NOTAS DE AULA GAAL

2025-2

Prof$^{\underline{a}}$. Janaíne Martins

Contents

1 Matrizes

Uma matriz é uma tabela de números dispostos em linhas e colunas. A seguinte tabela representa uma matriz A de ordem $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde cada elemento a_{ij} é chamado de elemento da matriz, com o primeiro índice i indicando a linha e o segundo índice j indicando a coluna. A i-ésima linha é dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

E a j-ésima coluna é dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

A ordem da matriz é $m \times n$. Muitas vezes, denotamos uma matriz A como $A = [a_{ij}]$.

Definição 1.1. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $m \times n$ é dita **quadrada** se $m = n$, ou seja,

$$\boxed{\text{o número de linhas é igual ao número de colunas.}}$$

Em uma matriz quadrada, os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam a **diagonal principal.**

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \color{red}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.2. 1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2, onde $a_{21} = 3$.

2. A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi \\ 7 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×3, onde $b_{13} = \pi$.

Definição 1.3. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é dita nula se todos os seus elementos forem zero. Neste caso, denotamos a matriz por $A = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 1.4. Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, ambas de ordem $m \times n$, são iguais se, e somente se,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1.5. Determine os valores de x e y para que tenhamos $A = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} x+2 & 4 \\ 5 & y^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Igualando os elementos correspondentes,

$$\begin{aligned} x + 2 &= -1 \Rightarrow x = -3 \\ y^2 &= 9 \Rightarrow y = \sqrt{9} \Rightarrow y = \pm 3. \end{aligned}$$

Portanto, $x = -3$ e $y = 3$ ou $y = -3$.

Definição 1.6. Uma **matriz coluna** de ordem $m \times 1$ pode ser representada como

$$A = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \vdots \\ q_{m1} \end{bmatrix}$$

e uma **matriz linha** de ordem $1 \times n$ é representada por

$$A = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}).$$

Exemplo 1.7. A seguir temos o exemplo de uma matriz coluna X, de ordem 3×1, e de uma matriz linha Y, de ordem 1×4,

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad e \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

1.1 Operações com Matrizes

Definição 1.8 (Soma)**.** Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de mesma ordem $m \times n$. A soma das matrizes, $A + B = C$, é uma matriz de ordem $m \times n$, onde cada elemento da matriz C é definido como

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

De modo análogo, a subtração $A - B = C$ é definida por

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},$$

com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1.9. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, ambas de ordem 3×2, a soma é:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + (-3) & 1 + (-2) \\ 3 + 0 & 5 + 2 \\ 1 + (-1) & 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 - (-3) & 1 - (-2) \\ 3 - 0 & 5 - 2 \\ 1 - (-1) & 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Definição 1.10 (Multiplicação por Escalar)**.** Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$ e λ um escalar (um número real ou complexo). A **multiplicação da matriz A pelo escalar λ**, denotada por $\lambda A = C$, é a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$, onde cada elemento é definido por

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Por simplicidade, denotaremos $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$.

Exemplo 1.11. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -4/3 \end{bmatrix}$ e o escalar $\lambda = -3$, o produto λA é

$$\lambda A = -3 \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -12 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

As seguintes propriedades podem ser demonstradas utilizando as definições dadas.

Propriedades da soma e multiplicação por escalar: Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem, e λ, β escalares. As seguintes propriedades são válidas:

1. $A + B = B + A$ (Comutatividade da soma);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Associatividade da soma);
3. Existe uma matriz nula O de mesma tal que $A + O = A$ (elemento neutro);
4. Para cada matriz A, existe uma matriz D (ou melhor, $-A$) tal que $A + D = O$, ou $A + (-A) = O$ (elemento simétrico);
5. $\lambda(\beta A) = (\lambda\beta)A$ (Associatividade da multiplicação por escalar);
6. $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$ (Distributividade por escalar).

Com relação à subtração, temos que tomar cuidado com a propriedade comutativa, pois, o que vale é

$$A - B = A + (-B) \quad \text{e} \quad -B + A = A + (-B)$$

Como a adição de matrizes é comutativa, temos

$$A + (-B) = (-B) + A$$

Portanto

$$A - B = -B + A$$

Mas, é importante notar que isso **não** significa que $A - B = B - A$, pois nesse último caso

$$B - A = B + (-A) = -(A - B)$$

ou seja, é o oposto de $A - B$.

E, para a associatividade, temos que ela é válida parcial via adição.

A subtração não é associativa por si só, pois

$$A-(B-C)=A-B+C$$

e

$$(A-B)-C=A-B-C$$

Portanto, a ordem dos parênteses altera o resultado.

