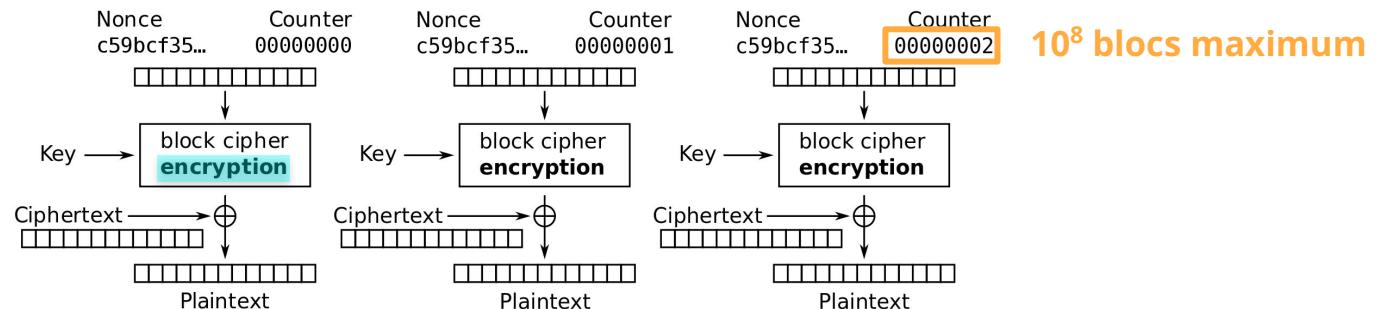


Le bloc chiffré aléatoire produit en sortie est **XORé** avec le bloc clair, comme une clé de flux.

→ Le mode CTR transforme un chiffrement par bloc en chiffrement de flux

- **CTR (CounTeR)**

- ✓ Si même bloc clair → blocs chiffrés différents, car clés de flux différentes
- ✓ *Random read access*
- ✓ Parallélisation possible
- ✓ Plus besoin de *padding*, car transformation en chiffrement de flux
- ⚠ La taille du compteur limite la taille du message (*i.e.* le nombre de blocs) qu'on peut envoyer
- ⚠ **XOR** : inversion d'un bit dans le chiffré → inversion dans le clair
- ↳ Requiert un MAC (*Galois CTR mode, GCM* → permet confidentialité **et intégrité**)
- ✓ Le **déchiffrement** utilise le même processus que le chiffrement car on génère la même clé de flux
- ↳ Diminue les coûts d'implémentation (p. ex. on n'implémente pas la fonction de déchiffrement d'AES)

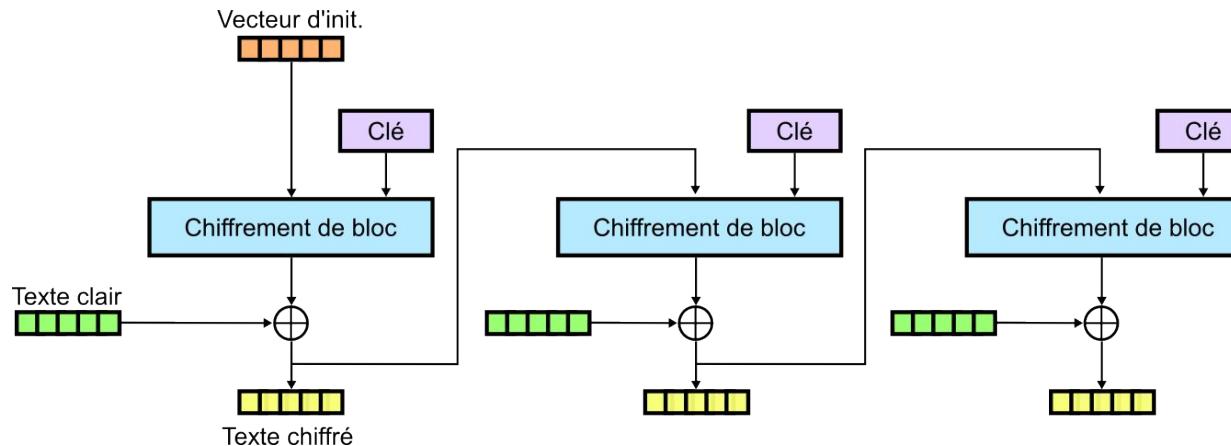


## 2.7. Modes de fonctionnement

- **CFB** (*Cipher Feedback Block*, chiffrement à rétroaction)

**Comme CBC** : la sortie d'un bloc est reliée à l'entrée du bloc suivant, ce qui permet de masquer le  $i$ -ème bloc du texte clair par le chiffrement du bloc  $i-1$  du texte chiffré

**Comme CTR** : transformation en un chiffrement de flux (asynchrone) → pas besoin de *padding*

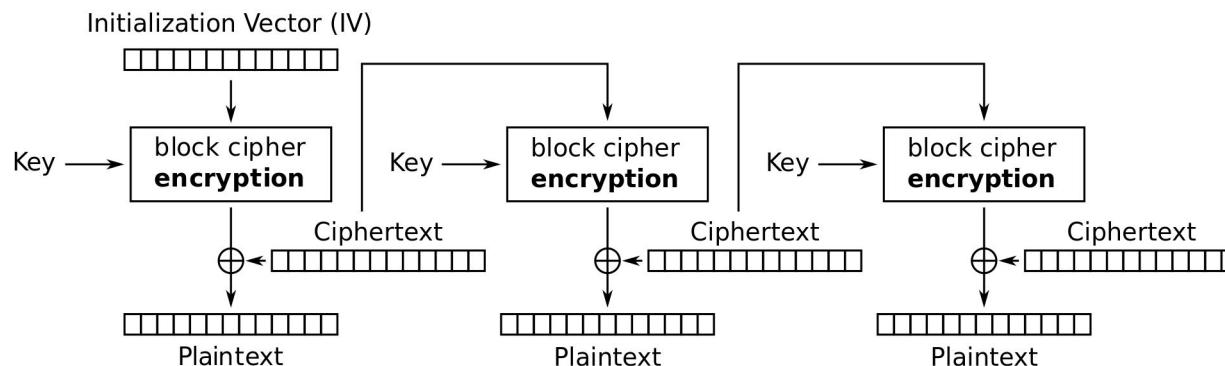


## 2.7. Modes de fonctionnement

- **CFB** (*Cipher Feedback Block*, chiffrement à rétroaction)

**Comme CBC** : seul le déchiffrement peut être parallélisé

**Comme CTR** : utilisation de la même fonction pour chiffrage et déchiffrement



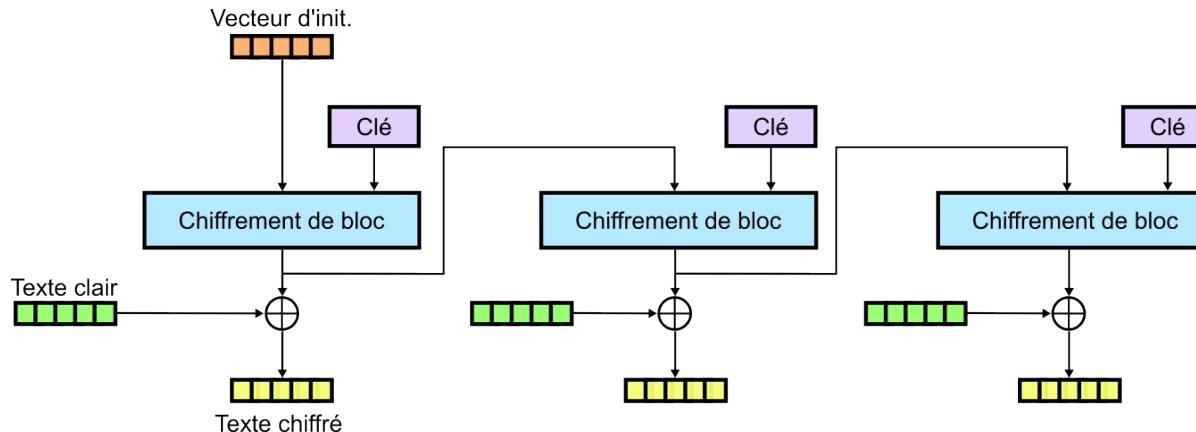
## 2.7. Modes de fonctionnement

- **OFB** (*Output Feedback*, chiffrement à rétroaction de sortie)

Le flux de clé est obtenu en chiffrant le précédent flux de clé

↳ Plus rapide que CFB, car permet un pré-calcul de toutes les clés de flux

↳ Plus fragile que CFB, car un attaquant n'a besoin de connaître que l'IV d'un message chiffré et le clair d'un autre message chiffré



## 2.7. Modes de fonctionnement

- **En résumé**

	ECB	CBC	CTR	CFB	OFB
Chiffrement parallélisable	Oui	Non	Oui	Non	Précalcul des keystreams
Déchiffrement parallélisable	Oui	Oui	Oui	Oui	Précalcul des keystreams
<i>Random read access</i>	Oui	Oui	Oui	Oui	Non

### **3. Sécurité des chiffrements**

- **Modèles d'attaques cryptographiques**

- Ils représentent différents scénarios dans lesquels la sécurité du cryptosystème étudié est menacée par un adversaire
    - Adversaire « réaliste » : dispose des meilleurs algorithmes et capacités de calculs actuellement connus
  - À partir des données auxquelles l'adversaire a accès, différents types d'attaques sont possibles
    - Varient en force et en vraisemblance
    - La résistance du chiffrement caractérise son niveau de sécurité
-  **Preuve de sécurité par jeu** (*security game*)  
p. ex. IND-CPA, IND-CCA1, ...

- **Attaque sur texte chiffré seul** (*ciphertext-only attack*, COA)

Dans ce scénario, le cryptanalyste a seulement accès à une collection de textes chiffrés, pas aux textes en clair

- Le plus vraisemblable en cryptanalyse
- Le plus faible, car manque d'information
- Chiffrements modernes très résistants aux COA
  - En général, ne peut réussir que si le cryptanalyste dispose d'informations sur le texte en clair : *langue utilisée*, formatage, etc.
- Cas particulier : **attaque par force brute**, qui recherche exhaustivement la clé de déchiffrement parmi toutes les possibilités
  - Tous les chiffrements y sont vulnérables, sauf OTP
    - En combien de temps (tentatives) ?
      - ↳ Sert de comparaison avec les autres attaques (*faster-than-brute-force attacks*)
    - *Attaque par dictionnaire* : s'appuie sur une liste de mots clairs vraisemblables

- **Attaque à texte clair connu** (*known-plaintext attack, KPA*)

Dans ce scénario, le cryptanalyste dispose d'un jeu de textes chiffrés et des textes clairs correspondants, pour une clé donnée. Ces paires aident à comprendre l'algorithme de chiffrement, voire à retrouver la clé.

