Stellar Astrophysics

Instructor : Hee-Won Lee (hwlee@sejong.ac.kr, 영실관 620 호)
Course Homepage — http://quasar.sejong.ac.kr/

1 흑체 복사와 항성의 광도

1.1 주파수당 복사 세기

별의 스펙트럼은 기본적으로 흑체 복사로 어느 정도 근사할 수 있다. 빛은 공간을 진행하면서 진행 경로에 있는물질들과 상호작용하며 흡수되어 약해지기도하고 물질이 빛을 추가하여 빛의 세기가 강해지기도 한다. 이러한 상황을 기술하는 학문 분야를 **복사 전달 (radiative transfer)** 라고 한다.

복사 전달을 공부할 때에 가장 기본되는 개념은 빛의 세기라는 개념이다. 물론 빛은 파장에 따라 구별할 수 있으므로, 주어진 주파수당 빛의 세기라는 개념을 정립해야 한다. 이와같은 개념의 주파수당 빛의 세기를 정의하는 것은 빛을 낱개의 빛살로 나누어 빛살마다 세기를 할당하는 작업이다. 그러나 빛살은 무한히 작게 나눈 빛줄기이므로 어쩔수 없이 미분의 개념을 도입해야 한다. 즉, 빛살이 비롯된 작은 지역 (dA) 으로부터 아주 좁은 방향 $d\Omega$ 으로 향하는 빛살이 갖는 미소 에너지 dE 를 생각해야 한다.

그림과 같이 작은 면적 dA 에서 법선 방향에 대하여 θ 의 각을 이루면서 작은 입체각 $d\Omega$ 로 진행하는 빛살이 주파수 ν 와 $\nu + d\nu$ 사이의 범위에서 미소 에너지 dE 을 갖고 있다고 생각하자. 이 빛살에 우리가 할당하는 주파수당 빛의 세기 (specific intensity) 는

$$dE = I_\nu dA \cos\theta dt d\nu d\Omega \qquad (1)$$

이다.

이와같이 정의한 빛살 에너지가 작은 면적을 갖는 dA_1 에서 거리 r 만큼 진행하여 작은 입체각 $d\Omega_1$ 으로 들어갈 때에 이 곳에 가상의 표면 dA_2 를 만들자. 이때에 θ_1 은 dA_1 이 빛살의 진행 방향과 이루는 각이고 θ_2 는 dA_2 가 빛살과 이루는 각이다. 여기에서

$$d\Omega_1 = \frac{dA_2 \cos\theta_2}{r^2}, \quad d\Omega_2 = \frac{dA_1 \cos\theta_1}{r^2} \qquad (2)$$

이 성립한다.

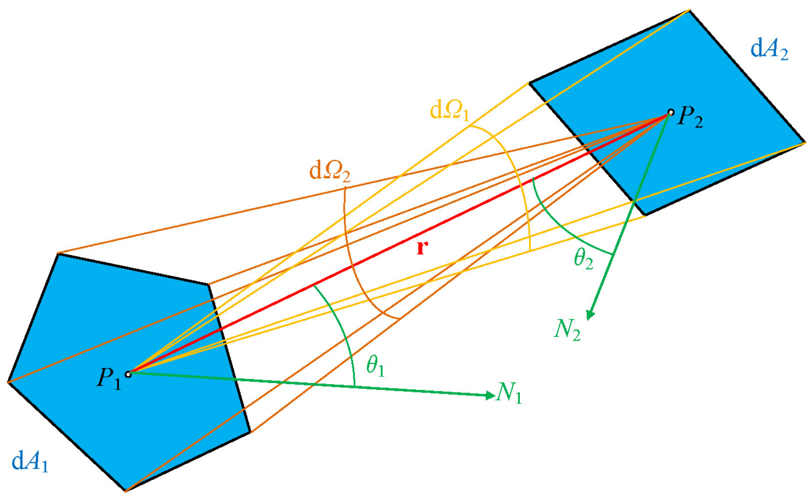

Figure 1: 주파수당 빛의 세기는 진공을 곧바로 진행할 때에 보존되는 빛살 고유의 에너지를 기술한다.

한 빛살이 dA_1 에서 dA_2 로 갈 때에 dE 의 에너지를 싣고 있다면 fA_1 에서 복사 세기와 dA_2 에서 정의하는 복사 세기에 묻어 있는 에너지는 다같이 dE 이다. 즉,

$$dE = I_{\nu,1} dA_1 \cos\theta_1 dt d\nu d\Omega_1 = I_{\nu,2} dA_2 \cos\theta_2 dt d\nu d\Omega_2 \tag{3}$$

와 같은 등식을 얻을 수 있다. 여기에서 $I_{\nu,1} = I_{\nu,2}$ 라는 사실을 쉽게 확인할 수 있다.