Definição 1.12 (Produto)**.** Sejam A uma matriz linha de ordem $1\times m$ e B uma matriz coluna de ordem $m\times 1$,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m}\end{bmatrix} \quad e \quad B=\begin{bmatrix} b_{11}\\ \vdots \\ b_{m1}\end{bmatrix}$$

o produto $A\cdot B$, nesta ordem, é a matriz C de ordem 1×1 dada por:

$$C=[a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\cdots+a_{1j}\cdot b_{j1}+\cdots+a_{1m}\cdot b_{m1}]=\left[\sum_{j=1}^{m} a_{1j}b_{j1}\right]$$

Exemplo 1.13. Dada a matriz linha A de ordem 1×3 e a matriz coluna B de ordem 3×1,

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad e \quad Y=\begin{bmatrix} 0\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$$

a matriz $C=A\cdot B$ de ordem 1×1 é dada por:

$$C=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ 4\\ -1\end{bmatrix}=[0+8-1]=[7]$$

Definiremos agora o produto para matrizes mais gerais.

Definição 1.14 (Produto)**.** Sejam $A=[a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m\times p$ e $B=[b_{ij}]$ uma matriz de ordem $p\times n$. O **produto** $A\cdot B$ resulta em uma matriz C, de ordem $m\times n$, onde cada elemento c_{ij} é definido por

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},$$

com $1\leq i\leq m$ e $1\leq j\leq n$.

Isto é, os elementos de $C = [c_{ij}]$ são dados pelo produto da $i-$ésima linha de A pela $j-$ésima coluna de B.

Importante: O produto é definido somente se

$$\boxed{\text{número de colunas da primeira matriz} = \text{número de linhas da segunda.}}$$

Exemplo 1.15. Dadas as matrizes A de ordem 3×2 e B de ordem 2×4,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz $C = A \cdot B$ de ordem 3×4 é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 10 \\ 8 & 6 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

Importante: É importante notar que $A \cdot B$ não é necessariamente igual a $B \cdot A$, como podemos ver no exemplo a seguir

Exemplo 1.16. Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando o produto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, calculando o produto BA:

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluímos que $AB \neq BA$.

Definição 1.17 (Matriz Transposta)**.** Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$. Definimos por **matriz transposta** de A, uma matriz B cujas entradas são dadas por

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Ou seja, trocamos linhas por colunas. A transposta de uma matriz A é denotada por A^t.

Exemplo 1.18. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 12 & 20 \end{bmatrix}$, sua transposta é dada por

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$$

Definição 1.19. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada. Dizemos que A é **simétrica** se $A^t = A$, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i, j.

Exemplo 1.20. As matrizes A e B dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1+2i & 2+i \\ 2+i & 3 \end{bmatrix}$$

são matrizes simétricas, isto é, $A^t = A \quad e \quad B^t = B$.

Definição 1.21. Seja A uma matriz quadrada. Dizemos que A é **anti-simétrica** se $A^t = -A$, isto é, $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos i, j.

Exemplo 1.22. As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes anti-simétricas, isto é, $A^t = -A \quad e \quad B^t = -B$.

Propriedades do produto e da transposta: Sejam A, B e C matrizes e λ um escalar. As seguintes propriedades são válidas:

1. $(AB)C = A(BC)$ (Associatividade);
2. $A(B + C) = AB + AC$ (Distributividade);
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
4. $(A^t)^t = A$;
5. $(A + B)^t = A^t + B^t$;
6. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;
7. $(AB)^t = B^t A^t$.

Observação 1.23. Se $AB = 0$, não é necessariamente verdade que $A = 0$ ou $B = 0$. Da mesma forma, se $AB = AC$ e $A \neq 0$, isso não implica necessariamente que $B = C$.

1.2 Matrizes especiais

Existem algumas matrizes que possuem características e propriedades importantes. Vamos agora apresentar algumas delas.

Definição 1.24. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n \times n$. Dizemos que A é uma **matriz triangular superior** se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $j < i$.

Exemplo 1.25. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular superior.

Definição 1.26. De modo semelhante, definimos uma **matriz triangular inferior**. Nesse caso, dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ ela é dita ser triangular inferior se todos os elementos acima da diagonal superior são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $j > i$.

Exemplo 1.27. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz triangular inferior.

Definição 1.28. O **traço** de uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n [1], que denotaremos por $\text{tr}(A)$ é a soma dos elementos da diagonal principal. Ou seja,

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.29.