- **Analyse par crib**

- Les *cribs* sont généralement des parties de texte en clair que l'on sait, **ou bien que l'on suspecte** (mots ou expressions récurrents), être présentes dans le chiffré
  - Exemple : « Cordialement » à la fin des mails
  - Les codes sources chiffrés sont vulnérables, car pleins de mots récurrents
- Cryptanalyse d'Enigma, avant que les Alliés ne capturent un exemplaire de la machine

## Enigma : permutation sans point fixe

Une permutation  $f$  est dite sans point fixe, s'il n'existe aucun  $x$  tq  $f(x) = x$

i.e. impossibilité de substituer une lettre à elle-même

→ Vulnérabilité à une analyse par *crib*

1	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td>E</td><td>Y</td><td>S</td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td><b>S</b></td><td>T</td><td>N</td><td>T</td><td>L</td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td>E</td><td>S</td><td>R</td><td>E</td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>S</td><td>E</td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td><b>S</b></td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>G</td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	E	Y	S	A	W	Q	<b>S</b>	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L	S	E	C	R	E	T	M	E	<b>S</b>	S	S	A	G	E	...								
H	Q	E	Y	S	A	W	Q	<b>S</b>	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L																									
S	E	C	R	E	T	M	E	<b>S</b>	S	S	A	G	E	...																																
2	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td><b>E</b></td><td>Y</td><td>S</td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td>S</td><td>T</td><td>N</td><td>T</td><td>L</td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td>E</td><td>S</td><td>R</td><td>E</td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>...</td><td>S</td><td><b>E</b></td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>G</td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	<b>E</b>	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L	...	S	<b>E</b>	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...								
H	Q	<b>E</b>	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L																									
...	S	<b>E</b>	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...																																
3	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td>E</td><td>Y</td><td>S</td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td>S</td><td>T</td><td>N</td><td>T</td><td><b>L</b></td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td>E</td><td>S</td><td>R</td><td>E</td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>...</td><td>S</td><td>E</td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td><b>G</b></td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	<b>L</b>	G	K	P	E	S	R	E	V	L	...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	<b>G</b>	E	...								
H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	<b>L</b>	G	K	P	E	S	R	E	V	L																									
...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	<b>G</b>	E	...																																
4	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td>E</td><td>Y</td><td>S</td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td>S</td><td>T</td><td>N</td><td>T</td><td>L</td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td>E</td><td>S</td><td>R</td><td>E</td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>...</td><td>S</td><td>E</td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>G</td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L	...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...								
H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L																									
...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...																																
5	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td>E</td><td>Y</td><td><b>S</b></td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td>S</td><td>T</td><td>N</td><td>T</td><td>L</td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td><b>E</b></td><td>S</td><td>R</td><td>E</td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>...</td><td>S</td><td>E</td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>G</td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	E	Y	<b>S</b>	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	<b>E</b>	S	R	E	V	L	...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...								
H	Q	E	Y	<b>S</b>	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	<b>E</b>	S	R	E	V	L																									
...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...																																
6	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td>E</td><td>Y</td><td>S</td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td>S</td><td>T</td><td>N</td><td>T</td><td>L</td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td>E</td><td>S</td><td>R</td><td>E</td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>...</td><td>S</td><td>E</td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>G</td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L	...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...								
H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L																									
...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...																																
7	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td>E</td><td>Y</td><td>S</td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td>S</td><td>T</td><td>N</td><td><b>T</b></td><td>L</td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td>E</td><td>S</td><td>R</td><td>E</td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>...</td><td>S</td><td>E</td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>G</td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	<b>T</b>	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L	...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...								
H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	<b>T</b>	L	G	K	P	E	S	R	E	V	L																									
...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...																																
8	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td>E</td><td>Y</td><td>S</td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td>S</td><td>T</td><td>N</td><td>T</td><td>L</td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td>E</td><td>S</td><td>R</td><td><b>E</b></td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>...</td><td>S</td><td>E</td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>G</td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	<b>E</b>	V	L	...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...								
H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	E	S	R	<b>E</b>	V	L																									
...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...																																
9	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td>E</td><td>Y</td><td>S</td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td><b>S</b></td><td>T</td><td>N</td><td>T</td><td>L</td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td><b>E</b></td><td>S</td><td>R</td><td>E</td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>...</td><td>S</td><td>E</td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>G</td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	E	Y	S	A	W	Q	<b>S</b>	T	N	T	L	G	K	P	<b>E</b>	S	R	E	V	L	...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...								
H	Q	E	Y	S	A	W	Q	<b>S</b>	T	N	T	L	G	K	P	<b>E</b>	S	R	E	V	L																									
...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...																																
10	<table border="1"><tr><td>H</td><td>Q</td><td>E</td><td>Y</td><td>S</td><td>A</td><td>W</td><td>Q</td><td>S</td><td>T</td><td>N</td><td>T</td><td>L</td><td>G</td><td>K</td><td>P</td><td><b>E</b></td><td><b>S</b></td><td>R</td><td>E</td><td>V</td><td>L</td></tr> <tr><td>...</td><td>S</td><td>E</td><td>C</td><td>R</td><td>E</td><td>T</td><td>M</td><td>E</td><td>S</td><td>S</td><td>A</td><td>G</td><td>E</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	<b>E</b>	<b>S</b>	R	E	V	L	...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...								
H	Q	E	Y	S	A	W	Q	S	T	N	T	L	G	K	P	<b>E</b>	<b>S</b>	R	E	V	L																									
...	S	E	C	R	E	T	M	E	S	S	A	G	E	...																																

- **Attaque à texte clair choisi** (*chosen-plaintext attack, CPA*)

Dans ce scénario, le cryptanalyste peut choisir arbitrairement un jeu de textes clairs et obtenir de l'**oracle de chiffrement** les chiffrés correspondants

- **Oracle** : entité informatique qui fournit des informations sur demande : chiffrement, déchiffrement, valeur de hachage, fuite d'information (cf. attaque par canal auxiliaire).
  - Les détails de son fonctionnement ne sont pas censés être connus de l'adversaire, à l'exception de l'algorithme de chiffrement qu'il simule. La clé de chiffrement demeure secrète.
    - Cela le définit comme une **boîte grise**



**Preuve de sécurité par jeu** : l'oracle y sera représenté par le *challenger* → s'oppose à l'adversaire et interagit avec lui

- **Attaque à texte clair choisi** (*chosen-plaintext attack, CPA*)

- Dans les schémas de **chiffrements asymétriques**, la clé utilisée pour chiffrer est distribuée publiquement, ce qui permet les tentatives de CPA
  - Ils doivent donc être résistants aux CPA → **sécurité sémantique** (sémantique *adj.* : qui concerne le sens, la signification)

- Chiffrements de flux résistants : Trivium, Salsa20, Grain-128, etc.

- **Attaque à texte clair choisi adaptative**

(*adaptive chosen-plaintext attack, CPA2*)

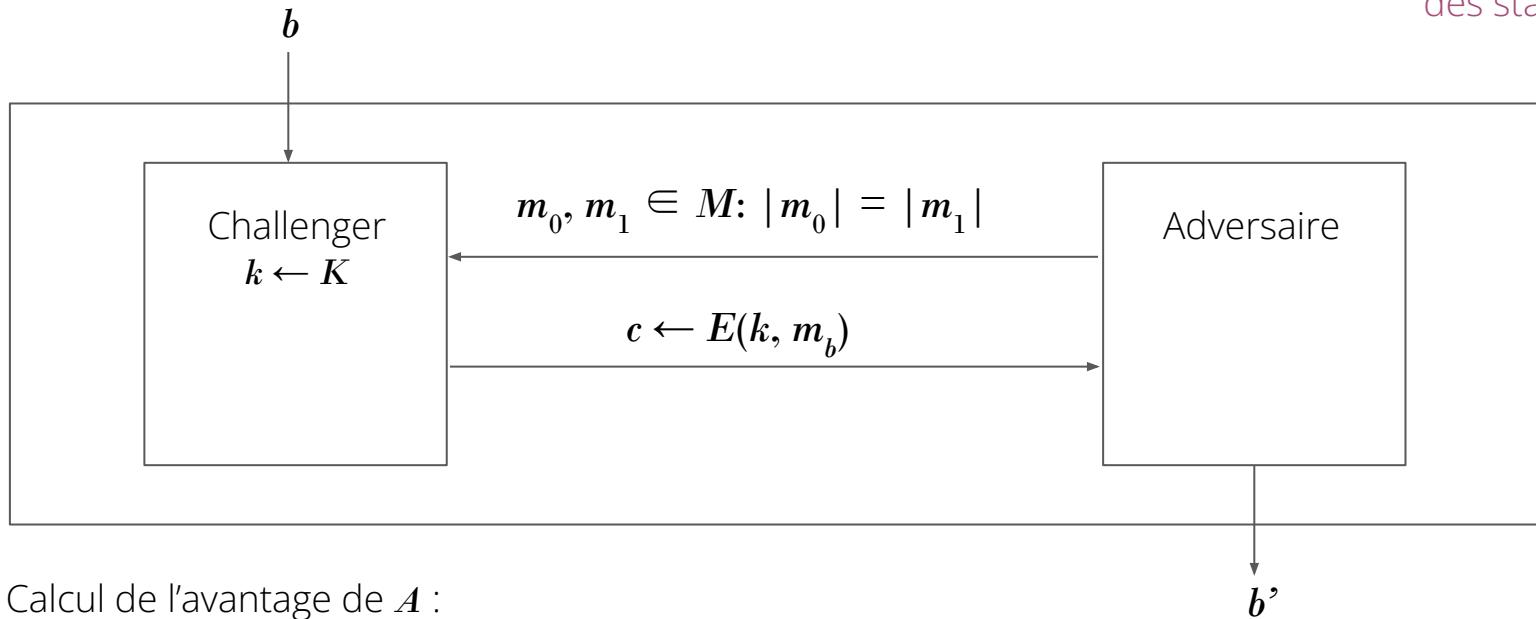
Ici, le cryptanalyste n'est pas obligé de choisir tous les textes clairs dès le début : il peut adapter son choix de texte clair en fonction des chiffrés renvoyés par l'oracle

### 3.3. CPA

Soit une expérience  $\text{EXP}(b)$ , avec  $b \leftarrow U(0, 1)$  au cours de laquelle :

- l'adversaire  $A$  envoie deux messages  $m_0$  et  $m_1$  au *challenger*,
- le *challenger* renvoie le chiffrement  $c$  du message  $m_b$  à l'adversaire,
- ce dernier doit deviner qui de  $m_0$  ou  $m_1$  a été chiffré : prédiction  $b' \in \{0,1\}$ .

Répétitions de la procédure, pour calculer des statistiques



Calcul de l'avantage de  $A$  :

$$\delta(n) = |\Pr_{c \leftarrow E(k, m_0)}[A(c) = 1] - \Pr_{c \leftarrow E(k, m_1)}[A(c) = 1]|$$

Négligeable si  $\delta(n) < \frac{1}{\text{poly}(n)}$  → « IND-CPA »,  $E$  sémantiquement sécurisé

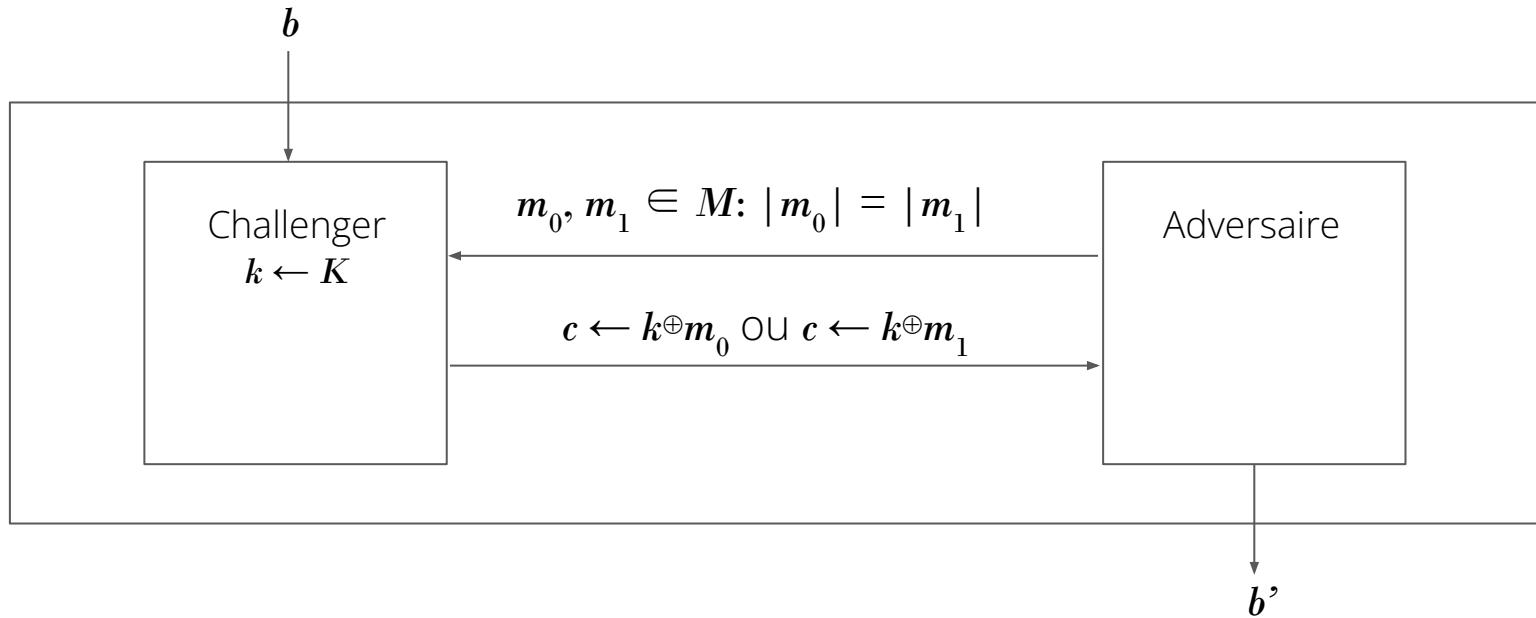
- **Attaque à texte clair choisi** (*chosen-plaintext attack*, CPA)

