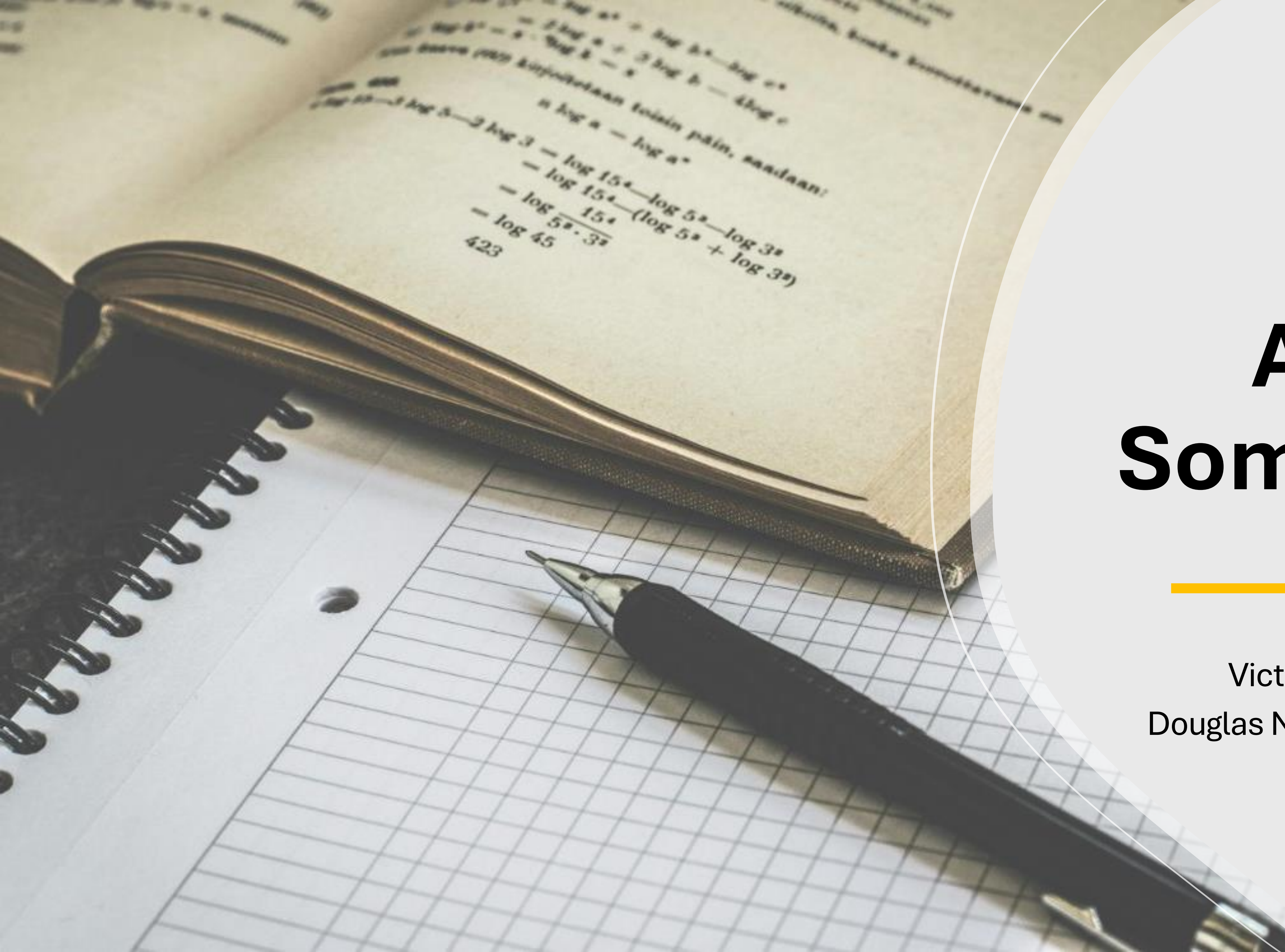


05/09/2024

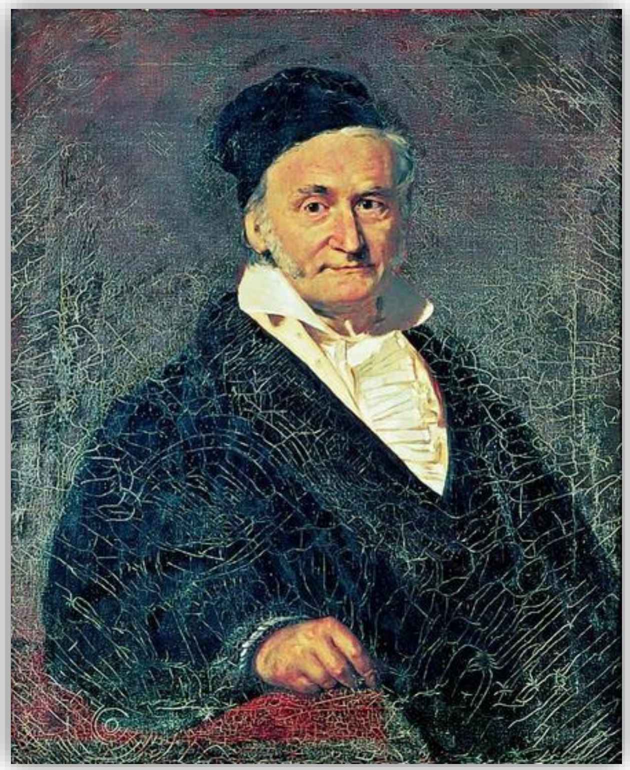
Aulão Somatórios

Victor Souza Lima
Douglas Nicolas Silva Gomes

O que veremos:

