第 1.4 节：函数的连续性（Continuity of functions）

一、内容提要（contents）

①函数在一点连续的定义：函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

②函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的三个条件：

（1） 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义，即 $f(x_0)$ 存在；

（2） 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有极限，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在当且仅当左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 分别存在且相等。

（3） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

③函数 $f(x)$ 的间断点（discontinuity）的类型：

第一类间断点（First class discontinuity）：点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，且左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在。

当左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 不等时，点 $x=x_0$ 称为函数 $f(x)$ 跳跃间断点(jump discontinuity)；当左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 相等时，点 $x=x_0$ 称为函数 $f(x)$ 可去间断点（removable discontinuity）。

第二类间断点（Second class discontinuity）点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，且左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在。

若左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 有一个是趋于无穷大的，则点 $x=x_0$ 称为函数 $f(x)$ 无穷间断点(infinite discontinuity)；若左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在但是也不趋于无穷大，则称点 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 震荡间断点(the shock discontinuity)。

④连续函数做四则运算还连续。注意，除法要求分母上的函数值不为零。

⑤反函数的连续性定理（the continuity of inverse function）：一个严格单调的连续函数的反函数还是连续函数。

⑥复合函数的连续性定理（The continuity of a composite function）:如果 $f(x)$ 在 $x=b$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to b} f(x)=f(b)$，而 $g(x)$ 在 $x=a$ 有极限，且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$，则

$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x\to a} g(x))$。

因此，如果 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，且 $f(u)$ 在 $g(a)$ 处连续，则复合函数 $f\circ g(x) = f(g(x))$ 在 $x=a$ 处连续。此定理简单表述为两个连续函数的复合函数还连续。

⑦初等函数的连续性定理（the continuity of elementary functions）:初等函数在其定义区间内每一点均连续。

二、习题解答（answers）

Exercise 1.4

1. Show that $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le \dfrac{\pi}{4}\\ \cos x, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ is continuous on $(-\infty,+\infty)$.

Proof. The fact that $f(x)=\sin x$ is continuous on the interval $(-\infty,\frac{\pi}{4})$, whereas $f(x)=\cos x$ is continuous on the interval $(\frac{\pi}{4},+\infty)$ is based on the continuity of the Basic elementary functions. And

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, So

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = f(\frac{\pi}{4})$, which means that $f(x)$ is continuous at $x=\frac{\pi}{4}$.

In summary, $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le \dfrac{\pi}{4}\\ \cos x, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ is continuous on $(-\infty,+\infty)$.

2. For what value of the constant c, is the function of the following is continuous on $(-\infty,+\infty)$, where $f(x)=\begin{cases}cx+1, & x\le 3\\ cx^2-3, & x>3\end{cases}$.

Solution. It is obvious that $f(x)$ is continuous on $(-\infty,3)$ and $(3,+\infty)$ .We need

Only to make $f(x)$ continue at point $x=3$, that is,

Both $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} cx+1 = 3c+1 = f(3)$ and

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} cx^2-3 = 9c-3 = f(3)$ hold.

By solving the equation $3c+1=9c-3$, we have $c=\frac{2}{3}$.

3. Use continuity to evaluate the limits.

(1). $\lim_{x\to 4}\frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}}=\frac{5+\sqrt{4}}{\sqrt{4+5}}=\frac{7}{3}$, Because $x=4$ lies in the

domain of the given function, and the given function is an elementary function, which is continuous at any point in an interval of the domain.

(2). $\lim_{x\to 1}e^{x^3-x}=e^{1^3-1}=e^0=1$

(3).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\arctan\frac{x^2-4}{3x^2-6x}&=\lim_{x\to 2}\arctan\frac{(x-2)(x+2)}{3x(x-2)}\\&=\lim_{x\to 2}\arctan\frac{(x+2)}{3x}\\&=\arctan\frac{(2+2)}{3\cdot 2}\\&=\arctan\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(4).

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin(x+\sin x)=\sin(\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{2}+1)=\cos 1.$$