- **Sécurité sémantique (IND-CPA)** : pour un adversaire réaliste  $A$  (disposant des meilleurs algorithmes et capacités de calculs actuellement connus), deux messages chiffrés  $c_1$  et  $c_2$ , qui correspondent à des messages originaux différents  $m_1$  et  $m_2$ , sont calculatoirement indistinguables

Note : aussi appelée *ciphertext indistinguishability*

- Pour  $A$ , le chiffré  $c$  ne révèle rien sur la sémantique de  $m$ .
- $P_{c \leftarrow E(k, \square_o)}[ A(c) = 1 ] = 1 - P_{c \leftarrow E(k, \square_i)}[ A(c) = 1 ]$   
 $\delta(n) = | 2 \cdot P_{c \leftarrow E(k, \square_o)}[ A(c) = 1 ] - 1 |$

## OTP est sémantiquement sécurisé



$$\delta(n) = |P[A(k \oplus m_0) = 1] - P[A(k \oplus m_1) = 1]| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}| = 0, \text{ IND-CPA}$$

Rappel : un **XOR** entre une clef aléatoire et n'importe quel message produit une séquence également aléatoire

- **Attaque à texte chiffré choisi** (*chosen-ciphertext attack, CCA*)

Dans ce scénario, le cryptanalyste peut choisir arbitrairement un **nombre limité** de textes chiffrés et obtenir de l'oracle de déchiffrement les textes clairs correspondants

- **Attaque à texte chiffré choisi adaptative**

(*adaptive chosen-ciphertext attack, CCA2*)

Ici, le cryptanalyste n'est pas obligé de choisir tous les textes chiffrés dès le début : il peut adapter son choix de texte chiffré en fonction des textes clairs renvoyés par l'oracle

Sous ce modèle d'attaque, l'indistinguabilité est équivalente à la **non-malléabilité** ( $\text{IND-CCA2} \Leftrightarrow \text{NM-CCA2}$ )

- **Malléabilité**

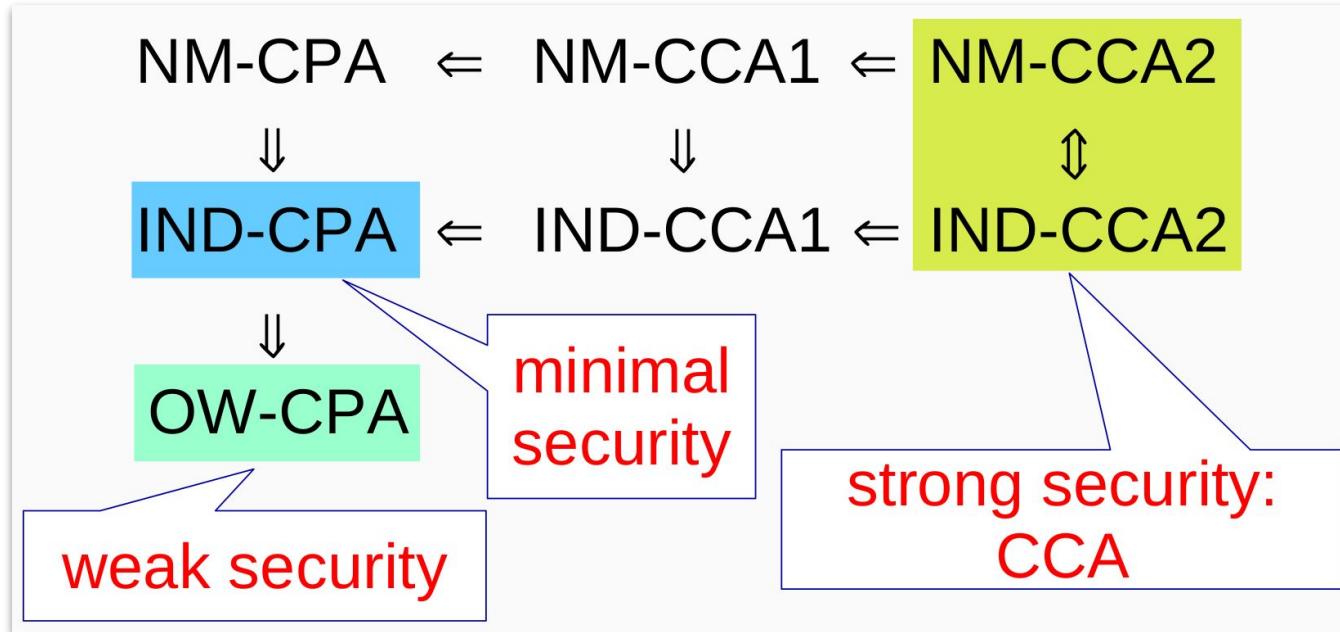
Un cryptosystème est dit malléable s'il est possible de transformer un chiffré d'un message  $m$  en un chiffré pour un message  $f(m)$  pour une fonction  $f$  connue sans connaître le message originel  $m$  ni obtenir d'information sur lui.

- Peut permettre à un attaquant de **modifier le contenu** des messages
- Permet d'exécuter des calculs sur des données chiffrés sans les connaître :
  - ↳ Chiffrement homomorphe

- Chiffrement de flux

Avec un second message  $t$ , un adversaire peut construire un chiffrement de  $m \oplus t$ , tq  $t \oplus E(m) = t \oplus m \oplus G(k) = E(t \oplus m)$

- **Solutions** : attacher au message un MAC, signature ou ZKP...



À voir dans le chapitre des fonctions de hachages et signatures numériques :  
 OW-CPA, *One-Way Chosen-Plaintext Attack*  
 EUF-NMA, *Existential Unforgeability under No-Message Attacks*

- **Principe de Kerckhoffs :**

- Axiome guidant la conception des cryptosystèmes (1883)  
« La sécurité d'un cryptosystème ne doit reposer que sur le secret de la clé. »
- Autrement dit, on suppose que l'adversaire connaît tous les détails de l'algorithme, exceptée la clé de chiffrement
  - Expression connue sous le nom de la **maxime de Shannon** (1949)
- S'oppose à la **sécurité par l'obscurité**
  - Mesure insuffisante

## **4. Chiffrements asymétriques**

- **Nombres premiers entre eux**

On dit que deux entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (ou  $a$  est (co)premier avec  $b$ ), si leur plus grand commun diviseur (pgcd) est égal à 1 :

$$\text{pgcd}(a, b) = 1$$

En d'autres termes, s'ils n'ont aucun diviseur autre que 1 et  $-1$  en commun. De manière équivalente, ils sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun facteur premier en commun.

- **Théorème de Bézout**

Pour deux entiers relatifs  $a$  et  $b$ , il existe deux entiers relatifs  $x$  et  $y$  tq :

$$ax + by = \text{pgcd}(a, b)$$

→  $a$  et  $b$  sont copremiersssi l'équation  $ax + by = 1$  admet des solutions

- **Indicatrice d'Euler**

Fonction arithmétique de la théorie des nombres, qui à tout entier naturel  $n$  non nul associe le nombre d'entiers compris entre 1 et  $n$  (inclus) et copremiers avec  $n$ .

Exemple pour  $n = 8$  :

- Les entiers positifs  $\leq 8$  sont  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
  - Parmis eux, ceux qui sont copremiers avec 8 sont  $\{1, 3, 7, 5\}$
  - Donc  $\varphi(8) = 4$
- 
- Si  $n$  est premier,  $\varphi(n) = n - 1$ , car  $\text{pgcd}(a, a) = a$
  - Si  $n$  est le produit de deux nombres premiers distincts  $p$  et  $q$  :  $\varphi(n) = (p - 1) \times (q - 1)$

Explications : il y a  $p - 1$  multiples de  $p$  qui sont  $\leq n$  et  $q - 1$  multiples de  $q$  qui sont  $\leq n$

Donc le nombre total d'entiers qui sont  $\leq n$  et premiers avec  $n$  :

$$n - (p - 1) - (q - 1) = n - p - q + 1 = (p \times q) - (p + q) + 1 = (p - 1) \times (q - 1)$$

- **Algorithme d'Euclide**

Permet de déterminer si deux nombres entiers sont premiers entre eux

1. Soit deux entiers  $a$  et  $b$ , avec  $a \geq b$
2. On divise  $a$  par  $b$  et on garde le reste  $r$
3. On remplace  $a$  par  $b$  et  $b$  par  $r$
4. On répète le processus, jusqu'à ce que  $b$  soit égal à 0

Le **pgcd** des deux entiers initiaux est la valeur non-nulle de  $b$  quand le processus se termine

### Exemple

$$\text{pgcd}(252, 105) = ?$$

$$252 \% 105 = 42$$

$$105 \% 42 = 21$$

$$42 \% 21 = 0$$

$$\rightarrow \text{pgcd}(252, 105) = 21$$

Rappel : l'opérateur modulo % donne le reste d'une division **euclidienne**

- **Algorithme d'Euclide étendu**

Permet de calculer le  $\text{pgcd}(a, b)$  — comme l'algorithme d'Euclide — ainsi que les entiers  $x$  et  $y$  du théorème de Bézout tq :

$$ax + by = \text{pgcd}(a, b)$$

**Pseudo-code :**

```
function extended_gcd(a, b):
    if b == 0:
        return a, 1, 0
    else:
        gcd, x, y = extended_gcd(b, a%b)
        return gcd, y, x - (a//b) * y
```

**Algorithme d'Euclide**

Pourrait être sur une seule colonne avec l'opérateur %

**Exemple :**  $a = 240, b = 46$

index $i$	quotient $q_{i-1}$	Remainder $r_i$	$s_i$	$t_i$
0		240		0
1		46		1
2	$240 \div 46 = 5$	$240 - 5 \times 46 = 10$	$1 - 5 \times 0 = 1$	$0 - 5 \times 1 = -5$
3	$46 \div 10 = 4$	$46 - 4 \times 10 = 6$	$0 - 4 \times 1 = -4$	$1 - 4 \times -5 = 21$
4	$10 \div 6 = 1$	$10 - 1 \times 6 = 4$	$1 - 1 \times -4 = 5$	$-5 - 1 \times 21 = -26$
5	$6 \div 4 = 1$	$6 - 1 \times 4 = 2$	$-4 - 1 \times 5 = -9$	$21 - 1 \times -26 = 47$
6	$4 \div 2 = 2$	$4 - 2 \times 2 = 0$	$5 - 2 \times -9 = 23$	$-26 - 2 \times 47 = -120$

$$240 \times -9 + 46 \times 47 = 2$$

### • Arithmétique modulaire

Ensemble de méthodes permettant la résolution de problèmes sur les nombres entiers.

