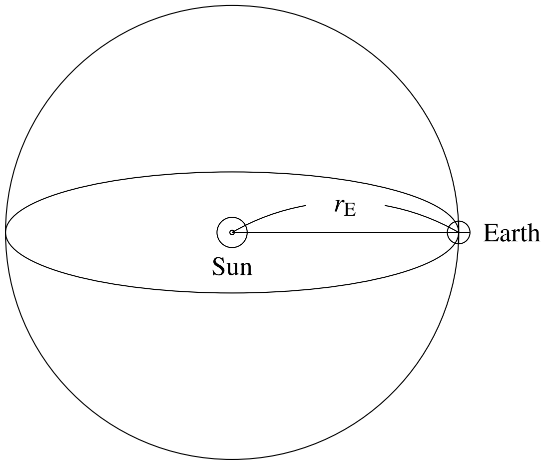
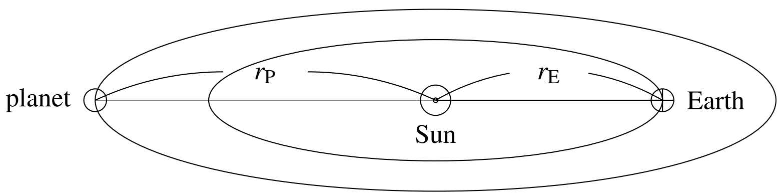
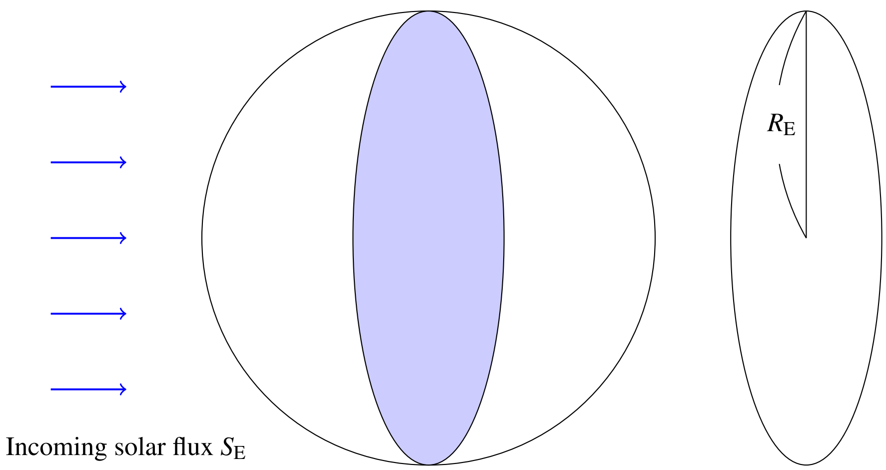
1 유효 온도 (effective temperature)







* 행성의 유효 온도를 구하시오.

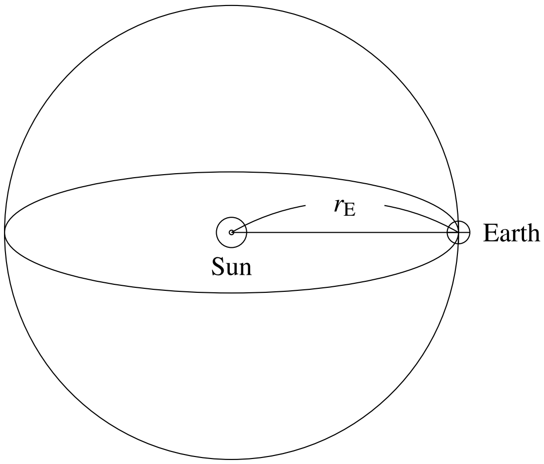
Solution:

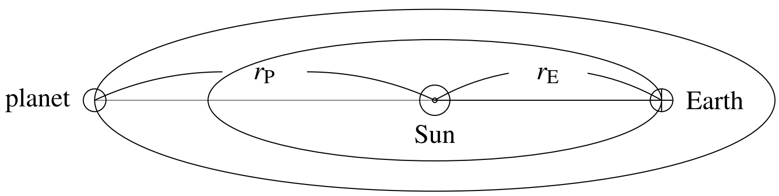
* 지구에서의 태양 상수는 $S_{\mathrm{E}} = \dfrac{L_{\odot}}{4\pi r_{\mathrm{E}}^2}$
* 행성의 태양 상수(S_{P})와 지구의 태양 상수 S_{E}는 $S_{\mathrm{P}} = S_{\mathrm{E}}\left(\dfrac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{P}}}\right)^2$
* 지구가 받는 태양 복사 에너지는 $\pi R_{\mathrm{E}}^2 S_{\mathrm{E}}$
* 행성이 받는 태양 복사 에너지는 $\pi R_{\mathrm{P}}^2 S_{\mathrm{E}}\left(\dfrac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{P}}}\right)^2$
* 알베도(A)를 고려하면 $I_{\mathrm{P}}^{\downarrow} = (1-A)\pi R_{\mathrm{P}}^2 S_{\mathrm{E}}\left(\dfrac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{P}}}\right)^2$
* Stefan-Boltzmann 법칙에 따라 행성이 방출하는 복사 에너지량은 $I_{\mathrm{P}}^{\uparrow} = 4\pi R_{\mathrm{P}}^2 \sigma T^4$
* 따라서 행성의 유효 온도는 $T_e = \sqrt[4]{\dfrac{(1-A)S_{\mathrm{E}}}{4\sigma}}\sqrt{\dfrac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{P}}}}$