흑체 복사의 경우 단위 주파수 당 빛 에너지 밀도가 u_ν 로 주어지고 등방적이므로 $\int d\Omega = 4\pi$ 라는 점을 감안하면

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{4}$$

과 같이 주어진다. 이 점을 단계를 밟아 살펴 보면 dA 의 작은 면적 위로 법선 방향으로 나가는 흑체복사 빛살 다발을 생각하면

$$u_\nu = \frac{dE}{dV d\nu} = \frac{dE}{dA \cos 0 c dt d\nu} \tag{5}$$

와 같이 적을 수 있다. 여기에서 빛살이 표면에 수직한 방향으로 진행하므로 $\theta = 0$ 이고 $\cos\theta = 1$ 이다. 흑체 복사는 등방적이므로 $\int I_\nu d\Omega = 4\pi I_\nu$ 가 성립한다. 그러

므로

$$4\pi I_\nu = \int I_\nu d\Omega = \frac{dE}{dA\cos 0 dt d\nu} = cu_\nu \tag{6}$$

를 얻는다.

이제 흑체가 단위 면적당 주변에 단위 시간당 쏟아내는 에너지를 계산해 보자. 흑체의 표면이 편의상 $x-y$ 평면에 놓여 있다고 생각하자. 법선 방향인 z 방향에 각 θ로 진행하는 빗살에 담긴 에너지는 법선 방향으로 진행하는 빛살에 대하여 $\cos\theta$ 배만큼 줄어들어 $I_\nu\cos\theta$의 세기를 갖는다. 양의 z 방향에 대하여 적분하면

$$B_\nu = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} I_\nu \cos\theta\sin\theta d\theta d\phi = \pi I_\nu \tag{7}$$

를 얻는다. 즉, 온도 T를 이루는 흑체가 단위 면적당 자신의 외부에 쏟아 붇는 빛에너지는

$$B_\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4 \tag{8}$$

과 같이 주어지고 이 결과를 Stefan-Boltamann 법칙이라고 부른다. 이 때에 $\sigma = \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3} = 5.67\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} 이며 Stefan-Boltzmann 상수라고 부른다.

반지름이 R이고 광구의 온도가 T인 별이 주변 공간으로 단위 시간당 쏟아 내는 복사 에너지는

$$L = 4\pi R^2\sigma T^4 \tag{9}$$

과 같이 주어진다.

이 식에 태양의 반지름 $R = 7\times10^8$ m와 $T = 6000$ K를 대입하여 $L_\odot 1 = 4\times10^{26}$ W를 얻는다.

태양과 지구 사이의 거리 $D = 1$ AU $= 1.5\times10^{11}$ m를 1 천문단위라고 말한다. 태양의 복사 에너지가 지구에 온전히 흡수되고 지구가 다시 열평형을 이루어 흑체 복사의 형태로 받은 에너지만큼 주변 공간으로 내놓는다면

$$4\pi R_\oplus \sigma T_\oplus^4 = \pi R_\oplus^2 \frac{4\pi R_\odot^2\sigma T_\odot^4}{4\pi D^2} \tag{10}$$

라고 적을 수 있다. 이 결과로부터

$$T_\oplus = T_\odot\sqrt{\frac{R_\odot}{2D}} \simeq 280 \text{ K} \tag{11}$$

을 얻는다. 지구의 평균온도는 섭씨 15도 가량으로 어림하여 288 K이다. 어림 계산이 어느 정도 의미 있다는 점을 알 수 있다. 그러나, 지구에 들어오는 에너지와 나가는 에너지는 이렇게 계산한 것보다는 훨씬 더 복잡하다.

먼저, 태양에서 온 빛에너지가 100 퍼센트 모두 지구에 흡수되는 것이 아니다. 지구 대기에서 햇빛을 약 30 퍼센트 반사한다. 이것을 반사율 혹은 **albedo**라고 부른다. 'albus' 라는 라틴말은 하얗다는 의미이다. 또한, 지구 표면에서 방출되는 전자기파 모두가 대기권을 벗어나지는 않고 대기 중에 있는 수증기, 이산화탄소, 메테인과 같은 기체에 흡수되거나 반사되어 주변 공간으로 방출되는 에너지가 감소한다. 이것을 **온실 효과(greenhouse effect)**라고 말한다.