Ces méthodes dérivent de l'étude du reste obtenu par une division euclidienne.

**Exemple** : sur un cadran d'horloge, 21h00 se lit également « 09h00 du soir ».

9 n'est pas égal à 21, mais sur un cadran de 12 entiers, on dit que 9 et 21 sont « congrus modulo 12 » et cela s'écrit :  $9 \equiv 21 \pmod{12}$

Cette relation d'équivalence s'applique également aux entiers relatifs :  $-1 \equiv 11 \pmod{12}$

**Propriété** de la congruence sur les entiers  $a$  et  $b \in \mathbb{Z}$  :

$a \equiv b \pmod{n}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$

→  $n$  divise  $a - b$

→  $a = b + kn$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$

→ les divisions euclidiennes de  $a$  et  $b$  par  $n$  ont le même reste

**Remarques** : il n'y a pas de congruence modulo 0, mais la relation d'égalité ;

le module correspond à la base de numération;

un **XOR** est une addition modulo 2 sans retenue

- **Classe d'équivalence**

Ensemble des entiers qui sont congrus modulo  $n$

La classe d'équivalence d'un entier  $a$  modulo  $n$ , notée  $[a]_n$ , est l'ensemble des entiers qui sont congrus à  $a$  modulo  $n$ . Elle est définie formellement comme :

$$[a]_n = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a \pmod{n}\}$$

**Exemple** : la classe d'équivalence de **9 mod 12** inclus tous les entiers qui laissent **un reste de 9** quand on les divise par 12, comme

$$[9]_{12} = \{-15, -3, 9, 21, 33, \dots\}$$

- **Notations**

L'ensemble des entiers modulo  $n$  est noté  $\mathbb{Z}_n$ .

Il peut être défini formellement comme :

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$$

C'est l'ensemble de **tous les restes** possibles quand on divise des entiers par  $n$ .

Une notation alternative est  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Elle représente **l'ensemble des classes d'équivalence** modulo  $n$  formée en divisant

- l'ensemble  $\mathbb{Z}$  de tous les entiers
- par l'ensemble  $n\mathbb{Z}$  des entiers multiple de  $n$

- **Inverse modulaire**

$u$  est l'inverse modulaire de  $a$  si  $au \equiv 1 \pmod{n}$

On peut alors écrire  $u \equiv a^{-1} \pmod{n}$

### Condition

$u$  existe ssi  $\text{pgcd}(a, n) = 1$

### Unicité

$$11 \times 2 = 22 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$11 \times 9 = 99 \equiv 1 \pmod{7}$$

Mais 2 est l'unique inverse modulaire de 11 modulo 7, car  $9 \equiv 2 \pmod{7}$

- **Calcul de l'inverse modulaire**

Si  $a$  et  $b$  sont copremiers, alors  $\text{pgdc}(a, b) = 1$

Il existe un inverse modulaire

- de  $a$  modulo  $b$
- de  $b$  modulo  $a$

Par le théorème de Bézout, on a :  $ax + by = \text{pgdc}(a, b) = 1$

$ax = 1 + (-yb)$        $x$  est l'inverse modulaire de  $a$  modulo  $b$

$by = 1 + (-xa)$        $y$  est l'inverse modulaire de  $b$  modulo  $a$

Rappel :  $au \equiv 1 \pmod{b} \rightarrow au = 1 + kb$

Ainsi, l'algorithme d'Euclide étendu permettra de calculer l'inverse modulaire

- **Division modulaire**

$$a \div b = a \times (1/b) \equiv a \times c \bmod n$$

avec  $c$  inverse modulaire de  $b$ , tq  $b \times c \equiv 1 \bmod n$

Exemples :

$$8 \div 3 \bmod 5 ?$$

$$3 \times 2 = 6 \equiv 1 \bmod 5$$

$$8 \div 3 \bmod 5 = 8 \times 2 = 16 \equiv 1 \bmod 5$$

$$11 \div 4 \bmod 5 ?$$

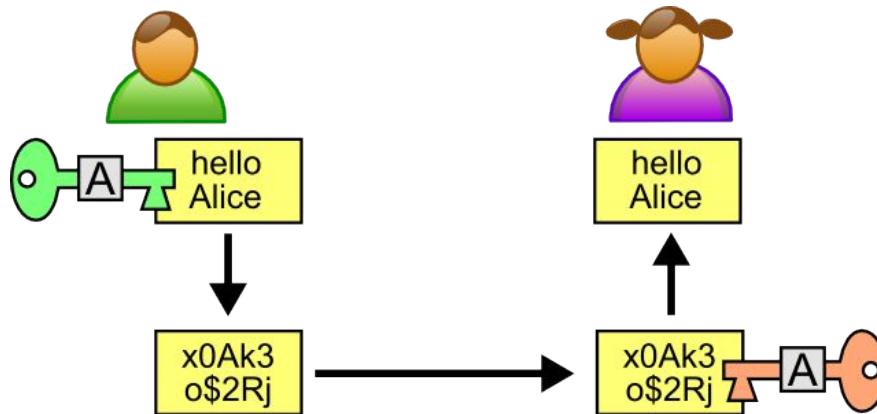
$$4 \times 4 = 16 \equiv 1 \bmod 5$$

$$11 \div 4 \bmod 5 = 11 \times 4 = 44 \equiv 4 \bmod 5$$

- ### Motivation

En cryptographie symétrique, la même clé est utilisée pour le chiffrement et le déchiffrement (→ symétrie). Cette clé doit donc être **transmise tout en étant maintenue secrète** (→ aussi appelée « cryptographie à clé secrète »), ce qui peut être très contraignant...

La cryptographie asymétrique fonctionne avec **deux clés** : une clé publique, partagée avec tous les expéditeurs pour le chiffrement des messages et une clé privée que seul le destinataire possède pour déchiffrer les messages qui lui sont adressés.



Bob utilise la **clé publique d'Alice** pour chiffrer les messages qu'il lui envoie.

Alice utilise sa **clé privée** pour les déchiffrer.

On parle aussi de « cryptographie à clé publique ».

- **Théorème d'Euler-Fermat**

Pour tout module  $n$  et pour tout entier  $a$  copremier de  $n$  :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

- **Chiffrement RSA** (Rivest, Shamir, Adleman, 1977)

Soit  $n$  le produit de deux nombres premiers distincts  $p$  et  $q \rightarrow \varphi(n) = (p - 1) \times (q - 1)$

Soit l'exposant  $e$  tq  $\text{pgcd}(e, \varphi(n)) = 1$

Soit le chiffré  $C$  du message clair  $M$ , produit avec la clé publique  $(e, n)$  :

$$C \equiv M^e \pmod{n}$$

Soit une clé privée  $(d, n)$  définie comme l'**inverse modulaire de  $e$  mod  $\varphi(n)$**  :

$$ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)} = 1 \pmod{(p - 1) \times (q - 1)}$$

On a donc le déchiffrement :

$$C^d = (M^e)^d = M^{ed} = M^{1 + k\varphi(n)} = M \times M^{\varphi(n)k} = M \times 1^k \equiv M \pmod{n}$$

- **Preuve de sécurité**

Un attaquant qui intercepterait  $C$  aurait besoin de générer la clé secrète  $d$  pour le déchiffrer. Il dispose également des valeurs publiques  $(e, n)$ . Il lui manque  $\varphi(n)$ .

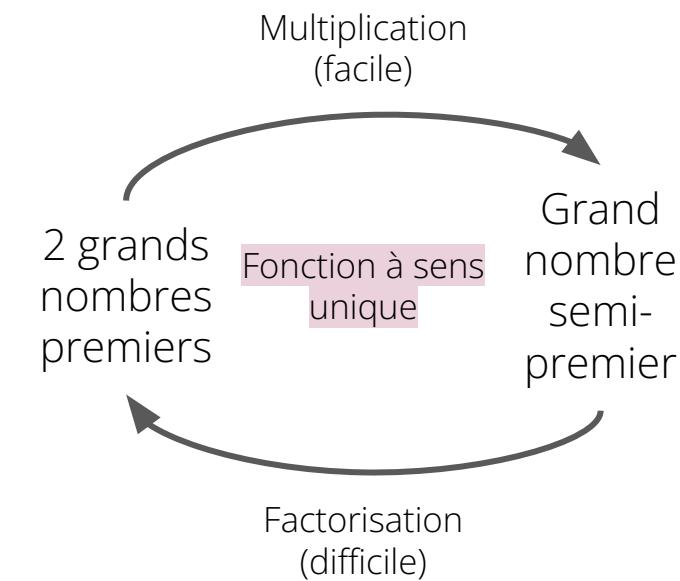
La sécurité de RSA repose sur le fait que calculer  $\varphi(n)$  seulement à partir de  $n$  nécessite de décomposer  $n$  en produit de facteurs premiers, ce qui est un problème difficile.

- **Remarque**

À la place de  $\varphi(n)$ , il est possible d'utiliser l'indicatrice de Carmichael  $\lambda(n)$ . Cela permet de générer des clés privées plus courtes et d'accélérer les calculs, mais peut créer des vulnérabilités à prendre en considération...

- **Fonction à trappe**

Fonction qu'il est facile d'évaluer en chaque point de son domaine, mais qu'il est difficile d'inverser (fonction à sens unique) à moins de disposer d'une information particulière, appelée « trappe ».



Dans RSA, la trappe est la connaissance des facteurs premiers d'un grand nombre composite.

- **Choix des valeurs**

Mathématiquement,  $e$  pourrait être n'importe quel entier relatif, tq  $\text{pgcd}(e, \varphi(n)) = 1$

Pour la vitesse des calculs, on choisit  $1 < e < \varphi(n)$

Une valeur souvent utilisée pour  $e$  est 65537 qui vaut 1000000000000001 en base 2.  
Cela facilite les calculs.

Le module  $n$  est choisi comme le produit de **deux grands nombres premiers**.

Par exemple, la taille de la clé  $n$  peut être de 2048 bits.

- **Déchiffrement accéléré** 

Il est possible de réduire la complexité du calcul de l'exposant de déchiffrement  $d$ , inverse modulaire de l'exposant public  $e$ , par rapport à l'algorithme d'Euclide étendu.

Pour cela, il faut décomposer le calcul en un système de congruences :

$$d_1 \equiv e^{-1} \pmod{(p-1)}$$

$$d_2 \equiv e^{-1} \pmod{(q-1)}$$

La solution est alors donnée par le **théorème des restes chinois** :

$$d = \sum e^{-1} N_i d_i \pmod{N}$$

$$\text{avec } N = (p-1) \times (q-1) = \varphi(n)$$

- **Théorème des restes chinois**

Dans un système à  $k$  équations (p. ex.  $k = 3$ ), permet de trouver  $x$  tq :

$$x \equiv b_1 \pmod{n_1}$$

$$x \equiv b_2 \pmod{n_2}$$

$$x \equiv b_3 \pmod{n_3}$$

avec  $\text{pgcd}(n_1, n_2) = \text{pgcd}(n_1, n_3) = \text{pgcd}(n_2, n_3) = 1$

On définit :

$$N = n_1 n_2 n_3$$

$$N_i = N/n_i$$

$$x_i \equiv N_i^{-1} \pmod{n_i}$$

$b_i$	$N_i$	$x_i$	$b_i N_i x_i$
$b_1$	$N_1 = n_2 n_3$	$x_1$	$b_1 N_1 x_1$
$b_2$	$N_2 = n_1 n_3$	$x_2$	$b_2 N_2 x_2$
$b_3$	$N_3 = n_1 n_2$	$x_3$	$b_3 N_3 x_3$

**Solution :**  $x = \sum b_i N_i x_i \pmod{N}$

- De même que la décomposition en facteurs premiers, il existe d'autres problèmes mathématiques dont la difficulté garantit la sécurité de certaines méthodes cryptographiques (fonctions à sens unique)
- **Problème du logarithme discret** (*DLOG problem*)

