

EJERCICIOS

EJERCICIO 1 (M/M/1 M/M/2)

Una sucursal bancaria estima que la tasa de llegada de clientes (siguiendo una distribución de Poisson) es de 30 clientes/hora. En el momento de observación del fenómeno a estudiar hay solo una ventanilla abierta al público y el tiempo de servicio está distribuido exponencialmente con media 115 sg/cliente. Determinar:

- a) Número medio de clientes en el sistema y número medio de clientes en espera.
- b) Tiempo medio de espera y tiempo medio de permanencia en la sucursal.
- c) Ante la vista de los resultados en los apartados anteriores se decide abrir una segunda ventanilla al público. Repita los cálculos realizados.

EJERCICIO 2 (No Queue.exe)

Por determinado tramo de carretera se observa el paso de vehículos con una frecuencia de 2 vehículos por minuto. Calcular:

- a) Probabilidad de que durante 60 segundos consecutivos no se alcance ver ningún vehículo en este tramo.
- b) Probabilidad de que lleguen más de tres vehículos en el intervalo de 2 minutos.
- c) Tiempo de observación mínimo para tener una probabilidad al menos del 95 % de ver un mínimo de 4 vehículos.

EJERCICIO 3 (No Queue.exe)

Un sistema de espera con un único recurso inicialmente está vacío, se le atribuye la secuencia de tiempos de llegada en segundos $\{1, 3, 4, 16, 17\}$ y la correspondiente secuencia de tiempos de servicio en segundos $\{5, 6, 2, 3, 1\}$. El sistema se va a estudiar en el intervalo de tiempo 0-20 s. Considere tres disciplinas de gestión de cola:

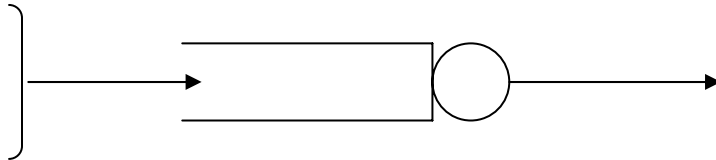
- FIFO (First In First Out)
- SJF (Shortest Job First) sin expropiación.
- SRPT (Shortest Remaining Processing Time First) con expropiación.

- a) Dibujar gráficamente la curva de trabajo por hacer.
- b) Dibujar para cada disciplina de gestión de cola el proceso de servicio pendiente de recibir el usuario en el intervalo de tiempo 0-20.
- c) Para cada una de las disciplinas estime el tiempo medio de espera en cola. ¿Son los resultados esperados? ¿Puede generalizar dichos resultados?
- d) Para cada una de las disciplinas estime el tiempo medio promediado sólo sobre los usuarios que esperan. ¿Son los resultados esperados? ¿Puede generalizar dichos resultados?
- e) Calcular la tasa de llegadas, el factor de utilización y el tiempo medio de servicios.

EJERCICIO 4 (propuesto) (No Queue.exe)

Consideremos el sistema M/M/1 de la figura. En vez de indicar las tasas medias de llegadas y servicio analicemos el proceso que siguen 5 llegadas consecutivas al sistema, esta información se muestra en la tabla de abajo. Se pide:

- Calcular el tiempo medio de estancia en el sistema
- Calcular la tasa media de llegadas
- Calcular la tasa media de servicio (tiempo medio en el servidor)
- Calcular el tiempo medio de espera (\bar{T}_q)
- ¿Qué le sugiere el hecho de que λ sea mayor que μ ?



Usuarios	Instante de entrada al sistema (s)	Instante de entrada al servidor $T'(s)$	Instante de salida del servidor $T''(s)$
0	0	0	0.051
1	1.75	1.75	3.006
2	2.405	3.006	39.992
3	20.557	39.992	74.533
4	22.95	74.533	100.517

EJERCICIO 5 (No Queue.exe)

En un haz de 4 circuitos, cada uno está ocupado un cuarto de hora diferente de la hora cargada (HC) ¿Cuál es el tráfico cursado por cada circuito y por el haz?

Si coinciden los 4 cuartos de hora, ¿cuál es ahora el tráfico cursado por cada circuito y por el haz?

EJERCICIO 6 (M/M/1)

En una carretera comarcal hay un surtidor de gasolina. Las llegadas de vehículos al surtidor se producen según un proceso de Poisson de media 10 a la hora mientras que el tiempo medio de servicio es de 4 minutos por cliente, siendo éste exponencial.

- a) Calcular la probabilidad de que cuando un vehículo llega, el surtidor esté vacío.
- b) Calcular la probabilidad de que cuando llega un vehículo a la gasolinera, haya más de dos usuarios en la estación de servicio.
- c) Cuando llega un vehículo al sistema ¿cuál es el número esperado de vehículos que encontrará en la cola?
- d) Calcular el tiempo medio de un coche en la estación de servicio.

EJERCICIO 7 (M/M/1) (propuesto)

Un codificador trabaja a 10 kbps y le llega un nuevo paquete de información cada 125 milisegundos. La longitud media de los paquetes es de 128 bytes. Suponga que el elemento tiene una capacidad de almacenamiento suficiente para evitar pérdidas de paquetes. Determinar:

- a) Probabilidad de que al llegar un paquete sea almacenado en el buffer de memoria.
- b) Número medio de paquetes en el buffer de memoria del codificador.
- c) Tiempo medio de estancia en el buffer.
- d) Si se duplican el tráfico entrante y la velocidad del codificador, ¿cómo afectaría esta variación a los parámetros calculados en los apartados anteriores?

EJERCICIO 8 (M/M/1) (propuesto)

Un nuevo restaurante de comida rápida tiene una sola caja. En media, los clientes llegan a la caja con una tasa de 20 a la hora. Las llegadas se suponen con distribución de Poisson. El cajero puede cobrar, en media, a 12 clientes cada media hora. Se supone que el tiempo de servicio es exponencial.

- a) Determinar el tiempo medio de espera de un cliente en la cola.
- b) ¿Cuál es el número medio de clientes en el sistema?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de tres clientes en el sistema?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que el cajero no esté cobrando a nadie?

EJERCICIO 9 (M/M/1)

Los enlaces que unen los nodos componentes de una Red Iberpac X.25 tienen una velocidad de transmisión de 9600 bps. El conmutador de paquetes puede analizarse como un modelo M/M/1. Despreciando el tiempo de proceso y considerando paquetes con longitud media de 128 bytes, calcular:

- Número medio de paquetes servidos por segundo.
- Valor medio del tiempo de respuesta de los paquetes para garantizar un tiempo de respuesta no mayor a 10 segundos para el 95% de los casos.
Suponer que el tiempo de respuesta tiene una distribución exponencial.
- Número máximo de paquetes por segundo que puede admitir el conmutador en la situación anterior.
- Ocupación media en bytes de la memoria intermedia o buffer del conmutador.

EJERCICIO 10 (Queue) (M/M/c/c)

Un cyber-café mantiene 8 terminales disponibles durante 8 horas al día. Se considera que llegan al local (siguiendo un proceso de Poisson) una media de 24 clientes diarios y el tiempo medio de servicio (distribución exponencial) es de 4 horas. Cuando un cliente encuentra todos los puestos ocupados, abandona el local.

- Calcular la probabilidad de que estén los 8 puestos ocupados. Calcular la probabilidad de que al llegar un nuevo cliente tenga algún sitio disponible.
- ¿Número mínimo de máquinas para que la probabilidad de que un cliente abandone el local (todos puestos ocupados) no sea superior al 10 %?
- Conteste de nuevo a los apartados anteriores si el tiempo medio de servicio se reduce a la mitad.

