第 1.3 节： 利用极限的四则运算法则求极限以及第一个重要极限

一、内容提要

定理（极限的四则运算法则 limit laws）：如果$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则

（1） $\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)=A+B$ （Sum Law）

（2）$\lim[f(x)-g(x)]=\lim f(x)-\lim g(x)=A-B$ （Difference Law）

（3）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$ （Product Law）

（4）$\lim[f(x)/g(x)]=\lim f(x)/\lim g(x)=A/B \quad ,B\neq 0$ （Quotient Law）

（5）$\lim[f(x)]^n=\left[\lim f(x)\right]^n\cdot$ ，n是一个正整数。（Power Law）

（6）$\lim[\sqrt[n]{f(x)}]=\sqrt[n]{\left[\lim f(x)\right]}$ ，n 是一个正整数，如果 n 是偶数，要求 $\lim f(x)=A>0$。（Root Law）

定理（极限的保序性定理—order preserving property）如果 $f(x)\leq g(x)$ 当 $x\to a$，且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\lim\limits_{x\to a}g(x)=B,$ 则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\leq\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$。

夹逼定理（Sandwich Theorem/Squeeze Theorem）：如果在某个变化过程中，有 $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$，且 $\lim f(x)=A,\lim h(x)=A$，则 $\lim g(x)=A$。

第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

二、习题解答

Exercise 1.3

1. Find the following limits.

   (1)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x-1)}(\textit{facterization})$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)}{(x-2)}\quad(\textit{The common factor is cancelled})$$

$$=\frac{1+2}{1-2}\quad(\textit{Direct substitution property})$$

$$=-3$$

(2)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}\quad(\textit{transformation})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4}\quad(\textit{The common factor is cancelled})$$

$$=\frac{1\cdot3}{1\cdot4}\quad(\textit{by the First impor}\tan t\ \lim \textit{it and}\ \lim \textit{it law}\ 5)$$

$$=\frac{3}{4}$$

(3)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(1+x+x^2)(x-1)}{(x-1)}(\textit{facterization})$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2}{1}\quad(\textit{The common factor is cancelled})$$

$$=\frac{1+1+1^2}{1}\quad(\textit{Direct substitution property})$$

$$=3$$

(4)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} \quad (transformation \quad by \quad Difference \quad of \quad two \quad squares)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \quad (because \quad (\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})=2$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{x+2}{x}}+1} \quad (Both\ the\ top\ and\ bottom\ divided\ by\ \sqrt{x})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1} \quad (by \quad Limit \quad laws)$$
$$=1$$

(by using rationalize the numerator, 有理化分子， 和变形， 在利用无穷大量的倒数是趋于零的，及极限的运算法则得到)

（5）

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}-\frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)} \quad (by \quad trignometric \quad induced \quad formular \quad)$$
$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \quad (let \quad t=\pi-x\ )$$
$$=-1 \quad (First\ \mathrm{Im}\,portasnt\ Limit)$$

Just think another example.

Find $\lim_{x\to k\pi}\frac{\sin x}{x-k\pi}$, where k is an integer (k 是一个整数)

（6）

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^7-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x-1)}{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x-1)}(facterization)$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)}{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)} \quad (The \quad common\ factor\ is\, cancelled\ )$$
$$=\frac{1+1+1^2+1^3+1^4+1^5}{1+1+1^2+1^3+1^4+1^5+1^6} \quad (Direct \quad substitution \quad property)$$
$$=\frac{6}{7}$$

Remember a formula for factorization, which is $1-x^n=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$.

In general, we have $\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}$, where m, n are integers.(此处 m,n 为整数)