Le logarithme réel donne l'exposant  $x$  dans l'exponentiation de  $a$  par  $x$  :

$$a^x = b$$

Le logarithme discret peut être vu comme son analogue en arithmétique modulaire. Il donne l'exposant  $x$  dans l'exponentiation de  $g$  par  $x$  (modulo  $n$ ) :

$$a^x \equiv b \pmod{n}$$

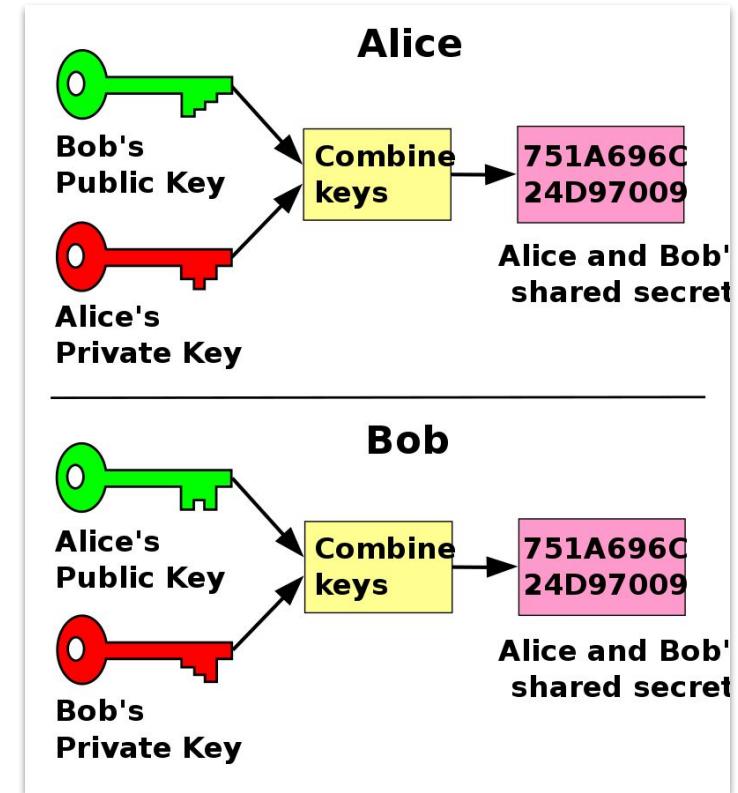
Cette exponentiation est facile à calculer, mais le calcul réciproque (logarithme discret) peut être très difficile pour certaines valeurs de  $a$  et de  $n$ . **Cette difficulté à calculer  $x$  garantit la sécurité du protocole d'échange de clé Diffie-Hellman (DH, 1976).**

## 4.4. Échange de clé DH

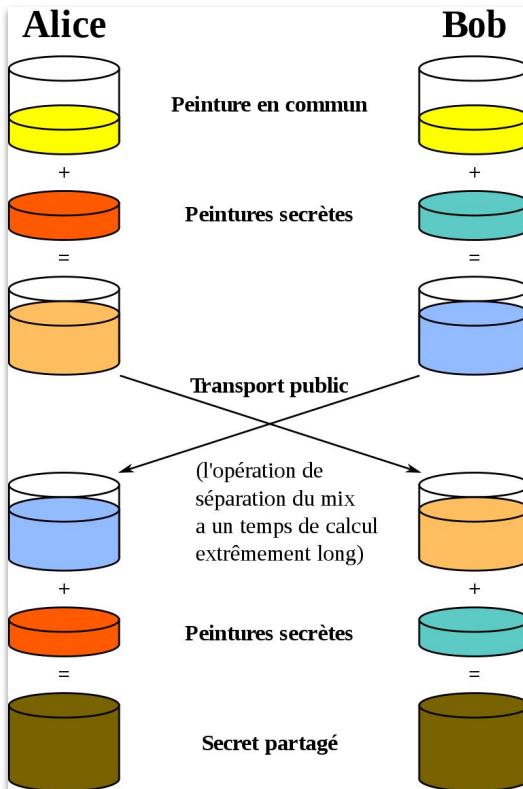
- **Principe général**

Il s'agit d'**établir une clé secrète** commune, que seuls Alice et Bob connaissent

Elle peut être utilisée ensuite pour un **chiffrement symétrique** des données à transmettre



- Calculs**



**Variables publiques** : le module  $p$  et le « générateur »  $g$  (échangées au début du *handshake* ou bien définies dans les standards)

**Variables privées** :

- Alice choisit aléatoirement (PRNG)  $a \in [1, p-1]$
- Bob choisit aléatoirement (PRNG)  $b \in [1, p-1]$

**Étapes** :

1. Alice calcule  $g^a \pmod{p}$  et le transmet à Bob
2. Bob calcule  $g^b \pmod{p}$  et le transmet à Alice
3. Alice calcule  $(g^b)^a \pmod{p} = g^{ab} \pmod{p}$
4. Bob calcule  $(g^a)^b \pmod{p} = g^{ab} \pmod{p}$

Même si Eve (*eavesdropper*) intercepte  $g^a \pmod{p}$  ou  $g^b \pmod{p}$ , elle ne pourra pas extraire les couleurs privées  $a$  et  $b$  (même en connaissant  $g$  et  $p$ ), et ne pourra donc pas calculer  $g^{ab} \pmod{p}$ , la couleur partagée.

- **Groupe**

Ensemble (de nombres ou autres objets) muni d'une loi de composition ou « opération binaire », notée  $*$  et qui satisfait certaines propriétés.

Un groupe  $(G, *)$  est défini par une loi de composition :

- **interne** :  $\forall$  éléments  $a$  et  $b \in G$ ,  $(a * b) \in G$
- **associative** :  $\forall$  éléments  $a$ ,  $b$  et  $c \in G$ ,  $(a * b) * c = a * (b * c)$
- admettant un **élément neutre**  $e \in G$  tq  $e * a = a * e = a$ ,  $\forall a \in G$
- avec,  $\forall a \in G$ , un **élément symétrique**  $b \in G$  tq  $a * b = b * a = e$ , élément neutre

**En cryptographie, on utilisera des groupes d'entiers relatifs modulo  $n$ , notés  $(\mathbb{Z}_n, *)$ , munis d'une opération d'addition ou de multiplication.**

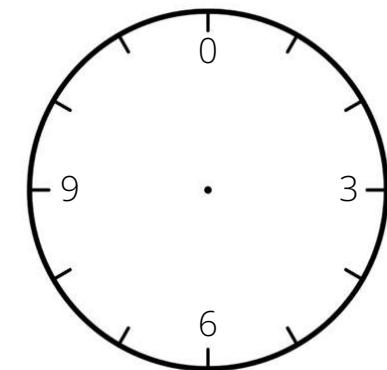
- **Exemple de groupe**

L'ensemble des entiers relatifs modulo 12 muni de l'addition  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$  est un groupe avec :

- 0 comme élément neutre
- l'opposé comme élément symétrique

Note : 0 et l'opposé sont les éléments neutre et symétrique, respectivement, pour tout groupe additif.

C'est un **groupe fini** : il est constitué d'un nombre fini d'éléments.



Ce nombre, noté  $|(\mathbb{Z}_{12}, +)| = 12$ , est appelé **ordre** du groupe.

C'est la **cardinalité** de l'ensemble qui forme le groupe.

- L'**ordre d'un élément**  $a$  du groupe est le plus petit entier  $k > 0$  tq l'opération de groupe répétée  $k$  fois à partir de  $a$  donne l'élément neutre. Il est noté  $|a|$ .

Groupe additif :  $a \cdot k \equiv 0 \pmod{n}$

Groupe multiplicatif :  $a^k \equiv 1 \pmod{n}$

**Exemple** : l'élément 4 du groupe  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$  est d'ordre 3.

$$4 \times 1 \% 12 = 4$$

$$4 \times 7 \% 12 = 4$$

$$4 \times 2 \% 12 = 8$$

$$4 \times 8 \% 12 = 8$$

Note : la multiplication est l'opération d'addition répétée

$$4 \times 3 \% 12 = 0$$

$$4 \times 9 \% 12 = 0$$

$$4 \times 4 \% 12 = 4$$

$$4 \times 10 \% 12 = 4$$

$$4 \times 5 \% 12 = 8$$

$$4 \times 11 \% 12 = 8$$

$$4 \times 6 \% 12 = 0$$

$$4 \times 12 \% 12 = 0$$

L'ordre d'un élément est l'ordre du **sous-groupe** qu'il génère.

Il est parfois appelé **période**.

- **Autre exemple de groupe**

L'ensemble des entiers relatifs modulo **12** muni de la multiplication  $(\mathbb{Z}_{12}, \times)$  est un groupe avec :

- 1 comme élément neutre
- **l'inverse comme élément symétrique**

Il comporte 4 éléments (« ordre 4 ») : ceux **ayant un inverse modulaire** et qui doivent donc être copremiers avec 12 ;  $|(\mathbb{Z}_{12}, \times)| = \varphi(12) = 4 : \{1, 5, 7, 11\}$

Note : pour tout groupe multiplicatif,  $|(\mathbb{Z}_n, \times)| = \varphi(n)$

- **À retenir...**

Pour  $(\mathbb{Z}_n, +)$ , l'ordre est toujours **n**. Mais pour  $(\mathbb{Z}_n, \times)$ , l'ordre est égal à  $\varphi(n) < n$ , car il ne comporte que les éléments ayant un inverse modulo **n**.

L'ordre est le plus proche de **n**, quand **n** est premier, avec  $|(\mathbb{Z}_n, \times)| = \varphi(n) = n - 1$

- **Générateur**

Un générateur est un élément qui, par répétitions de l'opération du groupe, peut générer tous les autres éléments du groupe.

Il est également appelé **élément primitif** du groupe.

L'ordre d'un générateur est égal à l'ordre du groupe.

**Exemple :** 5 est un générateur du groupe  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ .

$$5 \times 1 \% 12 = 5$$

$$5 \times 7 \% 12 = 11$$

$$5 \times 2 \% 12 = 10$$

$$5 \times 8 \% 12 = 4$$

$$5 \times 3 \% 12 = 3$$

$$5 \times 9 \% 12 = 9$$

$$5 \times 4 \% 12 = 8$$

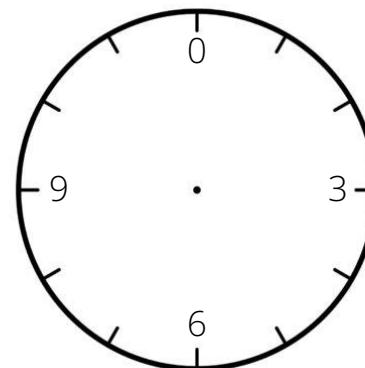
$$5 \times 10 \% 12 = 2$$

$$5 \times 5 \% 12 = 1$$

$$5 \times 11 \% 12 = 7$$

$$5 \times 6 \% 12 = 6$$

$$5 \times 12 \% 12 = 0$$



Groupe avec générateur(s)  $\Leftrightarrow$  **groupe cyclique**

- Le logarithme discret est aussi défini pour un groupe additif (même s'il devrait alors s'appeler « division discrète ») ; il donne  $x$  dans
$$a \times x \equiv b \pmod{n}$$
- Par analogie avec le logarithme réel, il faut que  $x \exists$  et soit unique  $\forall b$   
Pour cela, **a doit être générateur** du groupe des entiers modulo  $n$