EJERCICIO 11 (M/M/c/c)

Se pretende mejorar el rendimiento de una sala de ordenadores. El sistema tiene las siguientes características:

- 3 ordenadores.
- Usuarios acceden a la sala (distribución poissoniana) con una tasa de 5 usuarios/hora.
- Tiempo medio de utilización de cada ordenador, bajo una distribución exponencial negativa, es de 2 horas.
- Cuando un usuario encuentra todos los puestos ocupados abandona la sala.

Determinar en número de computadoras a adquirir si se desea triplicar el número medio de usuarios en la habitación.

EJERCICIO 12 (M/M/c/c) (No Queue.exe)

Para el conjunto de 5 órganos de una red telefónica se ha verificado que en la hora cargada la intensidad de tráfico es de 30 Erlangs. En este período son rechazadas 2 llamadas entrantes que encuentran todos los órganos ocupados.

El tiempo total en la hora cargada en que todos los órganos están ocupados de forma simultánea es de 12 segundos. Se pide:

- a) Grado de servicio ($G \circ S$)
- b) Tráfico ofrecido y cursado.
- c) Duración media de las llamadas.

EJERCICIO 13 (M/M/c/c) (No Queue.exe)

Una central telefónica produce un tráfico saliente de 750 LLR/HC. Suponga que los circuitos desean explotarse con una pérdida menor del 1%.

- a) Calcule el número mínimo de circuitos empleando un único haz. Indique el rendimiento de utilización de los circuitos.
- b) Si se emplean 5 haces, indique el número de circuitos por haz. Indique en este caso también el rendimiento de utilización de los circuitos.

Como rendimiento puede considerar el factor de ocupación o bien la relación u_i/c

EJERCICIO 14 (M/M/c/c) (No Queue.exe)**Parte 1**

La compañía Teleconsulte S.A. tiene una centralita de 4500 líneas para empleados cuya herramienta de trabajo básica es el teléfono. Hasta hace tres meses, la centralita no disponía del servicio de buzón de voz. Entonces se observó que la organización estaba perdiendo oportunidades de negocio, puesto que el 30% de las llamadas entrantes eran rechazadas al encontrarse el empleado llamado ausente u ocupado. Además se cuantificó lo siguiente:

- La duración media de las llamadas era de 3 minutos.
- El tráfico cursado por la centralita en HC era de 210 Erlangs.

Se instaló el hardware de la figura para añadir la funcionalidad del buzón de voz en la centralita. Destacan los siguientes componentes:

- Una única tarjeta de interfaz de línea (denominada tarjeta I) con suficientes puertos de entrada para recoger todo el tráfico entrante al buzón.
- El agregado de controlador y otros dispositivos, para dirigir las operaciones del buzón.
- Dispositivos de reproducción locuciones (número limitado de tarjetas de tipo R)
- Dispositivos de grabación de mensajes (número limitado de tarjetas de tipo G)

Con el buzón en funcionamiento, se genera además un nuevo tráfico a causa de las consultas que los empleados realizan a sus propios buzones.

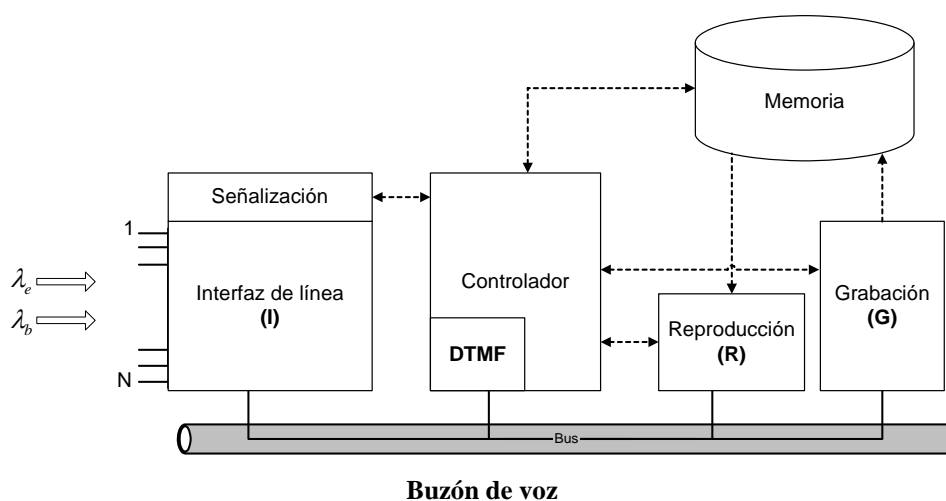
Cuando una llamada en la centralita no puede ser cursada por destino ausente u ocupado, la llamada se conecta a I por una de sus N entradas. A partir de ese instante el controlador solicita la reproducción de una o varias locuciones (asignando un recurso en R). Después puede o no solicitar un recurso a G para almacenar el mensaje de voz del usuario llamante en el disco de memoria. Al reservar el recurso en G se libera en R puesto que no se reproduce y graba al la vez. Cuando la llamada finaliza, se liberan todos los recursos asignados a ella (en I, R, G).

El problema está orientado a dimensionar el número de puertos en los dispositivos de reproducción (R) y grabación (G), por ser su coste superior al coste del resto de los componentes enumerados. Todas las tarjetas de tipo R y de tipo G tienen 8 puertos de entrada cada una, esto significa que cada tarjeta puede atender simultáneamente a un máximo de 8 llamadas.

Se ha utilizado la notación de λ_e para indicar el número de llamadas que en HC realizan los empleados para gestionar el buzón (configuración, lectura y/o borrado de sus mensajes), mientras que λ_b representa la tasa de llamadas/HC del buzón, llamadas que encuentran el terminal destino ausente u ocupado.

Se pide:

1. Dibuje el esquema para sistemas de espera/pérdida/desbordamiento que comprende la centralita con el servicio de buzón de voz expuesto. Para ello, considere la figura del enunciado como un único elemento sin entrar en detalle de sus componentes. Especifique al menos los siguientes parámetros: tráfico entrante a la centralita, throughputs, λ_e , λ_b , tráfico rechazado en el buzón, número de servidores en centralita.
2. Indique mediante la notación de Kendall qué tipo de sistema es la centralita.
3. Calcule la tasa de llamadas a la que estaba sometida la centralita antes de poner en funcionamiento el buzón de voz.
4. Calcule la tasa de llamadas λ_b en número de llamadas en la HC.



Parte 2

Para el resto del problema considere la centralita con el buzón de voz en funcionamiento. En el buzón de voz, el tiempo de procesamiento por el controlador es

despreciable frente a los tiempos de reproducción de locuciones y mensajes en R y los tiempos de grabación de mensajes en G. El controlador del buzón realizará distintas operaciones dependiendo del tipo de usuario, utilizando los recursos R y recursos G durante diferentes tiempos.

- La operación llevada a cabo por un empleado para gestionar su buzón de voz, le llevará un tiempo de escucha de locuciones y/o mensajes. Se estima que un empleado accede 0.2 veces a su buzón en la hora de mayor tráfico y que la duración total media es la de una llamada reducida (LLR).
- La mitad de los llamantes a los que les salta el buzón del usuario llamado cuelgan en breve porque no desean dejar ningún mensaje, finalizando la llamada en 8 s de media.
- Los llamantes que van a dejar un mensaje, escuchan una locución de bienvenida reproducida por una tarjeta de tipo R y luego se procede a grabar el mensaje. Los mensajes de bienvenida tienen una duración media de 10 s. La duración media de los mensajes que son grabados en el disco de memoria en esta etapa es de un minuto, no superando en ningún caso los 90 segundos.