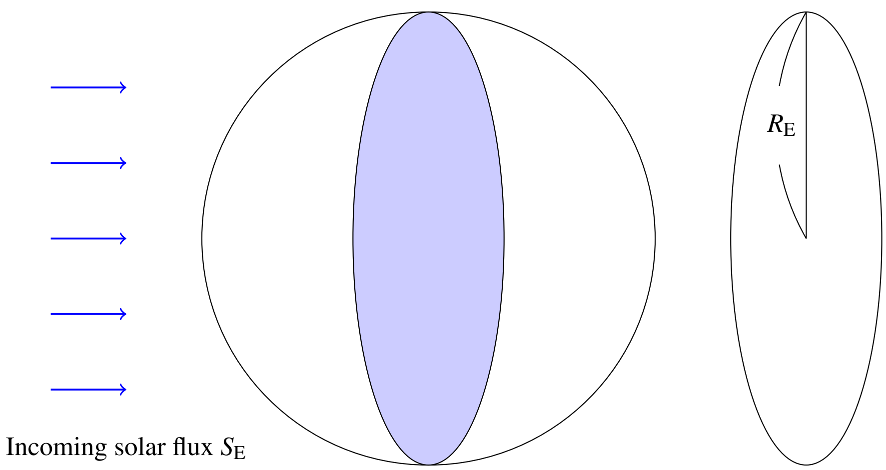
유효 온도는 행성과 태양과의 거리, 알베도에 의해 결정되며 대기의 구성 성분이나 밀도 등의 물리적 성질과는 무관하다.

그러나 실제로 대기를 투과한 태양광이 대기의 구성 성분이나 지면에 흡수되고, 또 재방출 되는 복잡한 과정을 통하여 온도가 결정되므로 이러한 온도를 복사 온도(radiative temperature)라 한다. 실제 표면 온도는 행성의 유효온도에 대기의 온실효과 등이 더해져서 결정되어진 온도이다.

2 이탈 속도 (escape velocity)







맥스웰-볼츠만 분포

기체 분자들이 운동하고 있을 때 속도에 따른 분자 갯수는 맥스웰-볼츠만 분포를 따르게 되는데 이는 어떤 기체분자가 속도(v)를 가질 확률이다.

`![대체 텍스트](http://www.kshitij-iitjee.com/Study/Physics/Part3/Chapter21/79.jpg)`

위 그림을 보면 낮은 온도에서(파랑) 느린 분자가 압도적으로 많고, 빠른 기체분자는 거의 없다. 높은 온도에서는(빨강) 빠른 분자가 많지만, 훨씬 완만한 분포를 가지며 느린 분자도 여전히 존재한다.

분자들의 속력에 대한 맥스웰-볼츠만 분포는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left[\frac{-Mv^2}{2RT}\right]$$

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left[\frac{-mv^2}{2kT}\right]$$

(M: 분자량, m: 분자의 질량)

최빈 속력(v_{mp})는 $\dfrac{df(v)}{dv} = 0$으로 두고 v_{mp}에 대하여 풀어보자.

행성 표면으로부터 고도 h에 있는 단위 질량인 물체의 이탈 속도를 구하시오.

Solution: * 중력으로부터 물체가 탈출하는데 필요한 속도를 이탈 속도라고 하며 다음과 같이 구할 수 있다.
$\frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{-GMm}{r} = 0$
행성 대기의 상층부는 기체의 밀도가 낮으므로, 분자와 원자가 다른 분자나 원자와 충돌할 확률이 매우 적다 따라서 평균자유행로가 크며, 커다란 운동에너지를 가지므로 속도가 빨라 생성의 중력으로 부터 벗어나 외계로 이탈할 수 있다.
* 행성 표면으로부터 고도 h에 있는 단위 질량인 물체의 이탈 속도 :
$v_e = \sqrt{\frac{2Gm_p}{r_p + h}}$ $(G = 6.668 \times 10^{-11}\mathrm{kg}^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2})$
기체 분자에 이탈속도를 적용해 보자.

$\frac{df(v)}{dv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2ve^{\frac{-mv^2}{2kT}} + \frac{-2mv}{2kT}v^2e^{\frac{-mv^2}{2kT}}\right)$
$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} ve^{\frac{-mv^2}{2kT}}\left(2 - \frac{m}{kT}v^2\right) = 0$
$2 - \frac{m}{kT}v^2 = 0$, $v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, $v_{mp} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$
평균 속력은 속력 분포의 수학적 평균이므로 다음과 같이 된다.

$$\bar{v} = \int_0^\infty vf(v)dv$$

이를 부분 적분을 이용해 보자.

$$\left(\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\right)$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

임을 보이자.

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \left[-\frac{x^2}{2} e^{-x^2} \right]_0^\infty + \int_0^\infty x e^{-x^2} dx$$

$=\left[-\frac{x^2}{2} e^{-x^2} \right]_0^\infty - \left[\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^\infty$
$= \lim_{y\to\infty} \left(-\frac{y^2}{2} e^{-y^2} - \frac{1}{2} e^{-y^2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$
$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$

또한 제곱 평균 속도, v_{rms}는 속력에 제곱하여 평균한 값에 제곱근을 취한 것이기 때문에 밑의 식으로 나타낼 수 있다.

$v_{\text{rms}} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v)\, dv}$

$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

따라서 전체 속력은 아래와 같다.

$v_{\text{mp}} < \overline{v} < v_{\text{rms}}$

기체 분자 운동론

이상 기체를 가정하고 기체분자를 x, y, z 방향중 x방향의 운동만 고려하면아래와 같이 모식할 수 있다.

![대체 텍스트](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRsHZTF-U5SpCHv93NAmYHiyoM8NwH9fKybymRd96oHcbaP

Δt의 시간 동안 기체분자가 $2L$의 거리를 움직이므로 속도 v와 Δt는

$v = \frac{2L}{\Delta t}, \Delta t = 2Lv$

완전탄성충돌을 가정했으므로 속도는 방향이 반대이고 크기가 같다. 따라서 운동량변화량은

$\Delta P = mv - (-mv) = 2mv$

힘의 정의에서 다음과 같이 정리된다.