태양 상수라고 말하는 값은 지구 대기권 밖에서 단위 면적당 수직으로 입사하는 태양의 복사 에너지값이다.

$$A_{sun} = \frac{L_\odot}{4\pi D^2} \simeq \frac{4 \times 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\pi(1.5 \times 10^{11}\ \mathrm{m})^2} \tag{12}$$

으로 주어진다. 이 값을 계산하면 평균 1.36 kW m^{-2} 이며 연중 약 6.9 퍼센트의 변동을 보인다. 1월 초에 측정하면 1.412 kW m^{-2} 의 값이 나타나고 7월 초에 측정하면 1.321 kW m^{-2} 의 값을 얻는다. 이와같은 변동폭은 지구가 태양을 이심률 $\epsilon = 0.0167$ 인 타원 궤도를 그리기 때문이다.

문제 1. Yearly Variation of the Solar Constant

지구의 태양에 대한 공전 궤도의 이심률이 $\epsilon = 0.0167$ 이고 근일점이 1월초, 원일점이 7월 초에 위치한다.

(1) 지구의 근일점 거리에 대한 원일점 거리의 비를 ϵ의 1차 근사로 어림하시오.

(2) 태양 상수 변동폭 6.9 퍼센트를 설명하시오.

문제 2. Orders of magnitude

(1) 가시광을 대표하는 초록생 광자의 파장을 0.5 μm $= 5 \times 10^{-5}$ cm 로 놓자. 이 광자의 에너지를 eV 단위로 환산하시오. 이 광자의 주파수를 Hz 단위로 나타내시오.

(2) 태양의 광도가 $L_\odot = 4 \times 10^{33}$ erg s^{-1} 라고 한다. 태양이 모든 빛을 초록색 광자로만 방출한다고 가정할 때에 태양이 초당 방출하는 광자의 갯수를 어림하시오.

(3) 태양에서 방출된 광자 가운데 지구에 도달하는 광자의 비율을 어림하시오.

(4) 1미터 떨어진 40 W 형광등의 겉보기 밝기와 태양의 겉보기 밝기의 비를

구하시오. 형광등과 태양의 겉보기 등급의 차이를 구하시오. 태양의 겉보기 등급을 -27등급으로 놓을 때에 형광등의 겉보기 등급을 적으시오.

문제 3. Conversion between frequency space and wavelength space

단위 주파수당 복사 세기I_ν 대신 단위 파장당 복사 세기 I_λ 를 써서 복사 전달을 기술할 수 있다.

(1) 주어진 주파수 구간 $d\nu$ 에 대응하는 파장 구간 $d\lambda$ 사이에

$$|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2}|d\lambda| \tag{13}$$

가 성립한다. 이 결과를 써서 I_ν 와 I_λ 사이에 성립하는 식을 구하시오.

(2) 온도 T 인 흑체에 해당하는 단위 파장당 복사 세기 I_λ 를 구하시오. 컴퓨터를 사용하여 I_λ 가 최대인 파장을 구하시오. 또한 I_ν 에 대하여 이 값이 최대인 주파수를 구하시오. 이 두 결과가 어떻게 다른지 비교하시오.

1.2 복사 전달 방정식 (equation of radiative transfer)

빛살이 진행하면서 진행 경로에 원자나 분자 혹은 먼지 티끌이 있으면 빛살이 갖는 에너지가 흡수되거나 혹은 이들 물질이 빛을 내면서 빛 에너지가 증가하기도 한다. 먼저 빛에너지가 흡수되는 경우를 생각하자. 흡수 과정을 기술할 때에 중요한 물리량이 **단면적 (cross section)**이라고 부르는 양이다. 단면적 σ 는 단위 시간당 단위 면적당 입사하는 알갱이에 대하여 어떤 물리 현상이 일어나는 시간당 횟수를 일컫는 양이다.

간단한 예를 들자면 적당한 거리에 반지름이 R 인 수박을 매달고 눈을 감은 채 활쏘기 대회를 하여 수박을 맞히는 게임을 한다고 하자. 수박이 어디에 있는지 보이지 않기 때문에 마구잡이로 활을 쏘아댄다고 하자. 수박에 일단 맞는 화살은 모두 수박에 꽂힌다고 단순하게 가정하자. 수박에 화살이 꽂히는 일을 발생하는 물리 현상에 비유하자. 화살은 양의 x 축 방향으로 무분별하게 쏜다고 하자. $y-z$ 평면에 나란한 단면에 대하여 단위 면적당 단위 시간당 F 개의 화살이 양의 x 축 방향으로 운동하면서 수박에 꽂힌다고 하자. 단위 시간 당 몇 개의 화살이 꽂힐까?