Cuando lo necesite utilice como aproximación de la distribución Erlang B:

$$B(c, u) = 0.03 \frac{u}{c}$$

Se pide:

1. Determine la intensidad tráfico que generan los empleados en la consulta y configuración de los buzones.
2. Indique el tiempo medio de utilización de los recursos del buzón de voz (ocupación de un puerto de entrada de la tarjeta I).
3. Calcule la intensidad de tráfico ofrecida a los dispositivos de reproducción.
4. Calcule la intensidad de tráfico ofrecida a los dispositivos de grabación.
5. Evalúe el número mínimo de tarjetas R necesarias para tener una probabilidad de bloqueo en las mismas nunca superior al 3%.
6. Indique la probabilidad de bloqueo real en los dispositivos de reproducción.
7. Si la probabilidad de bloqueo del equipo de grabación (conjunto de tarjetas G) es del 2%, ¿cuál es la probabilidad de que un usuario, que vaya a dejar un mensaje de voz a un empleado ausente, no pueda hacerlo por bloqueo en alguna o varias de las partes del buzón?
Si no hubiera resuelto el apartado anterior considere que el conjunto de dispositivos de reproducción tiene la misma probabilidad de bloqueo que el de grabación.
8. Número de llamadas perdidas en el sistema centralita + buzón. Compárelo con la situación inicial de la centralita sin el buzón. ¿Considera justificada la implantación de este servicio?

EJERCICIO 15 (M/M/c/c) (Alumnado) (No Queue.exe)

Una empresa de supermercados con tiendas a lo largo de toda la geografía nacional distribuye sus productos con dos marcas diferentes:

- *AhorraSuper*, marca original de la empresa con presencia en centro y sur de España.
- *SuperPrecios*, empresa recientemente adquirida y con presencia en el norte y este de la península.

Cada una de las cadenas dispone de su propio Centro de Atención al Cliente: un “*Call Center*” de *AhorraSuper* en Madrid y otro de *SuperPrecios* en Barcelona. Los centros de llamadas están diseñados bajo los siguientes criterios:

- Número de enlaces primarios RDSI (30 canales de voz): 3 en enlaces para *AhorraSuper* y 4 primarios para *SuperPrecios*.
- Considerar que el número de teleoperadores atendiendo llamadas coincide con el número de circuitos.
- Si todos los canales de voz se encuentran ocupados no se retiene la llamada sino que directamente se libera con el tono de ocupado.

Adicionalmente, analizando las estadísticas de llamadas de ambos *call centers* se conoce lo siguiente:

- El tiempo medio de atención por llamada es de 4 minutos.
- La distribución de llamadas en función del tramo horario en el centro de *SuperPrecios* en Barcelona se muestra en la figura 1. Considere que la hora cargada corresponde a los 60 minutos consecutivos de mayor volumen de tráfico con inicio en horas en punto, es decir entre las xx:00 horas y las xx:59 horas.
- Suponga que la hora de mayor intensidad de llamadas coincide en Madrid y Barcelona.
- El número de llamadas no atendidas en *AhorraSuper* es mayor que en *SuperPrecios* detectado por un mayor número de reclamaciones. Una auditoria externa en *AhorraSuper* concluye que en la hora de mayor carga se pierden una de cada 20 llamadas.
 - a) Calcule la probabilidad de que una llamada de el tono de ocupado por saturación en el *call center* de *SuperPrecios* en Barcelona.
 - b) Indique el número mínimo de *El's* (enlaces primarios) que habría que ampliar en Madrid para tener una calidad de servicio no peor que en Barcelona.
 - c) Si se tuviese un único Centro de Atención al Cliente con recursos totales idénticos a la suma de los recursos de los dos *call centers*, ¿la probabilidad de pérdida de llamadas variaría? En caso afirmativo, indique si aumentaría o se reduciría. Justifique su respuesta.

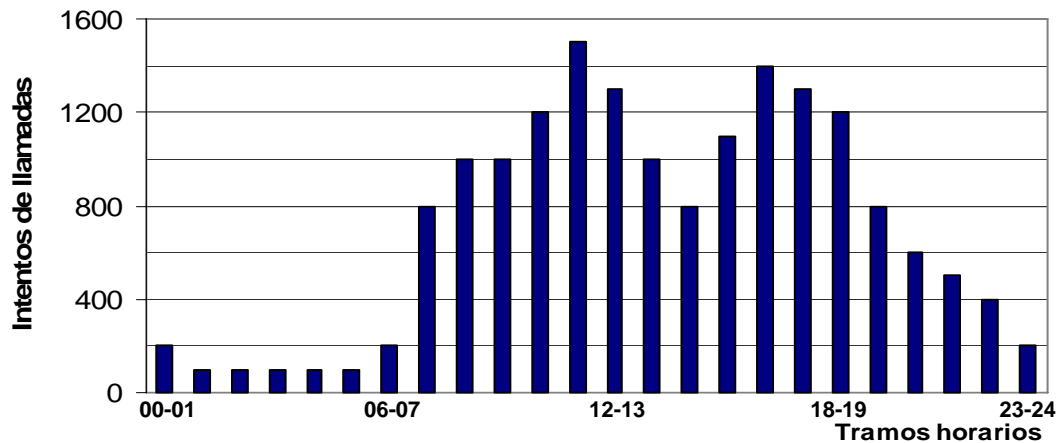


Figura 1 Tráfico instantáneo en el día de mayor carga

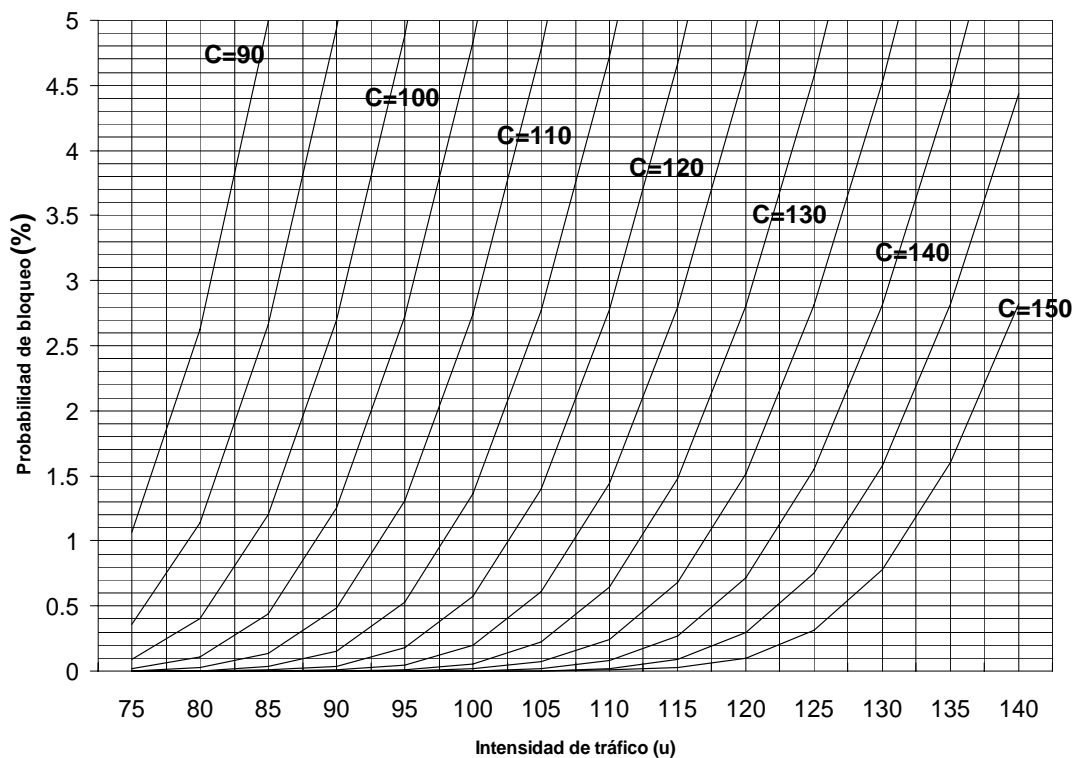


Figura 2 Erlang-B

EJERCICIO 16 (M/M/c)

