Lista 3 Predicados e Quantificadores — Guilherme Tavares Silva 2025119840

1. a) Proposição é uma sentença declarativa que pode ser V ou F. Já o predicado, refere-se a uma propriedade que o sujeito de uma declaração pode ter.
Ex de proposição: "$1+1=3$", proposição falsa.
Ex de predicado: "é maior que 3", predicado da declaração "x é maior que 3".

2. a) $\forall x : (D(x) \rightarrow T(x))$ "Para toda pessoa, se ela está endividada então ela vai trabalhar."
b) $\forall x : (D(x) \land T(x))$ "Para toda pessoa, ela está endividada e vai trabalhar."
c) $\exists x : (D(x) \rightarrow \neg T(x))$ "Existe uma pessoa que, se está endividada então não vai trabalhar."
d) $\exists x . (D(x) \lor T(x))$ "Existe uma pessoa que está endividada ou vai trabalhar."

3. a) $\forall n : n^3 \geq 0$ Falso se $n=-1$ $(-1)^3 = -1$ $-1 < 0$
b) $\exists n : n \cdot n = 3n$ Verdadeiro se $n=3$. $3 \cdot 3 = 3 \cdot 3$
c) $\forall n : n^2 > 0$ Falso, se $n=0$, $0^2 = 0$ $0=0$
d) $\exists n : \frac{n}{2} > n$ Verdadeiro. se $n = \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}/2 = -0.25$ $-0.25 \geq -0.5$

4. a) Um amigo seu dirige bem. $A(x)$: "x é seu amigo", $B(x)$: "x dirige bem" $\exists x : (A(x) \land B(x))$
b) Nenhum amigo seu tem carteira de motorista.

5. $\exists x : P(x) \wedge \exists x : Q(x)$ e $\exists x : (P(x) \wedge Q(x))$ não são logicamente equivalentes. $P(x)$ = "x é positivo" $Q(x)$ = "x é negativo"
$x \in \mathbb{R}$. Como existe x no domínio dos reais que seja positivo e outro x no domínio dos reais que seja negativo, então $\exists x : P(x) \wedge \exists x : Q(x)$ é verdadeiro. No entanto, $\exists x : (P(x) \wedge Q(x))$ será falso pois x não pode ser negativo e positivo simultaneamente. Logo, eles não são equivalentes.

6. a) $\forall x : (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
b) $\forall x : (R(x) \rightarrow \neg S(x))$
c) $\forall x : (\neg Q(x) \rightarrow S(x))$
d) $\forall x : (P(x) \rightarrow \neg R(x))$
e) $P(x) \rightarrow \neg Q(x)$ Bebês não são lógicos.
$\neg Q(x) \rightarrow S(x)$ Quem não é lógico é desprezível.
$R(x) \rightarrow \neg S(x)$ Quem controla crocodilos não é desprezível.
$P(x) \rightarrow \neg Q(x)$ e $R(x)$ — logo, $P(x) \rightarrow \neg R(x)$ é
$\neg Q(x) \rightarrow S(x)$: $R(x) \rightarrow \neg S(x)$ — consequência lógica de
$P(x) \rightarrow S(x)$ então teríamos uma contradição. (a), (b) e (c)

7. a) Todo número real é menor que algum número real.
b) O produto de dois números reais não negativos é não negativo.
c) O produto de dois números reais é real.
d) Todo número real tem um simétrico aditivo.
e) A multiplicação de dois números reais é distributiva em relação à adição.

8. a) Todos podem enganar Fred. $\forall x : F(x, Fred)$
b) Evelyn pode enganar a todos. $\forall y : F(Evelyn, y)$
c) Todos podem enganar alguém. $\forall x : \exists y : F(x, y)$
d) Não há ninguém que possa enganar a todos. $\neg \exists x : \forall y : F(x, y)$
e) Todos podem ser enganados por alguém. $\forall y \exists x F(x, y)$
f) Ninguém pode enganar Fred e Jerry. $\forall x : \neg (F(x, Fred) \wedge (F(x, Jerry))$
g) Nancy pode enganar exatamente duas pessoas.
$\exists a \exists b [a \neq b \wedge F(Nancy, a) \wedge F(Nancy, b) \wedge \forall z (F(Nancy, z) \rightarrow (z = a \vee z = b))]$

Jandaia

i) Ninguém pode enganar a si próprio. $\forall x : \neg F(x, x)$

f) Há alguém que pode seguir exatamente uma pessoa além de si próprio.