여기에서 F 를 입사하는 화살의 갯수 플럭스라고 부른다. 수박의 중심을 지나고 $y-z$ 평면에 나란하게 수박을 잘랐을 때에 나타나는 수박면은 넓이가 πR^2 인 원반(disk)이다. 이 원반이 x 축에 평행이동하면서 휩쓸고 지나가는 도형은 원기둥이다. 주어진 시간 Δt 동안에 화살은 $F\pi R^2\Delta t$ 의 개수만큼 수박에 꽂힌다.

그러므로 단위 시간당 꽂히는 화살의 개수는 $F\pi R^2$의 값이다.

물리 현상의 단면적은

$$\sigma = \frac{number\ of\ interactions}{flux} = \frac{F\pi R^2}{F} = \pi R^2 \tag{14}$$

와 같이 나타난다. 직관적으로 수박이 크면 클수록 쉽게 잘 맞힐 수 있는만큼 단면적이 크다는 사실은 주어진 물리 현상이 쉽게 일어난다는 뜻이다.

이제 단면적이 σ인 표적의 개수밀도가 n으로 주어진다고 하자. 이 때에 입사하는 알갱이가 현재 위치에서 아주 짧은 거리 Δl만큼 진행했을 때에 알갱이가 표적을 맞힐 작은 확률 ΔP가 어떻게 주어질까? 이 문제와 관련지어 수박을 수영장 여기 저기에 담가 놓고 수영장 전체 부피 V에 대하여 수박이 N개가 들어 있는 경우로 바꾸어 생각해 보자. 수박의 개수 밀도가 $n = N/V$로 주어진 상황이고, 아직 수박을 맞히지 않은 화살이 현재 위치에서 Δl만큼 추가적으로 진행했을 때에 화살이 수박을 맞힐 확률 ΔP를 묻는 문제이다. 화살이 움직이는 방향에 수영장 단면 A를 생각하고 $A\Delta l = \Delta V$의 부피를 갖는 원기둥을 생각하자. 이 원기둥에 들어 있는 수박의 갯수 $\Delta N = n\Delta V$과 같이 주어지므로 수박 단면적 전체합은 $\pi R^2 \Delta N = \pi R^2 A n \Delta l$과 같이 주어진다. 이 값의 A에 대한 비율이 표적을 맞힐 확률이다.

$$\Delta P = \frac{\pi R^2 A n \Delta l}{A} = n\sigma\Delta l \tag{15}$$

라고 쓸 수 있다.

여기에서

$$l_{mfp} = (n\sigma)^{-1} \tag{16}$$

라고 쓰면 위 확률은

$$\Delta P = \frac{\Delta l}{m_{mfp}} \tag{17}$$

와 같이 적을 수 있다. 이 때에 l_{mfp}를 **평균자유행로 (mean free path)**라고 부른다.

천문학에서 중요한 복사 전달 과정을 생각하자. 광자가 지나가는 길목에 원자들이 있으면 원자들은 지나가는 광자를 흡수할 수 있다. 광자의 흡수를 앞에서 화살이 수박을 맞히는 상황에 빗댄다면 광자가 화살에, 원자가 수박에 대응한다. 원자가 광자를 흡수하는 현상은 광자의 파장에 따라 달라지기 때문에 원자의 단면적은 광자의 파장에 따라 달라지는 함수이다. 파장에 따른 원자의 흡수 단면적을 $\sigma(\lambda)$라고 쓰면 광자가 Δl을 지나갈 때에 개수 밀도가 n인 원자에 흡수될 가능성은 $\Delta P = n\sigma(\lambda)\Delta l$로 주어진다. 따라서 광자의 단위파장당 복사 세기를 I_λ

라고 쓸 때에 광자가 지나가는 길목에 광자를 흡수하는 원자들에 의하여 약해지는 복사 세기가 만족하는 식은

$$\frac{dI_\lambda}{ds} = -n\sigma(\lambda)I_\lambda \tag{18}$$

와 같이 주어진다. 여기에서 n 이 상수라서 원자들이 균일하게 분포해 있다면 복사 세기는 진행하는 거리의 지수 함수로 세기가 약해지며

$$I(\lambda)(s) = I_{\lambda,0}e^{-n\sigma s} \tag{19}$$

와 같이 적을 수 있다.