Un concentrador reparte paquetes de datos en N líneas de forma equiprobable. La longitud media de los paquetes es de 4096 bits. En promedio llega al concentrador un paquete cada 0.208 segundos. Cada línea tiene una capacidad de 2048 bps.

- Calcular el número mínimo de líneas de salida para poder cursar el tráfico ofrecido.
- Para el número mínimo de líneas, calcular el tráfico cursado por línea.
- Porcentaje de ocupación de las líneas.

- d) Calcular el número de líneas del sistema para que cada línea estuviera desocupada al menos el 10% del tiempo.
- e) Determinar el número de paquetes por segundo que envía cada línea y el sistema completo en las condiciones del apartado anterior.

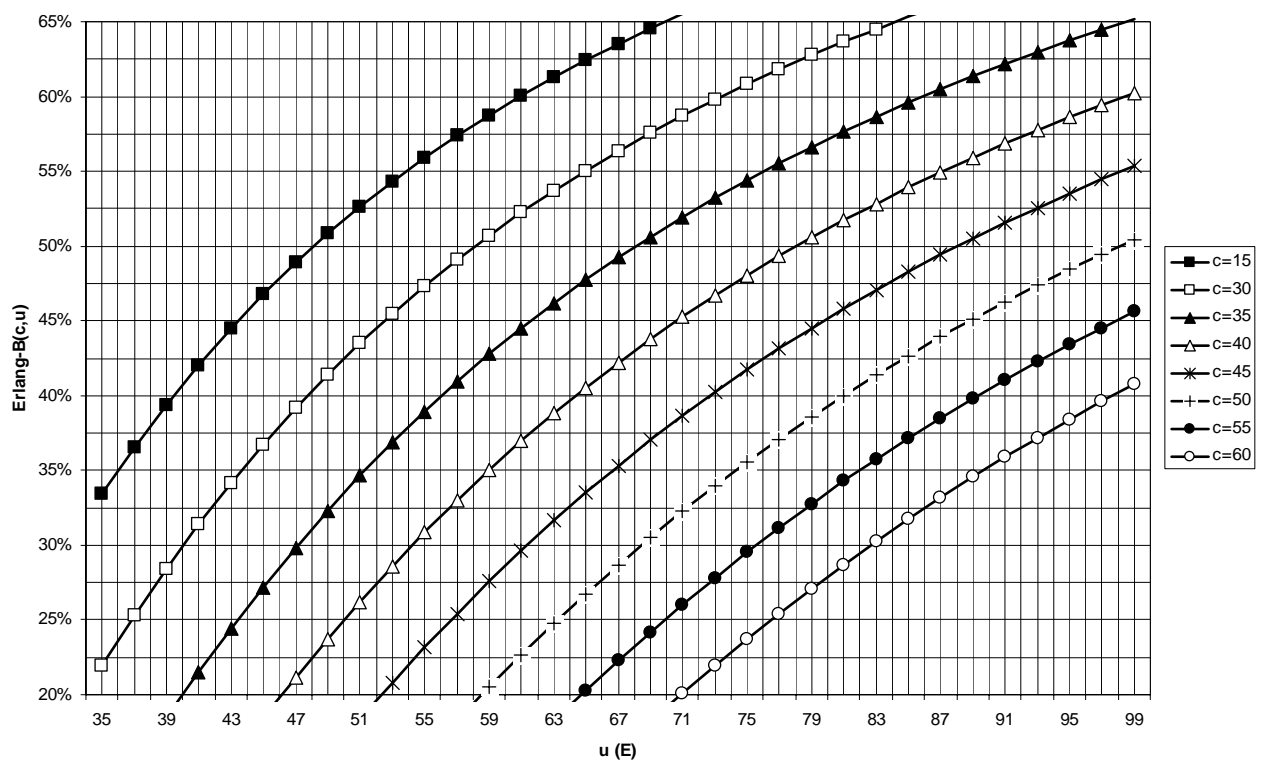
EJERCICIO 17 (M/M/c)

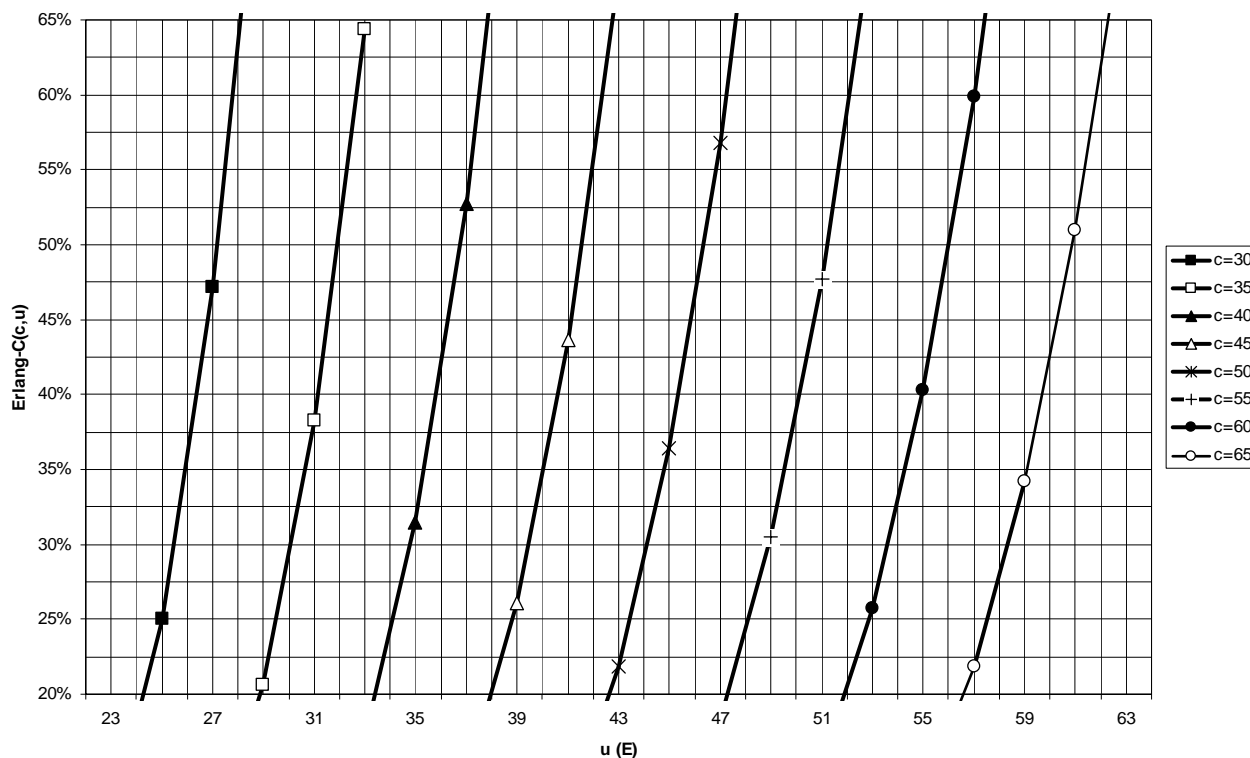
Uno de los servicios de un conocido operador telefónico utiliza una máquina que se comporta como un sistema de espera pura. A este equipo se conecta un número determinado de circuitos. En los últimos meses, probablemente influenciado por la situación económica que atraviesa el país, se ha detectado un descenso en el número de intentos de llamadas. Dicha reducción se estima en un 25%.