$\exists x \exists y : [x \neq y \land F(x,y) \land \forall z (F(z,z) \to (z = x \lor z = y))]$

9. a) $\forall x (S(x) \to A(x, \text{Prof. Gross}))$

b) $\forall x (A(x, \text{Prof. Jorge}) \to S(x))$

c) $\exists x (S(x) \land \forall y (F(y) \to \neg A(x,y)))$

d) $\forall x (F(x) \to (A(x, \text{Prof. Miller}) \lor A(\text{Prof. Miller}, x)))$

e) $\forall x (F(x) \land \exists y (S(y) \land A(y,x)) \to A(\text{Prof. Marcos}, x))$

f) $\exists x (F(x) \land \forall y (F(y) \land y \neq x \to A(x,y)))$

g) $\exists x (S(x) \land \forall y (F(y) \to \neg A(y,x)))$

h) $\forall x (S(x) \land A(\text{João}, x) \to A(x, \text{Prof. Michael}))$

10. a) $\neg \forall x \exists y \forall z\, T(x,y,z)$

$\neg \forall x\, \phi(x) \equiv \exists x \neg \phi(x)$

$\neg \exists y\, \psi(y) \equiv \forall y \neg \psi(y)$

$\neg \forall z\, T(x,y,z) \equiv \exists z \neg T(x,y,z)$

$\exists x \forall y \exists z \neg T(x,y,z)$

b) $\neg (\forall x \exists y\, P(x,y) \lor \forall x \forall y\, Q(x,y))$

$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$

$\neg \forall x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists x \forall y \neg P(x,y)$

$\neg \forall x \forall y\, Q(x,y) \equiv \exists x \exists y \neg Q(x,y)$

$(\exists x \forall y \neg P(x,y)) \land (\exists x \exists y \neg Q(x,y))$

c) $\neg \forall x \exists y (P(x,y) \land \exists z\, R(x,y,z))$

$\neg \forall x\, \phi(x) \equiv \exists x \neg \phi(x)$

$\neg \exists y (P(x,y) \land \exists z\, R(x,y,z)) \equiv \forall y \neg (P(x,y) \land \exists z\, R(x,y,z))$

$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$

$\neg \exists z\, R(x,y,z) \equiv \forall z \neg R(x,y,z)$

$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \lor \forall z \neg R(x,y,z))$

d) $\neg \forall x \exists y (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,y))$

$\neg \forall x\, \phi(x) \equiv \exists x \neg \phi(x)$

$\neg \exists y (P \leftrightarrow Q) \equiv \forall y \neg (P \leftrightarrow Q)$

$\neg (P \leftrightarrow Q) \equiv (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q)$

$\exists x \forall y ((P(x,y) \land \neg Q(x,y)) \lor (\neg P(x,y) \land Q(x,y)))$

11. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}\ (x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z)$

☐ $\forall x \forall y \forall z (x(y+z) = xy + xz)$

☐ $\forall x \forall y \forall z ((x+y)z = xz + yz)$

D S T Q Q S S

$\forall x \forall y \forall z [x(y+z) = xy + xz \wedge (x+y)z = xz + yz]$

12. "O número de unicórnios na Terra é ímpar"

A afirmação propõe a existência de um número unicórnios ímpar na Terra. Entretanto, por meio do método científico sabe-se que nunca foram registrados unicórnios na Terra, logo, seu número é zero. Zero é par, e, nesse caso, a proposição é falsa. Então, pela Lei do Terceiro Excluído que diz que uma proposição é verdadeira ou falsa, não havendo uma terceira opção.

Como a proposição "O número de unicórnios na Terra é ímpar" é uma proposição que segue a Lei do Terceiro Excluído.

I(NumUnicornios) = "Ímpar do número de unicórnios"

NumUnicornios = 0 $\therefore$ I(0) = Falso

Concluindo, "O número de unicórnios na Terra é ímpar" é uma declaração FALSA.

4. $A(x)$ = "x é seu amigo" $D(x)$ = "x dirige bem"

a) Um amigo seu dirige bem

$\exists x(A(x) \wedge D(x))$ $\forall x(A(x) \to \neg D(x))$ $\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, D(x)$

b) Nenhum amigo seu tem carteira de motorista

$\forall x(A(x) \to \neg C(x))$ $\neg \exists x(A(x) \wedge C(x))$ $\forall x(C(x) \to \neg A(x))$