

# Análise Matricial de Estruturas

---

MÁRIO EDUARDO SENATORE SOARES  
LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017

## Sumário

1.	O MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS.....	3
	Exemplo.....	3
2.	TRELIÇAS PLANAS.....	6
	2.1 Matriz de rigidez da barra no sistema local .....	6
	2.2 Matriz de rigidez da barra no sistema global.....	7
	2.3 Compatibilização dos deslocamentos nodais .....	9
	2.4 Equações de equilíbrio .....	10
	2.5 O sistema $\mathbf{F} = \mathbf{KU}$ .....	12
	2.6 Solução do sistema .....	13
	2.7 Esforços nas barras .....	14
	2.8 Exemplo.....	14
	2.8 Interpretação física dos elementos da matriz de rigidez.....	21
	2.9 Espalhamento da matriz de rigidez de uma barra .....	23
	2.10 Apoio inclinado .....	24
	2.11 Exercício proposto .....	25
3.	PÓRTICOS PLANOS .....	26
	3.1 Matriz de rigidez da barra no sistema local .....	26
	3.2 Matriz de transformação para o sistema global .....	28
	3.3 Pórtico com carregamento aplicado nos nós.....	28
	3.4 Carregamento nodal equivalente .....	28
	3.5 Esforços nas barras .....	30
	3.6 Exemplo.....	31
	3.7 Barra engastada-articulada.....	39
	3.8 Exemplo.....	41
	3.9 Nô articulado.....	50
	3.10 Simetria da matriz de rigidez .....	51
	3.11 Exercício proposto .....	53
4.	GRELHAS.....	54

## 1. O MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

A Análise Matricial de Estruturas é uma sistematização do Método dos Deslocamentos apropriada para o cálculo de estruturas reticuladas usando o computador.

O Método dos Deslocamentos adota como incógnitas os deslocamentos dos nós da estrutura. Os esforços nas extremidades das barras são escritos em função desses deslocamentos e, mediante a imposição de condições de equilíbrio, obtém-se um conjunto de equações algébricas que, por conveniência, costumam-se organizar na forma matricial. Resolvendo-se esse sistema de equações obtêm-se os deslocamentos e, a partir deles, os esforços nas barras.

O exemplo a seguir ilustra a aplicação do Método dos Deslocamentos para o cálculo de uma treliça hiperestática plana.

### Exemplo

Considere-se a treliça hiperestática plana da Figura 1, submetida ao carregamento indicado. As barras são todas iguais, com comprimento  $\ell$  e seção transversal de área  $A$ , constituídas de material cujo módulo de elasticidade é  $E$ .

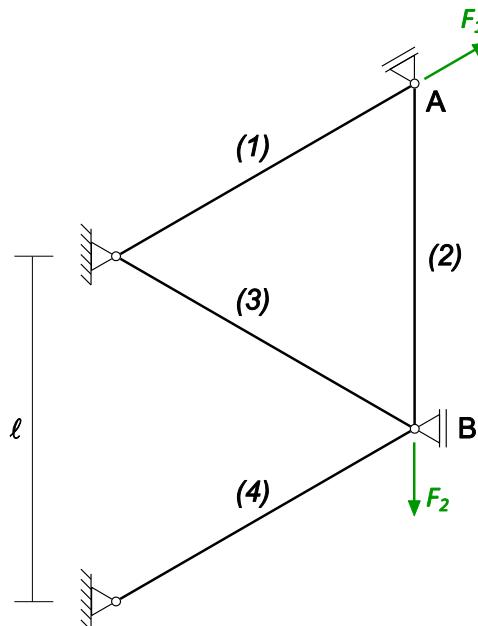


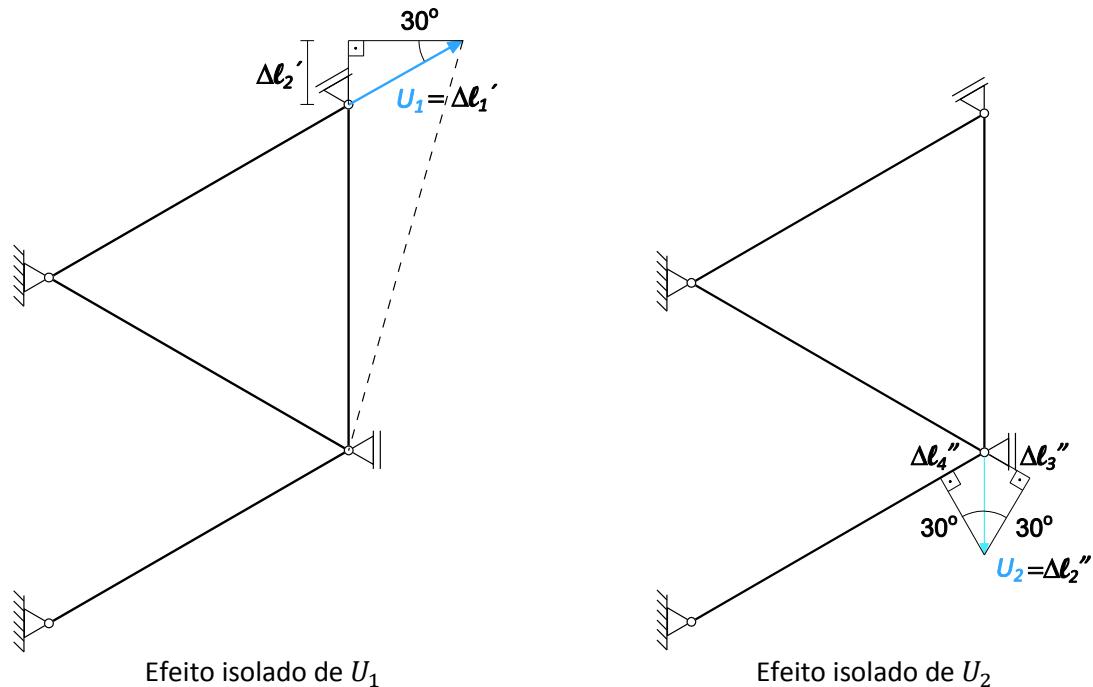
Figura 1 – Treliça hiperestática plana

Se a estrutura não tivesse vínculos externos, sua configuração deformada ficaria perfeitamente caracterizada conhecendo-se as duas componentes de deslocamento de cada um dos quatro nós; essas oito variáveis definiriam a variação de comprimento das barras e, em se tratando de material

elástico, isso definiria as forças normais em todas as barras. Como as forças normais podem ser expressas em termos dos deslocamentos nodais, e a cada um dos quatro nós estão associadas duas equações de equilíbrio envolvendo essas mesmas forças normais (além do carregamento externo), o que se tem ao final é um sistema com oito equações algébricas (de equilíbrio) e oito incógnitas. A solução desse sistema tem peculiaridades, e será objeto de discussão mais adiante.

Na presença da vinculação externa, apenas duas componentes de deslocamento são livres:  $U_1$  e  $U_2$ , correspondentes a deslocamentos dos nós A e B segundo as direções de  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente. Diz-se que essa estrutura tem dois *graus de liberdade*, no sentido de que, conhecendo-se essas duas variáveis, fica caracterizada a configuração deformada.

A Figura 2 mostra a variação de comprimento das barras provocada por  $U_1$  e  $U_2$ , isoladamente.



**Figura 2 – Variação de comprimento das barras por efeito de  $U_1$  e  $U_2$**

Por superposição de efeitos, têm-se

$$\begin{aligned}\Delta\ell_1 &= \Delta\ell_1' = U_1, \\ \Delta\ell_2 &= \Delta\ell_2' + \Delta\ell_2'' = \frac{U_1}{2} + U_2, \\ \Delta\ell_3 &= \Delta\ell_3'' = \frac{U_2}{2}, \\ \Delta\ell_4 &= \Delta\ell_4'' = \frac{U_2}{2}\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{EA}{\ell} \Delta\ell_1 = \frac{EA}{\ell} U_1, \\ N_2 &= \frac{EA}{\ell} \Delta\ell_2 = \frac{EA}{\ell} \left( \frac{U_1}{2} + U_2 \right),\end{aligned}$$

$$N_3 = \frac{EA}{\ell} \Delta\ell_3 = \frac{EA U_2}{\ell} \quad \text{e}$$

$$N_4 = \frac{EA}{\ell} \Delta\ell_4 = \frac{EA U_2}{\ell}.$$

A Figura 3 mostra o equilíbrio dos nós A e B.



Figura 3 – Equilíbrio dos nós A e B

Nas direções de  $U_1$  e  $U_2$ , as condições de equilíbrio são<sup>1</sup>:

$$N_1 + \frac{N_2}{2} - F_1 = 0 \Rightarrow \frac{EA}{\ell} \left( \frac{5}{4} U_1 + \frac{1}{2} U_2 \right) = F_1,$$

$$N_2 + \frac{N_3}{2} + \frac{N_4}{2} - F_2 = 0 \Rightarrow \frac{EA}{\ell} \left( \frac{1}{2} U_1 + \frac{3}{2} U_2 \right) = F_2,$$

ou, na forma matricial,

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F},$$

em que

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{4\ell} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

são, respectivamente, a *matriz de rigidez reduzida* da estrutura, o *vetor de deslocamentos nodais livres* e o *vetor de carregamentos nodais*.

A solução desse sistema é

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{2\ell}{13EA} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

relação que caracteriza completamente a configuração deformada da estrutura, a partir da qual se calculam as forças normais em todas as barras.  $\square$

O que se fez de forma “artesanal” neste problema, isto é, identificar os graus de liberdade, estabelecer as relações entre esforços e deslocamentos nodais, formular as equações de equilíbrio e resolvê-las, é o que se pretende fazer de forma automática, própria para a implementação computacional, usando a análise matricial de estruturas.

---

<sup>1</sup> As equações de equilíbrio segundo as direções perpendiculares a  $U_1$  e  $U_2$  introduzem incógnitas adicionais ( $R_A$  e  $R_B$ ), e por isso não foram explicitadas. Por esse mesmo motivo não se considerou o equilíbrio dos outros dois nós da treliça.

## 2. TRELIÇAS PLANAS

Como se viu no exemplo anterior, é fácil entender como o problema pode ser formulado em termos dos deslocamentos nodais no caso das treliças. Para cada barra, os deslocamentos dos nós de extremidade determinam a variação de comprimento e, dentro do regime elástico, isso define a força normal atuante. As equações de equilíbrio dos nós serão as relações procuradas entre os deslocamentos nodais e o carregamento externo.

### 2.1 Matriz de rigidez da barra no sistema local

A relação fundamental a ser estabelecida, tanto no contexto das treliças como dos demais sistemas reticulados, é aquela entre os deslocamentos das extremidades de uma barra e os esforços de extremidade associados a eles. A Figura 4 define essas variáveis no *sistema local* de referência, em que  $\bar{x}$  tem a direção do eixo da barra e orientação do *nó inicial* para o *nó final* (definidos pela seta no meio da barra), e  $\bar{y} \perp \bar{x}$  é orientado de modo que o produto vetorial entre os versores correspondentes saia do plano da figura.

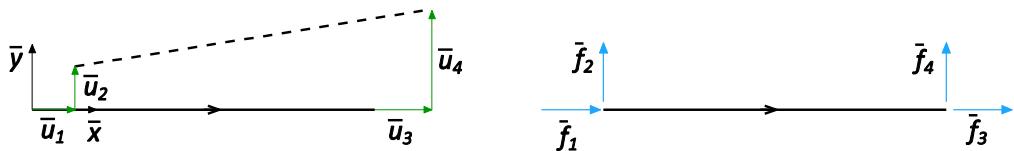


Figura 4 - Deslocamentos nodais ( $\bar{u}_i$ ) e esforços nodais ( $\bar{f}_i$ ) no sistema local.

Para o estabelecimento da relação procurada, é conveniente identificar os esforços de extremidade associados à imposição de cada um dos deslocamentos nodais isoladamente. A Figura 5 mostra esses resultados parciais, válidos para barras prismáticas de comprimento  $\ell$  e rigidez  $EA$  contanto que os deslocamentos impostos sejam pequenos. Note que  $\bar{u}_2$  e  $\bar{u}_4$  correspondem a movimentos de corpo rígido, e não provocam o aparecimento de esforços de extremidade.

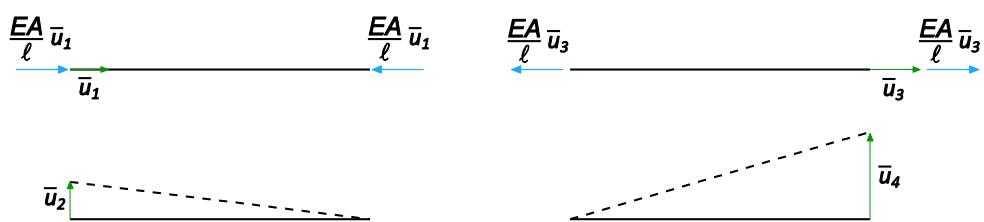


Figura 5 – Esforços nodais associados à imposição de cada deslocamento nodal

Por superposição de efeitos, obtém-se as relações procuradas:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= \frac{EA}{\ell} \bar{u}_1 - \frac{EA}{\ell} \bar{u}_3, \\ \bar{f}_2 &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{f}_3 &= -\frac{EA}{\ell} \bar{u}_1 + \frac{EA}{\ell} \bar{u}_3, \\ \bar{f}_4 &= 0,\end{aligned}$$

que se podem se escrever na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/\ell & 0 & EA/\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix}$$

ou, de forma abreviada,

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

em que  $\bar{\mathbf{f}}$  é o vetor dos esforços nodais no sistema local,  $\bar{\mathbf{u}}$  é o vetor dos deslocamentos nodais no sistema local e

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/\ell & 0 & EA/\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

é a matriz de rigidez da barra no sistema local. Essa matriz, simétrica, tem duas linhas (e colunas) nulas, correspondentes aos esforços transversais  $\bar{f}_2$  e  $\bar{f}_4$ , que são sempre nulos nas barras de treliça mas foram mantidos aqui por conveniência. Note que a equação (1) define de forma unívoca os esforços de extremidade uma vez conhecidos os deslocamentos nodais, mas o contrário não é verdadeiro: ela não permite calcular os deslocamentos nodais a partir dos esforços de extremidade, porque a matriz  $\bar{\mathbf{k}}$  não é inversível (esse assunto será abordado com profundidade mais adiante).

## 2.2 Matriz de rigidez da barra no sistema global

As treliças são formadas por barras com diferentes inclinações, e a cada uma delas está associado um sistema local diferente. Quando aplicarmos, por exemplo, a equação (1) às barras 1, 2 e 3 que concorrem no nó A da treliça da Figura 6, tantos os esforços de extremidade como os deslocamentos nodais estarão decompostos segundo o sistema local de cada barra. Para formular as equações de equilíbrio do nó A, esses esforços terão que ser decompostos segundo um mesmo par de eixos; da mesma forma, para identificar os deslocamentos nodais das três barras com os deslocamentos do nó A, será necessário adotar um par de eixos comum. Por essa razão, é de todo conveniente introduzir um sistema de eixos global, e relacionar todas as componentes de esforços e deslocamentos em sistemas locais às componentes nesse sistema.

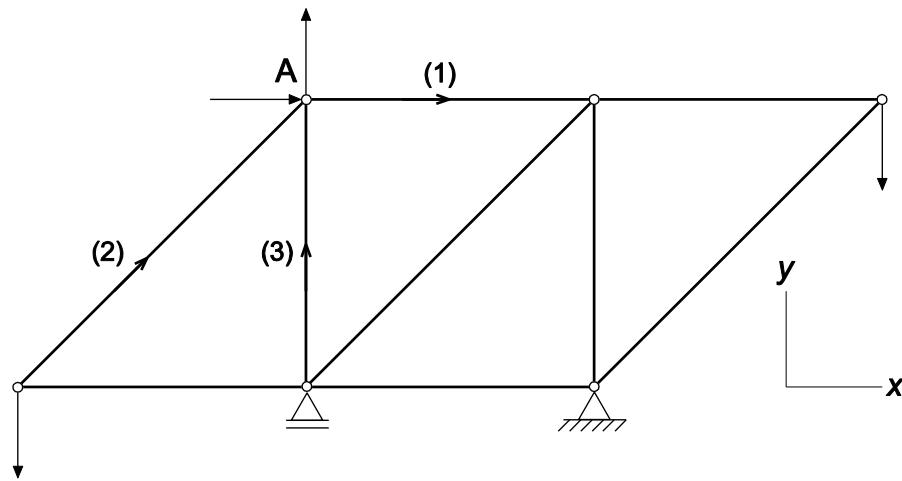


Figura 6 – Exemplo de treliça. Os eixos  $x$  e  $y$  definem o sistema global.

A Figura 7 mostra, para uma barra inclinada genérica, os esforços de extremidade no sistema local e no sistema global.