$F = \frac{\Delta P}{Deltat} = \frac{2mv}{\frac{2L}{v}} = \frac{2mv^2}{L}$

또한 압력의 정의에서

$pressure = \frac{force}{area} = \frac{\frac{mv^2}{L}}{L^2} = \frac{mv^2}{L^3} = \frac{mv^2}{volume}$

1몰의 기체에 대해서는 아보가드로수를 곱해주고 보편기체상수R 나누기 아보가드로수 N_a는 볼츠만 상수 k 이므로 이상기체가정에 따라 $Pressure \times volyme = nRT - N_A mv^2\ kT = mv^2$

운동에너지 정의에서

$E_{k,x} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kT$

분자는 x, y, z 세 방향 모두 고려해주면 $E_k = E_{k,x} + E_{k,y} + E_{k,z} = \frac{3}{2}kT$

단원자기체가 아닌경우 분자의 회전운동을 고려해줘야 하기때문에

단원자 : $\frac{3}{2}kT$

이원자 : $\frac{5}{2}kT$

다원자 : $\frac{7}{2}kT$

이상 기체 상태 방정식

거시적인 이상 기체 상태 방정식은 다음과 같은 식으로 표현된다.

* $PV = nRT$ (P:압력, V:부피, n:기체의 몰수, R:기체 상수, T: 절대 온도)

실제 기체는 근사적으로 대개 이상 기체 법칙을 따르며, 기체의 밀도가 0에 가깝거나 기체의 온도가 매우 높으면 이상 기체 법칙에 더 잘 맞게 된다. 그 이유는 밀도가 0에 가까워지면 분자의 운동시 기체 분자끼리 부딪히는 정도가 적어지고 분자 자신의 부피를 무시할 정도가 된다. 또 고온이 됨으로써 분자의 운동이 고속이 되어 분자 간의 힘이 무시할 만한 정도가 되기 때문이다.

이를 미시적 관점에서 본 미시적인 이상 기체 법칙은 다음과 같다.

* $PV = NkT$ (P:압력, V:부피, N:기체의 분자수, k:볼츠만 상수, T:절대 온도)
* $R = \frac{Nk}{n}$

행성의 대기

`![대체 텍스트](http://ircamera.as.arizona.edu/astr₂50/images/esc_vel.gif)`

`![대체 텍스트](https://i2.wp.com/mathscinotes.com/wp-content/uploads/2016/08/MolecularEscapeVelocity1.png)`

기체분자론에 의하면 평균 분자 속도 $\bar{v}$ 가 갖는 운동에너지는 기체의 운동학적 온도 T_k (kinetic temperature)와 분자의 질량(nm)에 의해서 결정되므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

* $\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT_k$
* $\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT_k}{m}}$ (m: 기체분자 1개의 질량, $k = 1.380658 \times 10^{23}\mathrm{JK}^{-1}$)

3 대기역학

대기 역학

좌표계1

관성계 : 절대 좌표계 $(x,\ y,\ z)$

비관성계 : 회전 좌표계 $(x',\ y',\ z')$

극좌표 $(r,\ \theta,\ z)$

$(x,\ y,\ z) \to (r,\ \theta,\ z)$ 에서 수평 방향은 정역학 평형 상태에 있으므로,

$(x,y) \to (r,\theta)$

>$\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}}$ 에서

>$F_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, >$F_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$

라고 할 수 있다.

>$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

에서

>$F_r = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta,$

>$F_\theta = F_y\cos\theta - F_x\cos\theta$

로 나타낼 수 있다.

>$x = r\cos\theta$

를 미분하면,

>$\dfrac{dx}{dt} = \cos\theta\dfrac{dr}{dt} - r\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

이고, 이를 다시 미분하면,

> $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \cos\theta\dfrac{d^2r}{dt^2} - \sin\theta\dfrac{dr}{dt} - \sin\theta\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

같은 방법으로 >$y = r\sin\theta$

를 미분하면 >$\dfrac{dy}{dt} = \sin\theta\dfrac{dr}{dt} + r\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

이고, 이를 다시 미분하면

>$\dfrac{d^2t}{dt^2} = \sin\theta\dfrac{d^2r}{dt^2} + \cos\theta\dfrac{dr}{dt} + \cos\theta\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

이다.

>$F_r = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta = m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \dfrac{d^2y}{dt^2}\sin\theta\right)$

>$F_\theta = F_y\cos\theta - F_x\cos\theta = m\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\cos\theta - \dfrac{d^2x}{dt^2}\cos\theta\right)$

정리하면,

> $F_r = m\left[\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$ 에서,

>$-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \to$ Centrifugal force

>$F_\theta = m\left[r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\right]$ 에서,

>$2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} \to$ Coriolis force

좌표계2

$(x,\ y) \to (x',\ y')$

>$\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}}$

에서

>$F_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$,

>$F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$
라고 할 수 있다.

>$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t,$

>$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$

>$\mathbf{F} = F_{x'}\hat{\mathbf{i}} + F_{y'}\hat{\mathbf{j}}$

>$F_{x'} = F_x\cos\omega t + F_y\sin\omega t = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cos\omega t + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\omega t\right)$

>$F_{y'} = -F_x\sin\omega t + F_y\cos\omega t = m\left(-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\Omega t + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\omega t\right)$
정리하면,
>$F_{x'} = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}F_x - 2\omega\frac{dy}{dt} - 2\omega^2x'\right)$
>$F_{y'} = m\left(\frac{d^2y}{dt^2}F_x + 2\omega\frac{dx}{dt} - 2\omega^2y'\right)$
추가 작성 필요함...

