LISTA DE EXERCÍCIOS
Lista 03
(Predicados e Quantificadores)

Leitura necessária:

- *Matemática Discreta e Suas Aplicações, 6ª Edição* (Kenneth H. Rosen):
  - Capítulo 1.3: *Predicados e Quantificadores*
  - Capítulo 1.4: *Quantificadores Agrupados*
- Material suplementar:
  - Conjunto de slides: *Lógica de Predicados*

Revisão.

1. Responda formalmente a seguinte pergunta:
   (a) Qual a diferença entre uma proposição e um predicado? Dê um exemplo de cada.

Exercícios.

2. (Rosen 7th ed. 1.4.8, adaptado) Traduza as expressões abaixo para linguagem natural, sabendo que:
   D(x): "x está endividado"
   T(x): "x vai trabalhar"
   Domínio de x: conjunto de todas as pessoas.
   Exemplo: uma forma de escrever $\forall x.\ D(x)$ seria: *"Para toda pessoa, essa pessoa está endividada."*.
   (a) $\forall x.\ (D(x) \to T(x))$
   (b) $\forall x.\ (D(x) \land T(x))$
   (c) $\exists x.\ (D(x) \to \neg T(x))$
   (d) $\exists x.\ (D(x) \lor T(x))$
3. (Rosen 1.3.15, adaptado) Determine o valor de verdade das sentenças abaixo, sabendo que o domínio das variáveis consiste nos números inteiros.
   (a) $\forall n.\ n^3 \geq 0$
   (b) $\exists n.\ n \cdot n = 3 \cdot n$
   (c) $\forall n.\ n^2 > 0$
   (d) $\exists n.\ \frac{n}{2} > n$
4. (Rosen 1.3.27, adaptado) Traduza cada uma das afirmações abaixo em expressões lógicas de 3 maneiras diferentes, variando o domínio e utilizando predicados com uma e duas variáveis.
   (a) Um amigo seu dirige bem.
   (b) Nenhum amigo seu tem carteira de motorista.
5. (Rosen 1.3.51) Mostre que $\exists x.\ P(x) \land \exists x.\ Q(x)$ e $\exists x.\ (P(x) \land Q(x))$ não são logicamente equivalentes.
6. (Rosen 1.3.61) Considere $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$ como as proposições *"x é um bebê"*, *"x é lógico"*, *"x é capaz de controlar um crocodilo"* e *"x é desprezível"*, respectivamente. Suponha que o domínio sejam todas as pessoas. Expresse cada uma das proposições abaixo usando quantificadores, conectivos lógicos e $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$.

(a) Bebês não são lógicos.

(b) Ninguém é desprezível se pode controlar um crocodilo.

(c) Pessoas que não são lógicas são desprezíveis.

(d) Bebês não podem controlar crocodilos.

(e) O item (d) resulta de (a), (b) e (c)? Se não, existe alguma conclusão correta?

7. (Rosen 1.4.1, adaptado) Transcreva as proposições abaixo para o português (ou seja, escreva usando linguagem natural), em que o domínio para cada variável consista nos números reais.

   (a) $\forall x.\ \exists y.\ (x < y)$

   (b) $\forall x.\ \forall y.\ (((x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \rightarrow (x \cdot y \geq 0)$

   (c) $\forall x.\ \forall y.\ \exists z.\ (x \cdot y = z)$

   (d) $\forall x.\ \exists y.\ (x + y = 0)$

   (e) $\forall x.\ \forall y.\ \forall z.\ (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

8. (Rosen 1.4.10) Considere $F(x, y)$ como a proposição *"x pode enganar y"*, em que o domínio são todas as pessoas do mundo. Use quantificadores para expressar cada uma das proposições abaixo.

   (a) Todos podem enganar Fred.

   (b) Evelyn pode enganar a todos.

   (c) Todos podem enganar alguém.

   (d) Não há ninguém que possa enganar a todos.

   (e) Todos podem ser enganados por alguém.

   (f) Ninguém pode enganar Fred e Jerry.

   (g) Nancy pode enganar exatamente duas pessoas.

   (h) Há exatamente uma pessoa a quem todos podem enganar.

   (i) Ninguém pode enganar a si próprio.

   (j) Há alguém que pode enganar exatamente uma pessoa além de si próprio.

9. (Rosen 1.4.11, adaptado) Seja $S(x)$ o predicado *"x é um estudante"*, $F(x)$ o predicado *"x é um professor"* e $A(x, y)$ o predicado *"x fez uma pergunta a y"*, onde o domínio das variáveis x e y consiste de todos as pessoas associadas à universidade. Utilize quantificadores para expressar cada uma das afirmações.

   (a) Todos os estudantes fizeram uma pergunta ao Prof. Gross.

   (b) Todas as pessoas que fizeram uma pergunta ao Prof. João são estudantes.

   (c) Existe um estudante que não fez nenhuma pergunta a nenhum professor.

   (d) Todos os professores fizeram uma pergunta ao Prof. Miller ou tiveram uma pergunta feita a si pelo Prof. Miller.

   (e) Todo professor que já foi perguntado por algum estudante foi questionado pelo Prof. Marcos.

   (f) Existe um professor que já fez uma pergunta a todo outro professor.

   (g) Existe um estudante que nunca recebeu uma pergunta de um professor.

   (h) Todos os estudantes que foram questionados por Lois fizeram uma pergunta ao Prof. Michael.

10. (Rosen 1.4.31, adaptado) Expresse a negação de cada afirmação de forma que todos sinais de negação precedam imediatamente os predicados.

   (a) $\forall x.\ \exists y.\ \forall z.\ T(x, y, z)$

   (b) $\forall x.\ \exists y.\ P(x, y) \vee \forall x.\ \forall y.\ Q(x, y)$

   (c) $\forall x.\ \exists y.\ (P(x, y) \wedge \exists z.\ R(x, y, z))$

   (d) $\forall x.\ \exists y.\ (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, y))$

11. (Rosen 1.4.42) Use quantificadores para expressar as propriedades distributivas para a multiplicação sobre a adição de números em $\mathbb{R}$.

12. Argumente se a proposição *"O número de unicórnios na Terra é ímpar"* é verdadeira ou falsa. (Dicas: pesquise sobre a **Lei do Terceiro Excluído** e veja se a declaração a respeita. Converter a proposição para uma expressão lógica quantificada pode ajudar.)