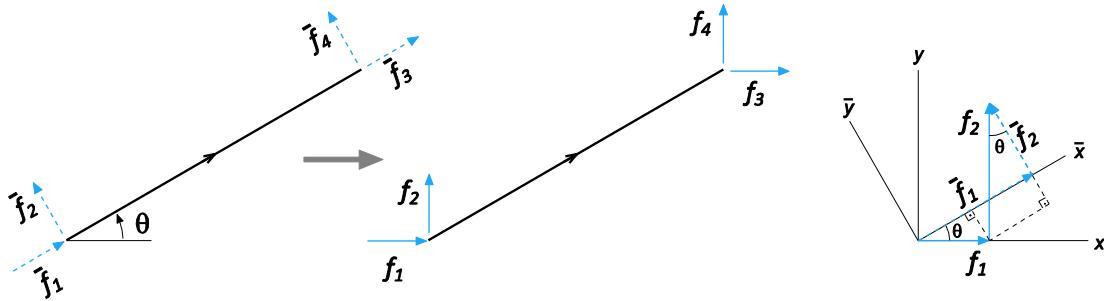


Figura 7 – Passagem dos esforços do sistema local para o sistema global.

É fácil verificar, a partir dos triângulos retângulos indicados na Figura 7, as identidades

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta, \\ \bar{f}_2 = f_2 \cos \theta - f_1 \sin \theta. \end{cases} \quad (3)$$

Levando em conta que relações análogas se aplicam aos esforços na outra extremidade da barra, obtém-se, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

ou, de forma abreviada,

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}\mathbf{f}, \quad (4)$$

em que

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

é a matriz de transformação do sistema global para o sistema local. Obviamente, vale uma transformação semelhante para os deslocamentos nodais, isto é:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\mathbf{u} . \quad (6)$$

É fácil verificar que a matriz  $\mathbf{T}$  é ortogonal, isto é,

$$\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{I}, \text{ ou } \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}. \quad (7)$$

Substituindo (4) e (6) em (1), multiplicando os dois lados da equação por  $\mathbf{T}^T$  e usando (7) obtém-se

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} , \quad (8)$$

em que

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}} \mathbf{T} \quad (9)$$

é a matriz de rigidez da barra no sistema global.

### 2.3 Compatibilização dos deslocamentos nodais

Quando se considera a relação (8) para cada barra da treliça da Figura 6, fica evidente que há variáveis diferentes representando grandezas iguais. No nó A, por exemplo,  $u_2^2 = u_3^3 = u_1^1$ , e  $u_4^2 = u_4^3 = u_2^1$ <sup>2</sup>. É necessário criar um conjunto único de variáveis representando as componentes dos deslocamentos nodais da estrutura. A Figura 8 mostra uma possível numeração dos deslocamentos nodais da estrutura, denotados por  $U_i, i = 1, \dots, 12$ , incluindo por último os deslocamentos restritos pelos apoios, cujo efeito será considerado mais adiante.

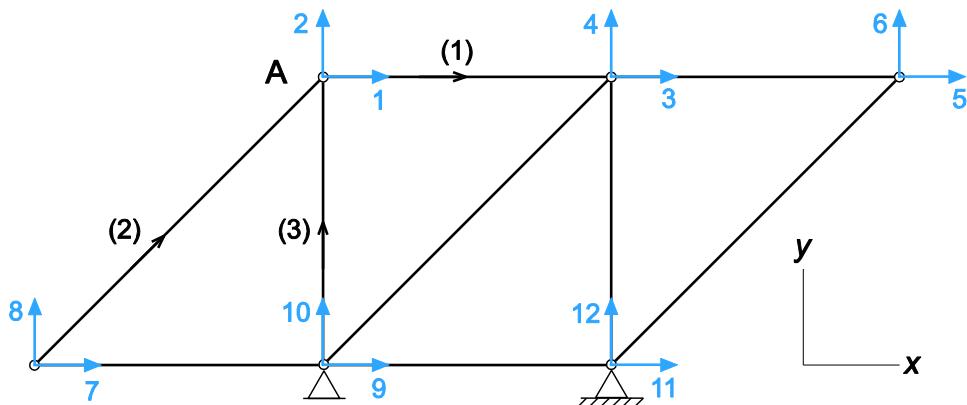


Figura 8 – Numeração dos deslocamentos nodais da estrutura

Para a barra 1, valem as identidades

$$\begin{aligned} u_1^1 &= U_1 , \\ u_2^1 &= U_2 , \\ u_3^1 &= U_3 , \\ u_4^1 &= U_4 \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> Nessas relações, e em outras que seguem, designa-se por  $u_i^b$  a  $i$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{u}$  para a barra  $b$ .

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ \vdots \\ U_{12} \end{bmatrix}, \text{ ou ainda } \mathbf{u}^1 = \mathbf{L}^1 \mathbf{U},$$

em que a matriz  $\mathbf{L}^1$ , denominada *matriz de incidência* da barra 1, estabelece a relação entre o *vetor de deslocamentos nodais da estrutura*  $\mathbf{U}$  e o *vetor de deslocamentos nodais da barra 1* ( $\mathbf{u}^1$ ). Cada barra tem sua matriz de incidência. Para a barra 2, por exemplo, valem as identidades

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_7 \\ U_8 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ \vdots \\ U_{12} \end{bmatrix}, \text{ ou ainda } \mathbf{u}^2 = \mathbf{L}^2 \mathbf{U}.$$

Generalizando, vale

$$\mathbf{u}^b = \mathbf{L}^b \mathbf{U}, \quad (10)$$

relação entre o vetor de deslocamentos nodais da estrutura  $\mathbf{U}$  e o vetor de deslocamentos nodais da barra  $b$  ( $\mathbf{u}^b$ ), definida pela matriz de incidência dessa barra ( $\mathbf{L}^b$ ).

## 2.4 Equações de equilíbrio

Combinando as equações (8) e (10), é possível escrever os esforços na extremidade da barra  $b$ , no sistema global, em função dos deslocamentos nodais da estrutura:

$$\mathbf{f}^b = \mathbf{k}^b \mathbf{u}^b = \mathbf{k}^b \mathbf{L}^b \mathbf{U}. \quad (11)$$

Falta impor as condições de equilíbrio dos nós. A Figura 9 – Equilíbrio do nó A mostra o equilíbrio do nó A da treliça da Figura 6.  $F_1$  e  $F_2$  são carregamentos externos aplicados nesse nó.

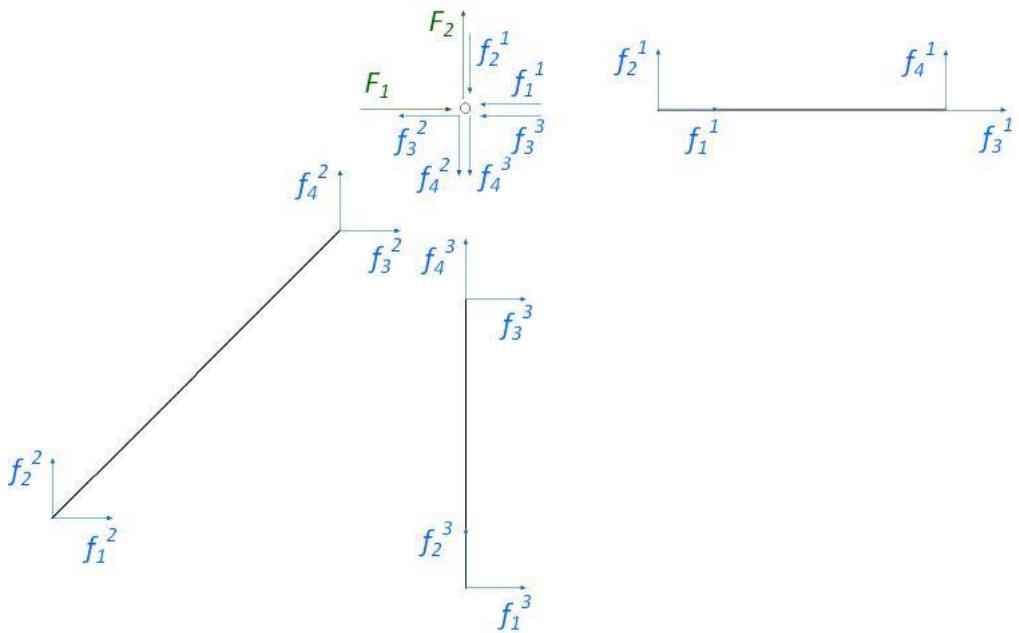


Figura 9 – Equilíbrio do nó A

Nas direções 1 e 2 (que correspondem aos deslocamentos nodais  $U_1$  e  $U_2$ , e aos carregamentos externos  $F_1$  e  $F_2$ ), as equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1^1 + f_3^2 + f_3^3, \\ F_2 &= f_2^1 + f_4^2 + f_4^3. \end{aligned}$$

Haverá outras 10 equações desse tipo, cada uma associada a uma das direções indicadas na Figura 8. Como se percebe, em cada uma dessas equações haverá contribuições apenas das barras que concorrem no nó correspondente, e cada uma dessas barras contribuirá com o esforço nodal que atua na direção considerada. Essas equações podem ser escritas todas de uma vez criando-se uma versão expandida do vetor dos esforços nodais de cada barra, designado por  $\hat{\mathbf{f}}^b$ , em que cada contribuição já apareça na posição correta de acordo com a numeração dos deslocamentos e carregamentos nodais da estrutura:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_3^2 \\ f_4^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots, \text{ ou } \mathbf{F} = \hat{\mathbf{f}}^1 + \hat{\mathbf{f}}^2 + \hat{\mathbf{f}}^3 + \cdots$$

em que, obviamente, a soma deve se estender a todas as barras da estrutura. No caso geral, vale

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n_b} \hat{\mathbf{f}}^i, \quad (12)$$

em que  $\mathbf{F}$  é o vetor de carregamento nodais da estrutura, e  $n_b$  é o número de barras.

Convenientemente, a transformação do vetor de esforços nodais  $\mathbf{f}^b$  na sua versão expandida  $\hat{\mathbf{f}}^b$  se faz por meio da transposta da matriz de incidência  $\mathbf{L}^b$ , isto é,

$$\hat{\mathbf{f}}^b = (\mathbf{L}^b)^T \mathbf{f}^b. \quad (13)$$

Pode-se verificar essa identidade tomando uma barra qualquer, por exemplo a barra 2:

$$(\mathbf{L}^2)^T \mathbf{f}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3^2 \\ f_4^2 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3^2 \\ f_4^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{f}}^2.$$

A generalização é imediata.

As equações de equilíbrio, em sua forma final, são obtidas substituindo (13) e (11) em (12):

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n_b} \hat{\mathbf{f}}^i = \sum_{i=1}^{n_b} (\mathbf{L}^i)^T \mathbf{f}^i = \sum_{i=1}^{n_b} (\mathbf{L}^i)^T \mathbf{k}^i \mathbf{L}^i \mathbf{U}$$

ou

$$\mathbf{F} = \mathbf{KU}, \quad (14)$$

sendo

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_b} (\mathbf{L}^i)^T \mathbf{k}^i \mathbf{L}^i \quad (15)$$

a matriz de rigidez da estrutura.

## 2.5 O sistema $\mathbf{F} = \mathbf{KU}$

A equação (14) estabelece a relação entre os deslocamentos nodais e os carregamentos nodais indicados na Figura 10.

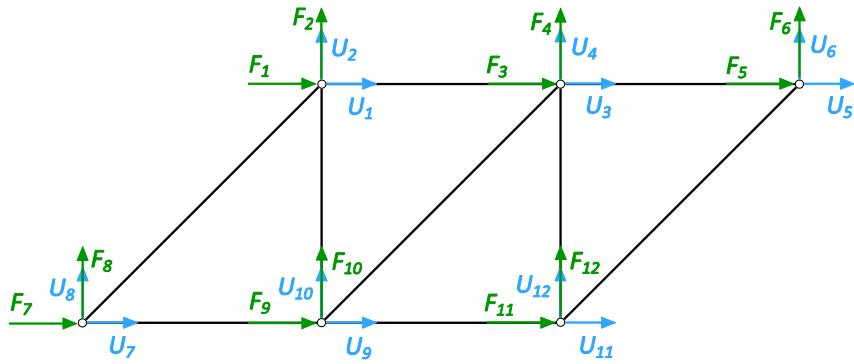


Figura 10 – Deslocamentos nodais e carregamentos nodais

Nessa figura os apoios foram omitidos propositadamente, porque a rigor o seu efeito ainda não foi considerado. Qualquer que seja o conjunto de deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$ , (14) define de forma unívoca o carregamento nodal correspondente; no entanto, o problema que queremos resolver é justamente o contrário: dado o carregamento nodal, a questão é determinar os deslocamentos nodais, incógnitas fundamentais do método. Do ponto de vista matemático, o que se quer é resolver o sistema de equações algébricas (14), que tem como incógnitas os deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$ .

É fácil perceber que esse sistema é indeterminado. Seja  $\mathbf{U} = \mathbf{H}$  um vetor de deslocamentos nodais correspondente a um movimento de corpo rígido qualquer da treliça, por exemplo uma translação horizontal (um movimento como esse é possível porque, até este ponto, não consideramos a presença de vínculos externos). O movimento de corpo rígido, por definição, significa que as barras não se deformam e, portanto, não têm força normal; se não há força normal, o equilíbrio dos nós implica  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Então, de (14),  $\mathbf{0} = \mathbf{KH}$ , o que por si só significa que  $\mathbf{K}$  não é inversível, porque, se fosse, a multiplicação dos dois lados dessa equação por  $\mathbf{K}^{-1}$  à esquerda levaria a  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ , o que é absurdo.

Do ponto de vista físico, o problema não tem solução única porque a estrutura sem vinculação é hipostática. Mesmo que seja respeitado o equilíbrio, haverá infinitas soluções que diferem entre si por um movimento de corpo rígido. Essa hipostaticidade se manifesta matematicamente na singularidade da matriz de rigidez, isto é, faz com que  $\det \mathbf{K} = 0$ .

## 2.6 Solução do sistema

Se a estrutura tiver vinculação suficiente para impedir movimentos de corpo rígido, o problema terá solução única. Consideraremos novamente a treliça da Figura 8, com a presença dos apoios. Trata-se de um caso particular da situação ilustrada na Figura 10, em que os deslocamentos  $U_{10}, U_{11}$  e  $U_{12}$  são conhecidos a priori, ou *impostos* (mais exatamente, nulos), e a prescrição desses deslocamentos impede qualquer possibilidade de movimento de corpo rígido.

Sejam  $\mathbf{U}_a = (U_1, \dots, U_9)$  e  $\mathbf{U}_b = (U_{10}, \dots, U_{12})$  resultantes da partição do vetor de deslocamentos nodais entre deslocamentos livres – denominados *graus de liberdade da estrutura* – e deslocamentos impostos (nulos ou não). Adotando-se partição análoga para o vetor de carregamentos nodais, é fácil perceber que o sistema pode ser reorganizado em blocos:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_9 \\ F_{10} \\ \vdots \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & \dots & K_{1,9} & K_{1,10} & \dots & K_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{9,1} & \dots & K_{9,9} & K_{9,10} & \dots & K_{9,12} \\ K_{10,1} & \dots & K_{10,9} & K_{10,10} & \dots & K_{10,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{12,1} & \dots & K_{12,9} & K_{12,10} & \dots & K_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_9 \\ U_{10} \\ \vdots \\ U_{12} \end{bmatrix}$$

ou, de forma abreviada,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Nesse sistema, são conhecidos  $\mathbf{U}_b$  (deslocamentos impostos) e  $\mathbf{F}_a$  (carregamento nodal segundo os graus de liberdade da estrutura); as incógnitas são  $\mathbf{U}_a$  (deslocamentos livres) e  $\mathbf{F}_b$  (reações de apoio). O bloco superior de (16) corresponde a

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{K}_{aa} \mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{U}_b,$$

mas como  $\mathbf{K}_{aa}$ , a chamada *matriz de rigidez reduzida da estrutura*, admite inversa, os deslocamentos livres podem ser calculados a partir de

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1} (\mathbf{F}_a - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{U}_b) \quad (17)$$

ou, no caso particular (mas mais frequente) em que os deslocamentos impostos são nulos,

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{F}_a. \quad (18)$$

Uma vez calculados os deslocamentos livres, as reações de apoio decorrem do bloco inferior de (16):

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{K}_{ba} \mathbf{U}_a + \mathbf{K}_{bb} \mathbf{U}_b. \quad (19)$$

## 2.7 Esforços nas barras

Os esforços nas extremidades das barras, no sistema local, são calculados a partir de (1), (6) e (10):

$$\bar{\mathbf{f}}^b = \bar{\mathbf{k}}^b \bar{\mathbf{u}}^b = \bar{\mathbf{k}}^b \mathbf{T}^b \mathbf{u}^b = \bar{\mathbf{k}}^b \mathbf{T}^b \mathbf{L}^b \mathbf{U}, \quad (20)$$

em que o vetor de deslocamentos nodais é recomposto usando (18) e os deslocamentos impostos, isto é,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix}. \quad (21)$$

## 2.8 Exemplo<sup>3</sup>

A título de exemplo, a formulação desenvolvida neste capítulo será usada para o cálculo dos deslocamentos nodais e das forças normais nas barras da treliça da Figura 11.

<sup>3</sup> Esse exemplo, bem como outros que seguem, foi resolvido com o programa *Mathematica*. O que se apresenta aqui é a sequência de comandos, que obedecem a sintaxe própria, e a saída do programa.