Pressure gradient force

>$dV = dx\cdot dy\cdot dz$

x 방향은

>$F_x = P\cdot\Delta y\cdot\Delta z - (P+\Delta P)\Delta y\cdot\Delta z$

>$F_x = -\Delta P\cdot\Delta y\cdot\Delta z$
>$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
>$f'(x) = lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
>$z = f(x,y)$
에서 $y = b \rightarrow b$ 를 고정 하고 x 방향에 대해서만 극한을 취하는 것을 편미분이라 한다.
>$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x,b) - f(x,b)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$
>$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(y+\Delta y,b) - f(y,b)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$
>$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$
>$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$
라고 쓸 수 있다.
>$F_x = -\Delta P\cdot\Delta y\cdot\Delta z = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$
>$F_y = -\Delta P\cdot\Delta z\cdot\Delta x = \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$
>$F_z = -\Delta P\cdot\Delta x\cdot\Delta y = \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$
>$\rho = \frac{m}{\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z}$
단위 질량당 작용하는 각각의 힘은
>$\frac{F_x}{m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$ >$\frac{F_y}{m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$ >$\frac{F_z}{m} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$
이므로 단위질량당 기압경도력은 다음과 같이 쓸 수 있다.
>$\frac{F}{m} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}i + \frac{\partial P}{\partial y}j + \frac{\partial P}{\partial z}k\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla P$
회전계에서의 운동 방정식

온도를 자동으로 측정하여 무선으로 송신하는 장치를 대형 풍선에 매달아 날려보낸다고 하자.

시각 t_o, 위치 $(x_o,\ y_o,\ z_o)$에서 측정된 온도를 T_o라 하자.

시각 $t_o+\Delta t$, 위치 $(x_o+\Delta x,\ y_o+\Delta y,\ z_o+\Delta z)$에서 측정된 온도를 $T_o+\Delta T$ 라고 하면

>$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z$
이 식을 ΔT로 나누고 0으로 극한을 취하면,

>$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}$

>$\frac{Dx}{Dt} \equiv u$, >$\frac{Dy}{Dt} \equiv v$, >$\frac{Dz}{Dt} \equiv w$,

라고 정의하면

>$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} + U \cdot \nabla T$

여기에서 $U = iu + jv + kw$ 3차원 속도 벡터 이다.

회전계에서의 운동방정식을 유도하면,

>$\frac{DU}{Dt} = -2\Omega \times U - \frac{1}{\rho}\nabla p + g + F_r$

와 같이 나타낼 수 있다.

직각 카테시안 좌표계에서의 운동 방정식

>$\frac{DU}{Dt} = -2\Omega \times U - \frac{1}{\rho}\nabla p + g + F_r$

에서, 먼저 전향력 성분을 나누어 보면,

> $\Omega_x = 0$,

> $\Omega_y = \Omega \cos\phi$,

> $\Omega_z = \Omega \sin\phi$

이다.

> $-2\Omega \times U = -2\,(2\Omega w \cos\phi - 2\Omega v \sin\phi)\,\mathbf{i} - 2\Omega u \sin\phi \mathbf{j} + 2\Omega u \cos\phi \mathbf{k}$

로 나타낼 수 있다. 그리고 기압경도력을 나누어 보면,

>$\nabla p = \mathbf{i}\frac{\partial P}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial P}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial P}{\partial z}$

중력은

> $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$

마찰력은

>$F_r = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z$

각 성분별로 운동방정식을 나타내면

>$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega v \sin\phi - 2\Omega w \cos\phi + F_x$

>$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - 2\Omega u \sin\phi + F_y$

>$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega u \cos\phi + F_z$

x 성분에서 연직 전향력은 수평 전향력에 비해 매우 작은 값이므로, $-2\Omega w \cos\phi$ 항을 무시할 수 있다.

z 성분의 전향력 $2\Omega u \cos\phi$ 은 중력 g에 비해 매우 작으므로 무시할 수 있다.

더구나 $\frac{Dw}{Dt}$의 크기는 더 작기 때문에 $2\Omega \sin\phi$를 f로 두면 다음과 같이 간단히 할 수 있다.

>$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega v \sin\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + fv$

>$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - 2\Omega u \sin\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - fu$

>$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - g$

자연 좌표계

자연 좌표계 $(s,\ n,\ z)$

* t : 유체가 움직이는 방향에 평행인 방향
* n : t에 대하여 수직인 벡터이고 유체가 움직이는 방향의 왼쪽으로 향하는 방향이 + 방향임
* k : 연직 방향

>$\mathbf{V} = V\mathbf{t}$, $\mathbf{V} = \frac{Ds}{Dt}$

가속도는 >$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{t}\frac{DV}{Dt} + V\frac{D\mathbf{t}}{Dt}$

>$\Delta\Psi = \frac{\Delta V}{R}$ 이고,

>$\frac{D\mathbf{t}}{Ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}$

따라서

>$\frac{D\mathbf{t}}{Dt} = \frac{D\mathbf{t}}{Ds}\frac{Ds}{Dt} = \frac{\mathbf{n}}{R}V$

>$\therefore \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{t}\frac{DV}{Dt} + V\frac{D\mathbf{t}}{Dt} = \mathbf{t}\frac{DV}{Dt} + \mathbf{n}\frac{V^2}{R}$

전향력은 운동 방향의 오른쪽으로 작용하고 크기는 fv이므로 전향력은 $-fV\mathbf{n}$으로 나타내고,

기압 경도력은 >$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\mathbf{t} + \frac{\partial p}{\partial n}\mathbf{n}\right)$