여기에서

$$d\tau(\lambda) = n\sigma(\lambda)ds \tag{20}$$

와 같이 적고 $\tau(\lambda)$ 를 **광학 깊이 (optical depth)** 혹은 **광학 두께 (optical thickness)**라고 말한다. 광학 두께를 써서 위 결과를 다시 적으면

$$I_\lambda(\tau) = I_{\lambda,0}e^{-\tau} \tag{21}$$

와 같이 적을 수 있다. 이 때에 $\tau(s = 0) = 0$ 으로 정의하고 이 곳에서 복사 세기를 $I_{\lambda,0}$ 과 같이 적었다.

광자가 가는 길목에 반드시 광자의 흡수만 일어날 필요는 없다. 광자가 지나가는 길목에 같은 파장의 빛을 방출하는 원자들이 단위 파장 구간당 단위 부피당 단위 시간당 단위 입체각당 j_λ 만큼 광자를 방출한다고 하자. 이 값을 **방출률 (emissivity)**라고 부른다. 광자가 거리 ds 를 갈 때에 광량의 감소가 $n\sigma I_\lambda ds$ 만큼 일어나고 $j_\lambda ds$ 만큼 복사 세기가 추가될 것이다.

$$dI_\lambda = -n\sigma I_\lambda ds + j_\lambda ds \tag{22}$$

여기에서 흡수율

$$\alpha = n\sigma(\lambda) \tag{23}$$

로 적으면 복사장의 복사세기 변화는

$$\frac{dI_\lambda}{ds} = -\alpha I_\lambda + j_\lambda \tag{24}$$

와 같이 적을 수 있고, 이 식을 복사 전달 방정식이라고 부른다.

광학 두께를 다시 도입하면 $d\tau = \alpha ds$ 로 적을 수 있으므로 위 식은

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau} = -I_\lambda + S_\lambda \tag{25}$$

와 같이 적을 수 있다. 이 때에

$$S_\lambda = \alpha^{-1} j_\lambda \tag{26}$$

를 **원천 함수 (source function)**라고 부른다.

원천 함수가 상수로 주어진 경우에 위 미분 방정식의 해를 적어 보자. 양변에 e^τ 를 곱하고 정리하면

$$\frac{d}{d\tau}(e^\tau I_\lambda) = e^\tau S_\lambda \tag{27}$$

와 같이 적을 수 있다. 원천 항이 상수로 가정하면 우변을 적분하여

$$e^\tau I_\lambda = S_\lambda e^\tau + const \tag{28}$$

를 얻고 $\tau = 0$ 인 곳의 복사 세기를 $I_{\lambda,0}$ 라고 적으면

$$I_\lambda(\tau) = e^{-\tau}(I_{\lambda,0} - S_\lambda) + S_\lambda \tag{29}$$

와 같이 적을 수 있다.

이 식의 의미를 살펴 보자. 광학 두께가 깊어지면 우변 첫항은 흡수에 의하여 복사 세기가 지수 함수적으로 감소함을 보여 준다. 한편, 광학적으로 매질을 깊이 들어갈수록 매질 자체에서 만들어내는 복사에 의하여 복사 세기의 증가가 중요해진다. 결국 충분히 매질을 깊이 들어가면 복사 세기는 그 동네의 방출률과 흡수율의 비로 주어지는 원천함수의 값으로 복사 세기가 수렴한다.

일반적으로 α 나 j_λ 가 위치에 따라 복잡하게 달라지는 함수로 주어지는 경우를 생각해 보자. 식 (27) 을 $\tau = 0$ 에서 τ 까지 적분하여

$$e^\tau I_\lambda - I_{\lambda,0} = \int_0^\tau e^{\tau'} S(\tau') d\tau' \tag{30}$$

을 얻는다. 양변에 $e^{-\tau}$ 를 곱하여 정리하면

$$I_\lambda(\tau) = I_{\lambda,0} e^{-\tau} + \int_0^\tau e^{\tau' - \tau} S(\tau') d\tau' \tag{31}$$

과 같이 적을 수 있다.