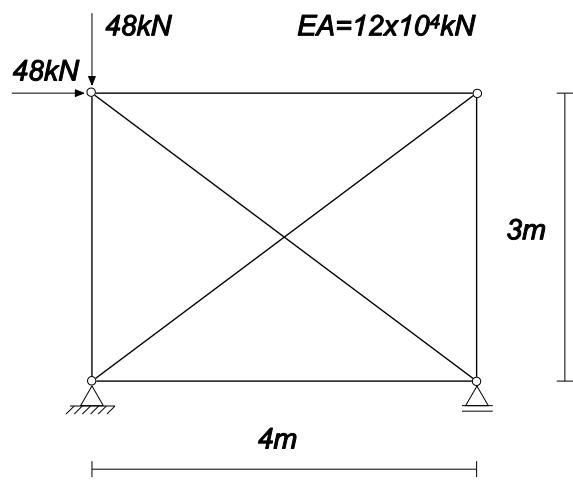
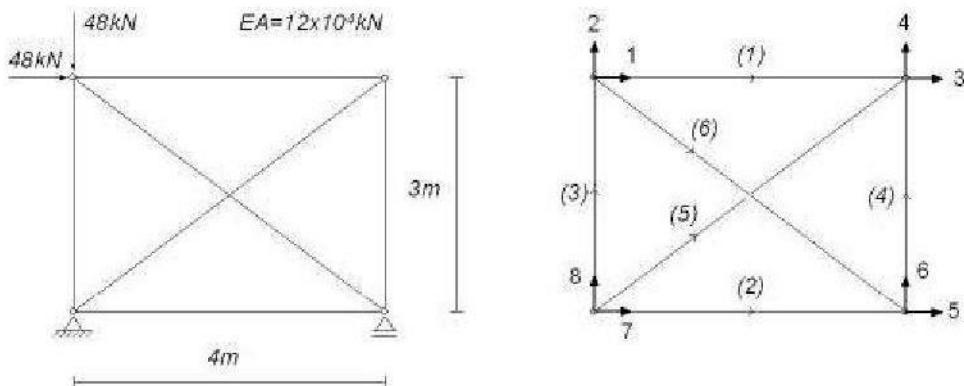


Figura 11 – Exemplo de treliça plana

## Numeração dos deslocamentos nodais



## Matrizes de rigidez no sistema local

```
kb[EA_, L_] := EA / L {{1, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-1, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

```
kb1 = kb[12 * 10^4, 4]
```

```
 {{30000, 0, -30000, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-30000, 0, 30000, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

```
MatrixForm[kb1]
```

forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 30000 & 0 & -30000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30000 & 0 & 30000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
kb2 = kb1
```

```
 {{30000, 0, -30000, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-30000, 0, 30000, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

```
kb3 = kb[12 * 10^4, 3]
```

```
 {{40000, 0, -40000, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-40000, 0, 40000, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

```
kb4 = kb3
```

```
 {{40000, 0, -40000, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-40000, 0, 40000, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

```
kb5 = kb[12 * 10^4, 5]
```

```
 {{24000, 0, -24000, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-24000, 0, 24000, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

```
kb6 = kb5
```

```
 {{24000, 0, -24000, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-24000, 0, 24000, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

## Matrizes de rigidez no sistema global

```
T[theta_] := {{Cos[theta], Sin[theta], 0, 0}, {-Sin[theta], Cos[theta], 0, 0},
              [coseno] [seno] [seno] [coseno]
              {0, 0, Cos[theta], Sin[theta]}, {0, 0, -Sin[theta], Cos[theta]}}
              [coseno] [seno] [seno] [coseno]
```

```

T1 = T[0]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1} }

T2 = T1
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1} }

T3 = T[Pi / 2]
[número ]
{{0, 1, 0, 0}, {-1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, -1, 0} }

T4 = T3
{{0, 1, 0, 0}, {-1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, -1, 0} }

T5 = T[ArcTan[3 / 4]]
[arco tangente]
{{4/5, 3/5, 0, 0}, {-3/5, 4/5, 0, 0}, {0, 0, 4/5, 3/5}, {0, 0, -3/5, 4/5} }

T6 = T[-ArcTan[3 / 4]]
[arco tangente]
{{4/5, -3/5, 0, 0}, {3/5, 4/5, 0, 0}, {0, 0, 4/5, -3/5}, {0, 0, 3/5, 4/5} }

k1 = kb1
{{30000, 0, -30000, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-30000, 0, 30000, 0}, {0, 0, 0, 0} }

MatrixForm[k1]
[forma de matriz]

$$\begin{pmatrix} 30000 & 0 & -30000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30000 & 0 & 30000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


k2 = kb2
{{30000, 0, -30000, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-30000, 0, 30000, 0}, {0, 0, 0, 0} }

k3 = Transpose[T3].kb3.T3
[transposição]
{{0, 0, 0, 0}, {0, 40000, 0, -40000}, {0, 0, 0, 0}, {0, -40000, 0, 40000} }

k4 = Transpose[T4].kb4.T4
[transposição]
{{0, 0, 0, 0}, {0, 40000, 0, -40000}, {0, 0, 0, 0}, {0, -40000, 0, 40000} }

k5 = Transpose[T5].kb5.T5
[transposição]
{{15360, 11520, -15360, -11520}, {11520, 8640, -11520, -8640},
{-15360, -11520, 15360, 11520}, {-11520, -8640, 11520, 8640}}

```

```
k6 = Transpose[T6].kb6.T6
  |transposição
{{15360, -11520, -15360, 11520}, {-11520, 8640, 11520, -8640},
 {-15360, 11520, 15360, -11520}, {11520, -8640, -11520, 8640}}
```

## Espalhamento das matrizes das barras

```
L[i_, j_, k_, l_] :=
Normal[SparseArray[{{1, i} → 1, {2, j} → 1, {3, k} → 1, {4, l} → 1}, {4, 8}]]
|normal |array esparsa

L1 = L[1, 2, 3, 4]
{{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}]

MatrixForm[L1]
|forma de matriz

{{1 0 0 0 0 0 0 0}
 {0 1 0 0 0 0 0 0}
 {0 0 1 0 0 0 0 0}
 {0 0 0 1 0 0 0 0}]

kc1 = Transpose[L1].k1.L1
  |transposição
{{30000, 0, -30000, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-30000, 0, 30000, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}>

L2 = L[7, 8, 5, 6]
{{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1},
 {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}]

kc2 = Transpose[L2].k2.L2
  |transposição
{{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 30000, 0, -30000, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, -30000, 0, 30000, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}

MatrixForm[kc2]
|forma de matriz

{{0 0 0 0 0 0 0 0}
 {0 0 0 0 0 0 0 0}
 {0 0 0 0 0 0 0 0}
 {0 0 0 0 0 0 0 0}
 {0 0 0 0 30000 0 -30000 0}
 {0 0 0 0 0 0 0 0}
 {0 0 0 0 -30000 0 30000 0}
 {0 0 0 0 0 0 0 0}}
```

```
L3 = L[7, 8, 1, 2]
```

```
{ {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1},  
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0} }
```

```
kc3 = Transpose[L3].k3.L3
```

└ transposição

```
{ {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 40000, 0, 0, 0, 0, -40000},  
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, -40000, 0, 0, 0, 0, 40000} }
```

```
L4 = L[5, 6, 3, 4]
```

```
{ {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0},  
{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0} }
```

```
kc4 = Transpose[L4].k4.L4
```

└ transposição

```
{ {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 40000, 0, -40000, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, -40000, 0, 40000, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} }
```

```
L5 = L[7, 8, 3, 4]
```

```
{ {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1},  
{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0} }
```

```
kc5 = Transpose[L5].k5.L5
```

└ transposição

```
{ {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 15360, 11520, 0, 0, -15360, -11520}, {0, 0, 11520, 8640, 0, 0, -11520, -8640},  
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, -15360, -11520, 0, 0, 15360, 11520}, {0, 0, -11520, -8640, 0, 0, 11520, 8640} }
```

```
L6 = L[1, 2, 5, 6]
```

```
{ {1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0} }
```

```
kc6 = Transpose[L6].k6.L6
```

└ transposição

```
{ {15360, -11520, 0, 0, -15360, 11520, 0, 0},  
{-11520, 8640, 0, 0, 11520, -8640, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-15360, 11520, 0, 0, 15360, -11520, 0, 0},  
{11520, -8640, 0, 0, -11520, 8640, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} }
```

## Matriz de rigidez da estrutura

$$K = kc1 + kc2 + kc3 + kc4 + kc5 + kc6$$

```
{ {45360, -11520, -30000, 0, -15360, 11520, 0, 0},  
  {-11520, 48640, 0, 0, 11520, -8640, 0, -40000},  
  {-30000, 0, 45360, 11520, 0, 0, -15360, -11520},  
  {0, 0, 11520, 48640, 0, -40000, -11520, -8640},  
  {-15360, 11520, 0, 0, 45360, -11520, -30000, 0},  
  {11520, -8640, 0, -40000, -11520, 48640, 0, 0},  
  {0, 0, -15360, -11520, -30000, 0, 45360, 11520},  
  {0, -40000, -11520, -8640, 0, 0, 11520, 48640} }
```

$$\text{MatrixForm}[K]$$

forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 45360 & -11520 & -30000 & 0 & -15360 & 11520 & 0 & 0 \\ -11520 & 48640 & 0 & 0 & 11520 & -8640 & 0 & -40000 \\ -30000 & 0 & 45360 & 11520 & 0 & 0 & -15360 & -11520 \\ 0 & 0 & 11520 & 48640 & 0 & -40000 & -11520 & -8640 \\ -15360 & 11520 & 0 & 0 & 45360 & -11520 & -30000 & 0 \\ 11520 & -8640 & 0 & -40000 & -11520 & 48640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15360 & -11520 & -30000 & 0 & 45360 & 11520 \\ 0 & -40000 & -11520 & -8640 & 0 & 0 & 11520 & 48640 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}[K]$$

determinante

$$0$$

## Vetor de carregamentos nodais

$$Fa = \{48, -48, 0, 0, 0\}$$

```
{48, -48, 0, 0, 0}
```

## Cálculo dos deslocamentos nodais

$$Kaa = K[[1;;5, 1;;5]]$$

```
{ {45360, -11520, -30000, 0, -15360}, {-11520, 48640, 0, 0, 11520},  
  {-30000, 0, 45360, 11520, 0}, {0, 0, 11520, 48640, 0}, {-15360, 11520, 0, 0, 45360} }
```

$$Ua = \text{Inverse}[Kaa].Fa$$

matriz inversa

$$\left\{ \frac{9}{4000}, -\frac{27}{40000}, \frac{19}{12000}, -\frac{3}{8000}, \frac{7}{7500} \right\}$$

$$N[Ua]$$

valor numérico

```
{0.00225, -0.000675, 0.00158333, -0.000375, 0.000933333}
```

## Cálculo das reações de apoio

```

Kba = K[[6;;8,1;;5]]
{{11520, -8640, 0, -40000, -11520},
 {0, 0, -15360, -11520, -30000}, {0, -40000, -11520, -8640, 0}}
Fb = Kba.Ua
{36, -48, 12}

```

## Esforços nodais em cada barra, no sistema local

```

U = Join[Ua, {0, 0, 0}]
|junta
{ $\frac{9}{4000}$ , - $\frac{27}{40000}$ ,  $\frac{19}{12000}$ , - $\frac{3}{8000}$ ,  $\frac{7}{7500}$ , 0, 0, 0}
fb1 = kb1.T1.L1.U
{20, 0, -20, 0}
fb2 = kb2.T2.L2.U
{-28, 0, 28, 0}
fb3 = kb3.T3.L3.U
{27, 0, -27, 0}
fb4 = kb4.T4.L4.U
{15, 0, -15, 0}
fb5 = kb5.T5.L5.U
{-25, 0, 25, 0}
fb6 = kb6.T6.L6.U
{35, 0, -35, 0}

```

### 2.8 Interpretação física dos elementos da matriz de rigidez

A Figura 12 apresenta um campo de deslocamentos particular para treliça do exemplo anterior, em que o deslocamento nodal na direção 5 é unitário e os demais são nulos.

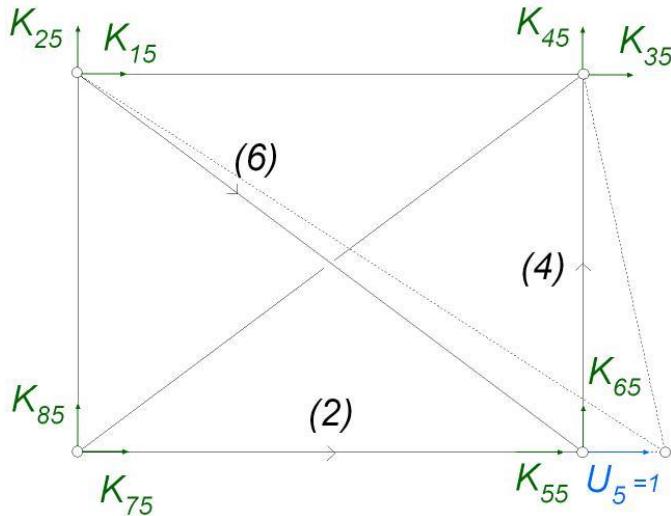


Figura 12 – Campo de deslocamentos particular e esforços nodais correspondentes

Substituindo-se o vetor de deslocamentos nodais correspondente em (14), obtém-se

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_5 \\ \vdots \\ F_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{15} & \dots & K_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{51} & \dots & K_{55} & \dots & K_{58} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{81} & \dots & K_{85} & \dots & K_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{15} \\ \vdots \\ K_{55} \\ \vdots \\ K_{85} \end{bmatrix}.$$

Generalizando, o que se percebe é que os esforços nodais correspondentes a um campo de deslocamentos tal que  $U_j = 1$  e todos os demais deslocamentos nodais são nulos compõem a  $j$ -ésima coluna (ou  $j$ -ésima linha, porque  $\mathbf{K}$  é simétrica) da matriz de rigidez da estrutura. Por consequência,  $K_{ij}$  é o esforço na direção  $i$  associado a um deslocamento unitário na direção  $j$  (e nulo nas demais).

A mesma interpretação é válida para os elementos da matriz de rigidez da barra isolada, seja no sistema local ou global. Ela nos ajuda a entender de que forma os elementos das matrizes de rigidez das barras se compõem na matriz de rigidez da estrutura.  $K_{55}$ , por exemplo, é o esforço total segundo a direção 5 associado ao campo de deslocamentos da Figura 12. É total no sentido de que, como mostra a Figura 12, parte dele é usada para promover um deslocamento unitário na direção 3 da barra 2 (conforme a numeração dos graus de liberdade de cada barra no sistema global), outra parte para um deslocamento unitário na direção 3 da barra 6, e uma terceira parte para um deslocamento unitário na direção 1 da barra 4. A partir do equilíbrio do nó, ilustrado na Figura 13, obtém-se

$$K_{55} = k_{33}^2 + k_{33}^6 + k_{11}^4 = 30000 + 15360 + 0 = 45360,$$

resultado igual ao que se obteve anteriormente.

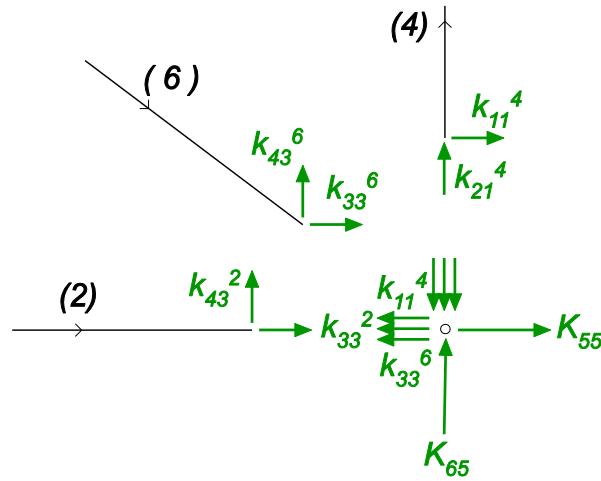


Figura 13 – Equilíbrio do nó da treliça do Exemplo 1, na situação ilustrada na Figura 12

## 2.9 Espalhamento da matriz de rigidez de uma barra

Na Figura 13,  $k_{43}^6$  representa, na numeração dos graus de liberdade da barra 6, o esforço segundo a direção 4 associado a um deslocamento unitário na direção 3 (e nulo nas demais). Como a direção 4 da barra 6 coincide com a direção 6 da estrutura, e a direção 3 da barra 6 coincide com a direção 5 da estrutura,  $k_{43}^6$  é a *contribuição da barra 6* para o esforço segundo a direção 6 (da estrutura) associado a um deslocamento unitário na direção 5 da estrutura (e nulo nas demais), isto é,  $k_{43}^6$  é uma parcela de  $K_{65}$ . A matriz de rigidez da estrutura é composta pela soma das contribuições de cada barra, o que se pode sistematizar promovendo o *espalhamento* da matriz de rigidez de cada barra na matriz de rigidez da estrutura, isto é, destinando a cada elemento da matriz de rigidez da barra uma posição adequada na matriz de rigidez da estrutura, conforme a numeração dos graus de liberdade da barra e da estrutura. A Figura 14 ilustra o resultado do espalhamento.

