Université d'Evry val d'Essonne
Master MIAGE

TD 3 - Probabilités

Exercice 1 - Loi Normale

Rappelons que la loi normale $N(\mu,\ \sigma^2)$ a pour densité de probabilité $\varphi(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2\ /\ (2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
La loi normale N(0,1) a une moyenne nule, une variance de 1 et une densité de probabilité $\varphi(x)$ obtenue en utilisant μ=0 et σ=1 dans l'équation ci-dessus. La fonction de répartition est notée $\phi(x)$ et a une formule compliquée. Dans ce problème, nous allons voir que l'augmentation ou le déplacement d'une variable aléatoire normale retourne une variable aléatoire normale aussi.

Supposons que $Z \rightarrow N(0,1)$ et que $X = aZ + b$.

(a) Calculez l'espérance μ et la variance σ^2 de X.
(b) Exprimez la fonction de répartition $F_X(x)$ de X en fonction de ϕ, puis dérivez la pour trouver la densité de probabilité $f_X(x)$ de X. (sous-question: comment calculer la dérivée d'une fonction composée ?)
(c) Utilisez (b) pour prouver que X suit une distribution de type $N(b, a^2)$.
(d) Utilisez (a) et (c) pour montrer que la distribution $N(\mu,\ \sigma^2)$ a pour moyenne μ et variance σ^2.

Exercice 2 - Temps restant à vivre

Rappelons qu'une variable aléatoire exponentielle $X \rightarrow$ *exp*(λ) a une moyenne de $1/\lambda$ et une densité de probabilité $f(t)\ =\ \lambda\ e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.

(a) Calculez $p(X \geq t)$.
(b) Supposons que X_1 et X_2 sont deux variables exponentielles indépendantes et de moyenne $1/\lambda$. Soit $T = \min(X_1, X_2)$. Trouvez la fonction de répartition de T. Indice : qu'est-ce que $p(T \geq t)$?
(c) Supposons que nous testions trois marques d'ampoules B_1, B_2 et B_3 dont les durées de vie suivent une loi exponentielle de moyenne 1/2, 1/3 et 1/5 d'années respectivement. En supposant que les trois ampoules sont indépendantes, au bout de combien de temps peut on s'attendre à ce qu'une des ampoules meure ?

Exercice 3 - Douloureuse jointure

Supposons que X et Y ont une densité de probabilité jointe $f(x,y) = c(x^2+xy)$ sur $[0,1]\times[0,1]$.
(a) Calculez c, puis la fonction de répartition F(x,y).
(b) Trouvez les distributions de probabilité et fonctions de répartition marginales f_X, f_Y, F_X, et F_Y.
(c) Calculez E(X), V(X), la covariance de X et Y, et la corrélation de X et Y.