第 1.2 节 函数的极限（limits of Functions）

一、内容提要（contents）

极限作为一种在某个变化过程中变量的确定的变化趋势。单侧极限（one-sided limit）。

定理：$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)=L,\ \lim_{x\to a^{+-}} f(x)=L$ 均成立

水平渐近线（horizontal asymptote）：$y=L$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线如果下面极限之一成立：$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ 或 $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$。

铅垂渐近线（Vertical Asymptote）：$x=a$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的铅垂渐近线如果下面极限之一成立：$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$。

二、习题解答（answers）

Exercise 1.2

1. Do the following limits exist? Why?

(1) $\mathrm{x}\to 0, f(x)=\cos\frac{1}{\mathrm{x}}$

Solution： As $\mathrm{x}\to 0$, $\mathrm{u}=\frac{1}{\mathrm{x}}\to\infty$, and $\cos\frac{1}{\mathrm{x}}=\cos\mathrm{u}$ is a periodic wave without end, so there is no definite tendency, so $\lim_{\mathrm{x}\to 0}\cos\frac{1}{\mathrm{x}}=\lim_{\mathrm{u}\to 0}\cos\mathrm{u}$ does not exist.

(2) $\mathrm{x}\to 0, f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\mathrm{x}}}}$

Solution：$\lim_{\mathrm{x}\to 0^+} 2^{\frac{1}{\mathrm{x}}}=\lim_{\mathrm{u}\to+\infty} 2^{\mathrm{u}}=+\infty$

So $\lim_{\mathrm{x}\to 0^+} f(x)=\lim_{\mathrm{x}\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\mathrm{x}}}}=\frac{1}{+\infty}=0$

$$\lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to -\infty} 2^u = 0$$

So $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+0} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$,（the right hand limit is not the same as the left hand limit）, so $\lim_{x\to 0} f(x)$ does not exist

(3) $x \to \infty$, $f(x) = \mathrm{arctanx}$

Solution:

From the graph of $f(x) = \arctan x$, we have $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ and $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

So $\lim_{x\to \infty} \mathrm{arctanx}$ does not exist (because the left hand limit is not equal to the right hand limit)

(4) $x \to 0$, $f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ 2 & x>0 \end{cases}$

Solution:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x+1) = 0+1 = 1$

whereas $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2$

So $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, hence $\lim_{x\to 0} f(x)$ does not exist.

2. Find horizontal and vertical asymptotes for function $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

Solution.

As $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1+0-0}{1-0+0}=1$

So, $y=1$ is a horizontal asymptote.

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x-2)}=\infty$.

So, $x=2$ is a vertical asymptote of $f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x-2)}=\frac{1+2}{1-2}=-3$

So, $x=1$ is not a vertical asymptote of $f(x)$, although as $x\to 1$

The denominator, $x^2-3x+2\to 0$.