$$\mathbf{k}^6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ k_{11}^6 & k_{12}^6 & k_{13}^6 & k_{14}^6 \\ k_{21}^6 & k_{22}^6 & k_{23}^6 & k_{24}^6 \\ k_{31}^6 & k_{32}^6 & k_{33}^6 & k_{34}^6 \\ k_{41}^6 & k_{42}^6 & k_{43}^6 & k_{44}^6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1 2 5 6}} \mathbf{K}^6 = \begin{bmatrix} k_{11}^6 & k_{12}^6 & 0 & 0 & k_{13}^6 & k_{14}^6 & 0 & 0 \\ k_{21}^6 & k_{22}^6 & 0 & 0 & k_{23}^6 & k_{24}^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^6 & k_{32}^6 & 0 & 0 & k_{33}^6 & k_{34}^6 & 0 & 0 \\ k_{41}^6 & k_{42}^6 & 0 & 0 & k_{43}^6 & k_{44}^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 14 – Contribuição da barra 6 para a matriz de rigidez da estrutura

É fácil verificar que

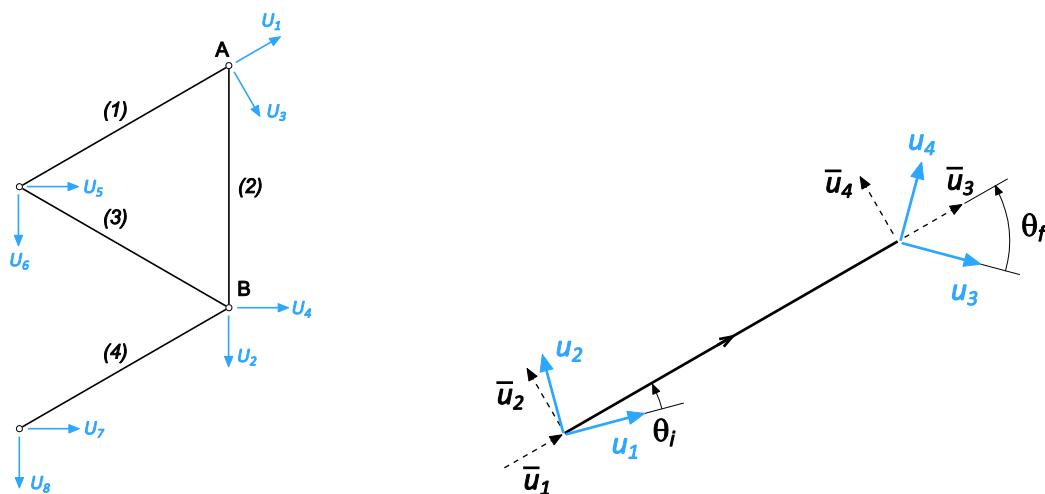
$$\mathbf{K}^6 = (\mathbf{L}^6)^T \mathbf{k}^6 \mathbf{L}^6,$$

contribuição da barra 6 para a montagem da matriz de rigidez em (15). Na prática, na implementação de programas, essa operação matricial não vale a pena, porque envolve um número muito grande de multiplicações por zero (dada a natureza da matriz de incidência) e pode ser substituída com facilidade pelo espalhamento direto.

## 2.10 Apoio inclinado

A solução do sistema (14) apresentada neste capítulo requer a caracterização dos deslocamentos nodais como livres (graus de liberdade da estrutura) ou impostos (eventualmente nulos). É com base nessa distinção que o sistema de equações é particionado.

Para que se possa resolver o problema dessa forma em situações como a da estrutura da Figura 1, dotada de um apoio inclinado, é preciso que o deslocamento desse nó seja decomposto segundo direções diferentes dos demais, como sugerido na Figura 15.



**Figura 15 - Possível numeração dos graus de liberdade da treliça da Figura 1**

**Figura 16 – Caso geral, em que há sistemas globais diferentes nas extremidades da barra**

Conceitualmente, nada impede que se adote um sistema global diferente em um nó, porque as equações de equilíbrio são formuladas nó a nó, isto é, nunca se somam forças aplicadas em nós diferentes.

O cuidado que se deve tomar é, na passagem dos esforços de extremidade das barras do sistema local para o sistema global, observar que os sistemas globais podem ser diferentes nos nós inicial e final. Na situação ilustrada na Figura 7, em que só há um sistema global,  $\theta$  é, ao mesmo tempo, o ângulo que a barra forma com o eixo  $x$  (global) e o ângulo de giro entre os sistemas local e global em cada nó, medido no sentido anti-horário a partir do sistema global. No caso geral, ilustrado na Figura 16, há dois sistemas globais, e as transformações entre sistemas local e global são definidas em cada nó por um ângulo diferente:  $\theta_i$  no nó inicial,  $\theta_f$  no nó final.

Por comparação com (3) e (5), é fácil perceber que, no caso geral, a matriz de transformação é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_f & \sin \theta_f \\ 0 & 0 & -\sin \theta_f & \cos \theta_f \end{bmatrix}. \quad (22)$$

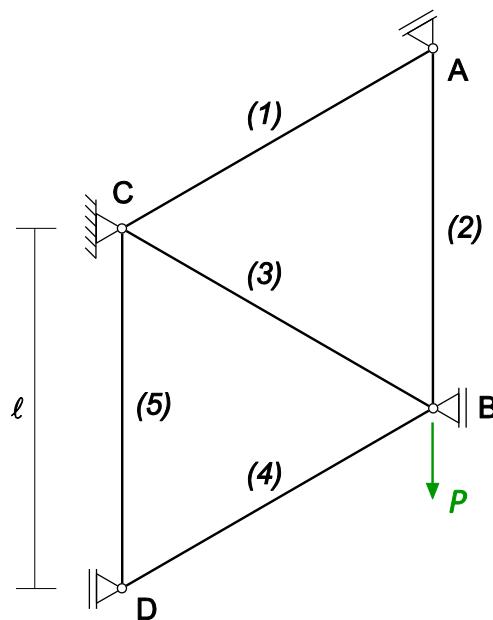
Essa matriz também é ortogonal, e nada se altera nas equações subsequentes.

## 2.11 Exercício proposto

Calcular os deslocamentos dos nós da treliça hiperestática plana da figura, submetida ao carregamento indicado. As barras são todas iguais, com comprimento  $\ell$  e seção transversal de área  $A$ , constituídas de material cujo módulo de elasticidade é  $E$ .

*Resposta:*

$$d_A = \frac{8 P\ell}{25 EA}, d_B = \frac{4 P\ell}{5 EA}, d_D = \frac{4 P\ell}{25 EA}$$



### 3. PÓRTICOS PLANOS

A análise matricial de pórticos planos é muito parecida com a de treliças planas. As adaptações necessárias decorrem essencialmente de dois fatores: 1) é preciso incluir a rotação entre os deslocamentos nodais e o momento entre os carregamentos nodais; 2) no caso geral, há carregamentos fora dos nós.

#### 3.1 Matriz de rigidez da barra no sistema local

A Figura 17 mostra, para o caso de uma barra de pórtico, os deslocamentos nodais e os esforços nodais a eles associados, no sistema local. Diferentemente das barras de treliça, aqui é preciso considerar as rotações nodais (porque, por si sós, provocam o aparecimento de esforços) e os momentos nodais.

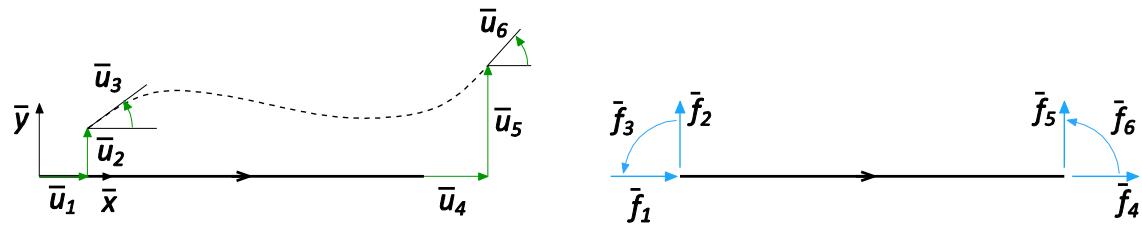


Figura 17 – Deslocamentos e esforços nodais da barra de pórtico no sistema local

As relações entre deslocamentos e esforços nodais podem ser obtidas por superposição, considerando o efeito de cada deslocamento nodal isoladamente. Seja por exemplo o caso em que apenas  $\bar{u}_2$  é diferente de zero. Os esforços nodais correspondentes são as reações de apoio de uma viga biengastada submetida ao recalque de apoio indicado na Figura 18.

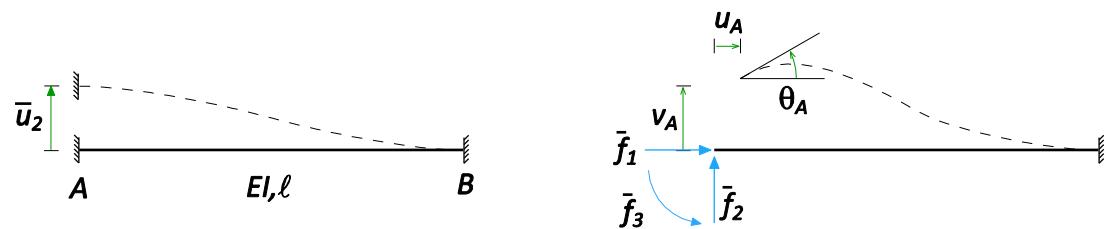


Figura 18 – Obtenção dos esforços nodais associados a  $\bar{u}_2$  pelo método dos esforços.

Esse problema pode ser resolvido por integração da equação diferencial da linha elástica ou diretamente, pelo método dos esforços. Considerando-se a isostática fundamental indicada, as equações de compatibilidade levam a:

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \frac{\bar{f}_3 \ell}{EI} - \frac{\bar{f}_2 \ell^2}{2EI} = 0,$$

$$v_A = \bar{u}_2 \Rightarrow \frac{\bar{f}_2 \ell^3}{3EI} - \frac{\bar{f}_3 \ell^2}{2EI} = \bar{u}_2 ,$$

sistema cuja solução é

$$\bar{f}_3 = \frac{6EI}{\ell^2} \bar{u}_2 , \quad \bar{f}_2 = \frac{12EI}{\ell^3} \bar{u}_2 .$$

Na hipótese de pequenos deslocamentos, da condição de compatibilidade adicional  $u_A = 0$  resulta  $\bar{f}_1 = 0$ . Por equilíbrio, determinam-se os esforços na extremidade B.

A Figura 19 mostra os esforços nodais correspondentes à imposição de cada um dos deslocamentos nodais.

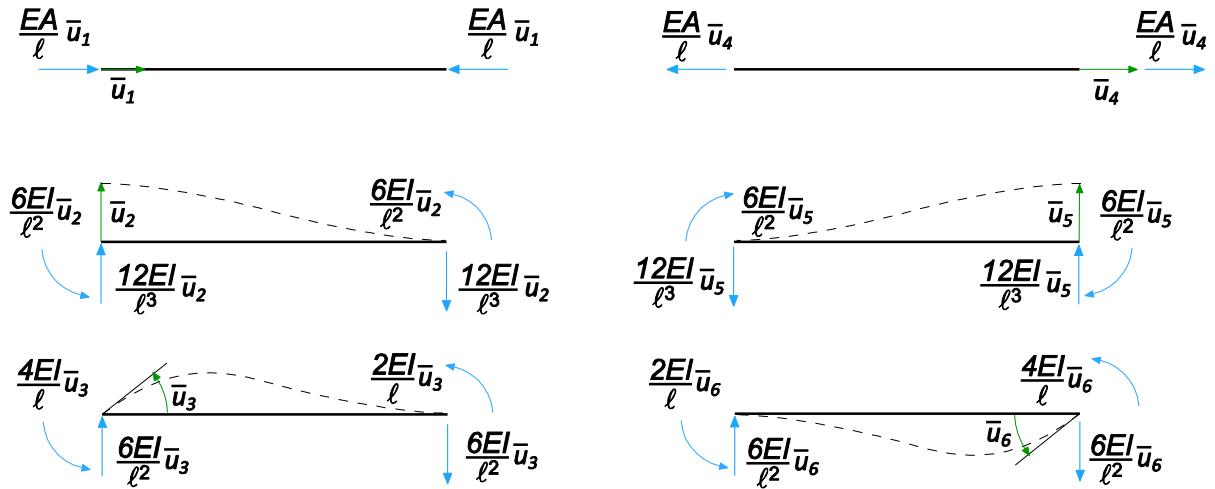


Figura 19 - Esforços nodais associados à imposição de cada deslocamento nodal na barra de pórtico plano

Quando se considera o efeito da imposição simultânea de todos esses deslocamentos obtém-se a relação

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \\ \bar{f}_5 \\ \bar{f}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & 0 & -EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 & 0 & -12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 \\ 0 & 6EI/\ell^2 & 4EI/\ell & 0 & -6EI/\ell^2 & 2EI/\ell \\ -EA/\ell & 0 & 0 & EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 & 0 & 12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 \\ 0 & 6EI/\ell^2 & 2EI/\ell & 0 & -6EI/\ell^2 & 4EI/\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix}$$

formalmente idêntica a (1), mas com vetores de dimensão 6 e

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & 0 & -EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 & 0 & -12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 \\ 0 & 6EI/\ell^2 & 4EI/\ell & 0 & -6EI/\ell^2 & 2EI/\ell \\ -EA/\ell & 0 & 0 & EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 & 0 & 12EI/\ell^3 & -6EI/\ell^2 \\ 0 & 6EI/\ell^2 & 2EI/\ell & 0 & -6EI/\ell^2 & 4EI/\ell \end{bmatrix}, \quad (23)$$

correspondente à matriz de rigidez da barra de pórtico plano no sistema local.

### 3.2 Matriz de transformação para o sistema global

Tomando por base o caso das barras de treliça (Figura 7), é fácil constatar que a passagem dos esforços de extremidade e deslocamentos nodais do sistema local (Figura 17) para o sistema global é feita substituindo-se em (4) e (6) a *matriz de transformação*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

isto é, as forças e deslocamentos lineares (índices 1,2, 4 e 5) transformam-se exatamente como nas treliças; momentos de extremidade e rotações (índices 3 e 6) têm valores iguais nos sistemas local e global. A matriz de transformação para barras de pórtico plano também é ortogonal.

### 3.3 Pórtico com carregamento aplicado nos nós

Com as devidas adaptações na matriz de rigidez da barra, na matriz de transformação e na dimensão dos vetores envolvidos, o procedimento é inteiramente análogo ao das treliças. Continuam valendo (9), (15) e (14); a matriz de incidência  $\mathbf{L}^b$  tem agora 6 linhas e número de colunas igual ao número de deslocamentos nodais da estrutura, mas a rigor nem não é necessária porque a matriz de rigidez da estrutura pode ser construída por espalhamento direto. A solução do sistema (14) é obtida adotando-se o particionamento expresso em (16), do que resultam (17) e (19), e os esforços de extremidade de cada barra são calculados a partir de (20).

### 3.4 Carregamento nodal equivalente

Se houver carregamento fora dos nós, seu efeito pode ser considerado por meio de um *carregamento nodal equivalente*, cuja definição é consequência direta do princípio da superposição dos efeitos.

Cada barra de pórtico pode ser entendida como se fosse uma viga biengastada<sup>4</sup> sujeita a dois tipos de solicitação: os deslocamentos de extremidade impostos, que para ela teriam o efeito de recalques de apoio, e eventuais carregamentos aplicados ao longo do seu comprimento. O efeito dos deslocamentos impostos já se conhece: se o vetor de deslocamentos nodais impostos for  $\bar{\mathbf{u}}'$ , os esforços nodais a ele associados serão  $\bar{\mathbf{f}}' = \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{u}}'$ , ambos no sistema local. Também no sistema local, seja  $\bar{\mathbf{f}}'' = \bar{\mathbf{f}}_0$  o vetor de esforços nodais (comumente designados *esforços de engastamento perfeito*) correspondentes às reações de apoio da viga biengastada sujeita *apenas* ao carregamento fora dos nós –e, portanto, sem deslocamentos nodais ( $\bar{\mathbf{u}}'' = \mathbf{0}$ ). Superpondo-se as duas solicitações, obtém-se

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}' + \bar{\mathbf{u}}'' = \bar{\mathbf{u}}',$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}' + \bar{\mathbf{f}}'' = \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{u}}' + \bar{\mathbf{f}}_0$$

ou, substituindo-se a primeira relação na segunda,

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{f}}_0. \quad (25)$$

---

<sup>4</sup> Pórticos com articulações internas serão analisados mais adiante.

A Figura 20 ilustra essa superposição.