1. Dada
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
temos que $\text{tr}(A) = 1 + 2 + 3 = 6$.

2. Dada
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & -10 & 7 \\ 9 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
temos que $\text{tr}(A) = 5 + (-10) + 2 = -3$.

Propriedades do traço: Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de ordem n. Então,

1. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$;
2. $\text{tr}(\lambda A) = \lambda\, \text{tr}(A)$ para qualquer escalar λ;
3. $\text{tr}\left(A^t\right) = \text{tr}(A)$

Definição 1.30. Uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a

[1] A partir de agora, sempre que falarmos que a matriz ter ordem n, queremos dizer que é uma matriz quadrada $n \times n$.

1 é definida como **matriz identidade** e a denotamos por I_n, onde n é sua ordem.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 1.31. Seja A uma matriz quadrada. Definimos a **potenciação** para expoentes naturais como

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad \cdots, \quad A^{k+1} = AA^k$$

Exemplo 1.32. Vamos calcular a expressão $A^2 - 2A + 3I_2$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$A^2 - 2A + 3I_2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

1.3 Exercícios

1. Determine os valores de a, b, c e d de modo que $A = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ c & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2a - b & a + 2b \\ 3c - d & c - 3d \end{bmatrix}$$

2. Determine a matriz oposta de

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Verifique, para a matriz do exercício 2, que:

$$M + (-M) = O$$

   onde O é a matriz nula.

4. Calcule

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Encontre $A + B$ e $B + A$ e comprove que a adição é comutativa.

6. Calcule

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

   Verifique que

$$A - B = -B + A$$

   e compare com $B - A$.

8. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Verifique, com cálculos, que:

   (a) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associatividade)

   (b) $(A - B) - C = A - (B + C)$ (distributividade do sinal negativo)

9. Um professor guardou as notas de dois bimestres de 3 alunos nas matrizes:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz que representa a variação de notas do primeiro para o segundo bimestre.

10. Verifique se os produtos estão definidos e, quando possível, calcule

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$
    Calcule AB e BA.

    (b) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$
    Calcule CD.

    (c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$
    Calcule EF e FE.

11. Mostre, por meio de exemplos numéricos, que

    (a) A multiplicação de matrizes não é comutativa ($AB \neq BA$ em geral);

    (b) Vale a associatividade: $(AB)C = A(BC)$;

    (c) Vale a distributividade: $A(B + C) = AB + AC$.

12. Seja $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

    (a) Calcule AI e IA para $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$;

    (b) O que você conclui?

13. Seja $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que $AO = OA = O$ para qualquer matriz quadrada A.

14. Em um supermercado, os preços unitários dos produtos são dados pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

(representando, respectivamente, arroz, feijão e leite).

Um cliente compra 2 kg de arroz, 1 kg de feijão e 3 litros de leite, representado por

$$Q = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Use a multiplicação de matrizes para calcular o valor total da compra.

15. * Mostre que, para qualquer matriz quadrada A, temos:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

onde I é a matriz identidade da mesma ordem.

16. Calcule os produtos

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Encontre AB.

(b)

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre CD e DC.

17. Verifique se os seguintes produtos estão definidos. Justifique sua resposta.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

18. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule A^2;

(b) Calcule A^3.

(c) O que você observa sobre A^2 e A^3?

19. Seja

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encontre B^2, B^3 e B^n.

20. Uma fábrica produz três tipos de produtos. O tempo de máquina necessário (em horas) para cada produto é dado pela matriz

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

onde as linhas representam dois setores da fábrica, e as colunas os produtos.

Se a fábrica produz

$$Q = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

unidades de cada produto, calcule TQ e interprete o resultado.

21. Uma empresa tem o seguinte quadro de vendas (em milhares de reais)

$$V = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 8 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

onde a primeira linha representa o vendedor 1 e a segunda o vendedor 2, e as colunas representam os produtos A, B e C.

A comissão sobre cada produto é dada pela matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.08 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

Calcule VC e interprete.

2 Sistemas Lineares

Os sistemas lineares aparecem desde a Antiguidade: já na China, o livro Os Nove Capítulos da Arte Matemática (cerca de 200 a.C.) apresentava métodos semelhantes à eliminação de Gauss para resolver problemas práticos de agricultura e comércio. Mais tarde, no século XVII, matemáticos europeus como Descartes e Leibniz formalizaram a ideia de equações lineares ligadas à álgebra e à geometria analítica.

Hoje, os sistemas lineares são fundamentais na matemática e em inúmeras aplicações: servem para modelar situações em física, economia, engenharia, computação e estatística, permitindo resolver problemas de equilíbrio, otimização, circuitos elétricos, redes de transporte, entre muitos outros.