로 나타낼 수 있다. 이 벡터 식을 s와 n 방향으로 나타내면

>$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$

>$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

등압선에 평행한 운동을 할 경우 공기덩이는 기압이 같은 곳으로 이동하므로

>$\frac{\partial p}{\partial s} = 0 \rightarrow \frac{DV}{Dt} = 0$

관성풍

>$\frac{V^2}{R} + fV = 0$

>$R = -\frac{V}{f}$

>$P = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi}{2\Omega\sin\phi} = \frac{1}{2}\frac{day}{\sin\phi}$

geostrophic wind

유체가 흐르는 방향에 평행한 방향과 수직인 방향 즉 자연좌표계에 대한 힘의 균형을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

>$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$

>$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

지균풍의 경우에는 $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$이고 등압선이 직선이므로 곡률반경 R의 절댓값은 0 이 된다. 그러므로 지균풍은 아래와 같이 정의된다.

>$-fV_g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

지균풍의 풍속에 관해 정리하면

>$V_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

경도풍

>$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

>$V^2 + fRV + \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

>$V = -\frac{fR}{2} \pm \left(\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{\frac{1}{2}}$ or $-\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$

연습 문제 1. 4.

-1. 질량이 1kg인 공이 1m 줄에 매인 채로 마찰이 없는 수평면 위에서 2 rad s^{-1} 의 속도로 회전하고 있다. 그런데 줄의 길이를 0.5 m로 짧게 하여 회전시킬 때

(1) 공의 회전 속도와 각운동량은 얼마가 되겠는가?

각운동량 보존법칙은

>$R_1\,V_1 = R_2\,V_2$

> $V_1 = R_1\,\Omega_1, V_2 = R_2\,\Omega_2$ 이므로

>${R_1}^2\,\Omega_1 = {R_2}^2\,\Omega_2$

>$1^2 \times 2 = 0.5^2 \times \Omega_2$ 에서

>$\Omega_2 = 8\,(\mathrm{rad\ s^{-1}})$

회전 선속도는 $V_2 = 0.5 \times 8 = 4\left(\mathrm{m\ s^{-1}}\right)$

각운동량은 $L_2 = R_2 \times mV_2 = 0.5 \cdot 1 \cdot 4 = 2\left(\mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}\right)$

이다.

(2) 구심 가속력은 얼마가 되겠는가?

구심 가속력은

$$R_2\,\Omega_2^2 = \cdot 0.5 \cdot 8^2 = 32\left(\mathrm{m\ s^{-2}}\right)$$

-2. 북위 37.5°에서 서풍이 5 $\mathrm{m\ s^{-1}}$로 불고 있다. 절대 좌표계에서 이 바람을 관측하였다면 바람의 속도는 얼마가 되겠는가?

북위 37.5°의 자전 선속도는

$$R_E \cdot \cos\phi\Omega = 6380000 \cdot 0.7934 \cdot 7.29 \times 10^{-5} = 369.01\left(\mathrm{m\ s^{-1}}\right)$$

절대 좌표계에서 이 바람을 관측한다면 자전 선속도와 바람의 방향이 같으므로

$369.01 + 5 = 374.01\left(\mathrm{m\ s^{-1}}\right)$ 이다.

-3. 북위 30°에서 동쪽을 향하여 1000 $\mathrm{kmhr^{-1}}$ 비행하는 비행기가 있다. 이 때 이 비행기에 타고 있는 사람(질량 65kg)에게 작용하는 전향력을 구하여라.

전향력은 $2mv\Omega\sin\phi = 2 \cdot 65 \cdot \frac{1000000}{3600} \cdot 7.29 \times 10^{-5} \cdot 0.5 = 1.32\left(\mathrm{kg\ m\ s^{-2}} = \mathrm{N}\right)$이다.

-4. 같은 위도대 (북위 37°)에 있는 두 지역(100 km 떨어져 있음)의 기압차는 2 hPa이다. 이 때 지균풍의 속력을 계산하라.

$$fv_g = -\rho\frac{\partial P}{\partial n}$$

에서, 지균풍의 풍속은

$$v_g = -\frac{1}{f\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{2\Omega\sin\phi\rho}\frac{\partial P}{\partial n} = -\cdot\frac{1}{2\cdot 7.29\times 10^{-5}\left(\mathrm{s^{-1}}\right)\cdot 0.5\cdot\rho}\cdot\frac{200\left(\mathrm{kg\ m\ s^{-2}m^{-2}}\right)}{100000\left(\mathrm{m}\right)} = -\frac{1}{\rho}\cdot 27.43\left(\mathrm{kg\ m^{-2}\ s^{-1}}\right)$$

이다. 공기의 밀도를 1kg $\mathrm{m^{-3}}$이라고 가정하면,

$$v_g = -27.43\left(\mathrm{m\ s^{-1}}\right)$$

이다.

연습 문제 5. 6.

-5. 북위 30°에서 관성풍의 바람이 10 $\mathrm{ms^{-1}}$ 일 때, 관성원의 반지름은 얼마가 되겠는가?

관성원의 반지름은

$$R = -\frac{V}{f} = -\frac{V}{2\Omega\sin\phi} = \frac{10}{2\cdot 7.29\times 10^{-5}\cdot 0.5} = 137{,}136.588\,(\mathrm{m}) = 137.1\,(\mathrm{km})$$

-6.