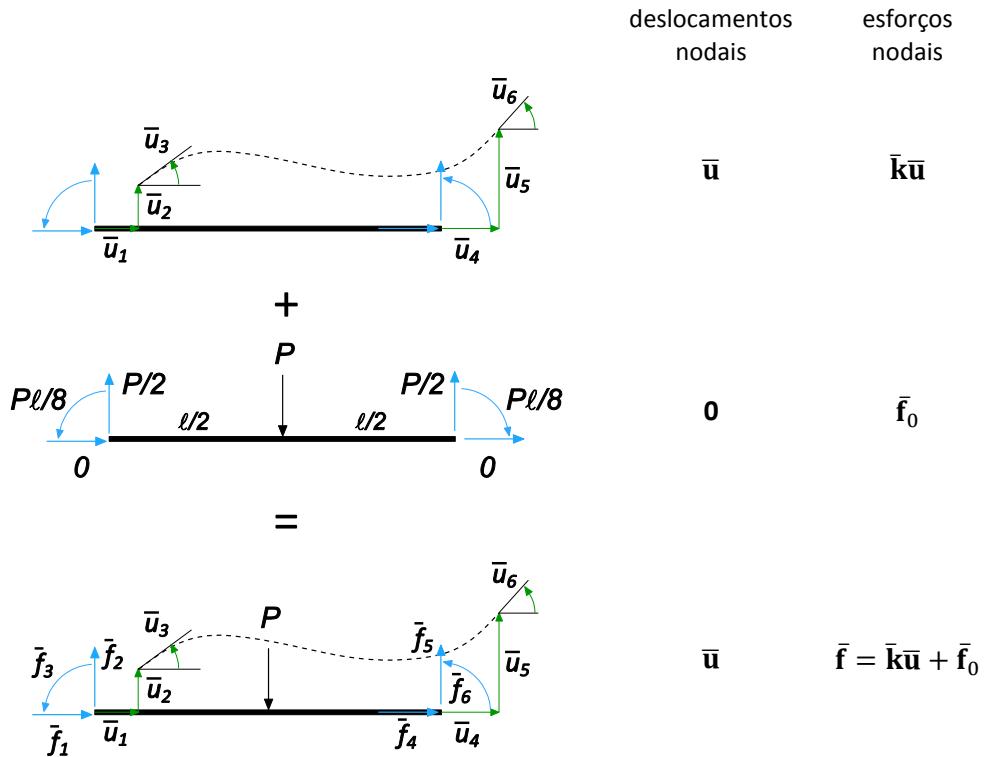


Figura 20 - Esforços nodais na barra de pórtico considerando o efeito de carregamento fora dos nós

Deste ponto em diante, a sequência de operações é análoga à das treliças. Substituindo-se (4) e (6) em (25) obtém-se

$$\mathbf{T}\mathbf{f} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{T}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{f}}_0$$

ou, multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz de transformação,

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} + \mathbf{f}_0, \quad (26)$$

em que

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{f}}_0 \quad (27)$$

e a matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  é calculada como em (9). A identificação entre os deslocamentos nodais da barra e os deslocamentos nodais da estrutura é feita por meio de matrizes de incidência como em (10), e a versão expandida do vetor de esforços nodais é construída como em (13):

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{L}^T \mathbf{f} = \mathbf{L}^T \mathbf{k} \mathbf{L} \mathbf{U} + \mathbf{L}^T \mathbf{f}_0. \quad (28)$$

Substituindo-se (28) nas equações de equilíbrio obtém-se

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n_b} \hat{\mathbf{f}}^i = \sum_{i=1}^{n_b} (\mathbf{L}^i)^T \mathbf{k}^i \mathbf{L}^i \mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n_b} (\mathbf{L}^i)^T \mathbf{f}_0^i$$

ou, de forma abreviada,

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}_0 = \mathbf{K}\mathbf{U}, \quad (29)$$

em que  $\mathbf{F}$  é o vetor de carregamentos nodais da estrutura (aplicados efetivamente nos nós),  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura, calculada como em (15), e

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{i=1}^{n_b} (\mathbf{L}^i)^T \mathbf{f}_0^i. \quad (30)$$

O vetor  $-\mathbf{F}_0$  é um carregamento nodal *equivalente* ao carregamento aplicado fora dos nós da estrutura, no sentido de que, superposto ao carregamento nodal  $\mathbf{F}$ , produz os deslocamentos nodais corretos. Observando-se (30) e (27), é fácil perceber que  $-\mathbf{F}_0$  corresponde à totalização nos nós dos esforços de engastamento perfeito de cada barra, convertidos para o sistema global e aplicados *no sentido contrário*, como se vê no exemplo da Figura 21.

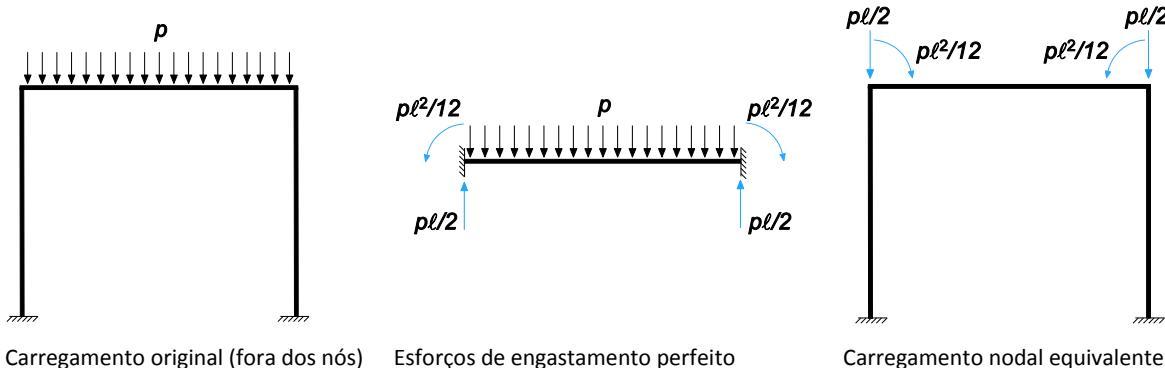


Figura 21 – Transformação do carregamento fora dos nós em carregamento nodal equivalente.

### 3.5 Esforços nas barras

A solução do sistema de equações (29) é igual ao caso das treliças. É importante lembrar que, uma vez calculados os deslocamentos nodais, a determinação dos esforços nas extremidades das barras exige que se considerem os esforços de engastamento perfeito. A partir de (25), obtém-se

$$\bar{\mathbf{f}}^b = \bar{\mathbf{k}}^b \bar{\mathbf{u}}^b + \bar{\mathbf{f}}_0^b = \bar{\mathbf{k}}^b \mathbf{T}^b \mathbf{L}^b \mathbf{U} + \bar{\mathbf{f}}_0^b. \quad (31)$$

### 3.6 Exemplo

Calcular os deslocamento nodais e os esforços de extremidade das barras do pórtico plano da Figura 22.

Dados:

$$EI = 27000 \text{ kNm}^2$$

$$EA = 600000 \text{ kN}$$

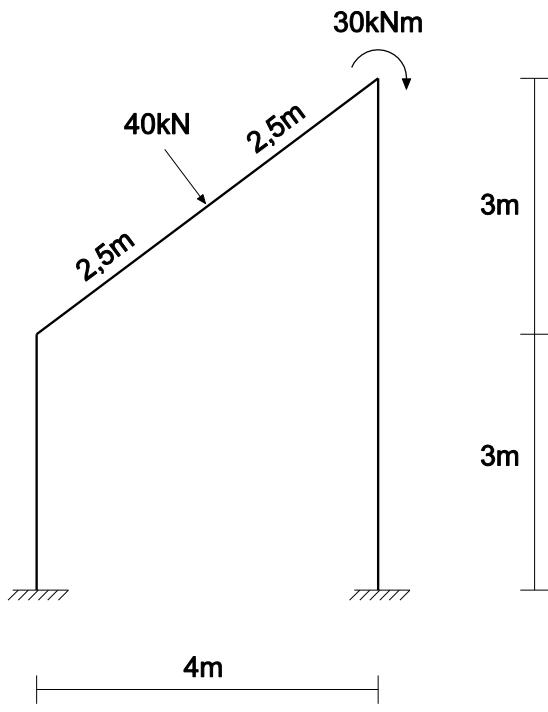
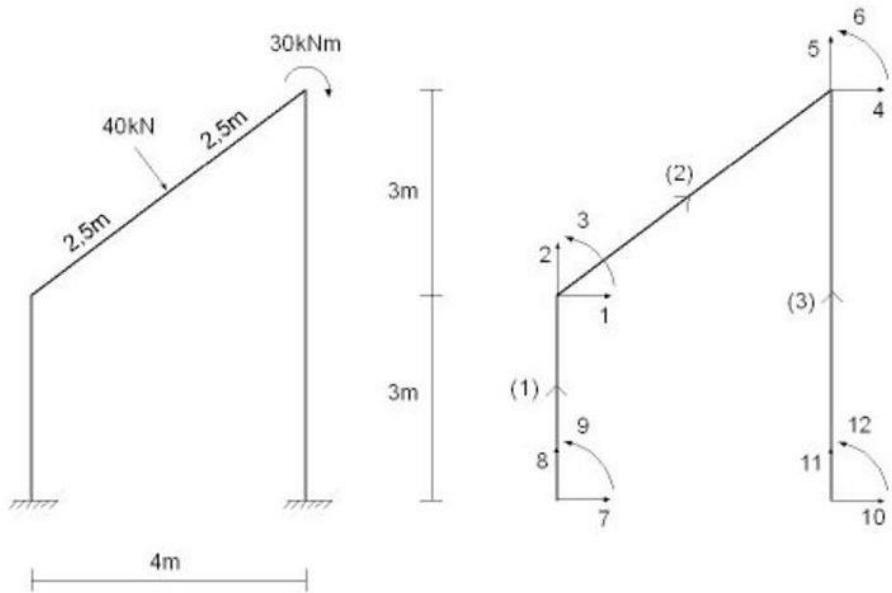


Figura 22 - Exemplo de pórtico plano

## Numeração dos deslocamentos nodais



$$EI = 27\,000 \text{ kNm}^2, EA = 600\,000 \text{ kN}$$

## Matrizes de rigidez no sistema local

$$\mathbf{kb}[\mathbf{EA}_-, \mathbf{EI}_-, \mathbf{L}_-] := \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{EA} / L, 0, 0, -\mathbf{EA} / L, 0, 0\}, \\ \{0, 12 \mathbf{EI} / L^3, 6 \mathbf{EI} / L^2, 0, -12 \mathbf{EI} / L^3, 6 \mathbf{EI} / L^2\}, \\ \{0, 6 \mathbf{EI} / L^2, 4 \mathbf{EI} / L, 0, -6 \mathbf{EI} / L^2, 2 \mathbf{EI} / L\}, \\ \{-\mathbf{EA} / L, 0, 0, \mathbf{EA} / L, 0, 0\}, \\ \{0, -12 \mathbf{EI} / L^3, -6 \mathbf{EI} / L^2, 0, 12 \mathbf{EI} / L^3, -6 \mathbf{EI} / L^2\}, \\ \{0, 6 \mathbf{EI} / L^2, 2 \mathbf{EI} / L, 0, -6 \mathbf{EI} / L^2, 4 \mathbf{EI} / L\} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{kb1} = \mathbf{kb}[600\,000, 27\,000, 3]$$

$$\{ \{200\,000, 0, 0, -200\,000, 0, 0\}, \{0, 12\,000, 18\,000, 0, -12\,000, 18\,000\}, \\ \{0, 18\,000, 36\,000, 0, -18\,000, 18\,000\}, \{-200\,000, 0, 0, 200\,000, 0, 0\}, \\ \{0, -12\,000, -18\,000, 0, 12\,000, -18\,000\}, \{0, 18\,000, 18\,000, 0, -18\,000, 36\,000\} \}$$

**MatrixForm[kb1]**

forma de matriz

$$\left( \begin{array}{cccccc} 200\,000 & 0 & 0 & -200\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 12\,000 & 18\,000 & 0 & -12\,000 & 18\,000 \\ 0 & 18\,000 & 36\,000 & 0 & -18\,000 & 18\,000 \\ -200\,000 & 0 & 0 & 200\,000 & 0 & 0 \\ 0 & -12\,000 & -18\,000 & 0 & 12\,000 & -18\,000 \\ 0 & 18\,000 & 18\,000 & 0 & -18\,000 & 36\,000 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{kb2} = \mathbf{kb}[600\,000, 27\,000, 5]$$

$$\{ \{120\,000, 0, 0, -120\,000, 0, 0\}, \{0, 2592, 6480, 0, -2592, 6480\}, \\ \{0, 6480, 21\,600, 0, -6480, 10\,800\}, \{-120\,000, 0, 0, 120\,000, 0, 0\}, \\ \{0, -2592, -6480, 0, 2592, -6480\}, \{0, 6480, 10\,800, 0, -6480, 21\,600\} \}$$

```
kb3 = kb[600000, 27000, 6]
{{100000, 0, 0, -100000, 0, 0}, {0, 1500, 4500, 0, -1500, 4500},
{0, 4500, 18000, 0, -4500, 9000}, {-100000, 0, 0, 100000, 0, 0},
{0, -1500, -4500, 0, 1500, -4500}, {0, 4500, 9000, 0, -4500, 18000}}
```

## Matrizes de rigidez no sistema global

```
T[theta_] := {{Cos[theta], Sin[theta], 0, 0, 0, 0},
[Cosseno] [Seno]
{-Sin[theta], Cos[theta], 0, 0, 0, 0},
[Seno] [Cosseno]
{0, 0, 1, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, Cos[theta], Sin[theta], 0},
[Cosseno] [Seno]
{0, 0, 0, -Sin[theta], Cos[theta], 0},
[Seno] [Cosseno]
{0, 0, 0, 0, 0, 1}

T1 = T[Pi/2]
[número]

{{0, 1, 0, 0, 0, 0}, {-1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}]

MatrixForm[T1]
[forma de matriz]

{{0, 1, 0, 0, 0, 0},
{-1, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 1, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 1, 0},
{0, 0, 0, -1, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 1}]

T2 = T[ArcTan[3/4]]
[arco tangente]

{{4/5, 3/5, 0, 0, 0, 0}, {-3/5, 4/5, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 4/5, 3/5, 0}, {0, 0, 0, -3/5, 4/5, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}]

T3 = T[Pi/2]
[número]

{{0, 1, 0, 0, 0, 0}, {-1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}]

k1 = Transpose[T1].kb1.T1
[transposição]

{{12000, 0, -18000, -12000, 0, -18000}, {0, 200000, 0, 0, -200000, 0},
{-18000, 0, 36000, 18000, 0, 18000}, {-12000, 0, 18000, 12000, 0, 18000},
{0, -200000, 0, 0, 200000, 0}, {-18000, 0, 18000, 18000, 0, 36000}}
```

```

MatrixForm[k1]
forma de matriz

{ 12000 0 -18000 -12000 0 -18000
  0 200000 0 0 -200000 0
-18000 0 36000 18000 0 18000
-12000 0 18000 12000 0 18000
  0 -200000 0 0 200000 0
-18000 0 18000 18000 0 36000 }

k2 = Transpose[T2].kb2.T2
transposição

{ { 1943328, 1408896, -3888, -1943328, -1408896, -3888 },
  { 25      25          25      25      25          25      },
  { 1408896, 1121472, 5184, -1408896, -1121472, 5184 },
  { 25      25          25      25      25          25      },
  { -3888, 5184, 21600, 3888, -5184, 10800 },
  { -1943328, -1408896, 3888, 1943328, 1408896, 3888 },
  { 25      25          25      25      25          25      },
  { -1408896, -1121472, -5184, 1408896, 1121472, -5184 },
  { 25      25          25      25      25          25      },
  { -3888, 5184, 10800, 3888, -5184, 21600 } }

k3 = Transpose[T3].kb3.T3
transposição

{ {1500, 0, -4500, -1500, 0, -4500}, {0, 100000, 0, 0, -100000},
  {-4500, 0, 18000, 4500, 0, 9000}, {-1500, 0, 4500, 1500, 0, 4500},
  {0, -100000, 0, 0, 100000, 0}, {-4500, 0, 9000, 4500, 0, 18000}
}

```

## Espalhamento das matrizes das barras

**kc1 = Transpose[L1].k1.L1**

| transposição

```
{ {12000, 0, 18000, 0, 0, 0, -12000, 0, 18000, 0, 0, 0},  
{0, 200000, 0, 0, 0, 0, -200000, 0, 0, 0, 0},  
{18000, 0, 36000, 0, 0, -18000, 0, 18000, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{-12000, 0, -18000, 0, 0, 12000, 0, -18000, 0, 0, 0},  
{0, -200000, 0, 0, 0, 0, 200000, 0, 0, 0, 0},  
{18000, 0, 18000, 0, 0, -18000, 0, 36000, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

**MatrixForm[kc1]**

| forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 12000 & 0 & 18000 & 0 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 18000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18000 & 0 & 36000 & 0 & 0 & 0 & -18000 & 0 & 18000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12000 & 0 & -18000 & 0 & 0 & 0 & 12000 & 0 & -18000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -200000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18000 & 0 & 18000 & 0 & 0 & 0 & -18000 & 0 & 36000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**L2 = L[1, 2, 3, 4, 5, 6]**

```
{ {1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

**kc2 = Transpose[L2].k2.L2**

| transposição

```
{ {1943328, 1408896, -3888, -1943328, -1408896, -3888, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{1408896, 1121472, 5184, -1408896, -1121472, 5184, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{-3888, 5184, 21600, 3888, -5184, 10800, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{-1943328, -1408896, 3888, 1943328, 1408896, 3888, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{-1408896, -1121472, -5184, 1408896, 1121472, -5184, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{-3888, 5184, 10800, 3888, -5184, 21600, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},  
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

**MatrixForm[kc2]**

forma de matriz

$$\left( \begin{array}{ccccccccc} \frac{1943328}{25} & \frac{1408896}{25} & -3888 & -\frac{1943328}{25} & -\frac{1408896}{25} & -3888 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1408896}{25} & \frac{1121472}{25} & 5184 & -\frac{1408896}{25} & -\frac{1121472}{25} & 5184 & 0 & 0 & 0 \\ -3888 & 5184 & 21600 & 3888 & -5184 & 10800 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1943328}{25} & -\frac{1408896}{25} & 3888 & \frac{1943328}{25} & \frac{1408896}{25} & 3888 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1408896}{25} & -\frac{1121472}{25} & -5184 & \frac{1408896}{25} & \frac{1121472}{25} & -5184 & 0 & 0 & 0 \\ -3888 & 5184 & 10800 & 3888 & -5184 & 21600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**L3 = L[10, 11, 12, 4, 5, 6]**