**Exemples** pour  $(\mathbb{Z}_n, +)$  et  $(\mathbb{Z}_n, \times)$  :

$x \not\exists$  pour

$$4 \times x \equiv 10 \pmod{12}$$

$$4^x \equiv 7 \pmod{12}$$

$x$  n'est pas unique pour

$$4 \times x \equiv 8 \pmod{12}$$

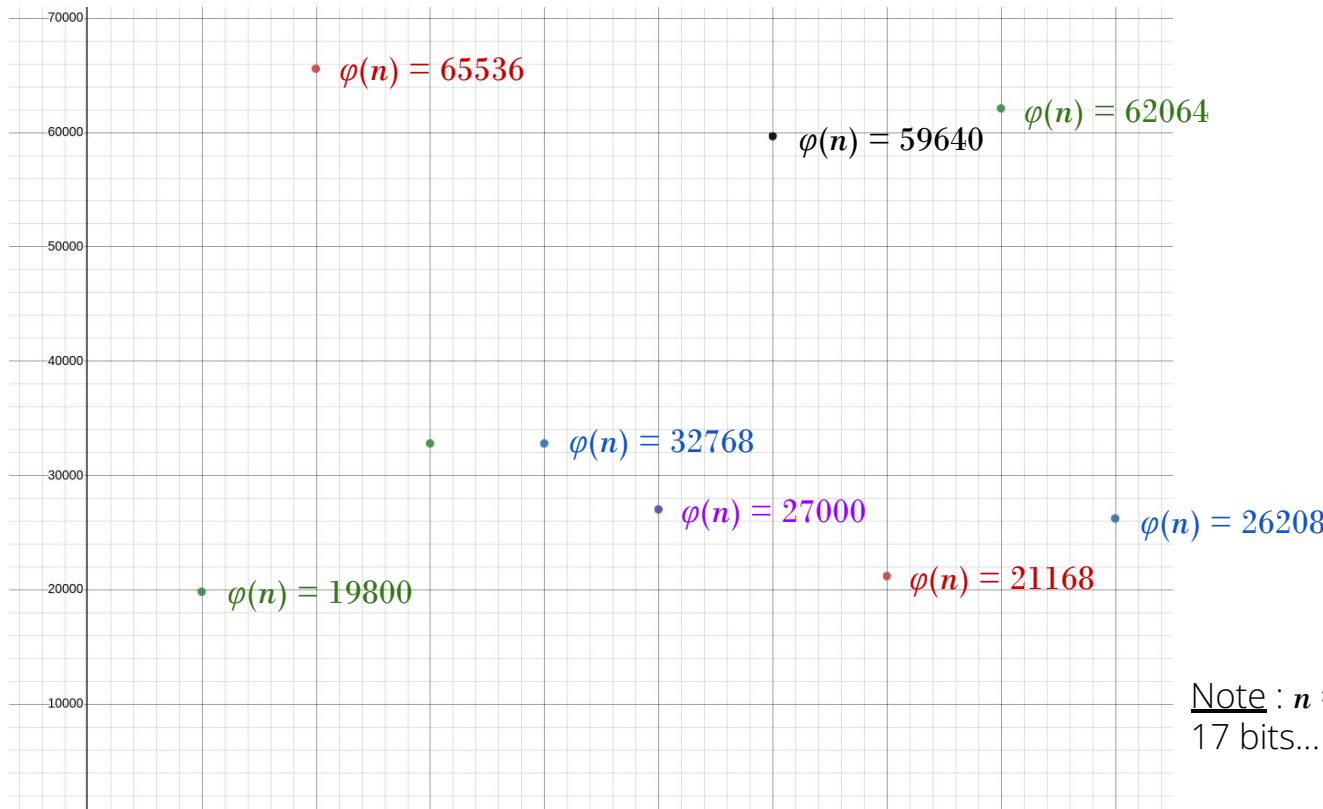
$$2^x \equiv 8 \pmod{12}$$

- La complexité du DLOG est bien moins grande pour un groupe additif que multiplicatif  
On calcule donc :  $a^x \equiv b \pmod{n}$ , avec  $a$  générateur du groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$   
Note 1 :  $a$  est aussi appelé « racine primitive modulo  $n$  »  
Par exemple, on utilise souvent  $a = 2$  ou  $a = 3$   
Note 2 : la taille du générateur n'a pas d'effet sur la difficulté du DLOG (cf. *random self-reducibility*)
- On choisit un **très grand nombre** pour le module  $n$ , entre 2048 et 4096 bits,  
afin que l'ordre de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  soit très grand pour qu'aucun adversaire ne puisse calculer le  
DLOG par la force brute, ni par crible algébrique (cf. *function field sieve* et Logjam)  
Ce très grand nombre  $n$  **doit être premier** :
  - Garantit que tous les éléments non-nuls et non-neutres sont générateurs  
[Corollaire du Théorème de Lagrange](#)
  - $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| = \phi(n) = n - 1$

Note 3 : Pour se prémunir de certaines attaques, on utilise des nombres premiers  $p$  de Sophie Germain  
(*safe prime*) tq  $p = 2q + 1$ , avec  $q$  premier

## 4.6. Choix des paramètres

- **Illustration** : valeurs de  $\varphi(n)$  pour  $n$  décroissant de 65538 à 65530



Note :  $n = 65537$  fait seulement  
17 bits...

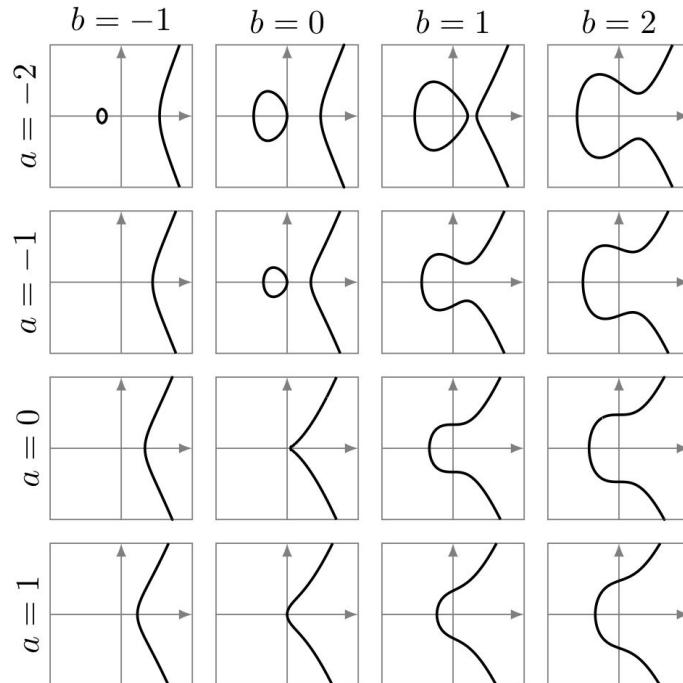
- Utiliser un module premier  $p$  fait de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  le groupe multiplicatif d'un « corps fini » (*finite field* ou *Galois field*)
- **Finite Field DH (FFDH) vs Elliptic Curve DH (ECDH)**  
Alternativement, il est possible d'utiliser une structure de groupe définie par des points sur une **courbe elliptique**
  - L'opération de ce groupe est l'addition, mais le calcul du DLOG y est plus complexe que sur  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ 
    - Cela permet d'utiliser des clés plus courtes, 256 ou 384 bits, ce qui accélère les calculs (p. ex. protocole TLS)

⚠ FFDH manipule directement des éléments dans un corps fini, alors que ECDH opère dans un groupe défini par des points sur une courbe elliptique, qui est elle-même définie sur un corps fini. Le calcul des points sur la courbe elliptique se fait donc modulo  $n$ , ordre du corps fini.

## • Courbe elliptique

Courbe algébrique définie par une équation de la **forme de Weierstrass** :

$$y^2 = x^3 + ax + b$$



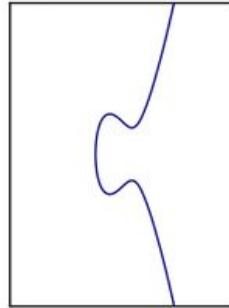
L'ellipse n'est pas une courbe elliptique !  
 Le nom des courbes elliptiques vient historiquement de leur association avec les intégrales elliptiques, elles-mêmes appelées ainsi car elles servent en particulier à calculer la longueur d'arcs d'ellipses.

## 4.7. Courbes elliptiques

- Il existe d'autres formes de courbes elliptiques, chacune ayant ses avantages...