경도풍은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V^2 + fRV + \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

지균풍은

$$fV_g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

이므로

$$V_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$V^2 + fRV - fRV_g = 0$$

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{fR}{2}\right)^2 + fRV_g}$$

저기압성 경도풍의 경우 $R > 0$ 이고, $-\frac{\partial p}{\partial n} > 0$ 인 경우에 해당되므로,

$$V = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\left(\frac{fR}{2}\right)^2 + fRV_g}$$

$$= -\frac{2\Omega\sin\phi R}{2} + \sqrt{\left(+\frac{2\Omega\sin\phi R}{2}\right)^2 + 2\Omega\sin\phi RV_g}$$

$$= -\Omega\sin\phi R + \sqrt{\left(\Omega\sin\phi R\right)^2 + 2\Omega\sin\phi RV_g}$$

에서

$$\Omega\sin\phi R = 7.29\times 10^{-5}\cdot 0.5\cdot 1000000 = 36.45\left(\mathrm{ms^{-1}}\right)$$

이므로

>$-\Omega\sin\phi R+\sqrt{(\Omega\sin\phi R)^2+2\Omega\sin\phi RV_g}$

>$= -36.45+\sqrt{(36.45)^2+2\cdot 36.45\cdot 10}$

>$= -36.45+45.33 = 8.88\left(\mathrm{ms}^{-1}\right)$

연습 문제 7. 8.

-7. 기압경도가 1000 km당 10 hPa이다. 이 때의 지균풍을 계산하라. 그리고 이러한 기압경도가 유지되면서, 곡률반경이 ±500km 일 때의 경도풍들의 풍속을 계산하여 저기압의 경도풍이 지균풍보다 작음을 보이고, 반대로 고기압의 경도풍이 지균풍보다 큼을 보여라. 정상적인 경우와 비정상적인 경우 모두에 대하여 계산하라. $\rho = 1\mathrm{kgm}^{-3}$ 이고, $f = 10^{-4}s^{-1}$이다.

지균풍은

>$fV_g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$

>$V_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{10^{-4}\cdot 1}\frac{-1000}{1000000} = 10\left(\mathrm{ms}^{-1}\right)$

경도풍은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

>$V^2+fRV+\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

>$V^2+fRV-fRV_g = 0$

>$V = -\frac{fR}{2}\pm\sqrt{\frac{f^2R^2}{4}-\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} = -\frac{fR}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{fR}{2}\right)^2+fRV_g}$

고기압성 경도풍은 $R<0$ 인 경우

>$V_{GH} = -\frac{fR}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{fR}{2}\right)^2+fRV_g}$

>$= -\frac{10^{-4}\cdot -500000}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{10^{-4}\cdot -500000}{2}\right)^2+10^{-4}\cdot -500000\cdot 10}$

>$= 25\pm 11.18$

>$V_{GH} = 13.81$ or $V_{GH} = 36.18\left(\mathrm{ms}^{-1}\right)$

저기압성 경도풍은 $R>0$ 인 경우

>$V_{GL} = -\frac{fR}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{fR}{2}\right)^2+fRV_g}$

>$= -\frac{10^{-4}\cdot 500000}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{10^{-4}\cdot 500000}{2}\right)^2+10^{-4}\cdot 500000\cdot 10}$

>$= -25\pm 33.54$

>$V_{GL} = 8.54$ or $V_{GL} = 58.54\left(\mathrm{ms}^{-1}\right)$

경도풍의 풍속

>$V^2+fRV-fRV_g = 0$

에서

>$\frac{V_g}{V} = 1+\frac{V}{fR}$

와 같이 나타낼 수 있다.

저기압성 경도풍은 $R>0$ 이므로 경도풍보다 느리고, 고기압성 경도풍은 $R<0$ 이므로 경도풍보다 빠르다.

-8. 850hPa와 500hPa 사이의 평균 기온이 동쪽으로 갈수록 100 km 당 2°씩 감소하였다. 이 때 850hPa의 지균 풍속이 남동풍 20 ms^{-1}이면, 500hPa에서의 자균 풍속은 얼마가 되겠는가? $f = 10^{-4}s^{-1}$이다.

???

4 대기 정역학

연습 문제 1

-1. 화씨 온도 눈금은 얼음이 녹는점을 32F 로 물의 끓는점을 212F로 지정하였다. 섭씨와 화씨의 눈금 사이의 관계식을 유도하고, 섭씨 온도가 -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40일 때의 화씨 온도를 구하여 표로 작성하라.

$\mathrm{F} = \frac{(202-32)}{(100-0)}\mathrm{C}+32$

$\mathrm{F} = \frac{9}{5}\mathrm{C}+32$

$\mathrm{C} = \frac{5}{9}(\mathrm{F}-32)$

>-40, -40

>-30, -22

>-20, -4

>-10, 14

>0, 32

>10, 50

>20, 68

>30, 86

>40, 104

연습 문제 2

-2. 압력이 1000hPa 이고 온도가 10C 에서 수소 기체를 채집하였다. 비부피를 계산하라.

$\mathrm{p}\nu = \mathrm{RT}$

$\nu = \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{p}}$

$\nu = \frac{\mathrm{R^*\ T}}{\mathrm{m_{H_2}\ p}}$

$= \frac{8.314 \cdot 283.13}{2\times10^{-3}\cdot10^5} = 11.77\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}}$

$\mathrm{R^*} = 8.3144\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}$

$\mathrm{m_{H_2}} = 2\times10^{-3}\ \mathrm{kg\ mol^{-1}}$

연습 문제 3

-3. 건조공기를 구성하는 네가지 기체들에 대한 자료로부터 평균 분자량을 계산하라. 이 장에서 주어진 값과 여기서 구한 값을 비교하라.