```
{ {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

**kc3 = Transpose[L3].k3.L3**

transposição

```
{ {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1500, 0, 4500, 0, 0, 0, -1500, 0, 4500},
{0, 0, 0, 100000, 0, 0, 0, 0, 0, -100000, 0},
{0, 0, 0, 4500, 0, 18000, 0, 0, -4500, 0, 9000}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, -1500, 0, -4500, 0, 0, 1500, 0, -4500},
{0, 0, 0, 0, -100000, 0, 0, 0, 0, 100000, 0},
{0, 0, 0, 4500, 0, 9000, 0, 0, -4500, 0, 18000} }
```

## Matriz de rigidez da estrutura

**K = kc1 + kc2 + kc3**

```
{ { \frac{2243328}{25}, \frac{1408896}{25}, 14112, -\frac{1943328}{25}, -\frac{1408896}{25}, -3888, -12000, 0, 18000, 0, 0, 0 },
{ \frac{1408896}{25}, \frac{6121472}{25}, 5184, -\frac{1408896}{25}, -\frac{1121472}{25}, 5184, 0, -200000, 0, 0, 0, 0 },
{ 14112, 5184, 57600, 3888, -5184, 10800, -18000, 0, 18000, 0, 0, 0 },
{ -\frac{1943328}{25}, -\frac{1408896}{25}, 3888, \frac{1980828}{25}, \frac{1408896}{25}, 8388, 0, 0, 0, -1500, 0, 4500 },
{ -\frac{1408896}{25}, -\frac{1121472}{25}, -5184, \frac{1408896}{25}, \frac{3621472}{25}, -5184, 0, 0, 0, 0, -100000, 0 },
{ -3888, 5184, 10800, 8388, -5184, 39600, 0, 0, 0, -4500, 0, 9000 },
{ -12000, 0, -18000, 0, 0, 0, 12000, 0, -18000, 0, 0, 0 },
{ 0, -200000, 0, 0, 0, 0, 200000, 0, 0, 0, 0 },
{ 18000, 0, 18000, 0, 0, -18000, 0, 36000, 0, 0, 0 },
{ 0, 0, 0, -1500, 0, -4500, 0, 0, 0, 1500, 0, -4500 },
{ 0, 0, 0, 0, -100000, 0, 0, 0, 0, 0, 100000, 0 },
{ 0, 0, 0, 4500, 0, 9000, 0, 0, -4500, 0, 18000 } }
```

**MatrixForm[K]**

forma de matriz

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc} 2243328 & 1408896 & 14112 & -1943328 & -1408896 & -3888 & -12000 & 0 & 18000 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 5184 & 0 & -200000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1408896 & 6121472 & 5184 & -1408896 & -1121472 & 5184 & 0 & -18000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & -5184 & 10800 & 0 & 18000 & 0 & 0 & 0 \\ 14112 & 5184 & 57600 & 3888 & -5184 & 8388 & 0 & 0 & 0 & -1500 & 0 & 4500 \\ 1943328 & 1408896 & 3888 & 1980828 & 1408896 & 3621472 & -5184 & 0 & 0 & 0 & -100000 & 0 \\ 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1408896 & 1121472 & -5184 & 1408896 & 3621472 & -5184 & 39600 & 0 & 0 & 0 & -4500 & 9000 \\ 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3888 & 5184 & 10800 & 8388 & -5184 & 0 & 12000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12000 & 0 & -18000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -200000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36000 & 0 & 0 & 0 \\ 18000 & 0 & 18000 & 0 & 0 & 0 & -18000 & 0 & 0 & 0 & 1500 & -4500 \\ 0 & 0 & 0 & -1500 & 0 & -4500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4500 & 0 & 18000 \end{array} \right)$$

**Det [K]**

determinante

0

## Carregamento nodal equivalente

$$\begin{aligned} \mathbf{fb02} &= \{0, 40/2, 40*5/8, 0, 40/2, -40*5/8\} \\ &\{0, 20, 25, 0, 20, -25\} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f02} = \text{Transpose}[\mathbf{T2}].\mathbf{fb02}$$

transposição

$$\{-12, 16, 25, -12, 16, -25\}$$

$$\mathbf{fc02} = \text{Transpose}[\mathbf{L2}].\mathbf{f02}$$

transposição

$$\{-12, 16, 25, -12, 16, -25, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$\mathbf{F0a} = \text{Part}[\mathbf{fc02}, 1;; 6]$$

parte

$$\{-12, 16, 25, -12, 16, -25\}$$

## Vetor de carregamentos nodais

$$\mathbf{Fa} = \{0, 0, 0, 0, 0, -30\}$$

$$\{0, 0, 0, 0, 0, -30\}$$

## Cálculo dos deslocamentos nodais

**Kaa = K[[1;; 6, 1;; 6]]**

$$\left\{ \left\{ \frac{2243328}{25}, \frac{1408896}{25}, 14112, -\frac{1943328}{25}, -\frac{1408896}{25}, -3888 \right\}, \right.$$

$$\left\{ \frac{1408896}{25}, \frac{6121472}{25}, 5184, -\frac{1408896}{25}, -\frac{1121472}{25}, 5184 \right\},$$

$$\{14112, 5184, 57600, 3888, -5184, 10800\},$$

$$\left\{ -\frac{1943328}{25}, -\frac{1408896}{25}, 3888, \frac{1980828}{25}, \frac{1408896}{25}, 8388 \right\},$$

$$\left\{ -\frac{1408896}{25}, -\frac{1121472}{25}, -5184, \frac{1408896}{25}, \frac{3621472}{25}, -5184 \right\},$$

$$\{-3888, 5184, 10800, 8388, -5184, 39600\} \}$$

**Ua = Inverse[Kaa].(Fa - F0a)**

[matriz inversa]

$$\left\{ \frac{176671973}{42706980960}, \frac{70154131}{4448643850000}, -\frac{2787364093}{1601511786000}, \right.$$

$$\left. \frac{407909517}{88972877000}, -\frac{781937147}{2224321925000}, -\frac{211900919}{800755893000} \right\}$$

**N[Ua]**

[valor numérico]

$$\{0.00413684, 0.0000157698, -0.00174046, 0.00458465, -0.00035154, -0.000264626\}$$

## Cálculo das reações de apoio

**Kba = K[[7;; 12, 1;; 6]]**

$$\{\{-12000, 0, -18000, 0, 0, 0\}, \{0, -200000, 0, 0, 0, 0\}, \{18000, 0, 18000, 0, 0, 0\}, \\ \{0, 0, 0, -1500, 0, -4500\}, \{0, 0, 0, 0, -100000, 0\}, \{0, 0, 0, 4500, 0, 9000\}\}$$

**Fb = Kba.Ua**

$$\left\{ -\frac{1629435232}{88972877}, -\frac{280616524}{88972877}, \frac{7675669789}{177945754}, -\frac{505913816}{88972877}, \frac{3127748588}{88972877}, \frac{3247383815}{177945754} \right\}$$

**N[Fb]**

[valor numérico]

$$\{-18.3138, -3.15396, 43.1349, -5.68616, 35.154, 18.2493\}$$

## Esforços nodais em cada barra, no sistema local

**U = Join[Ua, {0, 0, 0, 0, 0, 0}]**

[Junta]

$$\left\{ \frac{176671973}{42706980960}, \frac{70154131}{4448643850000}, -\frac{2787364093}{1601511786000}, \right.$$

$$\left. \frac{407909517}{88972877000}, -\frac{781937147}{2224321925000}, -\frac{211900919}{800755893000}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$$

**fb1 = kb1.T1.L1.U**

$$\left\{ -\frac{280\,616\,524}{88\,972\,877}, \frac{1\,629\,435\,232}{88\,972\,877}, \frac{7\,675\,669\,789}{177\,945\,754}, \frac{280\,616\,524}{88\,972\,877}, -\frac{1\,629\,435\,232}{88\,972\,877}, \frac{2\,100\,941\,603}{177\,945\,754} \right\}$$

**N[fb1]**

valor numérico

$$\{-3.15396, 18.3138, 43.1349, 3.15396, -18.3138, 11.8066\}$$

**fb2 = kb2.T2.L2.U + fb02**

$$\left\{ -\frac{1\,471\,918\,100}{88\,972\,877}, \frac{753\,167\,920}{88\,972\,877}, -\frac{2\,100\,941\,603}{177\,945\,754}, \frac{1\,471\,918\,100}{88\,972\,877}, \frac{2\,805\,747\,160}{88\,972\,877}, -\frac{8\,161\,954\,597}{177\,945\,754} \right\}$$

**N[fb2]**

valor numérico

$$\{-16.5434, 8.46514, -11.8066, 16.5434, 31.5349, -45.8677\}$$

**fb3 = kb3.T3.L3.U**

$$\left\{ \frac{3\,127\,748\,588}{88\,972\,877}, \frac{505\,913\,816}{88\,972\,877}, \frac{3\,247\,383\,815}{177\,945\,754}, -\frac{3\,127\,748\,588}{88\,972\,877}, -\frac{505\,913\,816}{88\,972\,877}, \frac{2\,823\,581\,977}{177\,945\,754} \right\}$$

**N[fb3]**

valor numérico

$$\{35.154, 5.68616, 18.2493, -35.154, -5.68616, 15.8677\}$$

### 3.7 Barra engastada-articulada

Se a barra de pórtico for articulada em uma das extremidades, altera-se a relação entre os esforços de extremidade e os deslocamentos nodais. A Figura 23 mostra uma barra nessas condições, extraída de um pórtico plano ao qual se liga por meio de nós aqui indicados por pequenos quadrados. A numeração de 1 a 6 aplica-se tanto aos deslocamentos nodais como aos esforços de extremidade, no sistema local. É fácil perceber que, dada a presença da articulação à direita,  $\bar{f}_6 = 0$  qualquer que seja o deslocamento nodal imposto; além disso, a imposição de  $\bar{u}_6$  isoladamente não gera esforços de extremidade.

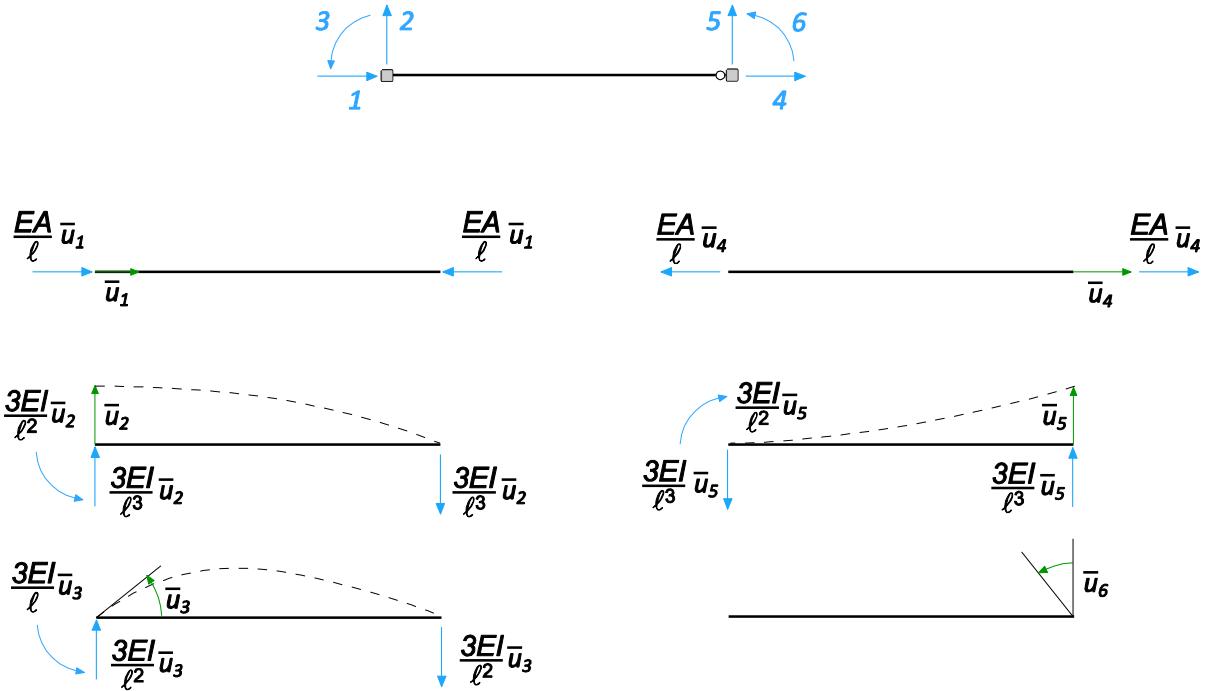


Figura 23 – Esforços de extremidade associados à imposição de cada deslocamento nodal na barra engastada-articul

Quando se considera o efeito da imposição simultânea de todos esses deslocamentos obtém-se a matriz de rigidez

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & 0 & -EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/\ell^3 & 3EI/\ell^2 & 0 & -3EI/\ell^3 & 0 \\ 0 & 3EI/\ell^2 & 3EI/\ell & 0 & -3EI/\ell^2 & 0 \\ -EA/\ell & 0 & 0 & EA/\ell & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/\ell^3 & -3EI/\ell^2 & 0 & 3EI/\ell^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

de modo análogo ao que se fez para obter (23). Como observado anteriormente, cada coluna (ou linha) da matriz de rigidez corresponde a um dos conjuntos de esforços indicados na Figura 23.

Obviamente, também os esforços de engastamento perfeito, a partir dos quais se calculam os esforços nodais equivalentes, são diferentes no caso da barra engastada-articulada.

### 3.8 Exemplo

Calcular os deslocamento nodais e os esforços de extremidade das barras do pórtico plano da Figura 24 considerando dois casos de carregamento:

Caso 1: as cargas distribuídas indicadas;

Caso 2: o recalque de apoio indicado.

Dados:

$$EI = 30000 \text{ kNm}^2$$

$$EA = 600000 \text{ kN}$$

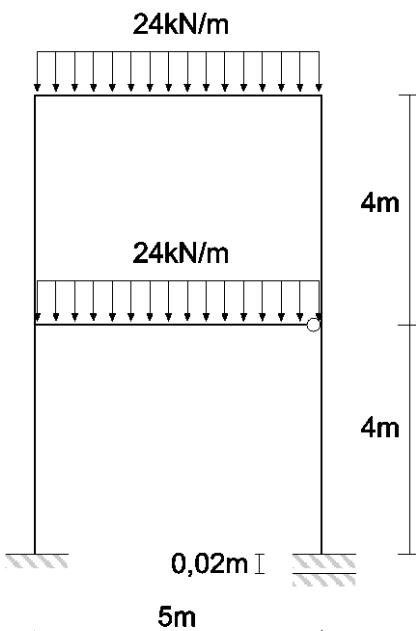
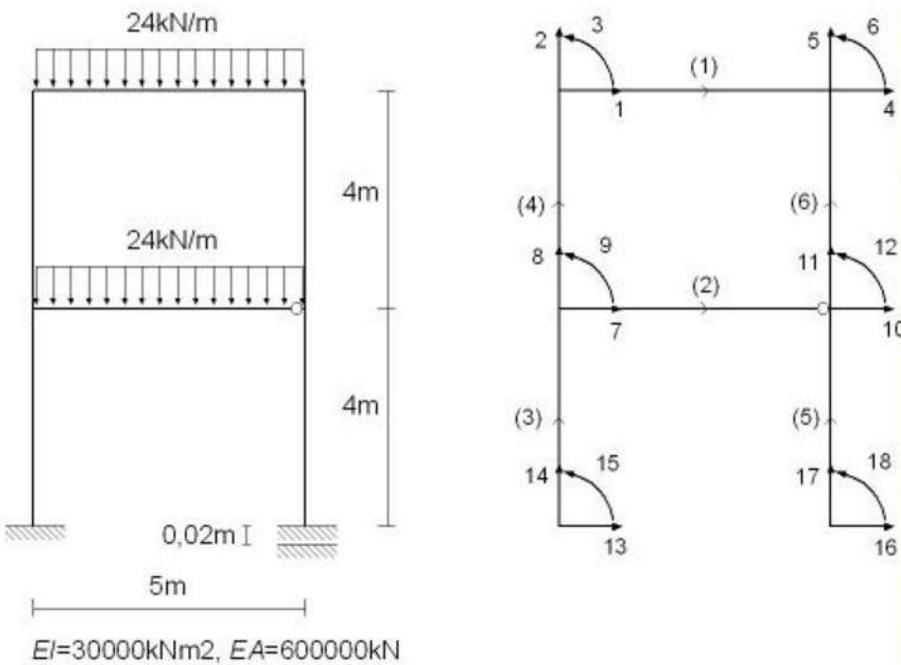