Se desea liberar algunos de los circuitos que serán utilizados para otros equipamientos. En ningún caso se quiere reducir la calidad del servicio, siendo la probabilidad mínima de servicio inmediato el 55% en la HC. Otros datos de la máquina a estudiar son:

- La duración media de las llamadas cursadas es de una LLR.
- La probabilidad de que en una décima de minuto no haya habido ningún intento de llamada es del 6.1%

Calcule el número de circuitos que se pueden liberar del equipo cumpliendo las anteriores especificaciones. Para ello dispone de las curvas de las distribuciones Erlang-B y Erlang-C. Se recomienda trabajar con minutos como unidad de tiempo.





EJERCICIO 18 (M/M/c) (propuesto)

Un supermercado cuenta con 7 cajas de cobro. Los clientes llegan a ellas siguiendo un proceso de Poisson con una tasa media de 100 clientes/hora. El personal que atiende cada caja de cobro necesita en media 5 segundos para procesar cada unidad de compra (cada elemento que el cliente desea comprar). Además, se estima que el tiempo de cobro de un cliente, sea en efectivo o con tarjeta, es de 1.5 minutos.

Se estima que los clientes se distribuyen en dos grupos:

- Grupo A: clientes que compran cestas de hasta x unidades,
- Grupo B: usuarios que llevan en sus carros más de x unidades.

El grupo A supone el 10% de los clientes totales. En este grupo, el número medio de unidades en las compras es 9 unidades/cliente, mientras que en el grupo B asciende a 30 unidades/cliente. Con vistas a reducir el tiempo medio de espera en cola, el gerente de tienda se está planteando aplicar una de las dos soluciones siguientes:

- Añadir una caja de cobro equivalente a las ya existentes.
- Añadir una caja de cobro rápida. La caja rápida despacharía todos los clientes del grupo A y ninguno del grupo B.

a) Calcule el tiempo medio de espera en cola en la situación inicial, con 7 cajas de cobro.

b) ¿Cuál de las dos soluciones planteadas recomendaría al responsable? Justifique la respuesta con los cálculos apropiados.

Servidores	C(c,u)						
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
6	3.62	4.06	4.43	4.75	5.05	5.30	5.55
7	4.41	4.90	5.30	5.65	5.96	6.24	6.51
8	5.21	5.74	6.18	6.55	6.89	7.19	7.47

EJERCICIO 19 (M/M/c/ - /F) (Queue propuesto)

NODE Computer Service, Inc. tiene cuatro ingenieros para resolver cualquier fallo que se produzca en los diez mainframes a los que da soporte en Madrid. Se estima que el tiempo medio para resolver cualquier problema que se presente es de un día, considerando una distribución exponencial. Del mismo modo, el tiempo medio entre dos fallos consecutivos es de cinco días, considerando también una distribución exponencial.

La compañía se plantea como objetivo de calidad que el tiempo medio de espera desde que se notifica un fallo hasta que un ingeniero acude a resolverlo sea como máximo de medio día. ¿Debería contratar más ingenieros o despedir a alguno? ¿Cuántos?

EJERCICIO 20 (M/M/c/k) (Queue propuesto)

Un sistema de espera híbrido está compuesto por 3 servidores equivalentes y equiprobables. La capacidad del mismo es de dos usuarios máximo esperando a ocupar un servidor. Los usuarios llegan al sistema definiendo un proceso de Poisson con una tasa media de 8 usuarios/hora. La distribución de los tiempos medio de servicio es exponencial de media 20 minutos/usuario. Determine todos los parámetros del sistema: diagrama de estado, esquema, probabilidades de estado, ...

EJERCICIO 21 (M/M/c/k) (Queue propuesto)

De forma similar a como ha realizado el laboratorio, considere un sistema de espera M/M/2/5 con una tasa de llegadas 15 trabajos cada dos horas y un tiempo medio de servicio 12 minutos. Se sabe además que la probabilidad de que el sistema esté completamente vacío es del 18%. En los cálculos, aproxime a 3 decimales:

- 1) Dibuje el esquema detallado del sistema, incluya la tasa de servicio y los tráficos: ofrecido, cursado y rechazado.
- 2) Represente el diagrama de estados completo, indicando el valor numérico de las correspondientes tasas de nacimiento y muerte.
- 3) Determine la intensidad de tráfico.
- 4) Calcule el valor numérico de todas las probabilidades de estado.
- 5) Compruebe que se cumple la ecuación de equilibrio.
- 6) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los servidores se encuentren ocupados?
- 7) ¿Y la probabilidad de que un trabajo sea atendido inmediatamente a su llegada?

- 8) Indique la probabilidad de congestión del sistema.
- 9) Establezca la tasa efectiva de llegadas al sistema.
¿Qué significado tiene? Compárela con la tasa de llegadas al sistema.
- 10) Calcule el número medio de trabajos presentes en el sistema.
- 11) Determine el tiempo medio de respuesta del sistema.
- 12) Evalúe el tiempo medio de espera.
- 13) Indique el número medio de trabajos en el buffer de espera.
- 14) ¿Es aplicable el teorema de Jackson? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 22 (M/G/1) (Queue propuesto)

Un sistema de tipo M/G/1 tiene las siguientes características:

- Tasa de llegada: 1 clientes por minuto.
 - Tasa de servicio: 1,2 clientes por minuto.
 - Desviación típica del tiempo de servicio: 0,9 minutos.
- a) ¿Cuál es el número medio de usuarios en el sistema?
 - b) ¿Y en la cola de espera?
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente deba esperar?

EJERCICIO 23 (Jackson)

En un comedor universitario hay una cola de autoservicio en la que tres camareros en serie atienden al público. Un camarero sirve el primer plato, el segundo camarero sirve el segundo plato y el tercero se encarga de cobrar el menú. El número de clientes que forma cola para ser atendido por el primer camarero no tiene limitación (hay suficiente espacio físico para los clientes que están esperando). Por el contrario, el número de clientes que esperan ser atendidos por el encargado de servir el segundo plato, o por el cajero, está limitado a dos personas como máximo por razones de espacio.

Dado que el autoservicio se puede modelar como una red de colas, se realiza un estudio que muestra que, a la hora de la comida, la tasa media de llegada es de 57 clientes por hora. El primer camarero tiene un tiempo medio de servicio de un minuto y el segundo de 36 s.

- a) El valor máximo del tiempo medio de servicio del tercer camarero para que su labor no entorpezca la de sus compañeros.
En esas condiciones:
- b) La longitud de todas las colas que se forman en el sistema.
- c) El tiempo medio que un cliente pasa en el autoservicio desde que llega hasta que sale dispuesto, por fin, a comer.