성분, 화학식, 체적비(

질소 N2 78.084 28, 21.863

산소 O2 20.946 32 6.703

아르곤 Ar 0.934 40 0.374

이산화탄소 CO2 0.036 44 0.158

계산값 : 28.956, 교과서값 : 28.966

연습 문제 4

-4. 온도 200 K, 300 K, 400 K 에 대한 건조공기의 ν, $-p$ 다이아그램의 등온선을 계산하고 그려넣어라. 압력은 1000hPa 에서 200 hPa로 변동하며 ν 는 1 $\mathrm{m^3}$ kg−1에서부터 2.5 $\mathrm{m^3}$ kg−1 까지 변동한다고 설정한다.

$\mathrm{p}\nu = \mathrm{RT}$

$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{RT}}{\nu}$

$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{R^*\ T}}{\nu\ \mathrm{m}}$

연습 문제 5

-5. 800 700 hPa 사이의 지오퍼텐셜 미터를 계산 하라. 두층 사이의 평균 온도는 -3C 이고 평균혼합비는 3 g $\mathrm{kg^{-1}}$ 이다.

$d\Psi = \mathrm{g}dz$

$\mathrm{dp} = -\rho\ \mathrm{g\ dz}$

$\mathrm{d}\Psi = -\nu\ \mathrm{dp}$

습윤 공기의 경우

$\mathrm{d}\Psi = -\mathrm{RT}^* \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}}$

$\Psi_2 - \Psi_1 = \mathrm{R} \int_{\mathrm{p}_2}^{\mathrm{p}_1} \mathrm{T}^* \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}}$

$\Psi_2 - \Psi_1 = -\mathrm{R}\overline{\mathrm{T}^*} \ln \frac{\mathrm{p}_2}{\mathrm{p}_1}$

m, s, K로 표시되는 단위를 가진 R에 9.8로 나누면

$\Psi_2 - \Psi_1 = -\frac{\mathrm{R}\overline{\mathrm{T}^*}}{9.8} \ln \frac{\mathrm{p}_2}{\mathrm{p}_1}$

$\Psi_2 - \Psi_1 = -\frac{287.04\ \cdot \overline{\mathrm{T}^*}}{9.8} \ln \frac{\mathrm{p}_2}{\mathrm{p}_1}$

$\mathrm{T}^* = \mathrm{T} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P}}\right)^{-1}$

https://m.blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=tnehf18logNo=220423609713proxyReferer=https

$\mathrm{T}^* = (1 + 0.61\mathrm{q})\mathrm{T} = (1 + 0.61 \frac{3}{1003}) \cdot 270 = 270.5$

$\Psi_2 - \Psi_1 = -\frac{287.04\ \cdot 270.5}{9.8} \ln \frac{8}{7} = 459.5$

연습 문제 6

-6. 절대온도는 아래 식에 의해서 지수함수로 냉각된다고 가정한다.

$T = T_0 e^{-\frac{z}{H}}$

여기서 $\mathrm{T}_0 = 273$ K 로서 z=0 에서의 온도이고, H는 T_0인 등질대기의 높이이다. 아래 식이 됨을 보여라.

$p = p_0\ e^{(1-e^{\frac{z}{H}})}$

여기서 p_0는 z=0에서의 기압이다. 기온 감율이 건조단열감율과 일치하는 높이를 찾아라.

연습 문제 7

-7. 일정한 기온감율을 가진 대기 내에서 밀도가 높이에 따라 종속되는 수식을 유도하라.

연습 문제 8

-8. 공기 층의 밑면의 기압이 p_1이고 윗면의 기압이 p_2인 공기층을 생각하자. 만약 이 층 내의 가온도는 일정하다면 상층 기압변화의 증가분dp_2는 하층 기압의 변화 dp_1에 의해서 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$\frac{dp_1}{p_1} = \frac{dp_2}{p_2}$

연습 문제 9

-9. 지상기압이 변동하지 않는 동안 시간에 따라 지상기온 $\mathrm{T}_0 X, (T_0 x|\breve{}\backslash 0(\imath(D\Gamma\Gamma 0|\$X.\breve{}\o\o\Xi 0|0UX(tT_0 QX\Gamma 0Xt\o\backslash\Gamma\Gamma(D|$.

연습 문제 10

-10. 어떤 관측소 기압계 고도는 해발 994 지오퍼텐셜미터이다. 최근 12시간 동안의 평균기온은 17.8C 였다. 완전히 보정한 관측소 기압은 890.0hPa이다. 공기의 기온감율을 건조단열감율인 6.5C $\mathrm{km}^{-1} < \backslash\Gamma\breve{}Xtt0UDX|$.

$p_1 = p_2 \frac{e^{\Psi_2 - \Psi_1}}{R\ T^*}$

$T^* = 273 + \frac{17.8 + 17.8 + 6.5 \times 0.994}{2} = 294.03$

$p_1 = 890\ \frac{e^{994}}{287.04\ \cdot 294.03}$

5 대기 정역학

연습 문제 1

-1. 화씨 온도 눈금은 얼음이 녹는점을 32F 로 물의 끓는점을 212F로 지정하였다. 섭씨와 화씨의 눈금 사이의 관계식을 유도하고, 섭씨 온도가 -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40일 때의 화씨 온도를 구하여 표로 작성하라.

$$\mathrm{F} = \frac{(202-32)}{(100-0)}\mathrm{C}+32$$

$$\mathrm{F} = \frac{9}{5}\mathrm{C}+32$$

$$\mathrm{C} = \frac{5}{9}(\mathrm{F}-32)$$

>-40, -40

>-30, -22

>-20, -4

>-10, 14

>0, 32

>10, 50

>20, 68

>30, 86

>40, 104

연습 문제 2

-2. 압력이 1000hPa 이고 온도가 10C 에서 수소 기체를 채집하였다. 비부피를 계산하라.

$$\mathrm{p}\nu = \mathrm{RT}$$

$$\nu = \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{p}}$$

$$\nu = \frac{\mathrm{R}^*\ \mathrm{T}}{\mathrm{m}_{\mathrm{H}_2}\ \mathrm{p}}$$

$$= \frac{8.314 \cdot 283.13}{2\times10^{-3}\cdot10^5} = 11.77\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}$$

$$\mathrm{R}^* = 8.3144\ \mathrm{J\ mol}^{-1}\ \mathrm{K}^{-1}$$

$$\mathrm{m}_{\mathrm{H}_2} = 2\times10^{-3}\ \mathrm{kg\ mol}^{-1}$$

연습 문제 3

-3. 건조공기를 구성하는 네가지 기체들에 대한 자료로부터 평균 분자량을 계산하라. 이 장에서 주어진 값과 여기서 구한 값을 비교하라.