Figura 24 - Exemplo de pórtico plano com barra articulada e recalque de apoio

## Numeração dos graus de liberdade



## Matrizes de rigidez no sistema local

```
kb[EA_, EI_, L_] := {{EA / L, 0, 0, -EA / L, 0, 0},
{0, 12 EI / L^3, 6 EI / L^2, 0, -12 EI / L^3, 6 EI / L^2},
{0, 6 EI / L^2, 4 EI / L, 0, -6 EI / L^2, 2 EI / L},
{-EA / L, 0, 0, EA / L, 0, 0},
{0, -12 EI / L^3, -6 EI / L^2, 0, 12 EI / L^3, -6 EI / L^2},
{0, 6 EI / L^2, 2 EI / L, 0, -6 EI / L^2, 4 EI / L}}
```

```
kbengart[EA_, EI_, L_] := {{EA / L, 0, 0, -EA / L, 0, 0},
{0, 3 EI / L^3, 3 EI / L^2, 0, -3 EI / L^3, 0},
{0, 3 EI / L^2, 3 EI / L, 0, -3 EI / L^2, 0},
{-EA / L, 0, 0, EA / L, 0, 0},
{0, -3 EI / L^3, -3 EI / L^2, 0, 3 EI / L^3, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
kb1 = kb[600000, 30000, 5]
```

```
{ {120000, 0, 0, -120000, 0, 0}, {0, 2880, 7200, 0, -2880, 7200},
{0, 7200, 24000, 0, -7200, 12000}, {-120000, 0, 0, 120000, 0, 0},
{0, -2880, -7200, 0, 2880, -7200}, {0, 7200, 12000, 0, -7200, 24000} }
```

```
MatrixForm[kb1]
```

$$\begin{pmatrix} 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 2880 & 7200 & 0 & -2880 & 7200 \\ 0 & 7200 & 24000 & 0 & -7200 & 12000 \\ -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & -2880 & -7200 & 0 & 2880 & -7200 \\ 0 & 7200 & 12000 & 0 & -7200 & 24000 \end{pmatrix}$$

```

kb2 = kbengart[600000, 30000, 5]
{{120000, 0, 0, -120000, 0, 0}, {0, 720, 3600, 0, -720, 0}, {0, 3600, 18000, 0, -3600, 0},
 {-120000, 0, 0, 120000, 0, 0}, {0, -720, -3600, 0, 720, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}]

MatrixForm[kb2]

$$\begin{pmatrix} 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 720 & 3600 & 0 & -720 & 0 \\ 0 & 3600 & 18000 & 0 & -3600 & 0 \\ -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & -720 & -3600 & 0 & 720 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


kb3 = kb[600000, 30000, 5]
{{120000, 0, 0, -120000, 0, 0}, {0, 2880, 7200, 0, -2880, 7200},
 {0, 7200, 24000, 0, -7200, 12000}, {-120000, 0, 0, 120000, 0, 0},
 {0, -2880, -7200, 0, 2880, -7200}, {0, 7200, 12000, 0, -7200, 24000}]

kb4 = kb3
{{120000, 0, 0, -120000, 0, 0}, {0, 2880, 7200, 0, -2880, 7200},
 {0, 7200, 24000, 0, -7200, 12000}, {-120000, 0, 0, 120000, 0, 0},
 {0, -2880, -7200, 0, 2880, -7200}, {0, 7200, 12000, 0, -7200, 24000}]

kb5 = kb3
{{120000, 0, 0, -120000, 0, 0}, {0, 2880, 7200, 0, -2880, 7200},
 {0, 7200, 24000, 0, -7200, 12000}, {-120000, 0, 0, 120000, 0, 0},
 {0, -2880, -7200, 0, 2880, -7200}, {0, 7200, 12000, 0, -7200, 24000}]

kb6 = kb3
{{120000, 0, 0, -120000, 0, 0}, {0, 2880, 7200, 0, -2880, 7200},
 {0, 7200, 24000, 0, -7200, 12000}, {-120000, 0, 0, 120000, 0, 0},
 {0, -2880, -7200, 0, 2880, -7200}, {0, 7200, 12000, 0, -7200, 24000}}

```

## Matrizes de rigidez no sistema global

```

T[theta_] := {{Cos[theta], Sin[theta], 0, 0, 0, 0},
              {-Sin[theta], Cos[theta], 0, 0, 0, 0},
              {0, 0, 1, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, Cos[theta], Sin[theta], 0},
              {0, 0, 0, -Sin[theta], Cos[theta], 0},
              {0, 0, 0, 0, 0, 1}};

T3 = T[Pi/2]
{{0, 1, 0, 0, 0, 0}, {-1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}

```

```

MatrixForm[T3]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


```

```

k1 = kb1
{{120000, 0, 0, -120000, 0, 0}, {0, 2880, 7200, 0, -2880, 7200},
{0, 7200, 24000, 0, -7200, 12000}, {-120000, 0, 0, 120000, 0, 0},
{0, -2880, -7200, 0, 2880, -7200}, {0, 7200, 12000, 0, -7200, 24000} }

k2 = kb2
{{120000, 0, 0, -120000, 0, 0}, {0, 720, 3600, 0, -720, 0}, {0, 3600, 18000, 0, -3600, 0},
{-120000, 0, 0, 120000, 0, 0}, {0, -720, -3600, 0, 720, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0} }

k3 = Transpose [T3] .kb3.T3
{{2880, 0, -7200, -2880, 0, -7200}, {0, 120000, 0, 0, -120000, 0},
{-7200, 0, 24000, 7200, 0, 12000}, {-2880, 0, 7200, 2880, 0, 7200},
{0, -120000, 0, 0, 120000, 0}, {-7200, 0, 12000, 7200, 0, 24000} }

k4 = k3
{{2880, 0, -7200, -2880, 0, -7200}, {0, 120000, 0, 0, -120000, 0},
{-7200, 0, 24000, 7200, 0, 12000}, {-2880, 0, 7200, 2880, 0, 7200},
{0, -120000, 0, 0, 120000, 0}, {-7200, 0, 12000, 7200, 0, 24000} }

k5 = k3
{{2880, 0, -7200, -2880, 0, -7200}, {0, 120000, 0, 0, -120000, 0},
{-7200, 0, 24000, 7200, 0, 12000}, {-2880, 0, 7200, 2880, 0, 7200},
{0, -120000, 0, 0, 120000, 0}, {-7200, 0, 12000, 7200, 0, 24000} }

k6 = k3
{{2880, 0, -7200, -2880, 0, -7200}, {0, 120000, 0, 0, -120000, 0},
{-7200, 0, 24000, 7200, 0, 12000}, {-2880, 0, 7200, 2880, 0, 7200},
{0, -120000, 0, 0, 120000, 0}, {-7200, 0, 12000, 7200, 0, 24000} }

```

## Espalhamento das matrizes das barras

```

MatrixL[i_, j_, k_, l_, m_, n_] := Normal[SparseArray[
  {{1, i} \[Rule] 1, {2, j} \[Rule] 1, {3, k} \[Rule] 1, {4, l} \[Rule] 1, {5, m} \[Rule] 1, {6, n} \[Rule] 1}, {6, 18}]]]

L1 = MatrixL[1, 2, 3, 4, 5, 6]

{{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, 
 {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, 
 {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, 
 {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, 
 {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, 
 {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} }

MatrixForm[L1]

\left( \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)

kc1 = Transpose[L1].k1.L1;

```

**MatrixForm**[kc1]

```
L2 = MatrixL[7, 8, 9, 10, 11, 12]
```

```
kc2 = Transpose[L2].k2.L2;
```

**MatrixForm** [kc2]

```
L3 = MatrixL[13, 14, 15, 7, 8, 9]
```

```
kc3 = Transpose[L3].k3.L3;
```

```

L4 = MatrixL[7, 8, 9, 1, 2, 3]
{{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}
kc4 = Transpose[L4].k4.L4;

L5 = MatrixL[16, 17, 18, 10, 11, 12]
{{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}}
kc5 = Transpose[L5].k5.L5;

L6 = MatrixL[10, 11, 12, 4, 5, 6]
{{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}
kc6 = Transpose[L6].k6.L6;

```

## Matriz de rigidez da estrutura

$$K = kc1 + kc2 + kc3 + kc4 + kc5 + kc6;$$

**MatrixForm[K]**

$$\begin{pmatrix}
122880 & 0 & 7200 & -120000 & 0 & 0 & -2880 & 0 & 7200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 122880 & 7200 & 0 & -2880 & 7200 & 0 & -120000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7200 & 7200 & 48000 & 0 & -7200 & 12000 & -7200 & 0 & 12000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-120000 & 0 & 0 & 122880 & 0 & 7200 & 0 & 0 & 0 & -2880 & 0 & 7200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2880 & -7200 & 0 & 122880 & -7200 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 7200 & 12000 & 7200 & -7200 & 48000 & 0 & 0 & 0 & -7200 & 0 & 12000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2880 & 0 & -7200 & 0 & 0 & 0 & 125760 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 & -2880 & 0 & 7200 & 0 \\
0 & -120000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 240720 & 3600 & 0 & -720 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 & 0 \\
7200 & 0 & 12000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3600 & 66000 & 0 & -3600 & 0 & -7200 & 0 & 12000 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2880 & 0 & -7200 & -120000 & 0 & 0 & 125760 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2880 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 & -720 & -3600 & 0 & 240720 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7200 & 0 & 12000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7200 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2880 & 0 & -7200 & 0 & 0 & 2880 & 0 & 0 & -7200 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120000 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7200 & 0 & 12000 & 0 & 0 & -7200 & 0 & 24000 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2880 & 0 & -7200 & 0 & 0 & 0 & 2880 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7200 & 0 & 12000 & 0 & 0 & 0 & -7200
\end{pmatrix}$$

**Det[K]**

0

## Caso I - Carregamento distribuído

```
fb01 = {0, 24 * 5 / 2, 24 * 5^2 / 12, 0, 24 * 5 / 2, -24 * 5^2 / 12}
{0, 60, 50, 0, 60, -50}
```

$f_{01} = f_{b01}$

$$\{0, 60, 50, 0, 60, -50\}$$

`fc01 = Transpose[L1].f01`

$$\{0, 60, 50, 0, 60, -50, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$fb02 = \{0, 5 * 24 * 5 / 8, 24 * 5^2 / 8, 0, 3 * 24 * 5 / 8, 0\}$$

$$\{0, 75, 75, 0, 45, 0\}$$

**f02 = fb02**

$$\{0, 75, 75, 0, 45, 0\}$$

`fc02 = Transpose[L2].f02`

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 75, 75, 0, 45, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$F_0 = f_{c01} + f_{c02}$$

$$\{0, 60, 50, 0, 60, -50, 0, 75, 75, 0, 45, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

```
F0a = Part [F0, 1 ;; 12]
```

$$\{0, 60, 50, 0, 60, -50, 0, 75, 75, 0, 45, 0\}$$

$$Fa = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

```
Kaa = K[[1;;12,1;;12]]; 
```

## MatrixForm [Kaa]

122 880	0	7200	-120 000	0	0	-2880	0	7200	0	0	0
0	122 880	7200	0	-2880	7200	0	-120 000	0	0	0	0
7200	7200	48 000	0	-7200	12 000	-7200	0	12 000	0	0	0
-120 000	0	0	122 880	0	7200	0	0	0	-2880	0	7200
0	-2880	-7200	0	122 880	-7200	0	0	0	0	-120 000	0
0	7200	12 000	7200	-7200	48 000	0	0	0	-7200	0	12 000
-2880	0	-7200	0	0	0	125 760	0	0	-120 000	0	0
0	-120 000	0	0	0	0	0	240 720	3600	0	-720	0
7200	0	12 000	0	0	0	0	3600	66 000	0	-3600	0
0	0	0	-2880	0	-7200	-120 000	0	0	125 760	0	0
0	0	0	0	-120 000	0	0	-720	-3600	0	240 720	0
0	0	0	7200	0	12 000	0	0	0	0	0	48 000

Det [Kaa]

152 537 740 835 048 053 593 140 625 408 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

## deslocamentos nodais

$$\mathbf{Ua1} = \text{Inverse}[\mathbf{Kaa}] . (\mathbf{Fa} - \mathbf{F0a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{362\,836\,749\,591}{37\,127\,002\,474\,960}, -\frac{2\,794\,097\,144\,997}{1\,856\,350\,123\,748\,000}, -\frac{56\,915\,834\,228}{34\,806\,564\,820\,275}, \frac{179\,827\,372\,017}{18\,563\,501\,237\,480}, \\ -\frac{2\,774\,953\,226\,247}{1\,856\,350\,123\,748\,000}, \frac{311\,747\,283\,199}{278\,452\,518\,562\,200}, \frac{167\,178\,377\,429}{37\,127\,002\,474\,960}, -\frac{1\,923\,813\,293\,423}{1\,856\,350\,123\,748\,000}, \\ -\frac{529\,399\,137\,287}{278\,452\,518\,562\,200}, \frac{4477\,301\,867}{977\,026\,380\,920}, -\frac{1\,788\,886\,954\,073}{1\,856\,350\,123\,748\,000}, -\frac{241\,274\,203\,919}{139\,226\,259\,281\,100} \end{array} \right\}$$

$\mathbf{N}[\mathbf{Ua1}]$

$$\{0.00977285, -0.00150516, -0.0016352, 0.00968715, -0.00149484, 0.00111957, \\ 0.00450288, -0.00103634, -0.00190122, 0.00458258, -0.000963658, -0.00173296\}$$

## reações de apoio

$\mathbf{Kba} = \mathbf{K}[[13;;18,1;;12]]$

$$\{\{0, 0, 0, 0, 0, 0, -2880, 0, -7200, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, -120000, 0, 0, 0, 0\}, \\ \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 7200, 0, 12000, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2880, 0, -7200\}, \\ \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -120000, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7200, 0, 12000\}\}$$

$\mathbf{Fb1} = \mathbf{Kba}.\mathbf{Ua1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{334\,368\,060\,000}{464\,087\,530\,937}, \frac{57\,714\,398\,802\,690}{464\,087\,530\,937}, \frac{4\,458\,071\,222\,870}{464\,087\,530\,937}, \\ -\frac{334\,368\,060\,000}{464\,087\,530\,937}, \frac{53\,666\,608\,622\,190}{464\,087\,530\,937}, \frac{5\,661\,404\,228\,380}{464\,087\,530\,937} \end{array} \right\}$$

$\mathbf{N}[\mathbf{Fb1}]$

$$\{0.720485, 124.361, 9.6061, -0.720485, 115.639, 12.199\}$$

## esforços nodais em cada barra, no sistema local

$\mathbf{U1} = \text{Join}[\mathbf{N}[\mathbf{Ua1}], \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}]$

$$\{0.00977285, -0.00150516, -0.0016352, 0.00968715, -0.00149484, 0.00111957, 0.00450288, \\ -0.00103634, -0.00190122, 0.00458258, -0.000963658, -0.00173296, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$\mathbf{fb1} = \mathbf{kb1}.\mathbf{L1}.\mathbf{U1} + \mathbf{fb01}$

$$\{10.2847, 56.2577, 24.1157, -10.2847, 63.7423, -42.827\}$$

$\mathbf{fb2} = \mathbf{kb2}.\mathbf{L2}.\mathbf{U1} + \mathbf{fb02}$

$$\{-9.56423, 68.1033, 40.5164, 9.56423, 51.8967, 0.\}$$

$\mathbf{fb3} = \mathbf{kb3}.\mathbf{T3}.\mathbf{L3}.\mathbf{U1}$

$$\{124.361, -0.720485, 9.6061, -124.361, 0.720485, -13.2085\}$$

$\mathbf{fb4} = \mathbf{kb4}.\mathbf{T3}.\mathbf{L4}.\mathbf{U1}$

$$\{56.2577, -10.2847, -27.3079, -56.2577, 10.2847, -24.1157\}$$

```

fb5 = kb5.T3.L5.U1
{115.639, 0.720485, 12.199, -115.639, -0.720485, -8.59658}

fb6 = kb6.T3.L6.U1
{63.7423, 10.2847, 8.59658, -63.7423, -10.2847, 42.827}

```

## Caso 2 - Recalque de apoio

```

Ub2 = {0, 0, 0, 0, -0.02, 0}
{0, 0, 0, 0, -0.02, 0}

Kab = K[ [1 ;; 12, 13 ;; 18] ]
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-2880, 0, 7200, 0, 0, 0}, {0, -120000, 0, 0, 0, 0}, {-7200, 0, 12000, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, -2880, 0, 7200}, {0, 0, 0, 0, -120000, 0}, {0, 0, 0, -7200, 0, 12000}}

```

```

MatrixForm[Kab]


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2880 & 0 & 7200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7200 & 0 & 12000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2880 & 0 & 7200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7200 & 0 & 12000 \end{pmatrix}$$


```

```

Frec = Kab.Ub2
{0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 2400., 0.}

```

## deslocamentos nodais

```

Ua2 = Inverse[Kaa].(Fa - Frec)
{0.0229399, -0.000757475, -0.00371491, 0.0229312, -0.0199243, -0.00385984,
 0.00673574, -0.000538686, -0.00291213, 0.0067314, -0.0199461, -0.00247472}

```

## reações de apoio

```

Kbb = K[ [13 ;; 18, 13 ;; 18] ]
{{2880, 0, -7200, 0, 0, 0}, {0, 120000, 0, 0, 0, 0}, {-7200, 0, 24000, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 2880, 0, -7200}, {0, 0, 0, 0, 120000, 0}, {0, 0, 0, -7200, 0, 24000}}

Fb2 = Kba.Ua2 + Kbb.Ub2
{1.56842, 6.46423, 13.5518, -1.56842, -6.46423, 18.7694}

```

### esforços nodais em cada barra, no sistema local

```

U2 = Join[Ua2, Ub2]
{0.0229399, -0.0000757475, -0.00371491, 0.0229312, -0.0199243, -0.00385984, 0.00673574,
-0.0000538686, -0.00291213, 0.0067314, -0.0199461, -0.00247472, 0, 0, 0, 0, -0.02, 0}

fb1 = kb1.L1.U2
{1.04664, 2.62548, 7.43326, -1.04664, -2.62548, 5.69412}

fb2 = kb2.L2.U2
{0.52178, 3.83875, 19.1938, -0.52178, -3.83875, 0.}

fb3 = kb3.T3.L3.U2
{6.46423, -1.56842, 13.5518, -6.46423, 1.56842, -21.3938}

fb4 = kb4.T3.L4.U2
{2.62548, -1.04664, 2.20008, -2.62548, 1.04664, -7.43326}

fb5 = kb5.T3.L5.U2
{-6.46423, 1.56842, 18.7694, 6.46423, -1.56842, -10.9273}

fb6 = kb6.T3.L6.U2
{-2.62548, 1.04664, 10.9273, 2.62548, -1.04664, -5.69412}

```

### 3.9 Nô articulado

Na estrutura da Figura 25a o nó A é articulado, diferentemente do Exemplo 3, em que a articulação pertence à extremidade direita da barra 2.