1.3 광자와 원자의 상호 작용

광자가 원자에 입사할 때에 여러 가지 상호 작용이 일어날 수 있다. 광자가 지나는 길목에서 원자가 광자를 없애는 과정을 흔히 4가지로 나눌 수 있다. 광자가 원자 안의 전자를 들뜨우면서 광자는 길목에서 사라진다. 원자를 이루는 전자가 갖는

상태를 흔히 구속 상태와 자유 상태로 나눈다. 자유 상태는 실제로 전자가 원자의 양의 전기로 받는 구속에서 벗어나 한없이 멀리 있을 수 있는 상태로서 전자가 자유롭기 때문에 이온 상태에 해당한다. 전자가 구속 상태에서 자유 상태가 되는 과정을 **이온화 (ionization)** 과정이라고 부른다.

1. **구속-구속 흡수 (bound-bound transition-**

원자나 이온에 구속되어 있는 전자가 한 구속 상태에서 다른 구속 상태로 옮기는 현상이다. 전자는 낮은 에너지를 갖는 구속 상태에서 높은 에너지를 갖는 구속 상태로 천이하면 두 구속 상태의 에너지 차이에 해당하는 에너지를 갖는 광자를 흡수한다. 그러므로, 높은 에너지로 천이를 일으킬 수 있는 띄엄띄엄한 에너지들을 빼고는 구속-구속 불투명도 $\kappa_{\lambda,bb}$ 는 매우 작은 값을 갖는다. $\kappa_{\lambda,bb}$ 때문에 별 스펙트럼에서 흡수선이 형성된다.

반대로 높은 에너지의 구속 상태에서 낮은 에너지의 구속 상태로 천이하면 에너지 차이에 해당하는 주파수를 갖는 광자가 방출된다. 이 경우 광자가 방출되는 방향은 구속 상태의 양자수에 따라 정해지는 확률밀도 함수의 분포를 이룬다. 광자를 원자가 산란하는 과정은 이와같이 원자가 첫 상태에서 중간 상태로 들뜬 다음에 다시 원래 상태로 천이하면서 광자를 입사한 방향과 다른 방향으로 보내는 것이다. 이러한 산란은 고전물리학의 관점에서는 탄성 산란에 해당한다. 원자가 첫 상태와는 다른 상태로 천이하면 방출된 광자는 다른 파장을 갖게되는데 이러한 산란을 **라만 산란 (Raman scattering)**이라고 말한다.

2. **구속-자유 흡수**

이 과정은 높은 에너지를 갖는 광자를 원자가 받아들여 전자를 자유 상태로 끌어 올리는 과정을 말한다. 자유 상태의 전자가 이온이므로 원자는 전자를 잃고 이온화된 것이다. 빛을 받아 이온화되는 과정이므로 광이온화라고도 부른다. 이 때에 자유 상태는 에너지 고유값이 연속인 실수값을 가질 수 있기 때문에 n 번째 오비탈에서 이온화 에너지가 χ_n 일 때에 $\lambda \leq hc/\chi_n$ 를 만족하는 에너지가 큰 광자는 n 번째 오비탈에 있는 원자에서 전자를 이온화할 수 있다. 구속-자유 불투명도 $\kappa_{\lambda,bf}$ 는 연속복사의 불투명도로서 중요한 역할을 한다. 파장이 λ 인 광자에 대하여 주양자수가 n 인 오비탈에 있는 수소 원자의 광이온화 단면적은

$$\sigma_{bf} = 1.31 \times 10^{-15} \frac{1}{n^5} \left(\frac{\lambda}{5000 \text{ Å}} \right)^3 \text{ cm}^2 \tag{32}$$

으로 주어진다.

광이온화 과정의 역과정은 자유 전자가 전자를 하나 잃은 양이온과 결합

하면서 여분의 에너지를 빛으로 방출하는 것이다. 이러한 과정을 **재결합 과정 (recombination process)** 이라고 부른다. 구속-구속 방출과 마찬가지로, 이 과정도 복사 마당에서 광자의 평균 에너지를 낮추는 데에 기여한다.

3. **자유-자유 흡수**

이 과정은 낮은 에너지의 자유 상태에 있는 전자가 광자를 흡수하여 더 높은 에너지의 자유 상태로 천이하는 과정을 일컫는다. 두 자유 상태의 에너지는 연속적이기 때문에 자유-자유 흡수의 불투명도 $\kappa_{\lambda,ff}$ 는 구속-자유 흡수와 함께 연속선 불투명도에 해당한다. 앞에서도 계속 보았듯이 이 과정의 반대 경우는 복사의 방출 과정이며 자유-자유 방출 (free-free emission) 이라고 말한다. 특히, 전자가 무거운 양이온 근처를 지나면 정전기력에 의하여 크게 가속도를 받아 속도가 줄어들 수 있다. 이 때에 감소한 전자의 운동 에너지가 광자로 방출되면서 복사가 일어난다. 이 과정을 독일어로는 "제동 복사" 라는 의미로 bremsstrahlung 이라고 부르기도 한다.

