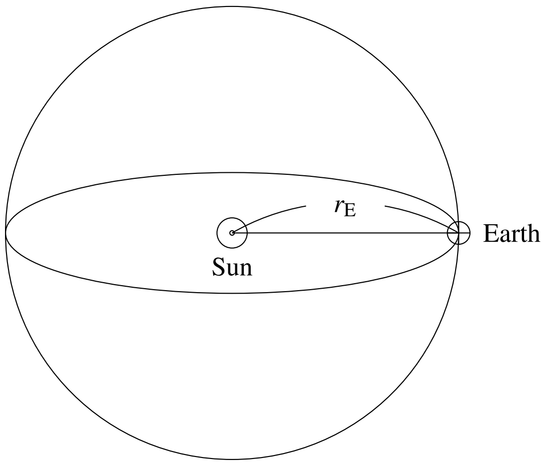
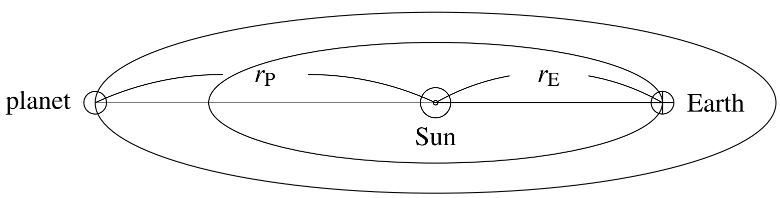
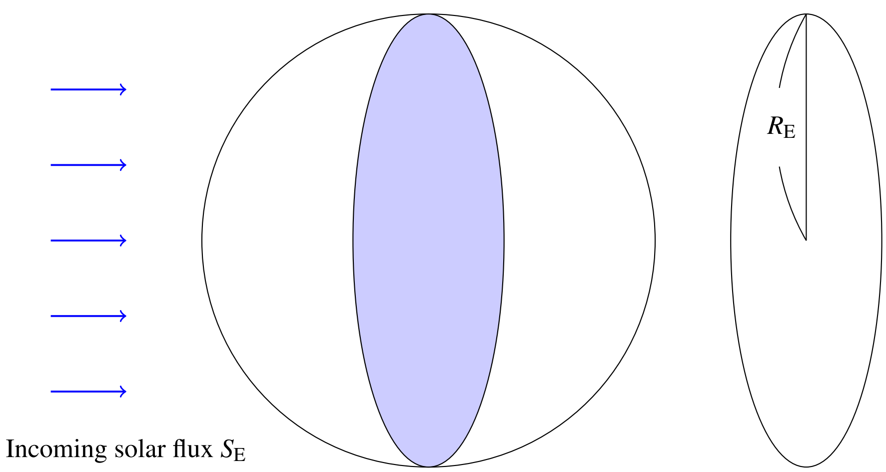
1 유효 온도 (effective temperature)





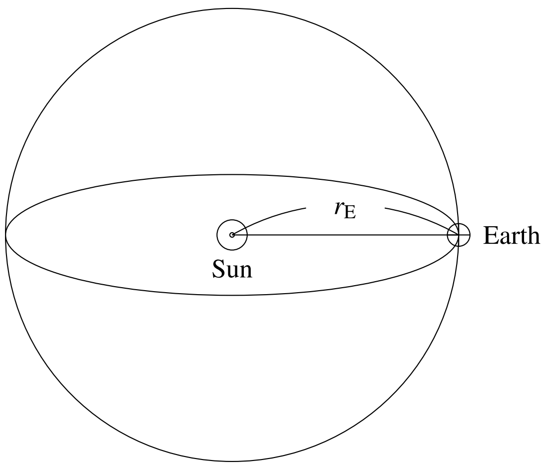


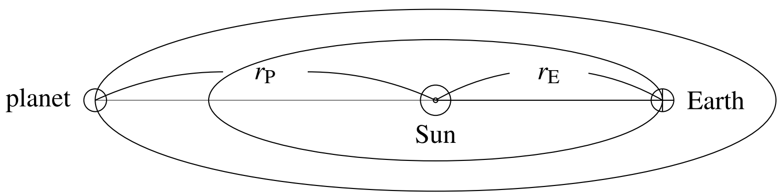
* 행성의 유효 온도를 구하시오.