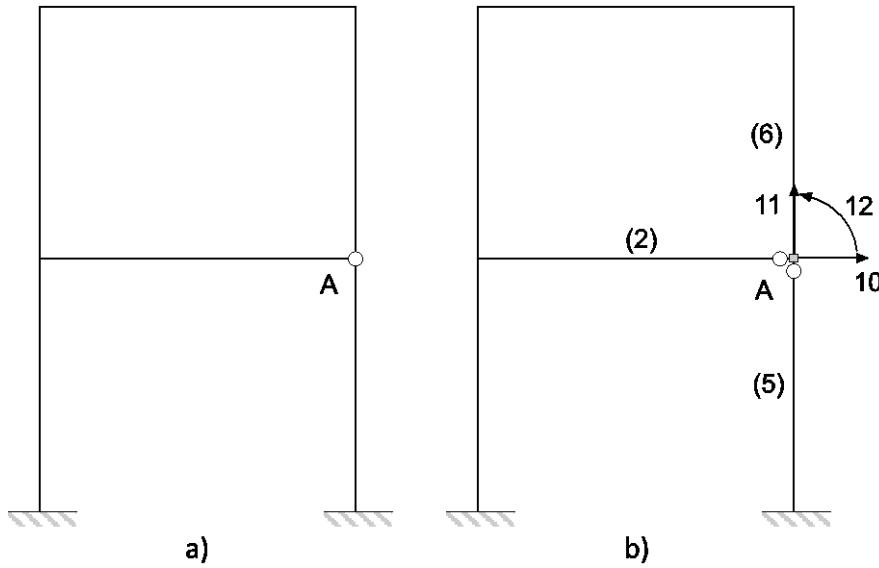


Figura 25 – a) Pórtico plano com nó articulado; b) Uma possível modelagem.

Uma maneira de simular essa condição é indicada na Figura 25b. Consideram-se as barras 2 e 5 articuladas nessa extremidade, e a barra 6, engastada nas duas extremidades. Dessa forma,  $U_{10}$  e  $U_{11}$  serão os deslocamentos nodais das três barras em A, mas  $U_{12}$  corresponderá à rotação apenas na extremidade A da barra 6, a princípio diferente das demais.

De forma análoga, seria possível articular apenas as extremidades das barras 2 e 6, ou então 5 e 6. O que não se pode fazer é articular as extremidades de *todas* as barras que concorrem nesse nó, porque, nesse caso, um eventual carregamento  $F_{12}$  (um momento) não poderia ser equilibrado pelos esforços de extremidade de nenhuma das barras, isto é, o nó ficaria hipostático. Se todas as barras fossem articuladas em A, a rotação do nó ( $U_{12}$ ) seria independente das rotações de extremidade das barras e, por si só, não provocaria o aparecimento de deformações e esforços na estrutura. A matriz de rigidez da estrutura teria apenas zeros na coluna (e na linha) 12, e não poderia ser invertida.

Uma outra possibilidade é considerar apenas os graus de liberdade translacionais em A, isto é, desconsiderar o grau de liberdade rotacional  $U_{12}$ . Isso requer uma adaptação das matrizes de rigidez das barras engastadas-articuladas, que passariam a ter apenas 5 graus de liberdade, sem a linha e a coluna de zeros que aparecem em (32). Nesse caso *todas* as barras que concorrem ao nó são consideradas engastadas-articuladas.

### 3.10 Simetria da matriz de rigidez

A simetria da matriz de rigidez não é coincidência. Pode-se demonstrá-la rigorosamente pelo teorema de Betti-Maxwell, no contexto das estruturas de comportamento elástico linear sujeitas a pequenas deformações.

Neste texto, faremos uso de um argumento simples.

A Figura 26 mostra uma viga em balanço submetida a um carregamento tal que todos os deslocamentos de extremidade sejam nulos, exceto o deslocamento transversal  $u'_5$  indicado. Com a numeração usual dos deslocamentos nodais da barra, e tendo em mente a interpretação física dos elementos da matriz de rigidez já apresentada anteriormente, fica claro que os esforços nodais associados a esse campo de deslocamentos serão o resultado da multiplicação dos elementos da 5<sup>a</sup> coluna da matriz de rigidez da barra por  $u'_5$ ; em particular, os esforços na extremidade livre terão os valores indicados na figura.

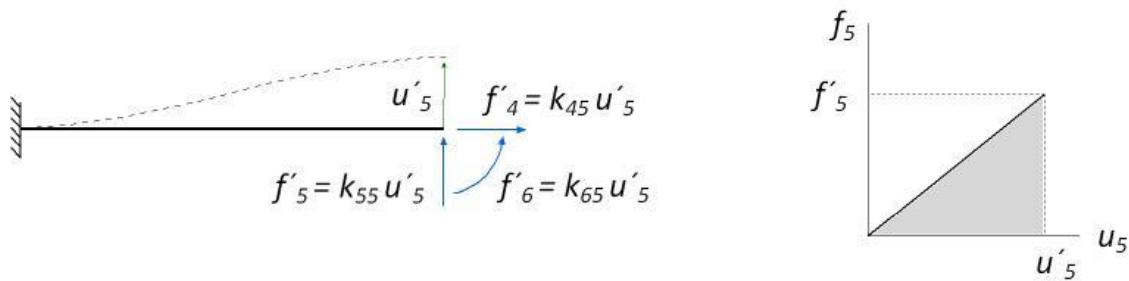


Figura 26 - Trabalho realizado pelo carregamento A

Imaginemos que esses esforços sejam aplicados gradativamente a partir do zero, quando a barra estaria na configuração indeformada, e que, quando assumirem o valor final indicado na figura, o deslocamento da extremidade seja  $u'_5$ . Nesse processo, o único carregamento que realizaria trabalho seria aquele na direção do deslocamento não-nulo, isto é,  $f'_5$ . Esse trabalho corresponde à área sob o gráfico  $f'_5 \times u'_5$ ; como o comportamento da estrutura é linear por hipótese, o gráfico é uma reta, do que resulta

$$\mathcal{J}_A = \frac{1}{2} f'_5 u'_5 . \quad (33)$$

Na Figura 27, a mesma estrutura é submetida a carregamento tal que o único deslocamento de extremidade não-nulo seja a rotação  $u''_6$  indicada.

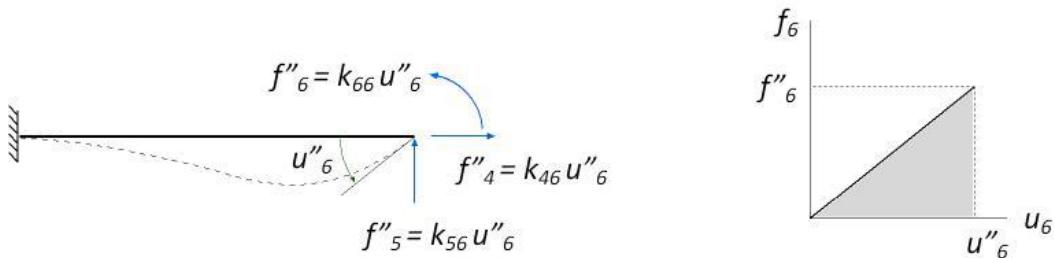


Figura 27 – Trabalho realizado pelo carregamento B

Os esforços correspondentes na extremidade livre têm o valor mostrado na figura, o único deles que realiza trabalho nesse processo é o momento  $f''_6$  e o valor desse trabalho é

$$\mathcal{T}_B = \frac{1}{2} f''_6 u''_6 . \quad (34)$$

Consideremos a situação em que, depois do carregamento A e da deformação correspondente, ilustrados na Figura 26, aplica-se o carregamento B, que gera o acréscimo de deformação ilustrado na Figura 27<sup>5</sup>. Ao final desse processo, o trabalho realizado pelos dois carregamentos será

$$\mathcal{T}_{A+B} = \mathcal{T}_A + \mathcal{T}_B + \mathcal{T}_{AB} , \quad (35)$$

em que

$$\mathcal{T}_{AB} = f'_6 u''_6 = k_{65} u'_5 u''_6 \quad (36)$$

é o trabalho realizado pelo carregamento A (pré-existente, daí a inexistência do fator 1/2) quando a barra sofre um acréscimo de deformação pela aplicação do carregamento B. Esse trabalho fica armazenado na estrutura na forma de energia de deformação.

No processo inverso, aplica-se primeiro o carregamento B e depois o carregamento A. O trabalho correspondente, armazenado na estrutura como energia de deformação, é

$$\mathcal{T}_{B+A} = \mathcal{T}_B + \mathcal{T}_A + \mathcal{T}_{BA} , \quad (37)$$

em que

$$\mathcal{T}_{BA} = f''_5 u'_5 = k_{56} u''_6 u'_5 \quad (38)$$

é o trabalho realizado pelo carregamento B pré-existente quando a barra sofre um acréscimo de deformação pela aplicação do carregamento A.

Se aceitarmos, sem demonstração, que a energia de deformação da estrutura independe da ordem em que se aplicam os carregamentos A e B, resulta

$$\mathcal{T}_{AB} = \mathcal{T}_{BA} \Rightarrow k_{65} = k_{56}. \quad (39)$$

---

<sup>5</sup> Supondo pequenas deformações, como sempre neste texto, vale o princípio da superposição dos efeitos, e os deslocamentos provocados pelo carregamento B independem do fato de se ter aplicado anteriormente o carregamento A (e vice-versa).

Raciocínio análogo permite que se generalize essa conclusão, isto é,

$$\bar{k}_{ij} = \bar{k}_{ij}, k_{ij} = k_{ji}, K_{ij} = K_{ji}. \quad (40)$$

### 3.11 Exercício proposto

Calcular o momento fletor na seção S da estrutura da Figura 28.

Dados:

$$P = 120 \text{ kN}$$

$$\ell = 4\text{m}$$

$$EI = 30000 \text{ kN/m}^2$$

$$EA = 60000 \text{ kN}$$

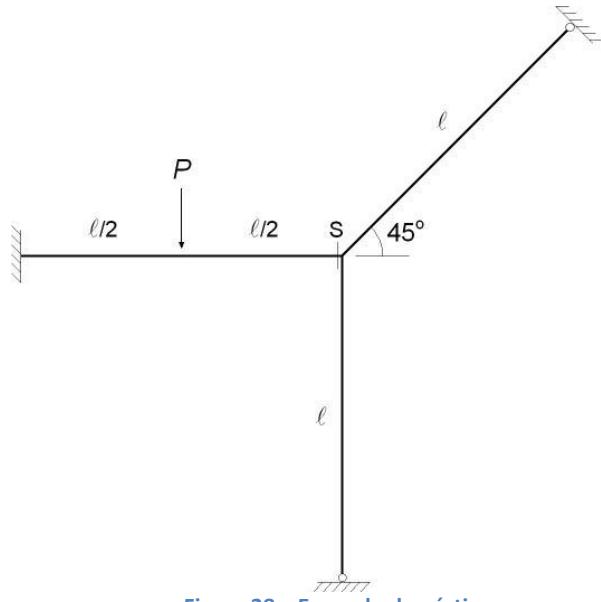


Figura 28 – Exemplo de pórtico

## 4. GRELHAS

Grelhas são estruturas reticuladas contidas em um plano<sup>6</sup>, submetidas a carregamento perpendicular a esse plano. A Figura 29 mostra, por exemplo, uma grelha que se desenvolve no plano horizontal  $xy$  submetida a carregamento vertical (na direção  $z$ ).

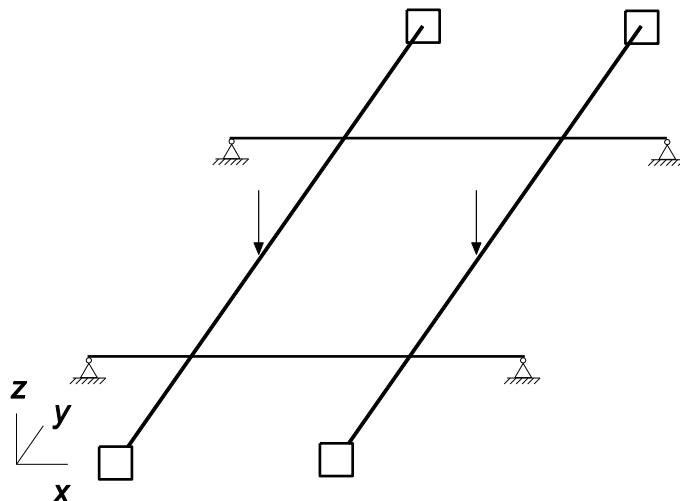


Figura 29 – Exemplo de grelha.

Nas condições da Figura 29, os únicos esforços solicitantes que aparecem na estrutura são aqueles ligados à flexão no plano vertical (momento fletor e força cortante) e momento de torção; os deslocamentos nodais correspondentes são indicados na Figura 30<sup>7</sup>.

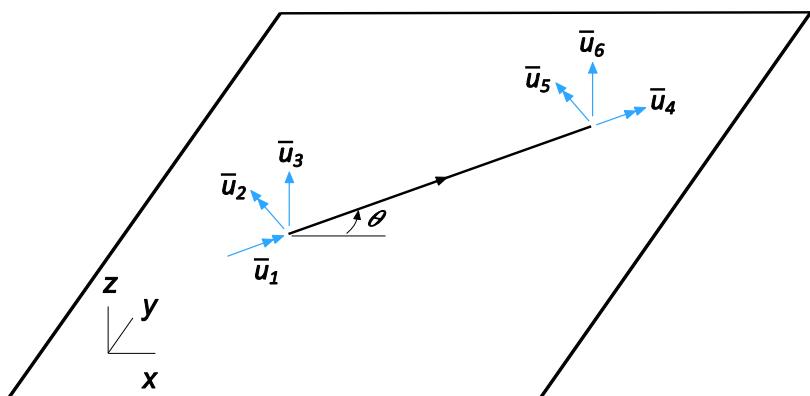


Figura 30 – Deslocamentos nodais da barra de grelha, no sistema local.

<sup>6</sup> Os eixos das barras estão contidos em um mesmo plano.

<sup>7</sup> A numeração se aplica também aos esforços de extremidades. Momentos e rotações são indicados por flechas duplas, respeitando a regra da mão direita.

As relações entre esforços de extremidade e deslocamentos nodais ligados à flexão são análogas às da barra de pórtico, e podem ser extraídas das duas linhas inferiores da Figura 19 (adaptando-se a numeração e os sinais). O efeito da torção é o que representaria a primeira linha da Figura 19 se as flechas simples fossem substituídas por duplas (forças e deslocamentos substituídos por momentos e rotações), e a rigidez axial  $EA/\ell$  fosse substituída pela rigidez à torção  $GI_t/\ell$ . A matriz de rigidez resultante, no sistema local, é

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} GI_t/\ell & 0 & 0 & -GI_t/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/\ell^2 & -6EI/\ell^2 & 0 & 2EI/\ell & 6EI/\ell^2 \\ 0 & -6EI/\ell^2 & 12EI/\ell^3 & 0 & -6EI/\ell^2 & -12EI/\ell^3 \\ -GI_t/\ell & 0 & 0 & GI_t/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 2EI/\ell & -6EI/\ell^2 & 0 & 4EI/\ell & 6EI/\ell^2 \\ 0 & 6EI/\ell^2 & -12EI/\ell^3 & 0 & 6EI/\ell^2 & 12EI/\ell^3 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Adotando-se a numeração dos deslocamentos e esforços da Figura 30, as rotações  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  e os momentos  $\bar{f}_1, \bar{f}_2$  da barra de grelha são convertidas para o sistema global (xyz, na figura) da mesma forma que os deslocamentos e forças de extremidade na barra de treliça (ilustrados na Figura 7) ou pórtico<sup>8</sup>; como  $\bar{u}_3$  e  $\bar{f}_3$  são os mesmos no sistema global, vale a matriz de transformação (24). Na verdade, essa numeração foi escolhida de modo que a adaptação do procedimento de cálculo de pórticos planos para as grelhas seja imediata: basta substituir a matriz de rigidez (23) por (41).

---

<sup>8</sup> Nos dois casos, o ângulo  $\theta$  caracteriza a rotação do sistema local em relação ao global, em torno de z.