- Propriedades básicas de somatórios
- Somatório de Gauss
- Perturbação da soma
- Prova por indução
- Exercícios

- PROPRIEDADES



1. Linearidade

- Se a_i e b_i são sequências de números e c é uma constante, então:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

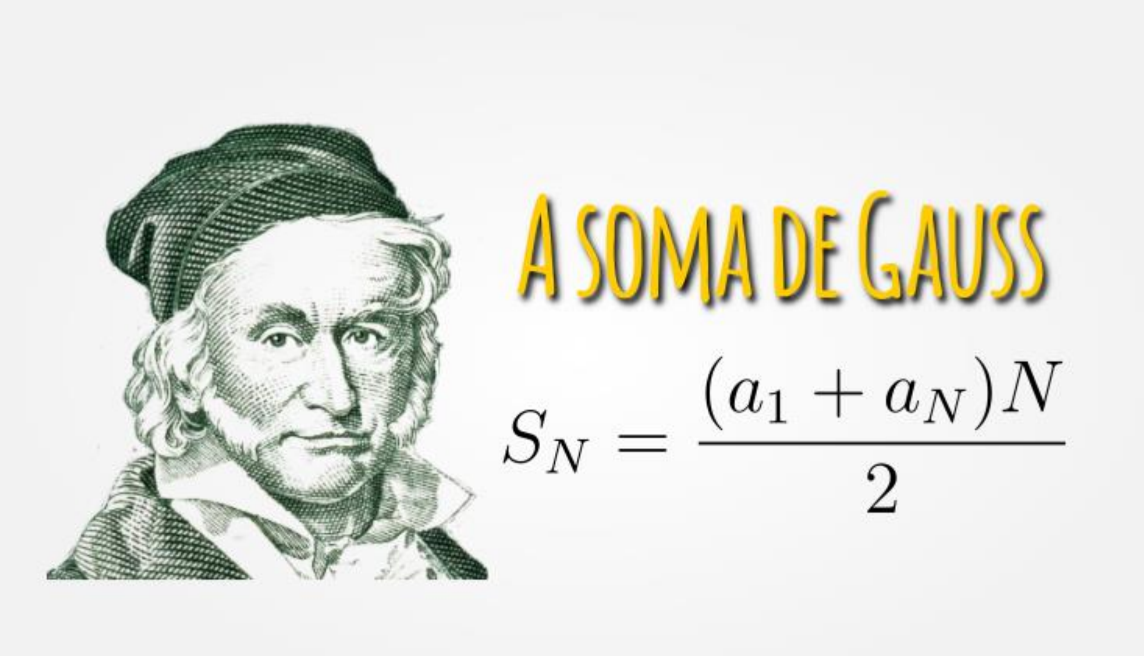
$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