4.**자유 전자에 의한 산란 : Thomson scattering and Compton scattering -**

자유 전자는 광자를 (흡수하지 않고) *Thomson 산란* 과정으로 산란한다. 톰슨 산란의 단면적은 모든 파장의 광자에 대하여 동일하며 그 값은

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = 6.65 \times 10^{-25}\ \mathrm{cm}^2 \tag{33}$$

이다. 이 값은 수소의 광이온화 단면적 σ_{bf} 보다 2십억배 작다. 온도가 높지 않은 곳에서는 자유 전자가 흔하지 않기 때문에 톰슨 산란은 중요하지 않다. 그러나 온도가 높은 곳에서는 대부분의 전자가 자유 전자 상태에 있기 때문에 광학 두께를 결정하는 중요한 요소가 된다. 다시 말하면 아주 뜨거운 별의 대기에서나 혹은 별의 내부에서는 광학 두께의 주된 원천이다.

입사하는 광자의 에너지가 매우 큰 경우에, 멈춰 있는 표적에 해당하는 자유 전자는 광자와 상호 작용할 때에 광자의 운동량 때문에 떠밀림을 받게 된다. 이 때문에 자유 전자는 없던 운동에너지가 생기고 에너지를 보존하기 위해서 부득이 산란된 광자의 주파수가 줄어든다. 이 과정을 *컴프턴 산란*이라고 부른다.

5.**구속된 전자에 의한 산란 : Rayleigh scattering -**

원자에 구속된 전자가 에너지가 매우 작은 광자를 산란하는 과정을 레일리 산란이라고 부른다. 원자에 얽매인 전자가 광자를 산란하는 레일리 산란의 단면적은

톰슨 산란 단면적보다도 작으며, λ^{-4}에 비례하며 파장이 증가할수록 감소한다. 레일리 산란이 대부분의 별 대기에서 무시할 수 있지만, 초거성에서 확장된 대기에서는 중요하다. 작은 입자가 광자를 산란하기 때문에 성간 먼지를 통과하는 별빛에서 적색화가 일어나기도 한다.

1.4 자발 방출과 유도 방출 (spontaneous emission and stimulated emission)

원자가 에너지가 높은 상태에 있으면 조만간 에너지가 낮은 상태로 천이하고 이 때에 두 에너지 준위 사이의 에너지 차이에 해당하는 광자가 방출된다. 이 때에 원자가 높은 에너지 상태에서 낮은 에너지 상태로 천이하는 방식에는 두 가지가 존재한다. 하나는 **자발 방출 (spontaneous emission)**이고 또 다른 하나는 **유도 방출 (stimulated emission)**이다.

원자가 에너지가 높은 상태에서 낮은 상태로 이행하면서 광자를 방출하는 과정을 온전히 기술하려면 양자 역학의 논의가 필요하다. 전자가 높은 에너지 상태에서 자발적으로 낮은 에너지 상태로 옮아갈 수 있는 데에는 **진공**이 중요한 역할을 한다. 양자역학의 관점에서 진공은 그저 아무 것도 없는 무의 상태가 아니라 온갖 입자와 반입자의 생성과 소멸이 끊임없이 요동하는 상태이다. 전자가 높은 에너지 상태에 있으면 진공에서 요동하는 전기장이 전자를 낮은 에너지 상태로 보내면서 자발적으로 광자를 만들 수 있다. 이 때에 단위 시간당 주어진 아래 에너지 상태로 천이를 일으키는 확률은 두 에너지 상태 사이의 상호 작용을 나타내는 해밀토니안의 기대값에 비례한다. 특히, 두 에너지 상태 사이에 전기 쌍극자 모멘트의 기대값이 0이 아니면 쌍극자 복사를 하며, 이 때에 천이율은 가시광 영역에서 대체적으로 1억분의 1초당 1에 해당하는 값을 보인다.

$$A_{21} \simeq 10^8 \text{ s}^{-1} \tag{34}$$

과 같이 적으며 여기에서 2는 높은 에너지 상태, 1은 낮은 에너지 상태를 나타내는 표시이다. 이 값을 아인슈타인의 A계수라고 부른다.