No ensino médio, somos ensinados a resolver sistemas do tipo a seguir.

Exemplo 2.1. Seja

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (-2) (para podermos cancelar o termo $2x$), temos

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$$

Somando a primeira equação a segunda, segue que

$$3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}.$$

Agora, como já temos o valor de y, podemos escolher umas das duas equações do sistema original, substituir y pelo valor encontrado e encontrar x.

Escolhamos a equação

$$2x - y = 3.$$

Substituindo $y = \frac{1}{3}$,temos

$$2x - \frac{1}{3} = 3 \Rightarrow 2x = 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Algumas pergunta que podem, naturalmente, serem feitas: o que acontece se a equação tiver mais de duas variáveis e se tivermos trabalhando com muitas equações? É possível resolver? Como? Em um futuro bem próximo, poderemos responder todas essas perguntas.

Definição 2.2. Uma **equação linear em** n **variáveis** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais.

Definição 2.3. Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente sistema linear é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

em que $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ são constantes, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Utilizando o que já aprendemos sobre multiplicação de matrizes, podemos reescrever um sistema linear como

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Definição 2.4. Uma **solução de um sistema linear** é uma matriz

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$, ou seja, os valores dos $x_i's$ que encontramos ao resolver o sistema. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado **conjunto solução** ou solução geral do sistema. A matriz A é chamada matriz do sistema linear.

Exemplo 2.5. Voltando ao sistema do Exemplo 2.1,

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

temos que podemos representá-lo matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e seu conjunto solução é dado por

$$S = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Quando temos um sistema linear com muitas equações e variáveis, nem sempre é fácil encontrar a solução diretamente. No entanto, podemos transformar o sistema em outro equivalente, isto é, que possui as mesmas soluções, mas em uma forma mais simples de resolver.

Essas transformações são feitas por operações como:

- somar ou subtrair equações,
- multiplicar uma equação por um número não nulo,
- trocar a ordem das equações.

O objetivo é obter um sistema equivalente que seja mais fácil, muitas vezes colocando-o em uma forma escalonada. Assim, conseguimos resolver de maneira organizada, passo a passo, mesmo quando o número de variáveis é grande.

Definição 2.6. Uma **operação elementar** sobre as linhas de uma matriz é uma das seguintes operações

1. Trocar a posição de duas linhas da matriz;
2. Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;
3. Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear somente os coeficientes do sistema são alterados, assim podemos aplicar as operações sobre a matriz de coeficientes do sistema, que chamamos de matriz aumentada, ou seja, a matriz

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Podemos, sempre, aplicarmos operações elementares às equações de um sistema sem que o conjunto solução seja alterado. O que nos garante isso é o seguinte Teorema.

Teorema 2.7. Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz aumentada $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ aplicando-se uma operação elementar, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.

Dois sistemas que possuem o mesmo conjunto solução são chamados de **sistemas equivalentes**.

2.1 Método de Gauss-Jordan

Resolver sistemas lineares com muitas equações pode ser trabalhoso se usarmos apenas substituições ou manipulações diretas. O método de Gauss-Jordan organiza esse processo de forma sistemática: por meio de operações simples nas linhas da matriz do sistema, conseguimos transformá-la em uma forma muito mais clara, chamada forma escalonada reduzida.

Com isso, obtemos as soluções de maneira direta, sem precisar voltar ao sistema original. Esse método é útil quando lidamos com sistemas grandes ou quando precisamos encontrar todas as soluções possíveis de um sistema.

Nosso objetivo é transformar a matriz em uma forma especial: cada linha não nula deve começar com o número 1, chamado de pivô. Além disso, sempre que uma coluna possuir um pivô, todos os outros elementos dessa coluna deverão ser iguais a zero.

No exemplo a seguir, veremos como aplicar esse processo. Partiremos de dados reais, como o faturamento e os gastos com insumos, para determinar a quantidade produzida de cada produto em uma indústria.