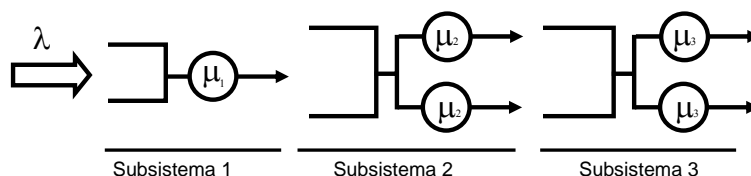
EJERCICIO 24 (Jackson) (Alumnado)

Una pequeña empresa ITA S.A. realiza inspecciones técnicas de vehículos con validez en territorio nacional. Para desarrollar estas funciones cuenta con una plantilla de personal técnico y administrativo, además de una superficie en alquiler sobre la cual se ha construido una edificación que consta de tres partes:

- Una ventanilla o caseta donde los conductores de los vehículos entregan la documentación correspondiente y realizan el pago de las tasas.
- Una nave principal dotada de dos circuitos completos para revisar los vehículos. Por circuito completo se entiende todo el equipamiento y personal técnico necesarios para examinar el estado técnico de un vehículo (faros, niveles de expulsión de gases contaminantes, neumáticos, frenos, dirección, ...)
- La oficina donde los conductores deben recoger la documentación del vehículo junto a la evaluación (positiva o negativa) de la inspección técnica del vehículo. Existen dos puestos permanentes para realizar estas labores.

El sistema se puede estudiar simplificado como la red de colas o red de Jackson de la figura siguiente, estando compuesto por tres subsistemas:

- Subsistema 1 o caseta con un único servidor
- Subsistema 2 o nave, con dos servidores equivalentes
- Subsistema 3 u oficina: con dos servidores equivalentes



Modelo de red de colas en tandem

Además se sabe que:

- En las horas de mayor afluencia de vehículos se registran una media de 55 clientes por hora.
- El trabajador de la caseta despacha a una velocidad de 1 conductor por minuto, mientras que un oficinista tarda una media de 2 minutos para despachar un cliente.
- El espacio físico desde la caseta hasta las puertas de la nave es apto para un máximo de 15 vehículos. Un número mayor de vehículos esperando la entrada en la nave interrumpiría el trabajo en la caseta.
- Al utilizar la tabla, aproximar al valor más cercano existente en la tabla.

Se pide:

- Tasa de servicio mínima para el subsistema 2.
- Longitud media de la cola de vehículos que habiendo pagado las tasas se encuentran esperando la entrada en la nave.
- Tiempo medio, en **minutos**, que transcurre desde que un conductor acude con su coche a la empresa de ITV hasta que puede marcharse con la certificación actualizada.
- Se está estudiando la posibilidad de ampliar en uno el número de servidores en los subsistemas primero o tercero. Suponiendo que hacerlo en uno u otro tuviese un coste equivalente, ¿qué recomienda usted tomando como criterio el tiempo medio de respuesta del sistema total? **Justifíquelo** con los cálculos pertinentes.

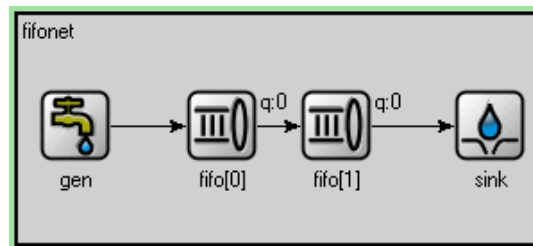
		intensidad de tráfico u (Erlangs)																	
		1,9		1,8		1,7		1,6		1,5		...		1,1		1		0,9	
		$\frac{\rho}{1-\rho}$	C(c,u)	$\frac{\rho}{1-\rho}$	C(c,u)	$\frac{\rho}{1-\rho}$	C(c,u)	$\frac{\rho}{1-\rho}$	C(c,u)	$\frac{\rho}{1-\rho}$	C(c,u)	...		$\frac{\rho}{1-\rho}$	C(c,u)	$\frac{\rho}{1-\rho}$	C(c,u)	$\frac{\rho}{1-\rho}$	C(c,u)
c = 2		19	0,93	9	0,85	5,67	0,78	4	0,71	3	0,64	...		1,22	0,39	1	0,33	0,82	0,28
c = 3		1,73	0,4	1,5	0,35	1,31	0,31	1,14	0,27	1	0,24	...		0,58	0,11	0,5	0,09	0,43	0,07
c = 4		0,9	0,15	0,82	0,13	0,74	0,11	0,67	0,09	0,6	0,07	...		0,38	0,03	0,33	0,02	0,29	0,01

Tabla de valores de probabilidad de espera y relación $\rho/(\rho - 1)$

EJERCICIO 25 (Jackson)

Para la red en tándem (*fifonet*) de la figura:

- Según la notación de Kendall, ¿a qué tipo de sistema corresponde el módulo *fifo*?
- Para las configuraciones A y B, represente gráficamente de la evolución temporal del número de trabajos en cada subsistema *fifo[i]*, es decir, la tendencia de la función a lo largo del tiempo para cada subsistema y en cada caso.
- Solo para la red *fifonet* de la configuración C, calcule el tiempo medio de respuesta y el número medio de usuarios en la misma.



Red de Jackson en tándem

Caso A

```
[Run 3]
description = "Tandem queues"
network = fifonet
fifonet.num_buffers = 2
fifonet.gen.ia_time = exponential(10)
fifonet.fifo[0].num_init_jobs = 10;
fifonet.fifo[1].num_init_jobs = 5;
fifonet.fifo[0].service_time = exponential(10)
fifonet.fifo[1].service_time = exponential(5)
```

Caso B

```
[Run 3]
description = "Tandem queues"
network = fifonet
fifonet.num_buffers = 2
fifonet.gen.ia_time = 10
fifonet.fifo[0].num_init_jobs = 10;
fifonet.fifo[1].num_init_jobs = 5;
fifonet.fifo[0].service_time = 10
fifonet.fifo[1].service_time = exponential(5)
```

Caso C

```
[Run 3]
description = "Tandem queues"
network = fifonet
fifonet.num_buffers = 2
fifonet.gen.ia_time = exponential(10)
fifonet.fifo[0].num_init_jobs = 2;
fifonet.fifo[1].num_init_jobs = 2;
fifonet.fifo[0].service_time = exponential(5)
fifonet.fifo[1].service_time = exponential(5)
```

Casos de configuración para la red fifonet

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

$$\begin{array}{ll} \bar{N} = 22.999 \rightarrow 23 \text{ clientes} & \bar{T} = 45.998 \text{ min utos} \\ \text{a) } \overline{N_Q} = 22.04 \text{ clientes} & \text{b) } \overline{T_Q} = 44.08 \text{ min utos} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \bar{N} = 1.24 \text{ clientes} & \bar{T} = 2.49 \text{ min utos} \\ \text{c) } \overline{N_Q} = 0.285 \text{ clientes} & \overline{T_Q} = 34.23 \text{ s} \end{array}$$

EJERCICIO 2

- a) 13.53 %
- b) 56.65 %
- c) 3.9 min

EJERCICIO 3

a) y b) gráficos

- c) FIFO: 13/5 s
SJF: 9/5 s
SRPTF: 8/5 s
- d) FIFO: 13/3 s
FSJF: 9/3 s
SRPTF: 8/3 s
- e) $\lambda = \frac{5}{20} \text{ clientes/s}$
 $\frac{1}{\mu} = \frac{17}{5} \text{ clientes/s}$
 $\rho = \frac{17}{20} = 85\%$

EJERCICIO 4

- a) $\bar{T} = \frac{0.051 + 1.256 + 37.587 + 53.976 + 77.567}{5} = 34.087 \text{ s}$
- b) 0.174 usuarios /s
- c) 19.763 usuarios/s
- d) $\overline{T_Q} = 14.324 \text{ s / usuario}$
- e) Sistema inestable

EJERCICIO 5

a) y b)

Cada canal: 0.25 E.

