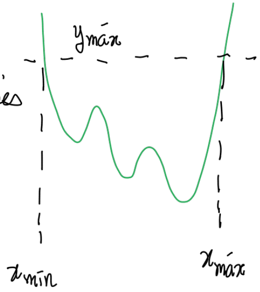
Achando um Mínimo Global

Método 2: "Dente de serra"

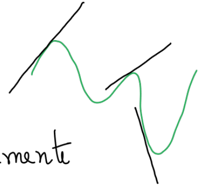
(Shubert-Piyavskii)

Requerimentos do método

- Fronteiras à esquerda e à direita x_{min} e $x_{máx}$, obtidas de considerações sobre o modelo ou impondo um teto ao valor da função (veja slide anterior)



- Uma quota superior para a "inclinação do gráfico" ($|f'(x)| \leq C$ para $x_{min} \leq x \leq x_{máx}$)



$f(x)$ contínua com derivada limitada uniformemente

(ou $f(x)$ do tipo Lipschitz)

Comentários

- Método de Shubert-Piyavskii, também chamado "método dente de serra"

- Garante que o mínimo global é determinado, diferentemente do Método 1, testando pontos.

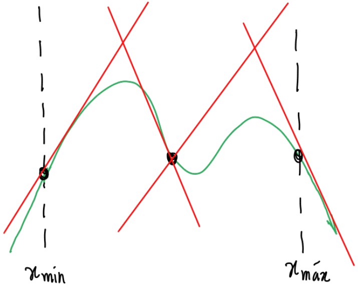
- Por conveniência, em vez de minimizar, vamos maximizar ($\min_x f(x) = \max_x (-f(x))$)

O método "dente de serra"

$f(x) : [x_{min}, x_{max}] \to \mathbb{R}$ contínua com derivada limitada.

1. Tome três pontos sobre o gráfico: x_{min}, $x_{máx}$, $\dfrac{x_{min} + x_{max}}{2}$

2. Usando (a maior) inclinação m na fronteira, tome uma reta por cada ponto com inclinação m ou $-m$.



Exercício 1. Dados $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 30x^2 - 50x + 200$, fronteiras -5 e 7, e inclinação máxima 450,

a) Ache os três pontos requeridos pelo método

b) Ache as equações das quatro retas por esses pontos com inclinações ± 450.

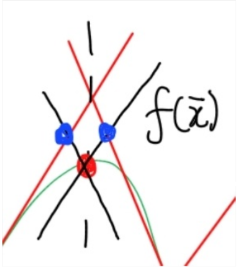
c) Ache os pontos onde as retas à esquerda e à direita se encontram.

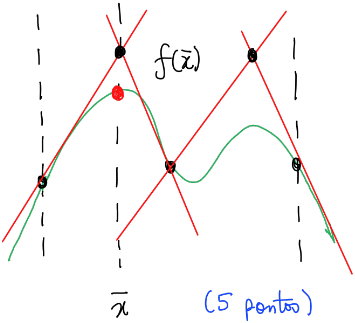
(Implemente esse procedimento em um programa)

Próximos passos

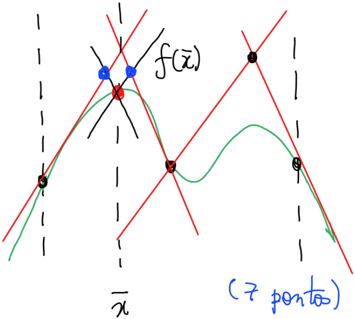
3. Tome a abscissa $\bar{x}$ do ponto mais alto e obtenha o valor da função nesse ponto.

4. Tome novas retas pelo novo ponto. Ache os novos pontos de interseção.





(5 pontos)



(7 pontos)

Exercício 2. Dadas as equações

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{e} \quad y - y_2 = -m(x - x_2)$$

a) Resolva para y em função de x_1, y_1, x_2, y_2

b) Resolva para x, dado y em uma dessas equações.

c) Escreva um programa que acha a intersecção das duas retas dados x_1, y_1, x_2, y_2 e m.

d) Compare com os resultados do Exercício 1.

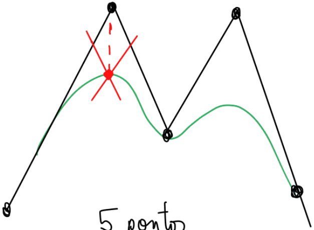
Exercício 3. Usando $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 30x^2 - 50x + 200$ com inclinação máxima 450 e os 5 pontos obtidos

(a) Tome a abscissa do ponto mais alto e ache o valor correspondente da função.

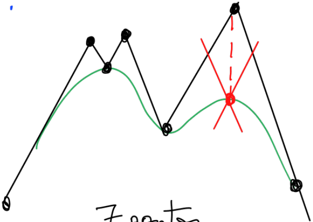
(b) Usando um programa, ache onde as retas pelos novos pontos intersectam as retas antigas.

Obtemos $5 + 2 = 7$ pontos.

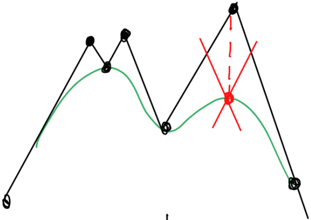
Repita ...



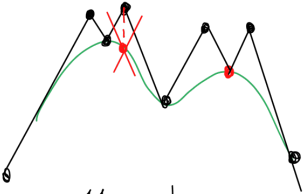
5 pontos



7 pontos



9 pontos



11 pontos

... até que o ponto mais alto da serra é perto o suficiente do gráfico. Pare.

Exercício 4. Implemente o algoritmo do "dente de serra" e aplique ao exemplo

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 + 30x^2 - 50x + 200$$

e pare quando o ponto mais alto estiver a uma distância ao gráfico menor do que 0.01.

Quantas iterações são necessárias para o programa parar?

Compare com o Método 1: Testando pontos.