Exemplo 2.8. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z , utilizando dois tipos de insumo, A e B . Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y , 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 5,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2500,00. Vamos determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos. Podemos representar matricialmente como

$$\begin{array}{r} \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \\ \text{preço/kg} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = A \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{kg de } X \text{ produzidos} \\ \text{kg de } Y \text{ produzidos} \\ \text{kg de } Z \text{ produzidos} \end{array}$$

Assim, precisamos resolver o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 2x + y + 4z = 2000 \\ 2x + 3y + 5z = 2500 \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array}\right].$$

Para determinar o primeiro pivô, buscamos um elemento não nulo na primeira coluna. Caso o elemento inicial fosse zero, poderíamos efetuar uma troca de linhas, trazendo um elemento não nulo para a primeira posição. No nosso caso, como o primeiro elemento da primeira coluna é igual a 1, ele será escolhido como o primeiro pivô.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array}\right].$$

Agora, precisamos zerar os outros elementos da 1 coluna, que é a coluna do pivô. Para isto, adicionamos à 2 linha, -2 vezes a 1 linha e adicionamos à 3. linha, também, -2 vezes a 1 linha.

$$-2 \times 1^a \text{ linha } + 2^a \text{ linha } \longrightarrow 2^a \text{ linha}$$
$$-2 \times 1^a \text{ linha } + 3^a \text{ linha } \longrightarrow 3^a \text{ linha}$$

E obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right].$$

Agora, olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª linha.

$$\left[\begin{array}{ccc|l} 0 & \color{red}{-1} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right]$$

Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1 coluna não nula desta sub-matriz. Vamos escolher o elemento de posição 2,2. Como temos que fazer o pivô igual a um, vamos multiplicar a 2ª linha por -1 .

$$-1 \times 2^a \text{ linha } \longrightarrow 2^a \text{ linha}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 2^a coluna, que é a coluna do pivô, para isto, somamos à 1ª linha, -1 vezes a 2ª e somamos à 3ª linha, também, -1 vezes a 2^a.

$-1 \times 2^{\text{a}}$ linha $+1^{\text{a}}$ linha $\longrightarrow 1^{\text{a}}$ linha

$-1 \times 2^{\text{a}}$ linha $+3^{\text{a}}$ linha $\longrightarrow 3^{\text{a}}$ linha

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}\right]$$

Agora, olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1^a e a 2^a linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Temos de escolher o elemento de posição 3,3 e como temos de "fazer" o pivô igual a 1, vamos multiplicar a 3ª linha por 1/5.

$$\frac{1}{5} \times 3^{\text{a}} \text{ linha } \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 3^a coluna, que é a coluna do pivô, para isto, somamos à 1ª linha, -3 vezes a 3ª e somamos à 2ª linha, 2 vezes a 2ª .

$$\begin{array}{r} -3 \times 3^{\text{a}} \text{ linha } + 1^{\text{a}} \text{ linha } \longrightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ 2 \times 3^{\text{a}} \text{ linha } + 2^{\text{a}} \text{ linha } \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right].$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x = 700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{cases}$$

que possui solução geral dada por

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Portanto, foram vendidos 700 kg do produto X, 200 kg do produto Y e 100 kg do produto Z.

A última matriz que obtivemos no exemplo anterior está na forma que chamamos de **escalonada reduzida**.

Observação 2.9. Quando chegamos a matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

no último exemplo, um outro modo de encontrar x, y e z é fazer $z = 100$, refazer o sistema

$$\begin{cases} x + 3z = 1000 \\ y - 2z = 0 \\ \qquad z = 100 \end{cases}$$

e substituir o valor encontrado para z. Mas, é importante, deixar claro que, em muitas vezes queremos a forma escalonada reduzida e, por isso, precisamos fazer todo o processo. Como veremos na próxima definição.

Definição 2.10. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma **escalonada reduzida** quando satisfaz as seguintes condições:

1. As linhas nulas (formadas inteiramente por zeros), se ocorrerem, estão abaixo das linhas não nulas;

2. O pivô (1 ° elemento não nulo de uma linha) de cada linha não nula é igual a 1;

3. O pivô de cada linha não nula ocorre à direita do pivô da linha anterior.

4. Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Se uma matriz satisfaz as propriedades (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d), dizemos que ela está na **forma escalonada.**

2.2 Exercícios

1. Escreva na forma matricial $AX = B$ cada um dos sistemas abaixo.

   (a)
   $$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ -y + 4z = 2 \end{cases}$$

2. Para o sistema abaixo, escreva a matriz aumentada.
   $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

3. A partir da matriz aumentada
   $$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{array}\right],$$
   aplique as operações elementares para:

   (a) trocar a primeira linha com a segunda;

   (b) multiplicar a segunda linha por -1;

   (c) somar à segunda linha o dobro da primeira.

4. Transforme em forma escalonada a matriz aumentada
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right].$$
   Indique quais são os pivôs.

5. Leve a matriz do exercício anterior até a forma escalonada reduzida.

6. Resolva pelo método de Gauss-Jordan[2].

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$$

[2]Este método de resolução de sistemas, que consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até que a matriz do sistema esteja na forma escalonada reduzida, é conhecido como método de Gauss-Jordan