El sistema: 1 E.

EJERCICIO 6

- a) 33.33%
- b) 29.63%
- c) 1.33 clientes
- d) 12 minutos

EJERCICIO 7

- a) 82%
- b) 3.735 paquetes
- c) 464 ms
- d) Apartados a) y b) no varían. El tiempo medio de espera se reduce a la mitad.

EJERCICIO 8

- a) 0.2083 horas
- b) 4.99 clientes
- c) $\sum_{i=0}^2 P_i = 0.421296$
- d) $P_0 = 0.16667$

EJERCICIO 9

- a) 9.375 pq/s
- b) 3.3 s
- c) 9.075 pq/s
- d) 3753 bytes

EJERCICIO 10

- a) $B(8,12) = 42\%$
 $1-B(8,12) = 58\%$
- b) $c=15$
- c) $B(8,6) = 12\%$
 $1-B(8,6) = 88\%$
 $c=9$

EJERCICIO 11

3 PC's $\Rightarrow \bar{N} = 2.6793$ usuarios

$$3 * \bar{N} = 8.038$$

10 PC's $\Rightarrow \bar{N} = 7.8542$ usuarios

11 PC's $\Rightarrow \bar{N} = 8.3676$ usuarios

EJERCICIO 12

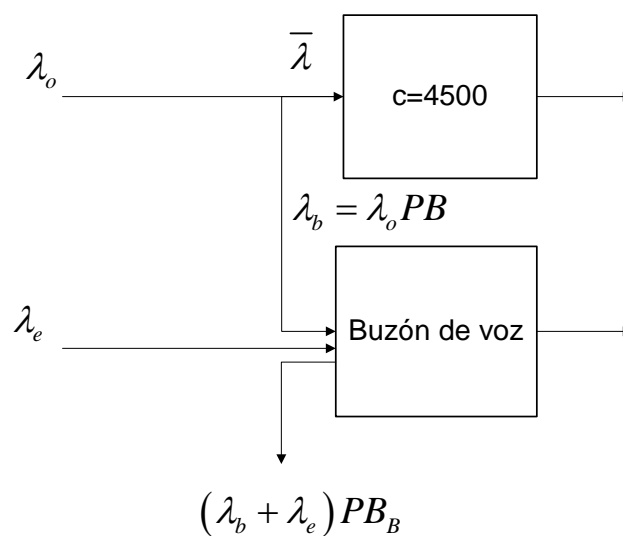
- a) 0.33%
- b) Ofrecido: 600 llamadas/HC
Cursado: 598 llamadas/HC
- c) 3 minutos

EJERCICIO 13

- a) $c = 36$ circuitos; con $\eta = 69.44\%$
 $PB = 0.8\% \Rightarrow \rho = 68.8\%$
 $PB = 1\% \Rightarrow \rho = 68.75\%$
- b) $c = 11$ circuitos por haz; con $\eta = 45.45\%$
 $PB = 0.83\% \Rightarrow \rho = 45.08\%$
 $PB = 1\% \Rightarrow \rho = 45\%$

EJERCICIO 14**Parte 1**

1.



2. M/M/4500/4500

- Distribución de tiempo entre llegadas exponencial

- Distribución de tiempo de servicio exponencial
- 4500 servidores
- No existe cola de espera, sistema de rechazo
- Una fuente de tamaño infinito

3.

$$PB = 30\%$$

$$\left. \begin{array}{l} u_e = 0.7u \Rightarrow u = 300E \\ 1/\mu = 3 \text{ min} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_o = 100 \text{ llam/min} = 6000 \text{ llam/HC}$$

4.

$$\lambda_b = PB \lambda_o = 30 \text{ llam/min} = 1800 \text{ llam/HC}$$

$$\lambda_b + \lambda_e$$

Parte 2

1.

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_e = 4500 * 0.2 = 15 \text{ llam/min} = 900 \text{ llam/HC} \\ 1/\mu = 2 \text{ min} = 1/30 \text{ horas} \end{array} \right\} u_e = \frac{900}{30} = 30E$$

2.

$$1/\mu = \frac{120 + 8 + 70}{3} = 66s$$

3.

$$\left. \begin{array}{l} u_e = 30E \\ \lambda_e = \lambda_{b1} = \lambda_{b2} = 900 \text{ llam/HC} = 1/4 \text{ llam/s} \\ u_{b1} = 8/4 = 2E \\ u_{b2} = 10/4 = 2.5E \end{array} \right\} \Rightarrow u = 34.5E$$

4.

$$u_G = \frac{\lambda_{b2}}{\mu_R} = 60 * \frac{1}{4} = 15E$$

5.

$$u = c = 35 \Rightarrow \frac{35}{8} \Rightarrow 5 \text{ tarjetas}$$

6.

$$5 \text{ tarjetas} \Rightarrow c = 40 \Rightarrow PB = 2.59\%$$

7.

$$PB_{b2} = 1 - q_1 q_2$$

$$p_1 = 0.0259 \Rightarrow PB_{b2} = 4.54\%$$

$$p_1 = p_2 = 0.02 \Rightarrow PB_{b2} = 3.96\%$$

8.

Sin buzón se pierden 1800 llam/HC

Con buzón:

$$\lambda_e \times 0.0259 = 23.31 \text{ llam/HC}$$

$$B1 \text{ tiene la misma tasa y la misma PB} \Rightarrow 23.31 \text{ llam/HC}$$

$$B2 \lambda_{b2} \times 0.0454 = 40.86 \text{ llam/HC}$$

Con buzón y probabilidades del enunciado:

$$PB_R = 0.3 \Rightarrow \begin{cases} \text{empleados} \rightarrow \lambda_e \times 0.03 = 27 \text{ llam/HC} \\ B1 \rightarrow \text{mismo resultado} \rightarrow 27 \text{ llam/HC} \end{cases}$$

$$PB_{b2} = 0.0396 \Rightarrow 900 \times 0.04 = 36 \text{ llam/HC}$$

En ambos casos está plenamente justificado.

EJERCICIO 15

- a)
- $$\left. \begin{aligned} \lambda &= 1500 \text{ llam/HC} \times 1/60 \text{ h/min} = 25 \text{ llam/min} \\ \mu &= 0.25 \text{ llam/min} \end{aligned} \right\} u = 100$$
- $$c = 4 \times 30 = 120$$
- $$B(c, u) = B(120, 100) = 0.55\% \cong 0.6\%$$
- b)
- $$\left. \begin{aligned} c &= 3 \times 30 = 90 \\ PB &= 5\% \end{aligned} \right\} u = 85$$
- $$\left. \begin{aligned} u &= 85 \\ PB &= 0.6\% \end{aligned} \right\} c = 105 \text{ ctos} \Rightarrow \text{añadir 1 El}$$
- c) PB se reduciría.