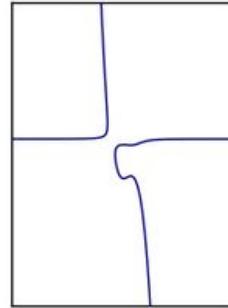
Short Weierstrass

$$y^2 = x^3 + ax + b$$



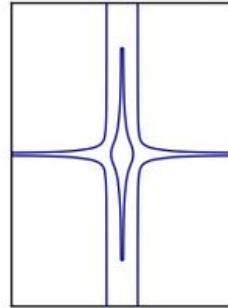
Koblitz

$$y^2 + xy = x^3 + ax^2 + 1$$



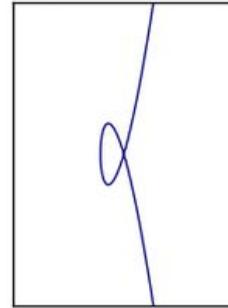
Edwards

$$y^2 + x^2 = 1 + dx^2y^2$$



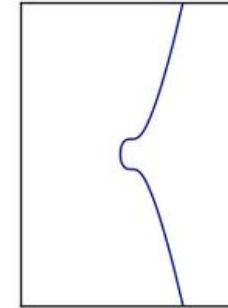
Montgomery

$$by^2 = x^3 + ax^2 + x$$



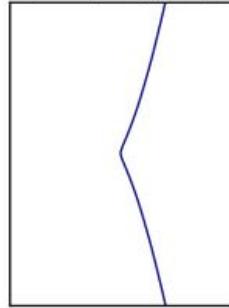
Barreto-Naherig

$$y^2 = x^3 + b$$



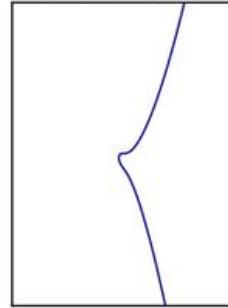
Jacobian

$$y^2 = x(x+1)(x+\lambda)$$



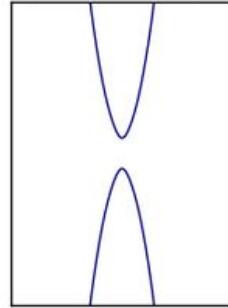
Hessian

$$by^2 + axy + by = x^3$$



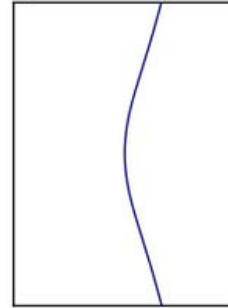
Jacobi quartic

$$y^2 = cy^4 + 2ax^2 + 1$$



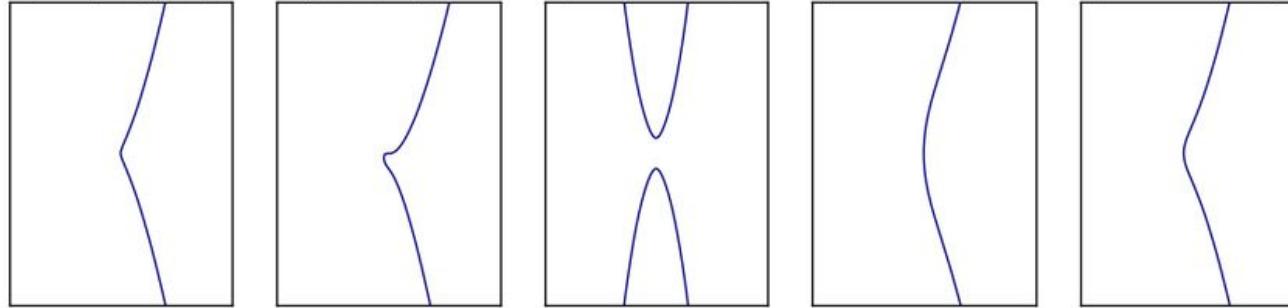
Doche-Icart-Kohel 2

$$y^2 = x^3 + ax^2 + 16ax$$



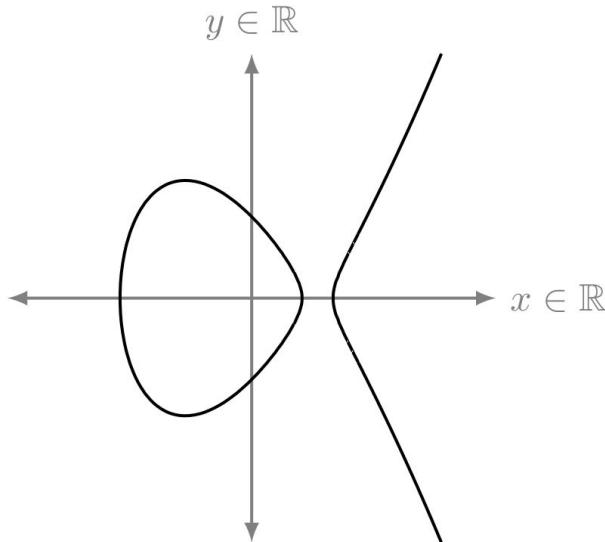
Doche-Icart-Kohel 3

$$y^2 = x^3 + 3a(x+1)^2$$

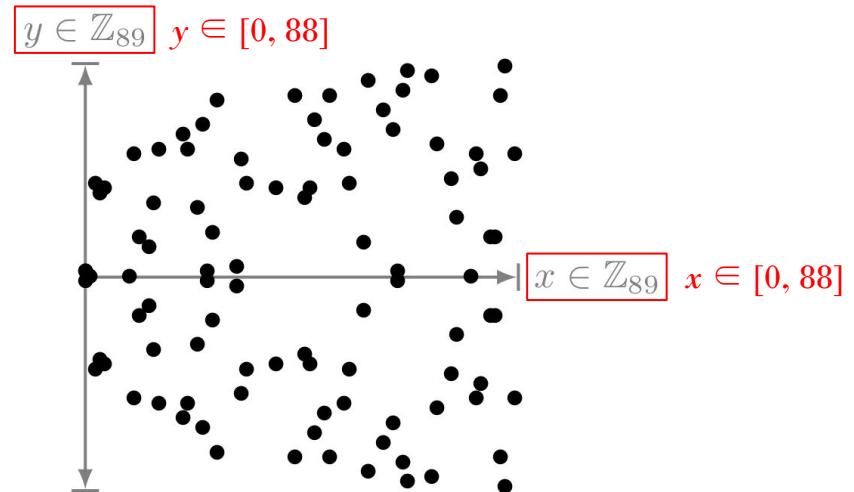


## 4.7. Courbes elliptiques

- Définition d'une courbe elliptique sur un corps fini **vs** sur les réels :



$$y^2 = x^3 - 2x + 1 \text{ over } \mathbb{R}$$



$$y^2 = x^3 - 2x + 1 \text{ over } \mathbb{Z}_{89}$$

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{n}$$

- **Deux caractéristiques notables** d'une courbe elliptique :

- 1.** symétrique par rapport à l'axe des abscisses
- 2.** intersection avec une droite en trois points maximum  
équation polynomiale de degré 3

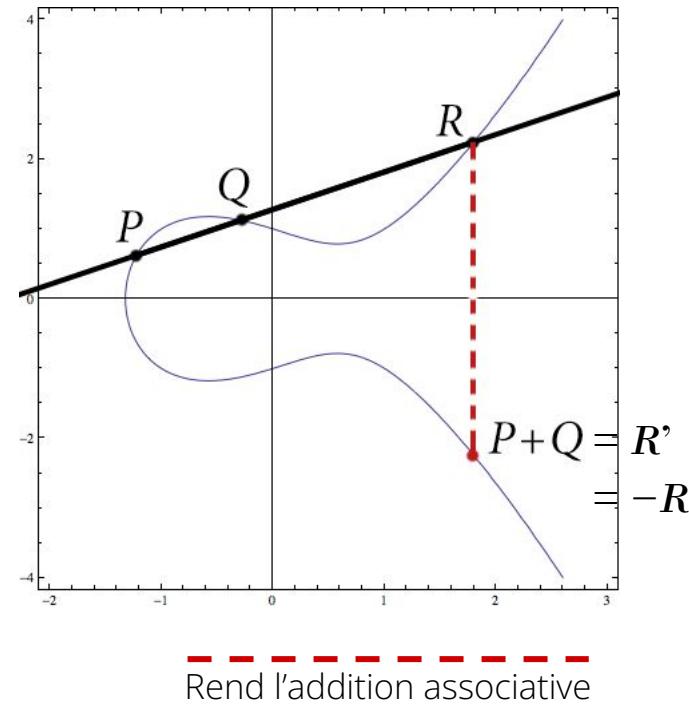
- **Addition de deux points distincts**

Calcul de la pente  $\lambda$  entre les deux points  $P$  et  $Q$  :

$$\lambda = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

$$x_{r'} = \lambda^2 - x_p - x_q$$

$$y_{r'} = \lambda(x_p - x_{r'}) - y_p$$



- **Addition d'un point  $P$  avec lui-même**

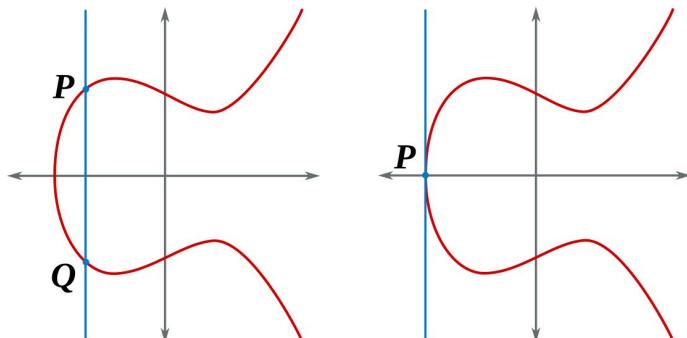
Pente  $\lambda$  de la tangente en  $P$  : dérivée de la courbe en  $P$

$$\lambda = \frac{3x_p^2 + a}{2y_p}$$

- **Cas particuliers pour l'addition**

Si  $P$  et  $Q$  sont opposés, on définit  $P + Q = P + (-P) = O$

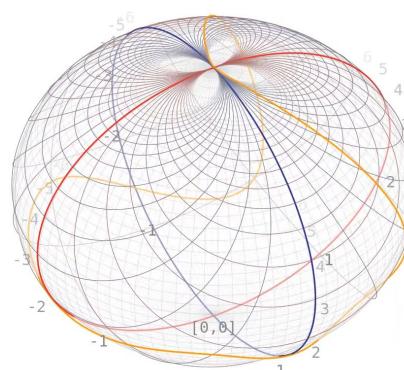
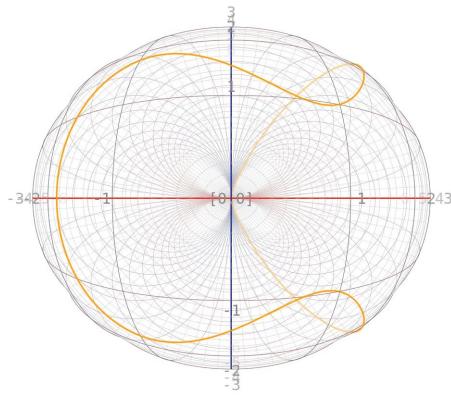
Si  $P$  est un point d'inflection (la tangente est verticale), on définit  $P + P = O$



Le « point (imaginaire) à l'infini »  $O$  est l'élément neutre pour l'opération d'addition du groupe formés par les points de la courbe elliptique.

Sur le plan cartésien, ce n'est pas un point de la courbe : il représente la limite de la courbe à l'infini.

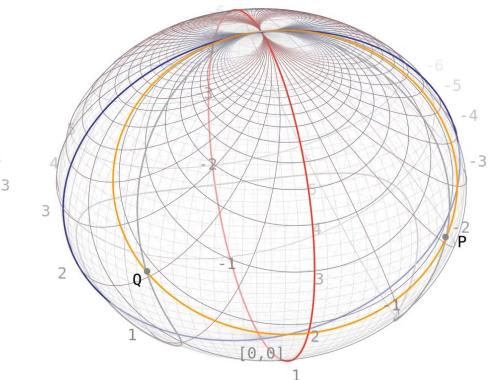
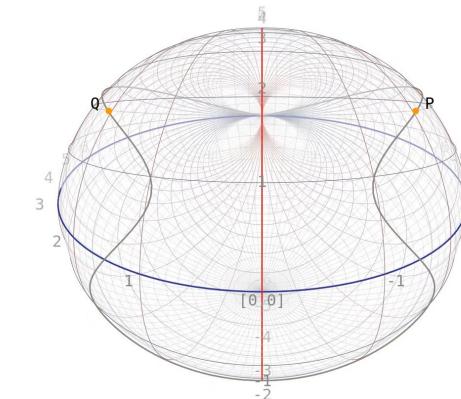
- Projection du plan de la courbe elliptique sur une sphère



Si on **additionne deux points opposés**  $P$  et  $Q$ , la ligne infinie passant par ces deux points forme un cercle qui coupe la courbe au point à l'infini.

L'origine du système de coordonnées est au pôle Sud. En allant vers l'infini dans n'importe quelle direction, on se rapproche infiniment du pôle Nord.

Sur le plan projectif (surface de la sphère), on voit que la courbe elliptique passe par le **point à l'infini**, au pôle nord.



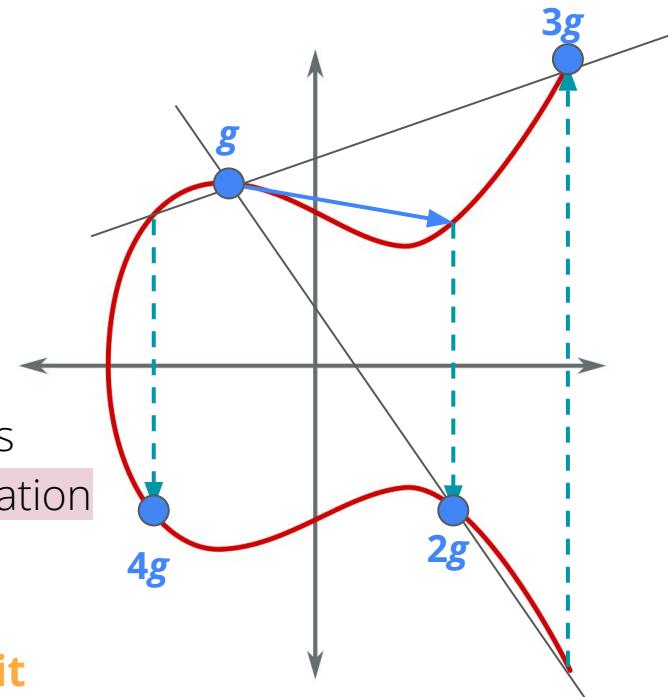
- **Génération des points sur une courbe elliptique**

À partir d'un point générateur  $g$ , les éléments du groupe sont calculés par additions répétées de  $g$  avec lui-même (multiplication par un scalaire modulo  $n$ )

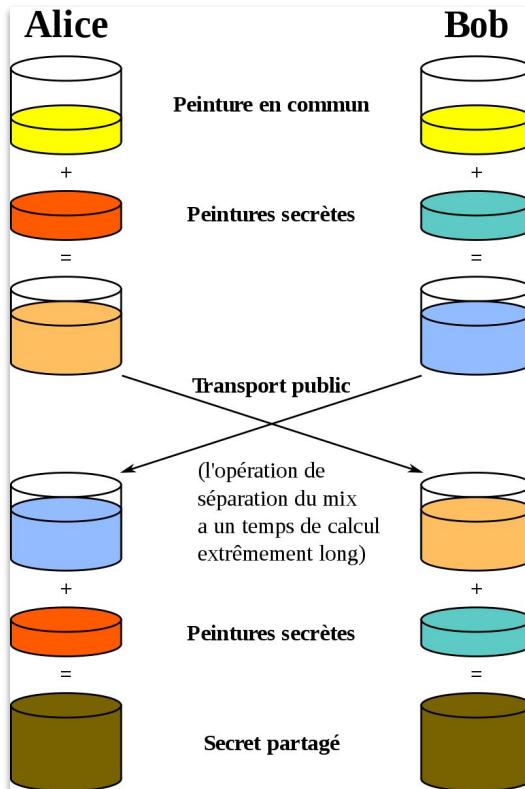
Le calcul du DLOG donne donc  $x$  dans  
 $g \times x \equiv h \pmod{n}$

- **L'ordre de la courbe elliptique** est le nombre de points sur la courbe. Il est égal au nombre de solutions de l'équation de la courbe dans le corps fini sur lequel elle est définie.