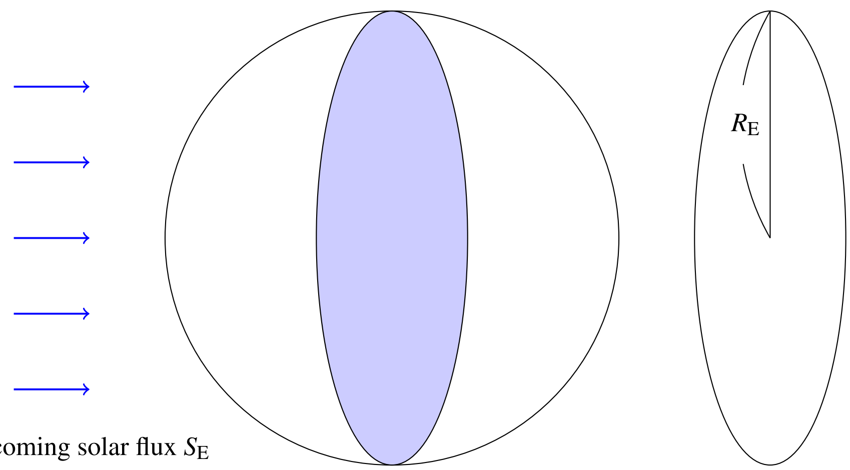
Solution:
* 지구에서의 태양 상수는 $S_{\mathrm{E}} = \dfrac{L_\odot}{4\pi r_{\mathrm{E}}^2}$
* 행성의 태양 상수(S_{P})와 지구의 태양 상수 S_{E}는 $S_{\mathrm{P}} = S_{\mathrm{E}}\left(\dfrac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{P}}}\right)^2$
* 지구가 받는 태양 복사 에너지는 $\pi R_{\mathrm{E}}^2 S_{\mathrm{E}}$
* 행성이 받는 태양 복사 에너지는 $\pi R_{\mathrm{P}}^2 S_{\mathrm{E}}\left(\dfrac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{P}}}\right)^2$
* 알베도(A)를 고려하면 $I_{\mathrm{P}}^{\downarrow} = (1-A)\pi R_{\mathrm{P}}^2 S_{\mathrm{E}}\left(\dfrac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{P}}}\right)^2$
* Stefan-Boltzmann 법칙에 따라 행성이 방출하는 복사 에너지량은 $I_{\mathrm{P}}^{\uparrow} = 4\pi R_{\mathrm{P}}^2 \sigma T^4$
* 따라서 행성의 유효 온도는 $T_e = \sqrt[4]{\dfrac{(1-A)S_{\mathrm{E}}}{4\sigma}}\sqrt{\dfrac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{P}}}}$

유효 온도는 행성과 태양과의 거리, 알베도에 의해 결정되며 대기의 구성 성분이나 밀도 등의 물리적 성질과는 무관하다.
그러나 실제로 대기를 투과한 태양광이 대기의 구성 성분이나 지면에 흡수되고, 또 재방출 되는 복잡한 과정을 통하여 온도가 결정되므로 이러한 온도를 복사 온도(radiative temperature)라 한다. 실제 표면 온도는 행성의 유효온도에 대기의 온실효과 등이 더해져서 결정되어진 온도이다.

2 이탈 속도 (escape velocity)







맥스웰-볼츠만 분포

기체 분자들이 운동하고 있을 때 속도에 따른 분자 갯수는 맥스웰-볼츠만 분포를 따르게 되는데 이는 어떤 기체분자가 속도(v)를 가질 확률이다.

`![대체 텍스트](http://www.kshitij-iitjee.com/Study/Physics/Part3/Chapter21/79.jpg)`

위 그림을 보면 낮은 온도에서(파랑) 느린 분자가 압도적으로 많고, 빠른 기체분자는 거의 없다. 높은 온도에서는(빨강) 빠른 분자가 많지만, 훨씬 완만한 분포를 가지며 느린 분자도 여전히 존재한다.

분자들의 속력에 대한 맥스웰-볼츠만 분포는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$f(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left[\frac{-Mv^2}{2RT}\right]$

$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left[\frac{-mv^2}{2kT}\right]$

(M: 분자량, m: 분자의 질량)

최빈 속력(v_{mp})는 $\frac{df(v)}{dv} = 0$으로 두고 v_{mp}에 대하여 풀어보자.

행성 표면으로부터 고도 h에 있는 단위 질량인 물체의 이탈 속도를 구하시오.

Solution: * 중력으로부터 물체가 탈출하는데 필요한 속도를 이탈 속도라고 하며 다음과 같이 구할 수 있다.
$\frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{-GMm}{r} = 0$
행성 대기의 상층부는 기체의 밀도가 낮으므로, 분자와 원자가 다른 분자나 원자와 충돌할 확률이 매우 적다 따라서 평균자유행로가 크며, 커다란 운동에너지를 가지므로 속도가 빨라 생성의 중력으로 부터 벗어나 외계로 이탈할 수 있다.
* 행성 표면으로부터 고도 h에 있는 단위 질량인 물체의 이탈 속도 :
$v_e = \sqrt{\frac{2Gm_p}{r_p + h}}$ $(G = 6.668 \times 10^{-11}\mathrm{kg}^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2})$
기체 분자에 이탈속도를 적용해 보자.