EJERCICIO 16

- a) 10 líneas
 b) 0.961 E
 c) 96.1 %
 d) 11 líneas
 e) Cada línea: 0.437 pq/s
 El sistema: 4.807 pq/s

EJERCICIO 17

$$C(c, u) = 1 - 0.55 = 0.45$$

$$\Pr\{\tau > 0.1 \text{ min}\} = 0.061 = e^{-0.1\lambda} \Rightarrow \lambda = 27.97 \text{ llam/min}$$

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \lambda \frac{1}{\mu} = 55.94 \text{ E} \\ c_0 &= 65 \text{ ctos} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= 0.75u_0 = 41.95 \text{ E} \\ c_0 &= 50 \text{ ctos} \end{aligned} \right.$$

Se pueden liberar 15 circuitos

EJERCICIO 18

a) $\overline{W}_Q = 4.6 \text{ min}$

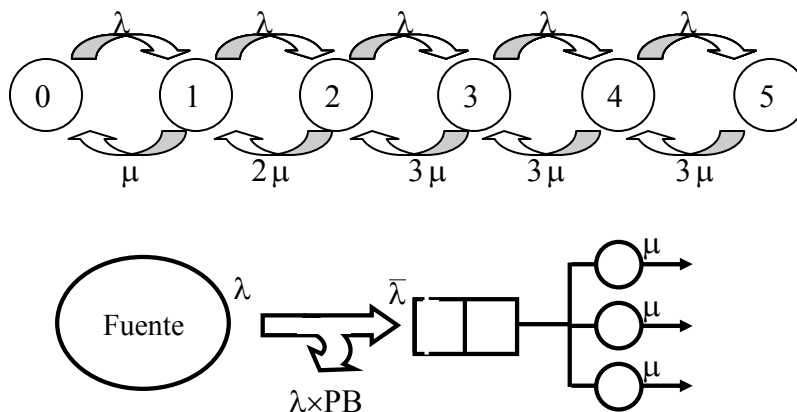
b) 8 cajas de cobro equivalentes ofrecen un tiempo medio de espera en cola de 1.06 min, que es menor que el correspondiente a la caja rápida (1.35 min) y también menor al de las 7 cajas de cobro no rápidas (2.4 min). Se aconseja la primera opción.

EJERCICIO 19

Con 3 ingenieros se cumple el objetivo de calidad especificado.

EJERCICIO 20

Sistema M/M/3/5



$$\lambda = 8 \text{ usu/h}$$

$$\mu = 3 \text{ usu/h}$$

$$u = 8/3 \text{ E}$$

$$1 = P(0) \left(1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{3!} \frac{1}{3}u^4 + \frac{1}{3!} \frac{1}{3^2}u^5 \right)$$

$$P(0) = 0.063738014513731699971827428427096$$

$$P(1) = 0.16997 \quad P(2) = 0.22662 \quad P(3) = 0.20144$$

$$P(4) = 0.17906 \quad P(5) = 0.15917$$

$$PB = P(5) = 0.15917$$

$$\bar{\lambda} = 6.73 \text{ usu/h}$$

$$\rho = 74.74\%$$

$$\bar{N} = 2.74 \text{ usu}$$

$$\bar{T} = 0.41 \text{ h}$$

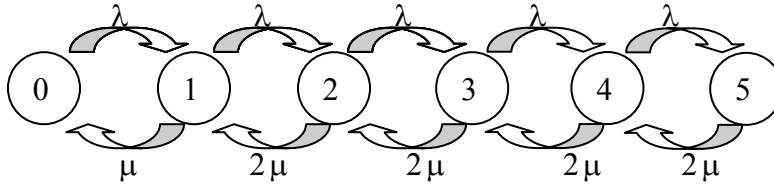
$$\bar{N}_Q = 0.497 \text{ usu}$$

$$\bar{T}_Q = 0.074 \text{ h}$$

$$\Pr\{\text{"waits"}\} = 53.97\%$$

EJERCICIO 21

2.



3.

$$u = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7.5}{5} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ E}$$

4.

$$p_1 = up_0 = 0.27$$

$$p_2 = \frac{1}{2}u^2p_0 = 0.2025$$

$$p_3 = \frac{1}{4}u^3p_0 = 0.151875$$

$$p_4 = \frac{1}{8}u^4p_0 = 0.114$$

$$p_5 = \frac{1}{16}u^5p_0 = 0.0854$$

$$\sum_{i=0}^5 p_i \approx 1$$

5. Sustituir valores, por ejemplo:

$$(\lambda_1 + \mu_1)p_1 = \lambda_0p_0 + \mu_2p_2$$

$$(\lambda + \mu)p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2$$

$$6. P_{\text{busy}} = \sum_{i=2}^5 p_i = 55\%$$

$$7. P_{\text{no-wait}} = 1 - P_{\text{busy}} = 45\%$$

$$8. PB = p_5 = 0.0854$$

$$9. \bar{\lambda} = \lambda(1 - PB) = 6.8595 \text{ trabajos/h}$$

$\bar{\lambda} \leq \lambda$ en todos los casos, ya que el throughput es el tráfico cursado y λ es el ofrecido

$$13. \overline{N_Q} = \sum_{n=3}^5 (n-c)p_n = p_3 + 2p_4 + 3p_5 = 0.636 \text{ trabajos}$$

$$12. \overline{T_Q} = \frac{\overline{N_Q}}{\lambda} = 0.09273 \text{ horas} = 5.56 \text{ minutos}$$

$$11. \overline{T} = \overline{T_Q} + \frac{1}{\mu} = 0.29273 \text{ h} = 17.56 \text{ minutos}$$

$$10. \overline{N} = \lambda \overline{T} = 2.008 \text{ trabajos}$$

$$\text{Otra forma: } \overline{N} = \sum_{n=1}^5 np_n = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = 2.013625 \text{ trabajos}$$

14. No porque no es una red de sistemas de espera en fila.

EJERCICIO 22

- a) 5.3466 usuarios en el sistema
- b) 4.5133 usuarios en la cola de espera
- c) 83.3%

EJERCICIO 23

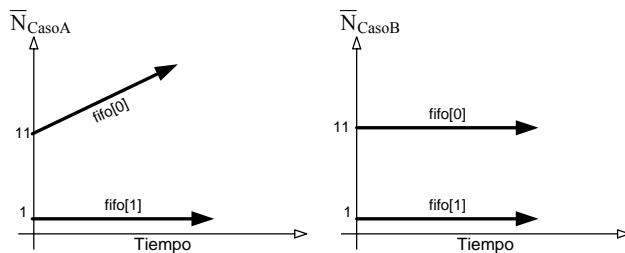
- a) 46.23 s
- b)
 - $\overline{N}_1 = 18.05$ clientes
 - $\overline{N}_2 = 0.7556$ clientes
 - $\overline{N}_3 = 2$ clientes
- c) 24' 16''

EJERCICIO 24

- a) $\mu = 30.55$ clientes/hora
- b) $\overline{N}_Q = 7.65$ clientes
- c) $\overline{T} = \overline{T}_1 + \overline{T}_2 + \overline{T}_3 = 32.6$ min.
- d) Para el subsistema 1:
Mejora de 10.75 min.
Para el subsistema 3:
Mejora de 7.77 min.
Se recomienda ampliar el primer subsistema

EJERCICIO 25

- a) M/M/1
- b)



- c) $\overline{T} = \overline{T}_1 + \overline{T}_2 = 20$ s
- $$\left. \begin{aligned} \overline{N}_i &= \frac{\rho}{1-\rho} = 1 \\ \overline{N}_i &= \lambda \overline{T} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{N} = 2 \text{ usuarios}$$