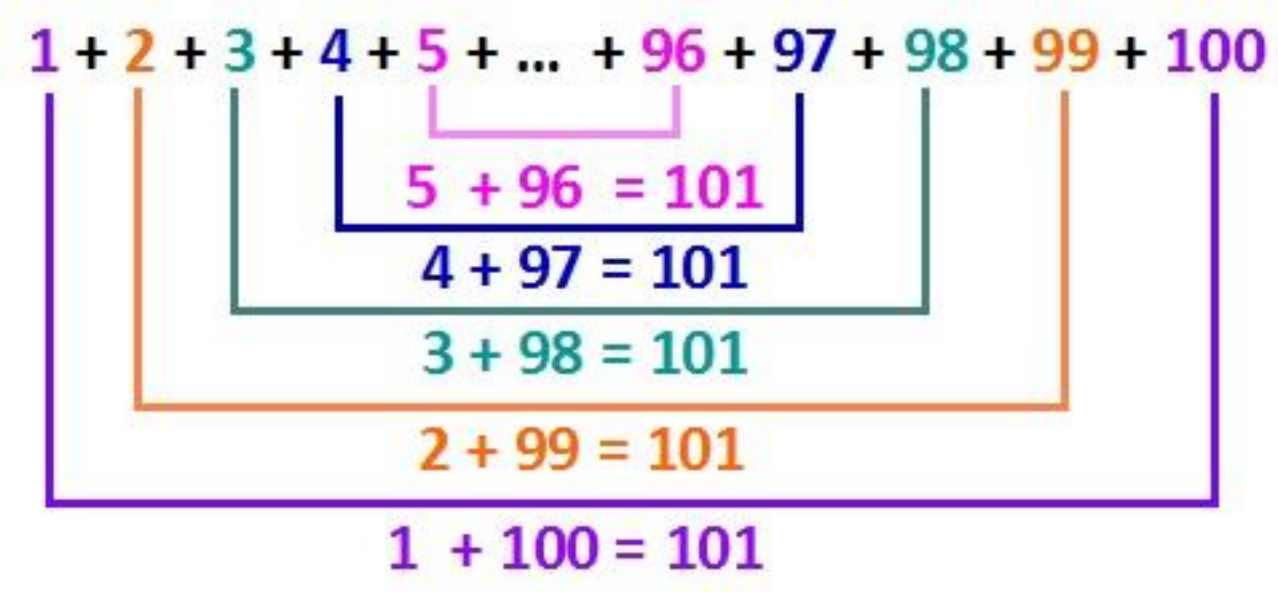
2. Divisão do Intervalo de Somatório

- Um somatório pode ser dividido em partes menores:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

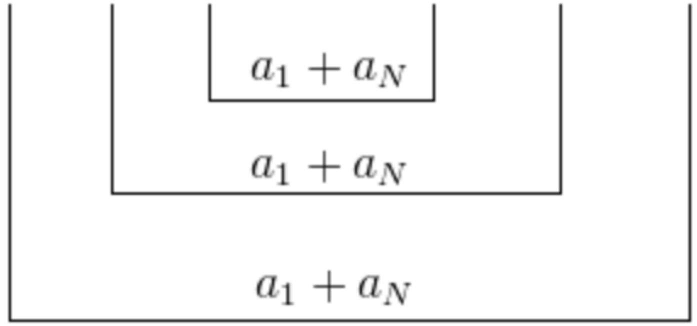
Isso permite dividir a soma em intervalos diferentes.





- Somatório de Gauss

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{N-2} + a_{N-1} + a_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$$



1-

O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \leq i \leq n}(n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

2-

Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula fechada para o somatório de Gauss:

$$\sum_{0 \leq i \leq n} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

3-

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

- PERTUBAÇÃO DA SOMA

$$S_n + a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (a_{i+1}) + a_0$$

Exercícios:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i^2$$

- # PROVA POR INDUÇÃO

$$P(n): 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Exercícios:

Usando a comutatividade, prove que os somatórios abaixo são iguais:

$$\sum_{0}^{n}(3+i)=$$

Prove por indução que a fórmula abaixo para a soma dos quadrados perfeitos é verdadeira:

$$S_n=\sum_{0\leq i\leq n} i^2=\frac{n\,(n+1)(2.n+1)}{6}, \text{ para } n\geq 0$$

Exercícios Extras:

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2-(2i)^2]=$$

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2]=$$

Provas:

- Provas:

3. Usando a propriedade P2, $S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$, encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática. Nesta questão, você deve lembrar que $\sum_0^n ax^i = \frac{a - ax^{(n+1)}}{1-x}$.

$$S_n = \sum_{0}^{n} (4^i \times 5i)$$

4. Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$S_n = \sum_{1}^{n} [(4i+5)^2 - (4i-5)^2]$$

- Provas:

3. Usando a propriedade P2, $S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$, encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática. Nesta questão, você deve lembrar que $\sum_0^n ax^i = \frac{a - ax^{(n+1)}}{1-x}$.

$$S_n = \sum_0^n (2i \times 3^i)$$

4. Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática.

$$S_n = \sum_1^n [(2i+3)^2 - (2i-3)^2]$$

- Provas:

1. Considere o código abaixo e escreva, utilizando a notação Σ, o somatório do número de multiplicações em função da entrada n. Após, usando a propriedade P2, $S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1}$, encontre a fórmula fechada do somatório e, em seguida, prove usando indução matemática.

```
public void calcula(int n) {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 1; j <= i; j++) {
            a *= 2;
            b *= 2;
            c *= 2;
        }
        b *= 3;
        c *= 3;
    }
}
```

2
15
x 5
75

- Provas:

1. Dado os códigos abaixo, para cada questão, apresente a função de complexidade para o número de multiplicações para o pior e melhor caso usando a notação Θ. Além disso, descreva quando acontece cada um desses dois casos.

A)

```
int multiply(int a, int b) {
    if (a == 0 || b == 0) {
        return 0;
    } else if (a == 1) {
        return b;
    } else if (b == 1) {
        return a;
    } else if (a % 2 == 0) {
        return multiply(a / 2, b) * 2;
    } else {
        return multiply(a / 2, b) * 2 + b;
    }
}
```

B)

```
static int power(int a, int b) {
    if (b < 0) return a;
    if (b == 0) return 1;
    int sum = a;
    for (int I = 0; I < b - 1; I++)
        sum *= a;
    }
    return sum;
}
```

C)

```
void printPairs(int[] array) {
    for (int i = 0; i < array.length; i++) {
        for (int j = 0; j < array.length; j++) {
            System.out.println(array[i] * array[j]);
        }
    }
}
```

- Provas:

2. Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove usando indução matemática.

$$S_n = \sum_{0}^{n} (3i \times 2i^2)$$

Obrigado!