성분, 화학식, 체적비(

질소 N2 78.084 28, 21.863

산소 O2 20.946 32 6.703

아르곤 Ar 0.934 40 0.374

이산화탄소 CO2 0.036 44 0.158

계산값 : 28.956, 교과서값 : 28.966

연습 문제 4

-4. 온도 200 K, 300 K, 400 K 에 대한 건조공기의 ν, $-p$ 다이아그램의 등온선을 계산하고 그려넣어라. 압력은 1000hPa 에서 200 hPa로 변동하며 ν 는 1 m^3 kg−1에서부터 2.5 m^3 kg−1 까지 변동한다고 설정한다.

$$\mathrm{p}\nu = \mathrm{RT}$$

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{RT}}{\nu}$$

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{R}^*\ \mathrm{T}}{\nu\ \mathrm{m}}$$

연습 문제 5

-5. 800 700 hPa 사이의 지오퍼텐셜 미터를 계산 하라. 두층 사이의 평균 온도는 -3C 이고 평균혼합비는 3 g kg^{-1} 이다.

$$d\Psi = \mathrm{g}dz$$

$\mathrm{dp} = -\rho\ \mathrm{g}\ \mathrm{dz}$

$\mathrm{d}\Psi = -\nu\ \mathrm{dp}$

습윤 공기의 경우

$\mathrm{d}\Psi = -\mathrm{RT}^* \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}}$

$\Psi_2 - \Psi_1 = \mathrm{R} \int_{\mathrm{p}_2}^{\mathrm{p}_1} \mathrm{T}^* \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}}$

$\Psi_2 - \Psi_1 = -\mathrm{R}\overline{\mathrm{T}^*} \ln \frac{\mathrm{p}_2}{\mathrm{p}_1}$

m, s, K로 표시되는 단위를 가진 R에 9.8로 나누면

$\Psi_2 - \Psi_1 = -\frac{\mathrm{R}\overline{\mathrm{T}^*}}{9.8} \ln \frac{\mathrm{p}_2}{\mathrm{p}_1}$

$\Psi_2 - \Psi_1 = -\frac{287.04\ \cdot \overline{\mathrm{T}^*}}{9.8} \ln \frac{\mathrm{p}_2}{\mathrm{p}_1}$

$\mathrm{T}^* = \mathrm{T} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P}}\right)^{-1}$

https://m.blog.naver.com/PostView.nhn?blogId=tnehf18logNo=220423609713proxyReferer=https

$\mathrm{T}^* = (1 + 0.61\mathrm{q})\mathrm{T} = (1 + 0.61 \frac{3}{1003}) \cdot 270 = 270.5$

$\Psi_2 - \Psi_1 = -\frac{287.04\ \cdot 270.5}{9.8} \ln \frac{8}{7} = 459.5$

연습 문제 6

-6. 절대온도는 아래 식에 의해서 지수함수로 냉각된다고 가정한다.

$T = T_0 e^{-\frac{z}{H}}$

여기서 $\mathrm{T}_0 = 273$ K 로서 z=0 에서의 온도이고, H는 T_0인 등질대기의 높이이다. 아래 식이 됨을 보여라.

$p = p_0\ e^{(1-e^{\frac{z}{H}})}$

여기서 p_0는 z=0에서의 기압이다. 기온 감율이 건조단열감율과 일치하는 높이를 찾아라.

연습 문제 7

-7. 일정한 기온감율을 가진 대기 내에서 밀도가 높이에 따라 종속되는 수식을 유도하라.

연습 문제 8

-8. 공기 층의 밑면의 기압이 p_1이고 윗면의 기압이 p_2인 공기층을 생각하자. 만약 이 층 내의 가온도는 일정하다면 상층 기압변화의 증가분dp_2는 하층 기압의 변화 dp_1에 의해서 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$\frac{dp_1}{p_1} = \frac{dp_2}{p_2}$

연습 문제 9

-9. 지상기압이 변동하지 않는 동안 시간에 따라 지상기온 $\mathrm{T}_0 X, (T_0 x|\breve{}\backslash 0(\imath(D\Gamma\Gamma 0|\$X.\breve{}\o\o\Xi 0|0UX(tT_0 QX\Gamma 0Xt\o\backslash\Gamma\Gamma(D|.$

연습 문제 10

-10. 어떤 관측소 기압계 고도는 해발 994 지오퍼텐셜미터이다. 최근 12시간 동안의 평균기온은 17.8C 였다. 완전히 보정한 관측소 기압은 890.0hPa이다. 공기의 기온감율을 건조단열감율인 6.5C $\mathrm{km}^{-1} < \backslash\Gamma\breve{}Xtt0UDX|.$

$p_1 = p_2 \frac{e^{\Psi_2 - \Psi_1}}{R\ T^*}$

$T^* = 273 + \frac{17.8 + 17.8 + 6.5 \times 0.994}{2} = 294.03$

$p_1 = 890\ \frac{e^{994}}{287.04\ \cdot 294.03}$