**Il doit être très grand afin que le calcul du DLOG soit difficile pour l'adversaire.**



- **Calculs**



### Variables publiques :

- une **courbe elliptique** spécifique
- un générateur  **$g$**

### Variables privées (grand nombres) :

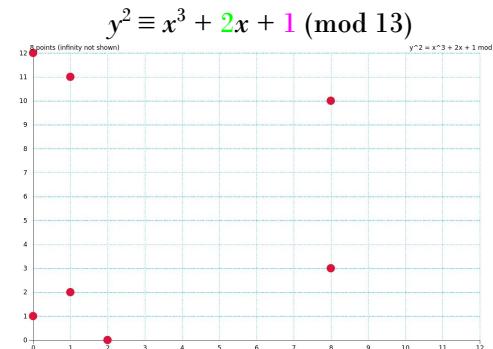
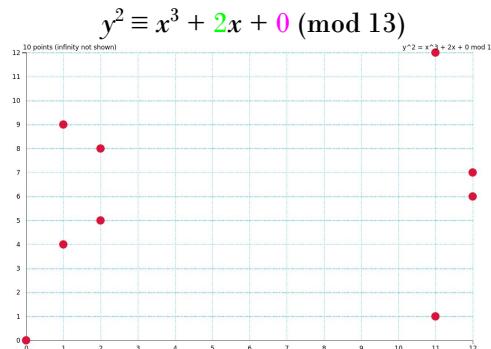
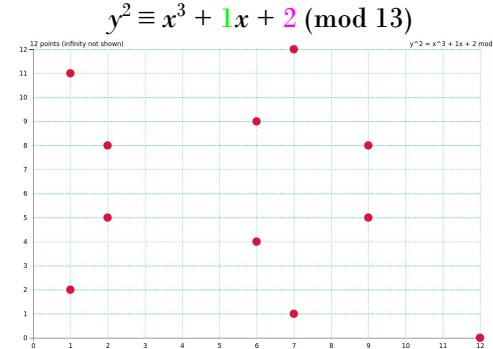
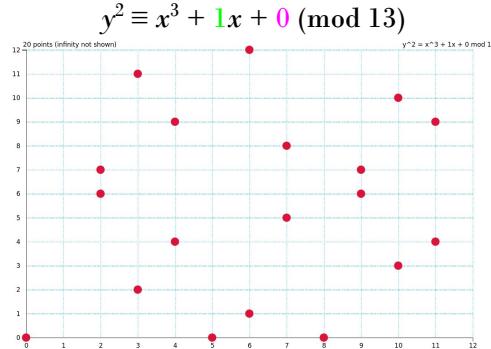
- Alice choisit aléatoirement (PRNG)  **$a \in [1, p-1]$**
- Bob choisit aléatoirement (PRNG)  **$b \in [1, p-1]$**

### Étapes :

1. Alice calcule  **$ag$**  et le transmet à Bob
2. Bob calcule  **$bg$**  et le transmet à Alice
3. Alice calcule  **$abg$**
4. Bob calcule  **$abg$**

## 4.8. Choix des paramètres

- **Le nombre de points sur la courbe doit être le plus grand possible**  
Ce nombre dépend **de la courbe choisie...**



- **Le nombre de points sur la courbe doit être le plus grand possible**

... dont **le module  $n$** , ordre du corps fini sur lequel est définie la courbe

⚠ Ne pas confondre avec l'ordre de la courbe

- **$n$  doit être un grand nombre**, car la limite supérieure du nombre de points sur la courbe est égale à  $n^2$
- **$n$  doit être premier**, afin que le nombre de point soit le plus proche de cette limite supérieure (cf. endomorphisme de Frobenius)

- **L'ordre de la courbe doit être premier**, afin que tous les points soient générateurs, excepté **0**

Corollaire du Théorème de Lagrange

- **Exemple** : courbe secp256k1, utilisée dans Bitcoin pour les signatures numériques...

$$y^2 \equiv x^3 + 7 \pmod{p}$$

$$p = 2^{256} - 2^{32} - 2^9 - 2^8 - 2^7 - 2^6 - 2^4 - 1$$

Pour que  $p$  soit premier

Le corps fini doit être assez grand pour des clés privées de 256 bits



$$p =$$

115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007908834671663

Ordre =

115792089237316195423570985008687907852837564279074904382605163141518161494337

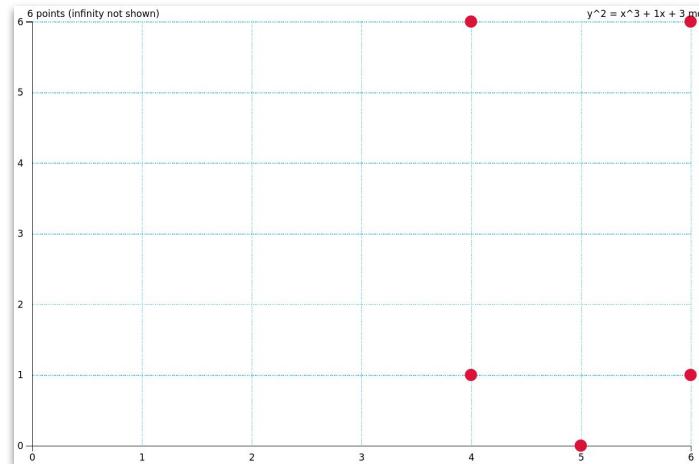
- Compter les points sur une courbe elliptique : approche naïve (exhaustive)**

Exemple :  $y^2 \equiv x^3 + x + 3 \pmod{7}$

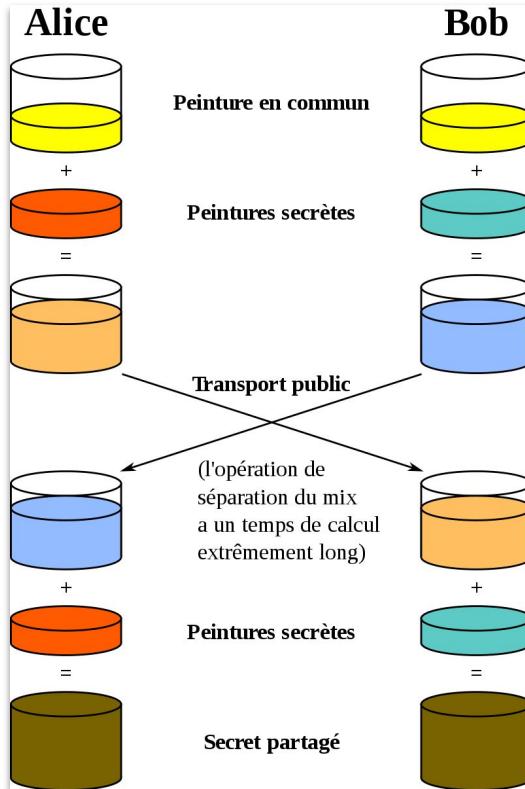
$x$	$x^3 + x + 3$	$y$	$y^2$
0	3	0	0
1	5	1	1
2	6	2	4
3	5	3	2
4	1	4	2
5	0	5	4
6	1	6	1

Les valeurs  $(x, y)$ , solutions de l'équation, sont les coordonnées des points de la courbe.

Les **six points** faisant partie de cette courbe sont :  
 $(4,1)$ ,  $(4,6)$ ,  $(5,0)$ ,  $(6,1)$ ,  $(6,6)$  et  $O$ , point imaginaire à l'infini.



## 4.9. Chiffrement ElGamal (1985)



**Variables publiques :** le module  $p$  et le « générateur »  $g$  (échangées au début du *handshake* ou bien définies dans les standards)

**Variables privées :**

- Alice choisit aléatoirement (PRNG)  $a \in [1, p-1]$
- Bob choisit aléatoirement (PRNG)  $b \in [1, p-1]$

**Étapes :**

1. Alice calcule  $g^a \pmod{p}$  et le transmet à Bob
2. Bob calcule  $g^b \pmod{p}$  et le transmet à Alice
3. Alice calcule  $(g^b)^a \pmod{p} = g^{ab} \pmod{p}$
4. Bob calcule  $(g^a)^b \pmod{p} = g^{ab} \pmod{p}$

$g^{ab} \pmod{p}$ , est une clé secrète  $k$  qui sert à chiffrer un message  $m$  tq :

$$c = m \cdot k \pmod{p}$$

Celui qui reçoit  $c$  peut le déchiffrer grâce à  $k^{-1}$ , inverse modulaire de  $k$  :

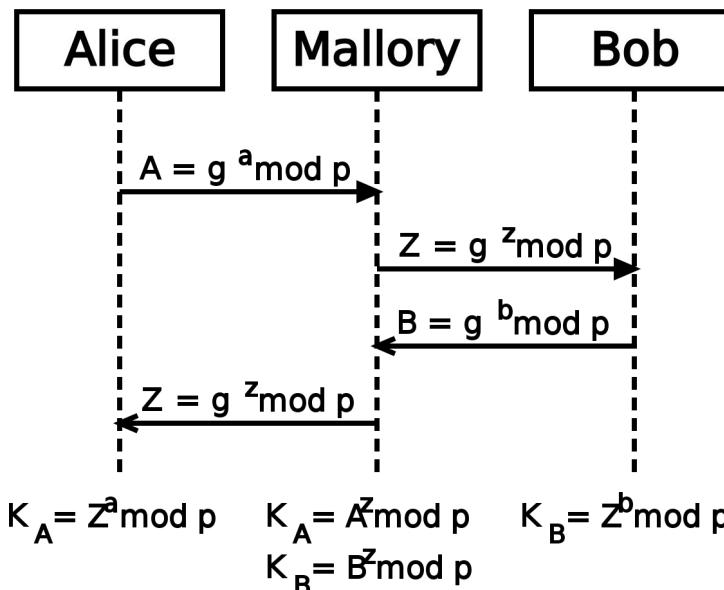
$$m = c \cdot k^{-1} \pmod{p}$$

ElGamal fonctionne aussi sur les courbes elliptiques, avec  $abg$

- **Attaque de l'homme du milieu (*man-in-the-middle attack*)**

L'échange de clé (EC)DH est vulnérable à ce type d'attaque.

C'est pourquoi il est utilisé avec RSA pour authentifier l'origine des messages reçus...



## ● Méthode de factorisation de Fermat

Basée sur la représentation de tout entier naturel impair  $N$  comme la différence entre deux carrés :

$$N = a^2 - b^2 \text{ qui se factorise : } N = (a + b)(a - b)$$

FactorFermat( $N$ ) :

```
a ← ⌈√N⌉ // Partie entière supérieure : ⌈2,4⌉ = 3 et ⌈-2,4⌉ = -2
```

```
b2 ← axa - N
```

```
tant que b2 n'est pas un carré:
```

```
    a ← a + 1
```

```
    b2 ← axa - N
```

```
fin tant que
```

```
retourner A - √b2 // ou A + √b2
```

Dans RSA, le module public est  $n = pq$ , avec  $p$  et  $q$  deux très grands nombres premiers

Si  $p$  et  $q$  sont proches, on obtient une solution après seulement quelques itérations !