여기에 대하여 두 에너지 상태 2와 1 사이의 에너지 차이를 갖는 복사장에 원자가 놓이면 복사장을 이루는 광자는 끊임없이 원자를 볶아댄다. 낮은 에너지 상태 1에 있는 원자에게는 자신을 흡수해서 높은 에너지 상태 2로 올라가라고 치근대고 높은 에너지 상태 2에 있는 원자에게도 낮은 에너지 상태 1로 내려가라고 윽박지르면서 자신과 동일한 광자를 하나 보태게 한다. 앞의 경우를 **유도 흡수 (stimulated absorption)**이라고 부르고 뒤의 경우르 **유도 방출** (**stimulated**

emission) 이라고 말한다. 이러한 과정이 나타나는 확률은 복사장의 세기 I 에 비례한다.

아인슈타인은 유도 흡수와 유도 방출 과정을 나타내는 두 계수 B_{12} 와 B_{21} 을 도입하여 유도 흡수가 단위 부피당 일어나는 확률을 $n_1 B_{12} I$ 로 적고 유도 방출이 단위 부피당 일어나는 확률을 $n_2 B_{21} I$ 로 적었다.

열평형 상태에서는 방출률과 흡수율이 같아야하므로

$$n_1 B_{12} I = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} I \tag{35}$$

이 성립한다. 이 때에 광자 역시 열평형 상태에 이르러야 하므로 광자의 복사장은 흑체 복사장이고 원자는 볼츠만 분포를 이룬다.

따라서 $n_1/n_2 = (g_1/g_2)e^{h\nu/kT}$ 를 만족하고 $I_\nu = (2h\nu^3/c^2)/[e^{h\nu/kT} - 1]$ 과 같이 적을 수 있다. 식 (35) 에서 복사장이 만족하는 식은

$$I = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{n_1}{n_2}\frac{B_12}{B_21} - 1} \tag{36}$$

이다. 이 결과를 흑체복사의 복사 세기와 같도록 놓으면

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \quad A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \tag{37}$$

과 같이 나타남을 알 수 있다.

유도 흡수는 앞에서 우리가 살펴 본 흡수 과정과 다를게 없다. 광자를 복사세기에 보태주는 과정이 자발 방출과 유도 방출로 세분할 때에 유도 방출이 이미 존재하는 복사 세기에 비례하므로 복사 전달 방정식이

$$dI_\lambda = -\alpha_a I_\lambda ds + \alpha_e I_\lambda ds + j_{spon} ds \tag{38}$$

와 같이 편의상 적을 수 있다.

여기에서 일어날 수 있는 흥미로운 상황이 높은 에너지 상태에 있는 원자들이 매우 많이 있을 때에 나타난다. 우변의 세 항 가운에 두번째 항이 나머지 두 항을 압도하는 경우를 말한다. 이 때에는 복사전달 식이

$$dI_\lambda = \alpha_e I_\lambda ds \tag{39}$$

과 같이 나타나므로

$$I_\lambda(s) = e^{\alpha_e s} I_{\lambda,0} \tag{40}$$

와 같이 나타나서 지수함수적으로 복사 세기가 커진다. 이와같은 방법으로 가시광의 복사세기가 증가하는 현상을 **레이저 (laser; light amplification by**

stimulated emission of radiation) 라고 말한다. 이 말을 번역하자면 유도 복사 방출로 증폭한 빛이 되겠다.

천문학에서는 별 탄생 지역이나 혹은 OH/IR원이라고 부르는 항성에서 유도 복사 방출로 마이크로웨이브가 증폭되어 나타나기도 한다. 이것을 **메이저 (maser; microwave amplification by stimulated emission of radiation)** 라고 말한다.

레이저나 메이저 현상이 일어나기 위해서는 에너지가 높은 상태에 원자나 분자가 많이 있어야 하는데 그러기 위해서는 에너지가 높은 이 상태의 수명이 굉장히 길어야만 한다. 수명이 길다는 뜻은 더 낮은 에너지 상태로 자발적인 천이를 거의 하지 않아야 한다는 의미이다. 이런 상태를 물리학에서는 흔히 metastable state 라고 말한다. 외부에서 강제로 에너지를 퍼부어서 매질을 구성하는 원자나 분자가 계속 높은 에너지 상태에 많이 있도록 유지해야 한다. 이처럼 높은 에너지 상태에 원자나 분자가 많이 있을 때에 **population inversion**이라는 표현을 쓴다.