$\frac{df(v)}{dv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2ve^{\frac{-mv^2}{2kT}} + \frac{-2mv}{2kT}v^2e^{\frac{-mv^2}{2kT}}\right)$
$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} ve^{\frac{-mv^2}{2kT}}\left(2 - \frac{m}{kT}v^2\right) = 0$
$2 - \frac{m}{kT}v^2 = 0$, $v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, $v_{mp} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$
평균 속력은 속력 분포의 수학적 평균이므로 다음과 같이 된다.

$$\bar{v} = \int_0^\infty vf(v)dv$$

이를 부분 적분을 이용해 보자.

$$\left(\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\right)$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

임을 보이자.

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \left[-\frac{x^2}{2} e^{-x^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x e^{-x^2} dx$$

$=\left[-\frac{x^2}{2} e^{-x^2}\right]_0^\infty - \left[\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^\infty$

$= \lim_{y\to\infty} \left(-\frac{y^2}{2} e^{-y^2} - \frac{1}{2} e^{-y^2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$

또한 제곱 평균 속도, v_{rms}는 속력에 제곱하여 평균한 값에 제곱근을 취한 것이기 때문에 밑의 식으로 나타낼 수 있다.

$v_{\text{rms}} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v)\, dv}$

$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

따라서 전체 속력은 아래와 같다.

$v_{\text{mp}} < \bar{v} < v_{\text{rms}}$

기체 분자 운동론

이상 기체를 가정하고 기체분자를 x, y, z 방향중 x방향의 운동만 고려하면아래와 같이 모식할 수 있다.

![대체 텍스트](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRsHZTF-U5SpCHv93NAmYHiyoM8NwH9fKybymRd96oHcbaP

Δt의 시간 동안 기체분자가 $2L$의 거리를 움직이므로 속도 v와 Δt는

$v = \frac{2L}{\Delta t}, \Delta t = 2Lv$

완전탄성충돌을 가정했으므로 속도는 방향이 반대이고 크기가 같다. 따라서 운동량변화량은

$\Delta P = mv - (-mv) = 2mv$

힘의 정의에서 다음과 같이 정리된다.

$F = \frac{\Delta P}{Deltat} = \frac{2mv}{\frac{2L}{v}} = \frac{2mv^2}{L}$

또한 압력의 정의에서

$pressure = \frac{force}{area} = \frac{\frac{mv^2}{L}}{L^2} = \frac{mv^2}{L^3} = \frac{mv^2}{volume}$

1몰의 기체에 대해서는 아보가드로수를 곱해주고 보편기체상수R 나누기 아보가드로수 N_a는 볼츠만 상수 k 이므로 이상기체가정에 따라 $Pressure \times volyme = nRT - N_A mv^2\ kT = mv^2$

운동에너지 정의에서

$E_{k,x} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kT$

분자는 x, y, z 세 방향 모두 고려해주면 $E_k = E_{k,x} + E_{k,y} + E_{k,z} = \frac{3}{2} kT$

단원자기체가 아닌경우 분자의 회전운동을 고려해줘야 하기때문에

단원자 : $\frac{3}{2} kT$

이원자 : $\frac{5}{2} kT$

다원자 : $\frac{7}{2} kT$

이상 기체 상태 방정식

거시적인 이상 기체 상태 방정식은 다음과 같은 식으로 표현된다.

* $PV = nRT$ (P:압력, V:부피, n:기체의 몰수, R:기체 상수, T: 절대 온도)

실제 기체는 근사적으로 대개 이상 기체 법칙을 따르며, 기체의 밀도가 0에 가깝거나 기체의 온도가 매우 높으면 이상 기체 법칙에 더 잘 맞게 된다. 그 이유는 밀도가 0에 가까워지면 분자의 운동시 기체 분자끼리 부딪히는 정도가 적어지고 분자 자신의 부피를 무시할 정도가 된다. 또 고온이 됨으로써 분자의 운동이 고속이 되어 분자 간의 힘이 무시할 만한 정도가 되기 때문이다.

이를 미시적 관점에서 본 미시적인 이상 기체 법칙은 다음과 같다.

* $PV = NkT$ (P:압력, V:부피, N:기체의 분자수, k:볼츠만 상수, T:절대 온도)
* $R = \frac{Nk}{n}$

행성의 대기

`![대체 텍스트](http://ircamera.as.arizona.edu/astr_250/images/esc_vel.gif)`

`![대체 텍스트](https://i2.wp.com/mathscinotes.com/wp-content/uploads/2016/08/MolecularEscapeVelocity1.png)`

기체분자론에 의하면 평균 분자 속도 $\bar{v}$ 가 갖는 운동에너지는 기체의 운동학적 온도 T_k (kinetic temperature)와 분자의 질량(nm)에 의해서 결정되므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

* $\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT_k$
* $\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT_k}{m}}$ (m: 기체분자 1개의 질량, $k = 1.380658 \times 10^{23}\mathrm{JK}^{-1}$)