

# Homework 9

Zhong Yun 2016K8009915009

December 7, 2018

**8.15 Explain what is wrong with the following proposed definition of the set membership predicate  $\in$  :**

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{s} \quad \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \mid \mathbf{s}\}$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{s} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{s} \Rightarrow \forall \mathbf{y} \quad \mathbf{x} \in \{\mathbf{y} \mid \mathbf{s}\}.$$

**Solution** 当 $x$ 是给定集合的元素时，题中所给公式可以很好地定义几集合关系；但是该定义不完备的地方在于，它没有定义当 $x$ 不是集合的元素的情况，也就是说，无法通过以上定义来证明 $x$ 不在集合中。

从公式角度来说，对于 $\forall x, s \quad x \in s \Rightarrow \forall y \quad x \in \{y \mid s\}$ ，当条件 $\forall x, s \quad x \in s$ 为假时，仍可推出 $\forall y \quad x \in \{y \mid s\}$ ，即当 $x \notin s$ 时， $x$ 可以属于任意集合，这与我们对 $\in$ 的定义矛盾。

**8.20 Arithmetic assertions can be written in first-order-logic with the predicate symbol  $i$ , the function symbol  $+$  and  $\times$ , and the constant symbols 0 and 1. Additional predicates can also be defined with biconditionals.**

**a. Represent the property "x is an even number."**

**Solution** 用谓词EVEN来表示 "x is an even number"，则 $EVEN(x) = \exists y \quad (x = y + y)$ 。

**b. Represent the property "x is prime."**

**Solution** 用谓词PRIME来表示 "x is prime"，则 $PRIME(x) = \neg \exists y, z \quad ((x = y \times z) \wedge (x > 1) \wedge (y > 1) \wedge (z > 1))$ 。

**c. Goldbach's conjecture is the conjecture(unproven as yet)that every number is equal to the sum of two primes. Represent this conjecture as a logical sentence.**

**Solution** 此处使用(b)中的谓词PRIME，则Goldbach's conjecture的表示为：

$$\forall x \exists y, z \quad (x = y + z) \wedge PRIME(y) \wedge PRIME(z)$$